El diablo de los números

Sección a cargo de

Fernando Chamizo Lorente

Despedida. *Después de varios años coordinando esta sección voy a ceder gustosamente el testigo a otra persona. Siguiendo las directrices de los talleres de escritura que recomiendan cerrar el círculo, retornaré indirectamente al primer artículo que coordiné, en el cual participó la Z del título. Agradezco sinceramente la atención que han prestado a esta sección los lectores y los directores de* La Gaceta *en el periodo en el que la he coordinado. También me gustaría destacar la fundamental labor de los autores, que a fin de cuentas son los que han creado el material para la sección.*

Sumando de la W a la Z

por

Fernando Chamizo

1. Introducción

Los pares WZ fundamentan un método para probar identidades de tipo hipergeométrico. Por ser más concreto y además comprensible, como sugiere el título de [10], sirven para calcular sumas del tipo de las que con cierta frecuencia aparecen en la sección de problemas del *American Mathematical Monthly* (y también de nuestra querida Gaceta). Lo más espectacular es que es un método asistido por ordenador en un sentido muy diferente al que casi todos sospecharíamos. Lo que nos da el ordenador es el truco para que sepamos hacer la prueba y ese truco puede ser bellísimo. Seguro que resulta perturbador para los que piensen que las máquinas de silicio que conviven con nosotros «solo» saben hacer cálculos a toda velocidad.

Si una vez que has terminado (o no) de leer este artículo quieres aprender de verdad sobre la prueba automática de identidades, [12] es el libro. Además de ser muy informativo, está escrito para todos los públicos matemáticos y con un estilo que te hará sonreír más de una vez, mientras que en otras ocasiones algunas opiniones te resultarán controvertidas. Por dar un par de ejemplos, en una nota de [12, § 6.5] vemos la definición «A *method* is a trick that has worked at least twice» y en el capítulo introductorio se presenta como una prueba de $\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4$ que se cumple para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ¡y se explica por qué es rigurosa añadiendo una línea más para que sea «more readable»!

Para ilustrar el párrafo inicial, veamos con un ejemplo sencillo qué es eso de hacer una prueba a través de un truco. Todos sabemos, faltaría más, que

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

También, a no ser que un tierno vástago curioso haya robado a sus padres este número de La Gaceta, todos los lectores saben que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Menos lectores sabrán completar de memoria los puntos suspensivos en

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \cdots ,$$

y muy pocos lo análogo cambiando k^2 por k^3 o k^4. Ciertamente, memorizar tales fórmulas no tiene demasiado interés y lo que realmente caracteriza a un matemático es el prurito que le impulsa a dar una prueba y la habilidad para conseguirla. Todos sabemos desde primero de grado que una vez que tengamos los puntos suspensivos tendremos una prueba por inducción. Si nos imponemos forzada economía de palabras como en los telegramas de antaño y el *twitter* de hoy, para que alguien con destreza matemática invente los puntos suspensivos y a la vez la prueba es suficiente decirle el truco «suma $(k+1)^3 - k^3$». Expandiendo el cubo se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^3 - k^3\big) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

La primera suma es telescópica (¿o habría que decir «cataléjica»?) y entonces hemos probado

$$S_2 = \frac{1}{3}\big((n+1)^3 - 1^3 - 3S_1 - S_0\big) \qquad \text{con} \quad S_j = \sum_{k=1}^{n} k^j. \tag{1}$$

Operando, tenemos el $n(n+1)(2n+1)/6$ que muchos sabrán de memoria. El truco es un método porque se generaliza a potencias mayores de la manera obvia y relaciona un S_j con los anteriores (véanse [2] y [5] para otras relaciones más restrictivas). Si quisiéramos hacer el truco más misterioso pero más terminante, teniendo en cuenta que $2S_1 = \sum_{k=1}^n \big((k+1)^2 - k^2\big) - S_0$ y $S_0 = \sum_{k=1}^n \big((k+1) - k\big)$, sustituyendo en (1) podríamos escribir S_2 en forma telescópica y, motivados por ello, usar la función

$$T(k) = \frac{(k+1)^3 - k^3}{3} - \frac{(k+1)^2 - k^2}{2} + \frac{1}{6}$$

donde la T es de truco. Un cálculo rutinario muestra que $T(k) = k^2$, y la manera telescópica no simplificada en que está escrita implica, automáticamente,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{(n+1)^2 - 1}{2} + \frac{n}{6}.$$

Lo que nos gustaría es sistematizar y automatizar la creación de sumas telescópicas.

