מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה שלישית: גיאומטריה (מחצית שניה)

עם 60 ציורים

הוצאת „מסדה” בע"מ, תל-אביב

מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה שלישית: גיאומטריה (מחצית שניה)

עם 60 ציורים

הוצאת "מסדה" בע"מ, תל-אביב

נדפס במפעלי דפוס פלאי־פי.אי.סי. בע"מ, רמת־גן
PELI-P.E.C PRINTING WORKS LTD., RAMAT-GAN
PRINTED IN ISRAEL

תוכן הענינים

פרק שביעי: הטפולוניה (גיאומטרית המצב) 297 – 340

§ 1. הקדמה לטופולוגיה. הרצף הקווי 297
§ 2. מושג הממד. בעיות טופולוגיות במישור . . . 305
§ 3. בעיות טופולוגיות במשטחים עקומים . . . 321

פרק שמיני: מרחבים מרובי־ממדים ולא־אבקלידיים. יסודות הגיאומטריה 340 – 417

§ 1. מרחבים ליניאריים בעלי ארבעה ממדים ויותר . . 340
§ 2. הגיאומטריה ה„מחלטת" והגיאומטריה ההפרבולית . 364
§ 3. הגיאומטריות האלפטיות. על הוכחות לחוסר־סתירה של הגיאומטריות הלא־אבקלידיות 382
§ 4. בסוס אכסיומטי לגיאומטריה לפי הילברט . . 398

מלואים לפרקים ז׳ ח׳ 418 – 439

טו) טיפוס־הסדר של הרצף הקווי 418. טז) בניה גיאומטרית לעקום העובר דרך כל נקודותיו של ריבוע (עקום פיאנו) 419. יז) הוכחת המשפט: ריבוע אינו הומיומורפי לקטע 422. יח) בעית הצבעים במרחב 423. יט) מספר הנקודות בעלות סדר אי־זוגי בבעית הגשרים. „אילני" קיילי 424. כ) הוכחתו של משפט הפיאונים של אוילר בעזרת תורת־האילנות 426. כא) דוגמה של פיאון חד־צדדי ומחוסר נפח 426. כב) הוכחת קוויותו של המרחב התלת־ממדי R_3 427. כג) הוכחת קוויותו של המרחב הארבע־ממדי R_4 428. כד) המרחב התלת־ממדי של R_4, המאונך לישר מסוים באחת מנקודות הישר 429. כה) סתירת ההשערה של „הזווית הקהה" על־סמך אכסיומת ארכימידס 430. כו) הוכחה לטרנסיטיביותו של יחס ההקבלה בין ישרים בגיאומטריה „המוחלטת" 431. כז) זווית־ההקבלה כפונקציה יורדת של הרוחק בגיאומטריה ההיפרבולית 432. כח) התקרבותם האסימפטוטית של שני מקבילים בגיאומטריה ההיפרבולית 432. כט) הקצאת קטע בתבנית לגיאומטריה ההיפרבולית 433. ל) הוכחה שזווית חיצונית של משולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה 435. לא) אכסיומת־השלימות של הילברט 436.

מפתח המונחים והסימנים 440
מפתח השמות 452
סוף דבר 463

ברגשי תודה עמוקים

לתלמידַי

הן בתוך האוניברסיטה הן מחוצה לה

המחבר

חלק חמישי: בעיות ושיטות בגיאומטריה (המשך).

פרק שביעי: הטָפּוֹלוֹגיה (גיאומטרית המצב).

§ 1. הקדמה לטופולוגיה. הרֶצף הקווי.

בפרק הקודם עסקנו במעלותיהם של היצירים הגיאומטריים, הנשמרות במקרה שהעברה (או „עיוות") בעלת תכונה מסויימת הופכת את היציר ליציר אחר. אפשר לציין תכונה זו בשפת הגיאומטריה כדרישה שתישאר קרבת־מה בין שני היצירים; בפרט שכל קו ישר הופך לקו ישר (קוֹלינאריוּת). מבחינה אנליטית קובעת התכונה הנדונה התאמה (או „הצבה") חד־חד־ערכית בין נקודותיהם של שני היצירים, שביטויה האנליטי לגבי השעורים הוא ליניארי (מן המעלה הראשונה), ובתנאי שההעברות תהוינה חבורה. לדרישות אלו מצרפים במקרים ידועים, כגון בגיאומטריה האֲפינית או האֶקוויפוֹרמית, תנאים נוספים.

מובן שההגבלה להעברות בעלות תכונות כאלה, עם היותה נוחה ומועילה מכמה בחינות (עיין ב § 1 של הפרק הששי), שרירוּתית היא מבחינה הגיונית. לא נגע כאן בשתי הדרישות היסודיות: שכל העברה תהווה התאמה חד־חד־ערכית של נקודות, ושמערכת ההעברות הנדונה תהווה חבורה. דרישות אלו תתמלאנה גם בנושאו של פרק זה, עם כי מן התועלת הוא לוותר על הראשונה לשם כמה תפקידים שאין להם מקום בספר זה, כגון ההעברות „הדואליסטיות" של פליקר המחליפים נקודה וישר (במישור) או נקודה ומישור (במרחב), ו„העברות־ההשקה" של Sophus Lie (השוה גם בפרק הקודם, עמ' 231). בהשאירנו את שתי הדרישות היסודיות, נבטל את תנאי הקוֹליניאריוּת המתבטא במעלה הראשונה למשוואות ההצבה. מתוך כך נגיע בדרגה הראשונה למשוואות־ההצבה

$$\bar{x} = f(x, y), \qquad \bar{y} = g(x, y),$$

שבהן הפונקציות f ו g הן רציונלית שלמות (פולינוֹמים), בעלות איזו מעלה שהיא; למשל, ריבועיות. הצעד הבא יהיה להרשות כל העברה רציונלית, ואחר כך (השוה מיון הפונקציות בפרק התשיעי של הכרך ראשון) העברות אלגבריות, ואף העברות טרַנסצֶנדֶנטיות מסויימות – תמיד בתנאי שתחומי־ההשתנות למשתנים הלא־תלויים והתלויים יוגבלו באופן שתובטח תכונת החד־חד־ערכיות להעברות. חשיבות מיוחדת נודעת בגיאומטריה השימושית (למשל בשירטוט מפות גיאוגרפיות) מצד אחד, ובתורת הפונקציות המרוכבות (1, 341) וכן בפיסיקה

