A Quick (.1 seconds!) Proof of Gigoujeu's Two-Circle Theorem

Shalosh B. EKHAD

À la mémoire de Michel Jérôme Dufrénoy

In 1960, Francois Némorin Gigoujeu famously won the *grand prix* (a library of 3000 volumes!) in the *concours* organized by the *Société Générale de Crédit Instructionnel* (see [1]), by solving the following challenging *question*.

"*On donne deux circonférences OO': d'un point A pris sur O, on mène des tangentes à O'; on joint les points de contact de ces tangentes: on mène la tangente en A à la circonférence O; on demande le lieu du point d'intersection de cette tangente avec la corde des contacts dans la circonférence O'*"

By rescaling and rotating, we can let O' be $x^2+y^2=1$ and O be $(x-a)^2+y^2=r^2$.
Running the Maple code (by D. Zeilberger), available from `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/fng`, I immediately confirmed Gigoujeu's theorem that states that the desired locus is

$$a^2x^4+2a(r^2-a^2-1)x^3+\left(a^2y^2+a^4+4\,a^2-2\,a^2r^2+(r^2-1)^2\right)x^2+2a\,\left((r^2-1)y^2+r^2-a^2-1\right)x$$

$$+\left((r^2-1)^2-a^2r^2\right)y^2+a^2\;=\;0 \quad . \quad \square$$

See a diagram here: `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/PG/Gigoujeu.html` .

Reference

1. Jules Verne, "*Paris au XX^e siècle*", Hachette, 1994 .