2. Pares WZ y certificados

La referencia [16] es el único ejemplo que conozco de un artículo publicado en una revista de primer nivel de investigación en matemáticas cuyo teorema principal es un sencillo ejercicio. Seguiré con bastante fidelidad el enunciado incluso en su notación para que el lector juzgue.

Se parte de dos funciones F y G definidas en $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{2}$$

y se proponen las «condiciones de contorno»

$$\begin{aligned} &\text{(F1)} \quad \exists f_k = \lim_{n\to\infty} F(n,k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ &\text{(G1)} \quad \lim_{k\to\pm\infty} G(n,k) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ &\text{(G2)} \quad \lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G(n,-L) = 0. \end{aligned}$$

El enunciado completo del resultado principal de [16] es:

Teorema (Wilf-Zeilberger). *Sean F y G verificando* (2). *Si se cumple* (G1) *entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) \quad \textit{es constante.}$$

Además, si se cumplen (F1) *y* (G2) *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} \big(f_j - F(0,j)\big).$$

Para la prueba observemos que la relación (2) da

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} F(n+1,k) - \sum_{k=K_1}^{K_2} F(n,k) = G(n,K_2+1) - G(n,K_1).$$

Tomando $K_2 = -K_1 \to +\infty$ y usando (G1) se deduce la primera parte del teorema. Un razonamiento totalmente análogo muestra

$$\sum_{n=0}^{N} G(n,j+1) - \sum_{n=0}^{N} G(n,j) = F(N+1,j) - F(0,j), \tag{3}$$

y tomando $N \to +\infty$ y sumando en j se obtiene la segunda parte.

En el enunciado original, además, se aclara que la constante se puede obtener particularizando en $n = 0$, lo cual no parece demasiado informativo. La gracia de esta observación y la del propio teorema se puede apreciar en los ejemplos de [16]. Antes de ver uno de ellos, introduzcamos un poco de terminología.

Si F y G cumplen (2) se dice que (F, G) es un *par WZ*. En el artículo citado de Wilf y Zeilberger se aclara «named after two complex variables». Al cociente G/F se le denota con R y se dice que es el *certificado*. El segundo ejemplo de [16] corresponde a

$$F(n,k) = \binom{2n}{n}^{-1}\binom{n}{k}^2 \qquad \text{y} \qquad R(n,k) = \frac{k^2(2k-3n-3)}{2(n+1-k)^2(2n+1)}. \tag{4}$$

Es un cálculo tedioso pero trivial comprobar que (F, G) es un par WZ con $G = RF$. Utilizando la extensión habitual de los números combinatorios (diciendo que son cero en los casos que no aparecen en secundaria) las condiciones (G1) y (G2) son inmediatas y es fácil ver que (F1) se cumple con $f_k = 0$. La primera parte del teorema afirma que $\sum_k F(n,k)$ es constante. Ahora bien, esta suma es, en realidad, finita, y para $n = 0$ el único sumando no nulo es $F(0,0) = 1$. Con esto se concluye

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{5}$$

una identidad bien conocida. La segunda parte del teorema, sustituyendo $f_k = 0$, nos dice que $\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = -\sum_{j=-\infty}^{k-1} F(0,j)$. El único posible sumando no nulo de esta última suma es, de nuevo, $F(0,0) = 1$, por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = -1$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Cambiando k por $k+1$ y simplificando un poco, lo que obtenemos es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2k+1}{2n+1}\binom{n}{k}^2\binom{2n}{n}^{-1} = 2 \qquad \text{para cualquier} \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{6}$$

En principio, (5) y (6) no tienen mucho que ver, la primera es una suma finita y la segunda es infinita. La primera admite una interpretación combinatoria elegante que permite probarla elaborando la siguiente idea: para hacer equipos de n personas cuando hay $2n$ disponibles, podemos escoger k de los n primeros y decir los k que no escogemos del resto; mientras, (6) parece mucho más difícil y es dudoso que tenga una interpretación sencilla. Sin embargo, ambas identidades son compañeras a través del teorema.