מצד שני, להעתקים „הקונפורמיים",[1] שבהם קיים אמנם לא דמיון־ממש בין היצירים הגיאומטריים, אך מה שמכונה „דמיון בחלקיהם הקטנטנים" של היצירים על־פי שמירת הזוויות בין עקומים נחתכים מותאמים. העתק מפורסם מסוג זה הוא ההעתק הסטיריאוגרפי[2], שבו השתמש Hipparchos כבר במאה השניה לפני סה"נ כדי לשרטט מפה של רקיע השמים על כוכביו. העתקה סטיריאוגרפית מבוצעת כשמטילים פני כדור, או פני חצי־כדור, מאחת הנקודות שעל־גבי הכדור (C) על מישור; למשל על המישור „הקטרי" העובר דרך מרכז הכדור והמאונך למחוג היוצא מ C. אם המדובר הוא בכדור הארץ, רגילים לקחת כ C את הקוטב הצפוני או הדרומי, וכמישור הקטרי את המישור בו חל הקו המשוה. קל להווכח, שיש כאן התאמה חד־חד־ערכית, פרט למרכז־ההטלה C עצמו, ושכל מעגל על גבי הכדור הופך במישור גם כן למעגל (או לקו ישר, אם המעגל עובר דרך C); בפרט הופכים המעגלים הראשיים על פני הכדור שאינם עוברים דרך C, למעגלים החותכים את הקו המשוה בשתי נקודות נגדיות (בקצותיו של קוטר).

לא נוכל לעמוד כאן אפילו בדרך רמז על הנושאים האנליטיים והגיאומטריים המתעוררים בכוונים השונים הנ"ל – לפי מגמה שהיא הפוכה במובן מסויים למגמה הרימנית שרמזנו לה בעמ' 232/3. שם ראינו את חבורת התנועות, שעל־פיה מזדהים כל היצירים החופפים, כרחבה מדי, והצטמצמנו בחבורת הזהות: בדיון בתכונות המרחב עצמו. כאן נוטים אנו למצוא את החבורה המקיפה ביותר של העברות קוליניאריות, הלא היא החבורה הפרוייקטיבית, צרה מדי, באשר היא מרשה רק הצבות מן המעלה 1, ונפנה אפוא להצבות בעלות אופי כללי יותר, ההופכות זה לזה יצירים בעלי תכונות שונות לגמרי.

אולם נוכל להרחיק לכת עוד יותר בכוון זה: הצד השוה שבכל הפונקציות ה„מעתיקות" שנזכרו כאן הוא: שהן גזירות (I, 305), פרט אולי לנקודות בודדות. בניגוד לזה נדרוש מֵעתה מן ההעתק הנדון, נוסף על תכונתו להיות חד־חד־ערכי, את תכונת הרציפות בלבד, המהווה כידוע (עיין שם) תנאי קל מתנאי הגזירות. לשון אחר: נדון בפרק זה בתכונותיהם של היצירים הגיאומטריים, הנשמרות כנגד כל העברה חד־חד־ערכית ורציפה.[3] נבטא ניסוח עיוני זה בצורה הסתכלותית שמשמעותה מובנת לכל

1. השוה, למשל: Z. Nehari: Conformal mapping. 1952. 396pp.

2. שם זה לקוח מן המלים היווניות $\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon\acute{o}\varsigma$ = מוצק, גופני (כלומר, תלת־ממדי), $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega$ = כתוב, צייר, שרטט. (המרכיב הראשון מופיע גם במלה השגורה „סטריאומטריה" המציינת גיאומטריה במרחב, בניגוד ל„פלאנימטריה" = גיאומטריה במישור.) השוה בעמ' 252 ו 311.

3. העברה כזו נקראת גם בשם homoeomorphic, הלקוח מן המלים $\acute{o}\mu o\iota o\varsigma$ = דומה, ו $\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$ = צורה. לשם פשטות נדבר להלן על העתק (העברה, עיוות) „טופולוגי". (רציפות ההעברה בכוון ההפוך נובעת במקרים הרגילים מתכונתה להיות חד־חד־ערכית; השוה בעמ' 307.

אדם, אף שלא שמע מעודו על גיאומטריה כמדע[1]: נציג את היציר (למשל המשטח, העקום, הגוף וכו') כחתיכת־גומי דקה גמישה לחלוטין הנתונה לכל מתיחה שהיא בלי שתיקרע, בתנאי שאסור להדביק זה בזה שני מקומות שונים שבגומי. נשאלת השאלה: מה הן התכונות הגיאומטריות הנשמרות כנגד כל עיוות רציף כזה, לגבי החתיכה במלואה או לגבי קווים (ישרים או עקומים) המצויירים על־גבי החתיכה. (האיסור על קריעה, או על ליכודם של מקומות שונים, נובע מדרישת הרציפות בניסוחה העיוני.)