Olvidémonos por un momento de que hay una prueba combinatoria sencilla de (5). A la luz del teorema, lo lógico sería escoger F como antes (ya que el teorema habla de sumas constantes). Si el ordenador actuase como un oráculo al que le preguntamos F y nos da R entonces tendremos una prueba de la identidad con solo que se cumpla para un valor de n. De esta forma, R es realmente un «certificado» de que lo que queremos probar es cierto porque existe un par (F, G) que lo respalda. En otras palabras, R es el «truco» que nos da el ordenador para poder hacer la prueba. Si nos restringimos a sumandos que son *propiamente hipergeométricos* (véase la definición en [14]) se puede ir más allá y no solo probar una identidad sino deducir el segundo miembro ([14], [11], [12, Ch. 8]).

A pesar de los tintes triunfantes que han rodeado al ejemplo, queda la duda de hasta qué punto es singular y, sobre todo, si en la práctica esto es un gigante con pies de barro porque no haya forma razonable de hallar R. Respecto a lo primero, basta echar un vistazo a [16] y a [12] para comprobar que verdaderamente hay bastantes ejemplos notables. Lo segundo requiere seguir leyendo.

3. El algoritmo de Gosper de mentira

De acuerdo, si el ordenador me da un certificado, ya tengo la prueba de la identidad y me despreocupo, ¿o no? Siendo matemático, me debo preocupar tanto si el ordenador me da el resultado como si no, en el primer caso porque querré saber cómo ha hecho la magia y en el segundo porque tendré que hacerla yo.

Si me dan F, mirando (2) con ojos de analista discreto, para hallar G tengo que integrar, recuperar una función a través de la derivada que es su incremento en k. De los cursos de cálculo sabemos que eso de la integración en términos elementales no es siempre posible y algo paralelo ocurre aquí. Es un problema muy difícil. Eso no quita que la gente de mi edad tuviéramos que aprender bastantes tipos de integrales que sí se podían hacer, como las raíces cuadradas de polinomios de segundo grado. En la actualidad ya no hay que apurar tanto porque los ordenadores e internet (bendito Wolfram Alpha®) nos libran de muchos cálculos rutinarios. No obstante, siempre será necesario que un estudiante universitario de Matemáticas sepa un mínimo de métodos de integración en términos elementales, lo mismo que los colegiales cantarán siempre la tabla de multiplicar.

Dada una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, el algoritmo de Gosper busca una «integral discreta», esto es, otra sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$z_{n+1} - z_n = t_n, \tag{7}$$

pero como este problema es demasiado difícil, se restringe a la clase de sucesiones con z_n y t_n *términos hipergeométricos*; esto significa que z_{n+1}/z_n y t_{n+1}/t_n son funciones racionales de n. La potencia del algoritmo en este caso es total: si hay una solución, la halla, y si no hay solución, lo detecta. En esta sección veremos, sin embargo, una versión defectuosa que solo funciona en un sentido, para entender la idea. Por hipótesis,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{con } a_n \text{ y } b_n \text{ polinomios en } n. \tag{8}$$

Supongamos que existe un polinomio x_n en n que resuelve la ecuación lineal

$$a_n x_{n+1} - b_{n-1} x_n = 1. \tag{9}$$

Entonces, es fácil comprobar que $z_n = b_{n-1} x_n t_n$ es una solución de (7); y es fácil de verdad de la buena:

$$z_{n+1} - z_n = b_n x_{n+1} t_{n+1} - b_{n-1} x_n t_n = \big(x_{n+1} a_n - b_{n-1} x_n\big) t_n = t_n.$$

¿Qué tiene de defectuoso este método? Imponer que x_n sea un polinomio es lo que permite que sepamos resolver (9) algorítmicamente como veremos después (por cierto, los problemas abiertos de ecuaciones polinómicas ya empiezan en el caso cuadrático [4]), pero bajo esta hipótesis tan fuerte no está nada claro que la existencia de z_n sea equivalente a la de x_n. De hecho, es falso.