לכאורה יש לשער, שלא ישאר כמעט ולא כלום מטיבו של היציר הגיאומטרי אחרי עיוות כה שרירותי, ושהתכונות הנשמרות בכל זאת הן טריביאליות עד כדי כך שאין בהן ענין מדעי. הלא בהתאם לכך יהפוך, למשל, ריבוע לא רק לכל מרובע שהוא או למשולש ולכל מצולע אחר, כי אם גם לאליפסה או לעקום סגור בעל תנודות רבות! ברם לאמיתו של דבר מוטעית ההשערה הנ"ל, ולא עוד אלא שהתכונות הנשמרות כנגד כל העברה טופולוגית מענינות הן ביותר בין כל התכונות הגיאומטריות. מתוך השקפה הגיונית־שיטתית יש לראות דרך טבעית בגיאומטריה בכך שנתחיל בטופולוגיה ו„נעלה" מבסיס כללי זה, המסתמך על מינימום של מושגים ודרישות, אל שאר השיטות הגיאומטריות, כגון הפרוייקטיבית, האֲפינית וכו' ונסיים בגיאומטריה המטרית („האֶלמנטרית"). אולם מהטעם הנזכר לגבי הגיאומטריה הפרוייקטיבית (עמ' 224) אין נוהגים בעלייה בכוון זה מבחינה דידקטית; ואמנם גם התפתחות ההיסטורית לא צעדה בדרך זו.

רק בתקופה מאוחרת מאד בדברי ימי הגיאומטריה התחילו לשים לב לתכונות טופולוגיות. אחרי רמזים כללים למדי ותגליות בודדות ופרוטות מצד לייבניץ (בסוף המאה ה17), אוילר (באמצע המאה ה18)[2] וגאוס[3] התחילה התפתחות הטופולוגיה באמצע המאה ה19, לשם מטרה גיאומטרית

1. אמנם אין תיאור הסתכלותי זה ממצה את כל אפשרויותיה של ההגדרה העיונית; שכן זו האחרונה כוללת, למשל, את המקרה של קריעה, שאחריה יבוא עיוות טופולוגי, בתנאי שבסוף נאחה שוב את הקרע לפי מה שהיה בראשונה. לשון אחר: העברה טופולוגית היא תוצאה, אם לא של עיוות מעשי אחר, על כל פנים של מספר סופי של עיוותים, אחרי הפרדת היצירים לחלקים מתאימים.

2. שני אלה ורימן השתמשו בשם analysis situs; המלה הרומית situs משמעותה: מצב. המלה היוונית $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$ שממנה נגזר השם topology הרגיל בימינו, משמעותה: מקום.

3. הוכחתו הראשונה (1799), וכן הוכחתו הרביעית, של גאוס למשפט היסודי של האלגברה (עיין I, 182—188) מבוססות בחלקן העיקרי על יסודות טופולוגיים: תצורת מהלכם של שני עקומים אלגבריים בעיגול ידוע. אולם יסודות אלה טרם נורו בזמן ההוא, ולכן קשה לראות את ההוכחות (בייחוד הראשונה) כשלמות. רק Cauchy ו Kronecker – האחרון בתורת הקָרקטֶריסטיקה משנת 1878 — נתנו את ההשלמות הדרושות לפי שיטה אלגברית; באופן סופי Ostrowski בשנת

טהורה, בידי ליסטינג[1] (שבייחוד גאוס הניעוֹ לחקור בנושא זה) ומיביוס. לשם צרכיה של תורת הפונקציות המרוכבות פותחה ע״י רימן מ 1851 והלאה; בפרט תורת הפונקציות האלגבריות ו„משטחי־רימן״ מבוססת על יסודות טופולוגיים. דחיפה מכרעת קדימה קיבל המקצוע החדש כשלשים שנה אחר כך ע״י תורת־הקבוצות של קנטור, ובסוף המאה ה19 ע״י מחקריו המעמיקים של פוֹאֶנקרֶה בטופולוגיה „הקוֹמבינטוֹרית״. אולם רק במאה ה20 הפכה הטופולוגיה לאחת התורות הראשיות של המתימטיקה, תורה פוריה והרת־התפתחות כמעטות מבין חברותיה; גם בדורנו־אנו היא הולכת ומסתעפת[2].

כדי להקל על הקורא הנכנס בפעם הראשונה לתחום זה, נציג בפניו בעיות אחדות של הטופולוגיה לא לפי מיון שיטתי כי אם לפי מסגרת מיכנית אך הסתכלותית: ראשית, בעיה אחת מן המרחב החד־ממדי; שנית, בעיות שמקומן הוא המישור; באחרונה, בעיות על־גבי משטחים עקומים ובמרחב התלת־ממדי. אסור לנו לשכוח, כמובן, שמושג הממד הנכנס כאן קשור עצמו בטופולוגיה[3];

1920. (מפתח אחר, בעל אופי טופולוגי טהור, למשפט היסודי של האלגברה נותן משפט ידוע של Brouwer על „נקודות יציבות״; השווה בסוף ה § 3.) דחיפה חזקה יותר בכוון טופולוגי קבל גאוס מתוך מחקריו על תורת החשמל והמגניסיות.

1. J. B. Listing. הוא השתמש בראשונה בשם „טופולוגיה״.

2. מתוך הספרות העשירה על מקצוע זה נציין ספרים אחדים:

S. Eilenberg & N. Steenrod : Foundations of algebraic topology. 1952. 356 pp.

S. Lefschetz : Topology. 1930.

— — : Topics in topology. 1942.

— — : Introduction to topology. 1948. זהו ספר מעולה, ואינו קשה ביותר

M. H. A. Newman : Elements of the topology of plane sets of points. 2nd ed. 1951. 214 pp.

E. M. Patterson : Topology. 1956. 128 pp.

L. S. Pontryagin : Foundations of combinatorial topology. 1952. 145 pp. (Translated from the first Russian ed. 1947.)

W. Sierpiński : General topology (תורגם מפולנית). 1952. 290 pp.

O. Veblen : Analysis situs. 1931.

N. Bourbaki : Topologie générale. 1951. 202 pp.

M. Fréchet & K. Fan : Introduction à la topologie combinatoire. T. I. 1946. 88 pp.

C. Kuratowski : Topologie. I & II. Warszawa-Lwów, 1952 & 1950. 450 & 444 pp.

P. Alexandroff : Einfachste Grundbegriffe der Topologie. 1932.

— — & H. Hopf : Topologie I. 1935.

D. Hilbert & S. Cohn-Vossen : Anschauliche Geometrie. 1932.
(הוצאה אנגלית, בשם Geometry and the imagination, 1950)
ספר זה מכיל חומר רב גם מחוץ לטופולוגיה.

H. Seifert & W. Threlfall : Lehrbuch der Topologie. 1934. (Reprinted New York, 1947)

3. לעומת זאת המידה (פרק חמישי, § 5) אינה מושג טופולוגי, לא בממד אחד ולא במרחב מרובה־ממדים. קבוצת נקודות (למשל בקו ישר) בעלת מידה חיובית מסויימת, יכולה להיהפך ע״י העברה טופולוגית לקבוצה בעלת מידה חיובית אחרת, או לקבוצה בעלת המידה 0 — ואפילו לקבוצה שאין לה מידה כל עיקר.

נדון בענין זה בראשית הסעיף הבא. הבעיה בה נעסוק בסעיף זה, שהיא נוגעת לקו ישר או עקום במידה שוה, היא יסודית ומפורסמת עד מאד לא רק במתימטיקה כי אם גם בפילוסופיה. נושא זה היה יכול להופיע גם בדיוננו בגיאומטריה הפרוייקטיבית, וכן בתורת־הקבוצות.

בעצם היה כאן צורך בהבחנה, עדינה ומופשטת למדי, הנוגעת לכמה מושגים מתורת־הקבוצות, כגון (קבוצה) סגורה, צפופה בתוך עצמה, מושלמת, מחוסרת־ליקוי, רציפה: לגביהם יש הבדל עקרוני בין האספקלריה של הקבוצות (הסדורות) המופשטות, שלפיה נתאר את הדברים להלן (כאשר תארנום גם בעמ׳ 287), לבין זו של הקבוצות של נקודות. בתורה האחרונה יש למושגים הללו מובן יחסי בלבד, תלוי ב„מרחב״ (לרבות משמעות מופשטת לגמרי של מונח זה) שבו דנים, ורק לפי האספקלריה השניה יכולים להופיע מושגים טופולוגיים ממש. לא נוכל להכניס ראשנו אל תוך שאלות אלו. התיאור הבא ניתן אפוא ברוחו של קנטוֹר, כלומר בהתאם לטיפול שבפרק הרביעי.

כפי שצויין בעמ׳ 94/5, עסקו הפילוסופים והמתימטיקנים כבר לפני אלפיים שנה ויותר ב„חידת״ הרֶצֶף (בפרט הרצף הקווי), ומן הימים ההם לא נותקה השרשרת של העוסקים בבעיה זו. במיוחד מענין הדבר, שגם הפילוסופיה ה„סכוֹלַסטית״ (הקשורה בכנסיה הקתולית) של ימי הביניים הקדישה תשומת־לב מיוחדת לבעיה זו; היא באה - אם מתוך עקרונותיה הכלליים אם מתוך כשלונה לפתור את הבעיה בכוחותיה־היא — לידי הדעה, שיש כאן „סוד שפיענוּחוֹ ניתן בידי הקב״ה לבדו״. מאידך ראו פילוסופים בתקופה מאוחרת יותר את הרצף כצורת־הסתכלות אפריוֹריסטית, שאי־אפשר לנתחה ולבארה בעזרת מושגים הגיוניים[1].

בניגוד לשתי השקפות אלו הראה קנטור החל מ 1883, שאפשר לתאר את הרצף הקווי באופן חד־ערכי כטיפוס־סדר (עמ׳ 86). לשון אחר: אפשר לנסח תנאים, המתבטאים בשפת התורה של הקבוצות הסדורות בלבד — ללא הסתמכות על מושגים כמו רוחק, מידה וכו׳ — באופן שכל קבוצה סדורה המקיימת את התנאים הנדונים דומה[2] לקטע של קו ישר, אם תופסים את הקטע כקבוצה הסדורה של נקודותיו; או בשפת האריתמטיקה: שכל קבוצה כנ״ל דומה לריוח המספרים בין מספרים שרירותיים a ו b, כאשר מספרי הריוח סדורים לפי גדלם. נחוץ רק להוסיף עוד קביעה על השתייכותם של קצות הקטע a וb, או אחד מהם, לנקודות הקטע; כך מתקבלות ארבע אפשרויות שונות, ואחת מהן - היא זו, שבה לא ישתייך לקטע אף אחד מקצותיו, כלומר הריוח

1. השווה תיאורו ההיסטורי של G. Cantor בכרך ה 21 של *Mathem. Annalen* (1883), עמ׳ 572.

2. במובן שהוגדר בעמ׳ 83.

הפתוח – שקולה היא כנגד קו ישר שלם (אינסופי), כשהוא נתפס כקבוצה הסדורה של כל נקודות הישר.