Con una actitud positiva, veamos un ejemplo en vez de un contraejemplo. Nos planteamos calcular una fórmula sencilla (dada salvo una constante por un término hipergeométrico) para

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k!)^2}{(1+1^2)(1+2^2)\cdots(1+(k+1)^2)}.$$

¡Un buen reto para los alumnos de grado! Seguro que algunos de ellos darían con la solución sin haber leído nada de lo anterior, pero nosotros ya nos hemos hecho mayores y nos gustan más las teorías que las ideas felices, por lo que seguimos el algoritmo. Si llamamos t_k a cada sumando, se tiene (8) con

$$a_n = (n+1)^2 \qquad \text{y} \qquad b_n = 1 + (n+2)^2.$$

La ecuación (9) es, entonces,

$$(n+1)^2 x_{n+1} - \big(1 + (n+1)^2\big) x_n = 1,$$

que tiene la solución trivial $x_n = -1$. Con ello, la solución de (7) viene dada por

$$z_n = b_{n-1} x_n t_n = -\frac{(n!)^2}{(1+1^2)(1+2^2)\cdots(1+n^2)} \qquad \text{y} \qquad z_0 = b_{-1} x_0 t_0 = -1.$$

Esto permite calcular la suma de partida:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = z_n - z_0 = 1 - (1+1^{-2})^{-1}(1+2^{-2})^{-1}\cdots(1+n^{-2})^{-1}.$$

Para lucirnos, recordemos la bien conocida factorización del seno como función entera, $\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - n^{-2} z^2)$. Tomando $z = i$, de lo anterior se deduce

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(1+1^2)(1+2^2)\cdots(1+(k+1)^2)} = \frac{e^{2\pi} - 2\pi e^{\pi} - 1}{e^{2\pi} - 1},$$

que impresiona a cualquiera.

4. El algoritmo de Gosper de verdad

Repasemos la situación. Los cálculos de la sección anterior muestran que siempre que x_n satisfaga (9) se tiene que $z_n = b_{n-1} x_n t_n$ resuelve (7). El problema está en que para z_n término hipergeométrico, en general, x_n no será un polinomio y eso es malo porque, sin esta hipótesis, es difícil saber bajo qué condiciones (9) tiene solución y cómo hallarla.

Lo que hizo Gosper en [7] motivado por el desarrollo de Macsyma (uno de los paquetes matemáticos para cálculo simbólico con ordenador más antiguos) fue considerar una variante de (8). Escribió, en su lugar,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{a_n c_{n+1}}{b_n c_n} \quad \text{con } a_n,\ b_n,\ c_n \text{ polinomios y } \operatorname{mcd}(a_x, b_{x+m}) = 1 \text{ para } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{10}$$

donde x es una variable. Ciertamente, la condición es un poco rara. En el ejemplo de la sección anterior tendríamos $a_x = (x+1)^2$ y $b_{x+m} = 1+(x+m)^2$; está claro que estos polinomios no tienen factores comunes por lo que podemos tomar c_n constantemente uno. Esto es lo que ha permitido que el algoritmo defectuoso funcione.

Para c_n general, si existe una solución polinómica x_n de

$$a_n x_{n+1} - b_{n-1} x_n = c_n \tag{11}$$

entonces

$$z_n = \frac{b_{n-1} x_n}{c_n} t_n \qquad \text{satisface} \quad z_{n+1} - z_n = t_n \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{n-1} t_k = z_n - z_0. \tag{12}$$

La prueba es tan sencilla como antes:

$$z_{n+1} - z_n = \frac{b_n x_{n+1}}{c_{n+1}} t_{n+1} - \frac{b_{n-1} x_n}{c_n} t_n = \frac{t_n}{c_n}\big(a_n x_{n+1} - b_{n-1} x_n\big) = t_n.$$

El corazón del algoritmo de Gosper es el único teorema que se enuncia en [7] (aquí utilizamos la notación de [12]).

Teorema (Gosper). *Si z_n es un término hipergeométrico, entonces x_n es un polinomio.*

Dicho de otra forma, si no hay solución polinómica de (11) podremos asegurar que no hay solución de $z_{n+1} - z_n = t_n$ con z_n término hipergeométrico.

La demostración del teorema es ingeniosa pero elemental. Para empezar, siempre hay al menos una solución racional porque $x_n = \frac{c_n z_n}{(z_{n+1} - z_n) b_{n-1}}$ verifica (11). Lo que hay que probar es que si $x_n = A_n / B_n$ es una fracción algebraica irreducible, B_n es una constante. Para ello sustituimos en (11) obteniendo la identidad de polinomios

$$a_n A_{n+1} B_n - b_{n-1} A_n B_{n+1} = c_n B_n B_{n+1}.$$

Un factor irreducible no constante F_n de B_n cumple $F_n \mid b_{n-1} A_n B_{n+1}$; de la misma forma, $F_{n+1} \mid a_n A_{n+1} B_n$. Supongamos que B_n y B_{n+1} son polinomios coprimos, entonces la única posibilidad sería $F_n \mid b_{n-1}$ y $F_{n+1} \mid a_n$ que contradice $\operatorname{mcd}(a_x, b_x) = 1$.