לכאורה קל לפתור את הבעיה שלפנינו לאור הגישה הנ״ל. אמנם הרעיון שאולי יעלה תחילה על דעתנו, כאילו צפיפותה (עמ׳ 93/4) של הקבוצה היא תכונתה האפיינית, נידון מיד לשלילה. שהרי למדנו בעמ׳ 94 שגם הקבוצה המכילה את הנקודות הרציונליות בלבד צפופה היא, והלא קבוצה זו היא בת־מניה, בניגוד לרצף. אולם אפשר להתקרב יותר לבעיתנו על־סמך המושגים מתורת החתכים שבהם מדובר בפרק הששי של הכרך הראשון (עמ׳ 121 ו־134). שם כינינו בשם חתך[1] (או חיתוך) כל חלוקה של נקודות הקו הישר (המשתרע, למשל, משמאל ימינה) לשתי מחלקות זרות לא־ריקות, אם מתמלא התנאי הבא: כל נקודה של המחלקה האחת („התחתונה") נמצאת משמאל לכל נקודה של המחלקה השניה („העליונה"). אם הקבוצה המתחלקת לשתי מחלקות אינה הרצף כולו, הרי אפשר (עיין שם), שבמחלקה התחתונה יש נקודה אחרונה (ימנית ביותר) ויחד עם זה במחלקה העליונה נקודה ראשונה (שמאלית ביותר); לחתך כזה קוראים בשם קפיצה. כמו כן יכול להיות, שאין במחלקה התחתונה נקודה אחרונה ואין במחלקה העליונה נקודה ראשונה – מקרה של חתך המכונה ליקוי. אך ברצף עצמו אין מקום לאפשרויות אלו; עובדה זו יסודית היא בתורת דידקינד למספרים הממשיים (עיין שם), ובשינוי־שם גם בתורתו של קנטור למספרים אלה. ברצף כל חתך הוא חתך „רציף"; כלומר, אם במחלקה התחתונה יש נקודה אחרונה, אין נקודה ראשונה במחלקה העליונה; וחילופו[2].

מתוך כל האמור היה אפשר לשער, שטיפוס־הסדר של הרצף הקווי קבוע ע״י הדרישה: כל חתך בקבוצה הסדורה הנדונה הוא רציף. מכנים בשם קבוצה רציפה כל קבוצה שכל החתכים בה הם חתכים רציפים. יש להוסיף על הדרישה, שהקבוצה הנדונה תהיה רציפה, עוד בחירה בין ארבע האפשרויות לגבי הקצוות; למשל: שהקבוצה הנדונה תהיה פתוחה.

אולם ההשערה הנ״ל אינה מתאשרת. כדי לעמוד על כך נוכל, למשל, להסתכל בקבוצת נקודותיו של ריבוע, בצורתו שבציור 6 (עמ׳ 57), מתוך ההגדרות הבאות:

א) לקבוצה הנדונה Q שייכות כל הנקודות שבפנים הריבוע או בצלעותיו פרט לקדקוק התחתון משמאל והעליון מימין.

1. לאמיתו של דבר מושג זה והקשורים בו (ליקוי, קפיצה, רציפות) אינם תלויים כל עיקר בכך שהמדובר הוא בקבוצת נקודות; כהם יפה ללא כל שינוי כלפי כל קבוצה סדורה.

2. השוה בפרט המשפט היסודי ב I, 134. – להלן יתברר שלגבי המקרה שלפנינו – בקשר לדרישה מסויימת מסוג אחר – מספיק לדרוש שהחתך איננו ליקוי. דבר זה כלול, כמובן, בדרישה דלעיל, שכל חתך יהיה רציף.

ב) הנקודות (x, y) של Q תסודרנה בדרגה הראשונה משמאל לימין, דהיינו לפי גודל הפסוק x. מבין כל שתי נקודות, שאחת מהן נמצאת בדיוק למעלה מרעותה – כלומר, נקודות בעלות אותו הפסוק x – תהיה קודמת הנקודה התחתונה בעלת פוסק y קטן יותר.

קל להווכח, שכל חתך בקבוצה הסדורה Q הוא חתך רציף. נוסף על כך אין בQ לא איבר ראשון ולא איבר אחרון. אף־על־פי־כן מתברר כי Q אינה דומה לרצף הקווי, למשל לצלע התחתונה של הריבוע בלי קצותיה. נוכל להביא ביתר קלות את הראיה לכך בסופו של סעיף זה.

תגליתו המעמיקה של קנטור היתה דרישה שלישית, שהוספתה על שתי הדרישות הנ״ל[1] מספיקה כדי לקבוע בשלמותו את טיפוס־הסדר של הרצף הקווי. בעזרתה נגיע לידי ההגדרה „האכסיומתית" הבאה לרצף הקווי[2]:

הרצף הקיוי C, כלומר הקבוצה הסדורה של הנקודות שבריוח פתוח, קבוע בשלמותו ע״י שלשת התנאים הבאים:

1) אין בC לא איבר ראשון ולא איבר אחרון.

2) שום חתך בתוך C אינו ליקוי (ז״א אינו בעל מחלקה תחתונה ללא איבר אחרון ובעל מחלקה עליונה ללא איבר ראשון).

3) C מקיפה קבוצה חלקית R בת־מנייה באופן שבין כל שני איברי C נמצא לפחות איבר אחד של R. – בקיצור: לC יש קבוצה חלקית בת־מנייה R הנמצאת בצפיפות בתוך C.

1. למען האמת ההיסטורית ולשם הכנסת שני מושגים שהם חשובים כשלעצמם, נרחיב במקצת את הדיבור על ענין זה.

קנטור לא השתמש במושג החתך (השוה ב I, פרק ששי) וגם לא במושג אחר השקול כנגד המושג „חתך רציף", כי אם ב„סדרות היסודיות" שלו (I, 126) ובשני מושגים נוספים שצירופם אינו מגיע עד כדי „רציפות", כפי שיש לראות מן השקלא וטריא במספר ח) של המלואים בעמ׳ 287. בהחליפנו מטעמי נוחיות את מינוחו של קנטור בזה של דידקינד, תיקרא קבוצה סגורה אם אין בה ליקויים (נוסח קנטור: אם כל נקודות־הגבול שלה [I, 283] שייכות אליה). מאידך יש לכנות קבוצה צפופה־בתוך־עצמה אם אין בה נקודה P בעלת „שכֵנות" P_1 וP_2 משני עבריה (הנקודה P_1 מכונה שכנה של P, אם בקבוצה אין נקודה בין P לP_1). קבוצה שהיא סגורה וצפופה־בתוך־עצמה גם יחד, נקראת מושלמת (פֶּרְפֶקְטית). והנה קנטור התנה כתנאי שני לרצף, שיהיה קבוצה מושלמת. ברם ניסוח זה לתנאי השני הוא פחות נוח, הן מבחינת פשטות המושג הן לצורך ההוכחה. (פרטים אלה משמשים השלמה למה שנאמר בעמ׳ 287.)

במובן דידקטי־פסיכולוגי נוח לנסח את התנאי השני באופן שידרוש את רציפותה של הקבוצה. אך הואיל והחתכים המהווים „קפיצות" יוצאים בלאו־הכי ע״פ התנאי השלישי, מספיק להוציא בתנאי השני את האפשרות של „ליקויים".

2. השוה גם את התיאור בחיברת: E. V. Huntington: The continuum and other types of serial order. 2nd ed. 1917, reprinted 1955. (תורגם גם לאֶספירנטו)

לפיכך כל קבוצה D, הממלאת את התנאים 1)–3) (השלישית לגבי קבוצה חלקית מתאימה S), דומה לC.

ההוכחה למשפט זה ניתנת בקוויה העיקריים במלואים לחלק החמישי, מספר טו), בסוף החטיבה הזאת. כאן נוסיף כמה הערות.

קודם כל יוצא מ 3), שבין כל שתי נקודות של C נמצאת שוב נקודה של C, כלומר ש C היא קבוצה צפופה. לפיכך לא יוכל להתרחש לגבי חתך בC, שבמחלקה התחתונה יש איבר אחרון z_1 ובעליונה איבר ראשון a_2; שכן יש נקודות של C בין z_1 וa_2, ונקודות אלו לא היו משתייכות לשום מחלקה. על כן לא יוכל חתך בC להיות קפיצה; מכיון שלפי 2) גם אינו ליקוי, יוצא כי C היא קבוצה רציפה.

בקחתנו ב 3) בפרט נקודות של הקבוצה החלקית R כשני האיברים של C למדים אנו שהקבוצה R אף היא צפופה.

נבחר עתה בשתי נקודות שרירותיות F וG בקו הישר של המספרים (I, 115–119) ונסמן ב C את הקבוצה הסדורה של כל הנקודות בפנים הקטע $\overline{GF}$, בסדרנו את הנקודות לפי גודל המספרים. אין כאן נקודה ראשונה או אחרונה; לכן מתמלא התנאי 1). כל חתך בקבוצת כל המספרים הממשיים (בכלל, או בין שני מספרים נתונים) הוא חתך רציף (כרך ראשון, פרק ששי); לכן ממלאת C גם את 2). נסמן בR את קבוצת כל הנקודות הרציונליות שבC; קבוצה זו היא בת־מנייה וצפופה (עמ׳ 93). ב I, 132 למדנו שבין כל שני מספרים ממשיים שונים נמצא מספר רציונלי; יוצא כי C מקימת לגבי הקבוצה R גם את התנאי 3). לכן ממלא הרצף הקווי הפתוח, בין שהוא מוגבל (סופי) בין אם לאו, את התנאים 1) עד 3), ולכל קבוצה הממלאת אותם יש אותו טיפוס־סדר כמו לרצף.

כמובן, זוהי עובדה פשוטה ביותר שהרצף ממלא את התנאים 1) עד 3). תגליתו של קנטור היתה בכך, שתנאים אלה (אך לא חלק מהם, עיין לקמן) מספיקים כדי לקבוע את הרצף הקווי, והצד המפתיע בדבר זה היה, שבכלל אפשר לתאר ע״י תכונות־סדר בלבד את הרצף בשלמותו.

אם יסומן טיפוס־הסדר של הרצף הקווי הפתוח ב λ, יוצא, לפי הגדרת החיבור, כי $1+\lambda+1$ הוא טיפוס־הסדר של הרצף הקווי הסגור בין שתי נקודות בקו, לרבות קצוות אלה. הטיפוס אינו תלוי בגודל הריוח. מתקבלים בנקל, על־פי החיבור בטיפוסי־סדר, היחסים $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$, $1+\lambda+1 = 1+\lambda+1+\lambda+1$, וכו׳. לעומת זאת, ובניגוד ליחס $\eta+\eta=\eta$ (עמ׳ 96), שונה $\lambda+\lambda$ מ λ; שהרי ב„אמצע" של קבוצה בעלת הטיפוס $\lambda+\lambda$ מופיע חתך שהוא ליקוי, בניגוד ל 2).

מן המשפט דלעיל נובע, שלקבוצה Q שהוגדרה בעמ׳ 302/3 אין טיפוס־הסדר λ, מפני שאינה מקימת 3). ואמנם, אילו נתמלא תנאי זה לגבי קבוצה

חלקית ידועה R של Q, היה צריך להימצא בפרט איבר של R בין כל שתי נקודות של Q בעלות אותו פסוק x, כלומר בין (x, y_1) ל(x, y_2). לכל ערך של x היה מותאם אפוא לפחות איבר אחד של R, באופן שלערכים שונים x מותאמים איברים שונים של R. והנה דבר זה סותר את הדרישה ש R תהיה בת־מנייה; כי קבוצת כל ערכי x היא רצף, שאינו ניתן להימנות.

הוכחה זו מראה שהתנאי 3) אינו מיותר. מובן מאליו, שגם כל אחד מהתנאים 1) ו־2) אינו מיותר; למשל, כל קבוצה בעלת הטיפוס η מקיימת את התנאים 1) ו־3). 1) עד 3) מהווים אפוא מערכת בלתי־תלויה של תנאים (השוה I, 13).

2§. מושג המֵמד. בעיות טופולוגיות במישור.