Si B_n y B_{n+1} no son coprimos, lo cierto es que B_n y B_{n+m+1} lo serán para algún m (simplemente yendo más allá de la última raíz), mientras que B_n y B_{n+m}

tienen un factor común F_n (en el caso anterior $m = 0$). El razonamiento del párrafo anterior da, en esta situación, $F_{n-m} \mid b_{n-1}$ y $F_{n+1} \mid a_n$, que contradice esta vez $\operatorname{mcd}(a_x, b_{x+m}) = 1$.

Para que el algoritmo sea digno de tal nombre hay dos puntos que clarificar. El primero justificar que, para cualquier término hipergeométrico t_n, es posible hallar a_n, b_n y c_n como en (10) de manera constructiva. El segundo, diseñar un método para saber si (11) tiene solución polinómica x_n y, en caso positivo, calcularla. Ambos puntos son más simples de lo que parece a simple vista.

Si, como en el algoritmo de mentira, escribimos $t_n = a_n/b_n$, nos arriesgamos a que no se cumpla la condición del máximo común divisor que ha sido necesaria para probar el teorema de Gosper. En caso de que, por ejemplo, $\operatorname{mcd}(a_x, b_{x+m}) = f_x$, podemos escribir

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{a'_n c'_{n+1}}{b'_n c'_n} \qquad \text{con} \quad a'_n = \frac{a_n}{f_n}, \quad b'_n = \frac{b_n}{f_{n-m}}, \quad c'_n = f_{n-1} f_{n-2} \cdots f_{n-m}.$$

Con ello, a'_x y b'_{x+m} pasan a ser coprimos. Repitiendo el proceso tantas veces como factores debamos eliminar, se llega a (10).

Respecto a resolver (11), llamemos d_a, d_b y d_c a los grados de a_n, b_n y c_n. Si $d_a > d_b$ está claro que el grado de x_n es $d_c - d_a$; algo similar ocurre si $d_a < d_b$ e, incluso, si $d_a = d_b$ cuando los coeficientes principales de a_n y b_n son distintos. El único caso que se escapa de este análisis es en el que los coeficientes principales y los grados coinciden. En ese caso pensamos en los términos de orden siguiente en (11):

$$\big(\lambda n^{d_a} + A n^{d_a - 1} + \cdots\big) x_{n+1} - \big(\lambda n^{d_a} + B n^{d_a - 1} + \cdots\big) x_n = c_n.$$

Si los términos con $n^{d_a - 1}$ no se cancelan tras operar, o no existen tales términos porque $d_a = 0$, el grado tiene que ser $d_c - d_a + 1$. Si se cancelasen, como $x_n = D n^d + \cdots$ implica $x_{n+1} - x_n = D d n^d + \cdots$, la única posibilidad sería $d = (B - A)/\lambda$.

Por supuesto, en la discusión anterior se descartan los casos en los que el posible grado no sea un entero no negativo. Si d es un grado válido, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, escribimos $x_n = \lambda_d n^d + \lambda_{d-1} n^{d-1} + \cdots + \lambda_0$ donde λ_j son incógnitas. De este modo (11) se traduce en un sistema lineal en los λ_j y desde que existen exámenes de Selectividad (o EBAU, o…), todos sabemos resolver algorítmicamente un sistema o probar que no tiene solución.

Veamos cómo funciona todo esto en el ejemplo inicial

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Se tiene que t_{n+1}/t_n es de la forma (10) con $a_n = b_n = 1$, $c_n = n^2$. La ecuación (11) es

$$x_{n+1} - x_n = n^2,$$

coherente con que $z_n = x_n$. Nuestra discusión sobre los grados nos dice que el de x_n es necesariamente tres (grados y términos principales de a_n y b_n iguales y sin términos secundarios). Escribiendo $x_n = \lambda_3 n^3 + \lambda_2 n^2 + \lambda_2 n + \lambda_0$ se obtiene el sistema

$$3\lambda_3 = 1, \quad 3\lambda_3 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0,$$

cuya solución es $\lambda_1 = 1/6$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = 1/3$ y λ_0 arbitrario. Con ello se deduce

$$\begin{aligned} S_2 = z_{n+1} - z_0 = x_{n+1} - x_0 &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Otro ejemplo muy sencillo y, además, con cálculos prácticamente inmediatos es

$$\sum_{k=0}^{n-1} kk! \qquad \text{que tiene } a_n = n+1,\ b_n = 1 \text{ y } c_n = n.$$

La solución de (11) es $x_n = 1$ y (12) muestra que la suma es $n! - 1$.