התיאור הניתן בסעיף זה וב§3 נשתנה מהתיאור שברוב חלקיו של ספר זה משתי בחינות. ראשית, כאן לא נתחיל במושגיה הכלליים של הטופולוגיה ונרד מן הדיון בתורה הכללית אל בעיות פרוטות, אלא נסתפק במבחר של בעיות פרוטות בלבד; ואף לא תמיד נבליט קשר שיטתי בין הבעיות הללו. שנית, על־פי רוב נוותר על הוכחות, ולא נתארן אפילו במלואים. גישה זו יסודה בקשיין של רוב ההוכחות בטופולוגיה, אפילו של הוכחות לכמה משפטים שניסוחם קל הוא ושוה לכל נפש. בנידון זה אפשר לדון גזירה שוה בין הטופולוגיה לבין תורת־המספרים, שגם בה ניסוחן של כמה בעיות עמוקות הוא קל מאד; ואין זה הדמיון היחיד בין שני המקצועות, אף כי לפי נושאיהם רחוקים הם זה מזה. מכאן נובע במידה מסוימת החן המיוחד שהוצק על שני מקצועות אלה בהשוואה לשאר חלקי המתימטיקה. אולם לעומת תורת־המספרים משמשת הטופולוגיה, יחד עם האלגברה המופשטת, וחלקים ידועים של הגיאומטריה „הטהורה", עדים זוממים לטענתם של קרוניקר ופואנקרה כאילו מבוססת המתימטיקה בשלמותה על מושג המספר הטבעי (I, 1 ו־16).

בין מושגי הטופולוגיה תופס מקום נכבד מושג הממד, ולכן נברר תחילה במידת־מה מושג זה. תולדות המושג בתקופה הקצרה של הרבע האחרון של המאה ה 19 והרבע הראשון של המאה ה 20 דרמאטיות הן למדי; אפשר לתת תיאור כלשהו להתפתחות זו ללא חשבונות וללא הסתמכות על ידיעות קודמות ניכרות.

לאחר שקנטור פרסם את מאמרו היסודי משנת 1873 (עיין בעמ׳ 29), שבו הציג שתי קבוצות אינסופיות שאינן אֶקוויוָלנטיוֹת זו לזו, ניסה כמובן לבנות קבוצות מקיפות עוד יותר. במינוח חדיש, שטרם פותח בעת ההיא, יש לומר: אחרי שנוכח כי עָצמת הרֶצף (הקווי) גדולה מעצמתה של קבוצת המספרים הטבעיים, היו עיניו נשואות לקבוצה בעלת עצמה גדולה עוד יותר, וטבעי הדבר ששם פניו אל רצף בעל שני ממדים ויותר. בשיחות עם מתימטיקני גיטינגן, ששמשה אז אחד המרכזים הגדולים למחקר מתימטי בעולם, נאבק על הוכחה

להשערתו; אכן קבל את התשובה: „וכי מה יש כאן להוכיח? הרי ברור מאליו ששני משתנים אינם שקולים כנגד משתנה אחד, ושאי אפשר אפוא להתאים בהתאמה חד־חד־ערכית את ערכי הזוגות (x_1, x_2) לערכי x, כעבור x, x_1, x_2 על אותו הרצף (למשל על המספרים הממשיים בין 0 ל 1). ואולם בשנת 1877 גילה קנטור, לאחר האבקות פנימית קשה, שבאמת אפשרית התאמה מן הסוג הנידון; לאמור: שיש התאמה חד־חד־ערכית בין כל נקודותיו של ריבוע וכל נקודותיה של צלע הריבוע (לעיל עמ׳ 57). בשלחו את ההוכחה לדידקינד לשם חוות־דעה הוסיף את ההערה: רואה אני את המסקנה, אך לא אוכל להאמין בה. המאמר הופיע ב־1878 על אף קשיים שהוטלו בדרך פרסומו. מיד היה ברור שאקוויולנטיות זו קיימת לא רק לגבי רצף דו־ממדי כי אם לכל מספר שהוא של ממדים ואפילו לאינסוף ($\aleph_0$) ממדים. באותו רגע, כך העיר שינפליס,[1] הרגישו הגיאומטרים כאילו תיבקע האדמה אשר תחתיהם.

אמנם היו חוקרים, ובראשם דידקינד, שהבינו מיד כי חוסר־הרציפות[2] שבהעתקת רצפים בעלי מספרים שונים של ממדים הוא הוא המאפשר מסקנות כה מפתיעות; ואילו העתק רציף אינו פוגע במושג הממד (עיין להלן). אך אם על סמך זה ביקשו הגיאומטרים לישב בשלוה, קפץ עליהם רוגזו של פיאנו[3] שהוכיח כי יש התאמה רציפה בין כל נקודותיו של ריבוע לכל נקודותיו של קטע, כגון צלע הריבוע, המתאימה לכל נקודה של הקטע נקודה אחת ויחידה של הריבוע. בשפה „הסתכלותית־כביכול": יש „עקום" העובר דרך כל נקודותיו של ריבוע. (לשון אחר: יש תנועה רציפה לנקודה, באופן שהנקודה תפגוש, בתקופת־זמן סופית, את כל נקודות הריבוע.) ביתר דיוק: יש זוג של פונקציות חד־ערכיות ורציפות $f(x)$ ו $g(x)$ בעלות התכונה הבאה: כעבור x על כל הערכים בריוח מ 0 עד 1, עוברים ערכי הפונקציות $f(x)$ ו$g(x)$ על כל הזוגות הסדורים (y, z) שבהם y ו z הם ערכים בין 0 ל 1.

קל להכליל את המסקנה למרחבים בעלי שלשה ממדים ויותר; למשל, להגדיר עקום העובר דרך כל נקודותיה של קוביה או של תיבה.