Finalmente, si considerásemos $S_{-2} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-2}$, el algoritmo nos daría que no hay ninguna fórmula del tipo requerido (lo que era de esperar porque, si no, aparecería recuadrada en los textos). Todo se reduce a comprobar que (11) es $n^2 x_{n+1} - n^2 x_n = 1$, que claramente no tiene solución polinómica.

5. Volviendo a W y Z

Ahora ya estamos en condiciones de entender cómo el ordenador puede darnos un certificado asociado a algunas identidades. Es decir, cómo puede construir a partir de una F una G tal que (F, G) sea un par WZ. En este punto todo se reduce a olvidarnos de la primera variable de F, suponerla un parámetro y considerar $t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$. Cuando el algoritmo de Gosper funcione, obtendremos un z_k, dependiendo en general del parámetro n, tal que $z_{k+1} - z_k = t_k$ y, recordando (2), tendremos que $G(n,k)$ es, justamente, z_k.

Quizá el ejemplo más trivial con algún interés sea

$$F(n,k) = 2^{-n}\binom{n}{k}, \qquad \text{que da lugar a} \quad t_k = 2^{-n-1}\binom{n+1}{k} - 2^{-n}\binom{n}{k}.$$

Sin el algoritmo de Gosper ni nada, solo con la propiedad característica de los números combinatorios,

$$t_k = 2^{-n-1}\binom{n}{k} + 2^{-n-1}\binom{n}{k-1} - 2^{-n}\binom{n}{k} = 2^{-n-1}\binom{n}{k-1} - 2^{-n-1}\binom{n}{k},$$

y se deduce

$$G(n,k) = -2^{-n-1}\binom{n}{k-1} \qquad \text{y} \qquad R(n,k) = \frac{k}{2(k-n-1)}.$$

Fantaseemos con la siguiente situación: acabamos de probar la identidad $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ en clase desarrollando $(1+1)^n$ y un alumno dice que tiene una demostración más elemental que no necesita el binomio de Newton. Ya estamos esperando la conocida interpretación combinatoria cuando nos sorprende con

$$\sum_k \binom{n+1}{k} = 2\sum_k \binom{n}{k} - \sum_k \binom{n}{k} + \sum_k \binom{n}{k-1} = 2\sum_k \binom{n}{k}$$

y entonces basta iterar a partir del caso $n = 0$ (inducción). Esta prueba es la que da el par WZ anterior cancelando los denominadores y, entonces, nuestro hipotético alumno con su elegante demostración podría ser una máquina. La contrapartida sumando la G es $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\binom{n}{k-1} = 2$ para $k \in \mathbb{Z}^+$ que, sin ser nada del otro mundo, tiene un aspecto mucho más complicado.

Vamos a continuación a ilustrar lo visto hasta ahora con el ejemplo no trivial (4), eso sí, dejando claro a los más entregados que buscar pares WZ sin un ordenador es, en general, masoquista.

En primer lugar calculamos el t_k con que alimentar el algoritmo de Gosper:

$$t_k = F(n+1,k) - F(n,k) = \Big(\frac{(n+1)^3}{2(2n+1)(n+1-k)^2} - 1\Big)F(n,k).$$

Para referencia posterior, llamaremos f_k al numerador del paréntesis, es decir, $f_k = (n+1)^3 - 2(2n+1)(n+1-k)^2$. Como F está lleno de factoriales, hay una simplificación masiva en el cociente de términos consecutivos:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k-n-1)^2 f_{k+1}}{(k+1)^2 f_k}.$$

Comparando con (10) se tiene (nótese que el papel de n y k está intercambiado)

$$a_k = (k-n-1)^2, \qquad b_k = (k+1)^2 \qquad \text{y} \qquad c_k = f_k.$$

El paso siguiente es resolver la ecuación

$$(k-n-1)^2 x_{k+1} - k^2 x_k = (n+1)^3 - 2(2n+1)(n+1-k)^2.$$

Los coeficientes principales de $(k-n-1)^2$ y k^2 son iguales y el segundo miembro tiene términos de grado dos, entonces nuestra discusión sobre los grados solo permite la posibilidad de que x_k sea de grado uno. Escribamos $x_k = \lambda_1 k + \lambda_0$ e igualemos los coeficientes considerando n como un parámetro. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{cases} -(2n+1)\lambda_1 = -2(2n+1) & \text{(coef. de } k^2\text{)},\\ (n^2-1)\lambda_1 - 2(n+1)\lambda_0 = 4(2n+1)(n+1) & \text{(coef. de } k\text{)},\\ (n+1)^2(\lambda_1+\lambda_0) = -(3n+1)(n+1)^2 & \text{(coef. de 1)}. \end{cases}$$

Simplificando respectivamente por $2n+1$, $n+1$ y $(n+1)^2$, a simple vista se obtiene que es compatible determinado con solución $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_0 = -3n-3$.

Así pues, el algoritmo de Gosper produce

$$z_k = \frac{b_{k-1}x_k}{c_k} t_k = \frac{k^2(2k-3n-3)}{f_k} \cdot \frac{f_k}{2(2n+1)(n+1-k^2)} F(n,k).$$

Esta es la G que corresponde a F y simplificando f_k se sigue el certificado de (4).

6. Una fórmula de Ramanujan y una prueba de Guillera

Como fin de fiesta veremos cómo obtener una profunda identidad de Ramanujan a través de un par WZ y algo de variable compleja. La prueba proviene de un trabajo de Jesús Guillera [8], uno de los grandes expertos en la evaluación de series, sobre todo en relación a nuestro adorado número π.

Partimos del par WZ, producido con el ordenador,

$$F(n,k) = \frac{64n^2}{4n-2k-1}A(n,k) \qquad \text{y} \qquad G(n,k) = (20n+2k+3)A(n,k)$$

donde

$$A(n,k) = \frac{(-1)^n \binom{2k}{k}^2 \binom{4n-2k}{2n-k} \binom{2n}{n}^2}{2^{2k+10n} \binom{k+n}{n} \binom{2n}{k}} \cos(\pi k).$$

Quizá un lector que no se deje amedrentar por las fórmulas habrá notado una cosa un poco singular y es la forma del término final $\cos(\pi k)$. ¿Para qué introducir una función trascendente en contra de lo hecho hasta ahora, cuando podríamos escribir simplemente $(-1)^k$? Enseguida lo veremos.

La relación (3), teniendo en cuenta $F(0,j) = 0$ y $F(+\infty, j) = 0$ (por cotas conocidas para los números combinatorios), implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k+1). \tag{13}$$

Es decir, la suma no depende de k. Ahora hagamos una locura o genialidad (parece que tiene su origen en [6], uno de cuyos autores no es humano), llamemos $S(z)$ al resultado de la primera serie al cambiar k por z, un número no necesariamente entero, incluso podría ser complejo. ¿Tiene esto sentido? La forma extraña de escribir $(-1)^k$ con un coseno no da problemas con los argumentos, por otro lado los números combinatorios se construyen con factoriales y la función Γ permite extender los factoriales al plano complejo ya que $k! = \Gamma(k+1)$. Resulta que los polos del producto de números combinatorios aparecen en valores semienteros de z, y los positivos son cancelados por el factor $\cos(\pi z)$; esta es la verdadera utilidad del coseno. Sin entrar en detalles, con ello se puede probar que $S(z)$ es una función analítica en el semiplano derecho, continua en su cierre, y, además, las propiedades de la función Γ muestran que se cumple $|S(z)| \le c_1 e^{c_2|z|}$ para ciertas constantes c_1 y c_2. De hecho se puede tomar $c_2 < \pi$ si nos restringimos a los imaginarios puros. En esas condiciones, un conocido teorema de variable compleja debido a Carlson [15, § 5.8] afirma que si $S(z)$ es constante para $z \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, entonces es constante para todo z.

Lo que sacamos de esta incursión en los números complejos es que (13) se generaliza a

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,z_0) \qquad \text{para cualquier } z_0 \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}(z_0) > 0. \tag{14}$$

Eligiendo $z_0 = 1/2$ el factor $\cos(\pi z_0) = 0$ implica $G(n, z_0) = 0$ para $n \geq 1$; pero con $n = 0$ hay que tener cuidado porque uno de los números combinatorios da infinito y entonces la evaluación en z_0 solo tiene sentido como límite. Con detalle, $A(0, z)$ es

$$\frac{1}{2^{2z}}\binom{2z}{z}^2\binom{-2z}{-z}\binom{0}{z}^{-1}\cos(\pi z) = \frac{\Gamma^2(1+2z)\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)}{2^{2z}\Gamma^4(1+z)\Gamma^2(1+z)}\Gamma(1-2z)\cos(\pi z),$$

y utilizando $2\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y que $\Gamma(1-2z)\cos(\pi z) \to \pi/2$ cuando $z \to 1/2$ (simplemente porque $s\Gamma(s) \to 1$ cuando $s \to 0$) se obtiene

$$\lim_{z\to 1/2} G(0, z) = 4 \lim_{z\to 1/2} A(0, z) = \frac{8}{\pi}.$$

La conclusión es que si en (14) escogemos $k = 0$ y $z_0 \to 1/2$, se deduce la bella serie

$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{20n+3}{2^{10n}}\binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}^2,$$

que es la fórmula [13, (35)] obtenida por Ramanujan. El error cometido al usar N términos de la serie es menor que $3 \cdot 4^{-N}/\sqrt{N}$.

Es importante notar el contraste de las técnicas empleadas por Ramanujan y las de Guillera, pues en [13] se necesita la teoría clásica de funciones elípticas [1], la ecuación modular [3] y confiar en que unos cálculos estratosféricos que se mencionan sin explicación son correctos. La demostración de Guillera que acabamos de ver es elemental salvo en la aplicación del teorema de Carlson y propiedades básicas de la función Γ, lo cual es asequible para cualquiera que haya seguido un segundo curso de variable compleja. Comprobar que verdaderamente (F, G) es un par WZ es algo que deja de dar pereza en cuanto uno tiene un ordenador delante.

Agradecimientos. Quiero agradecer a E. Valenti las conversaciones que hemos mantenido y su inmerecida paciencia.

Referencias

[1] J. V. Armitage y W. F. Eberlein, *Elliptic functions*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] A. F. Beardon, Sums of powers of integers, *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 201–213.

[3] F. Chamizo y D. Raboso, Formas modulares y números casi enteros, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **13** (2010), 539–555.

[4] A. Dubickas y J. Steuding, The polynomial Pell equation, *Elem. Math.* **59** (2004), 133–143.

[5] A. W. F. Edwards, A quick route to sums of powers, *Amer. Math. Monthly* **93** (1986), 451–455.

[6] S. B. EKHADY Y D. ZEILBERGER, A WZ proof of Ramanujan's formula for π, *Geometry, analysis and mechanics*, 107–108, World Sci. Publ., River Edge, New Jersey, 1994.

[7] R. W. GOSPER, JR., Decision procedure for indefinite hypergeometric summation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **75** (1978), 40–42.

[8] J. GUILLERA, Some binomial series obtained by the WZ-method, *Adv. in Appl. Math.* **29** (2002), 599–603.

[9] J. GUILLERA, On WZ-pairs which prove Ramanujan series, *Ramanujan J.* **22** (2010), 249–259.

[10] I. NEMES, M. PETKOVŠEK, H. S. WILF Y D. ZEILBERGER, How to do Monthly problems with your computer, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 505–519.

[11] M. PETKOVŠEK, A generalization of Gosper's algorithm, *Discrete Math.* **134** (1994), 125–131.

[12] M. PETKOVŠEK, H. S. WILF Y D. ZEILBERGER, $A = B$, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

[13] S. RAMANUJAN, Modular equations and approximations to π [*Quart. J. Math.* **45** (1914), 350–372], *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, 23–39, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[14] A. TEFERA, What is... a Wilf-Zeilberger pair?, *Notices Amer. Math. Soc.* **57** (2010), 508–509.

[15] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.

[16] H. S. WILF Y D. ZEILBERGER, Rational functions certify combinatorial identities, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 147–158.

FERNANDO CHAMIZO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID E ICMAT, 28049 MADRID

Correo electrónico: `fernando.chamizo@uam.es`

Página web: `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/`