אך כשם שההפתעה במסגרת קנטור תלויה באי־רציפותו של ההעתק, כך מקור הצלחתו של פיאנו טמונה בכך שההתאמה הנוצרת ע״י זוג הפונקציות f ו g היא אמנם חד־ערכית אולם לא חד־חד־ערכית; לאמור: לכל נקודה x של הריוח (הקטע) מותאמת אמנם נקודה יחידה של הריבוע, אך לא חילופו. יש נקודות של הריבוע שלהן מותאמות נקודות שונות (משתים עד ארבע; אפשר אפילו לצמצם את

1. A. Schoenflies: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, II. Ergänzungsband (1908), p. 149.

2. אגב: אם מבטאים את ההעתק בשתי פונקציות (השוה לקמן במסקנת פיאנו), אפשר לדאוג לכך שאחת הפונקציות תהיה אפילו רציפה.

3. G. Peano. עיין ב *Math. Annalen*, כרך 36 (1890).

מספרן עד שלש) של הריוח הקווי. לשון אחר: העקום עובר דרך אותה הנקודה פעמים אחדות; דבר זה קיים לגבי נקודות מסויימות הנמצאות בצפיפות בריבוע כולו.

פיאנו נתן את הוכחתו בצורה אנליטית, בעזרת תיאורם של המספרים הממשיים כשברים שיטתיים בעלי המספר היסודי 3 (השוה בעמ׳ 210). תיאור אחר, גיאומטרי־„הסתכלותי" כביכול, ניתן ע״י הילברט[1], ואחריו בצורות שונות. אחת ההוכחות האלה מתוארת במילואים לחלק החמישי, מספר טז); היא מהווה גם — כהוכחת הילברט עצמה — בניה גיאומטרית פשוטה לפונקציה שהיא רציפה בריוח ידוע ואינה גזירה בשום מקום של הריוח. (עיין ב I, 307, 349.)

אם ננסח את המסקנות האחרונות בשפת הפרק הקודם, יש לומר: הן לחבורת ההעתקים (ז״א ההתאמות החד־חד־ערכיות), הן למערכת ההתאמות, שהן חד־ערכיות ורציפות גם יחד, יש הליקוי שמושג הממד אינו שמור כלפיהן; שכן, למשל, קטע מועבר לריבוע ע״י התאמות ידועות מתוך כל אחת משתיהן. עלינו לחפש אפוא חבורה צרה יותר שכלפיה ישאר שמור מושג הממד. והנה מתברר, כפי שניחש דידקינד כבר ב1877, שחבורה כזו היא חבורת ההעתקים הטופולוגיים (עמ׳ 298), כלומר חבורת ההתאמות שהן חד־חד־ערכיות ורציפות גם יחד.[2] חבורה זו היא חבורה חלקית לכל אחת משתי החבורות הנ״ל; מאידך מקיפה היא, כחבורות חלקיות של עצמה, את כל החבורות שבעזרתן הגדרנו גיאומטריות שונות בפרק הקודם. נוכל לנסח את המסקנה גם כך:

הממד הוא שמורה טופולוגית.

החל מ 1878 הוכיח לירות[3] משפט זה בתנאי, שמספר־הממדים שוה או קטן

1. *Math. Annalen*, כרך 38 (1891). השוה גם, מלבד מאמרו של Knopp שיצויין לקמן אגב משפטו של Jordan, את המאמרים:
E. H. Moore: *Transactions of the American Math. Society*, vol 1 (1900);
H. Hahn: *Annali di Matematica*, 3rd series, vol. 21 (1913).
עיין גם בתיאורים המעמיקים בצרפתית:
H. Lebesgue: Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (1904, 2nd ed. 1928). עמ׳ 44 של המהדורה הראשונה.
W. Sierpiński: *Fundamenta Mathematicae*, vol. 1 (1920), p. 44.
(השוה R. L. Moore באותו כתב-עת, כרך 3, עמ׳ 232)

2. הקורא המעמיק ישאל בצדק: אנו דורשים אפוא את הדדיותה של חד־ערכיות ההתאמה; ומה בדבר הדדיותה של הרציפות? אמנם במקרים הפשוטים, שבהן נדון כאן (קבוצות הסומות וסגורות), לא תצטרך שאלה זו להטרידנו; כפי שהוכיח C. Jordan, גוררות חד־חד־ערכיותה ורציפותה של ההתאמה במקרים אלה גם את הדדיותה של הרציפות. אך במקרים כלליים יותר — שלא יופיעו לפנינו כל עיקר — אין הדבר כך; C. Kuratowski נתן אף דוגמה של קבוצות P ו Q כאלה, שהתאמה חד־חד־ערכית ורציפה ידועה העביר את P אל Q, והתאמה אחרת — גם היא חד־חד־ערכית ורציפה – את Q אל P, ואף־על־פי־כן אין במציאות התאמה בין איברי P ו Q שהיא גם חד־חד־ערכית גם רציפה בשני הכוונים. עיין: *Fundamenta Math.*, vol. 2 (1921), p. 158.

3. J. Lüroth. עיין תיאורו הכולל בכרך 63 של *Math. Annalen* (1907).

מ 3. אמנם דבר זה מספיק לצרכי המרחב „הרגיל" שלנו, אך לא לגבי המרחבים בעלי ארבעה ממדים ויותר, מרחבים שבהם מדובר ב§1 של הפרק הבא. אף־על־פי־כן הוכחתו של לירות אינה קלה; במלואים לחלק החמישי, מספר יז), נביא את ההוכחה למקרה הפשוט ביותר, דהיינו למשפט שתחום דו־ממדי (מישורי) אינו הומיומורפי לתחום חד־ממדי; כלומר: אין העתק טופולוגי בין שניהם.

במשך זמן רב ניסו לשוא חוקרים שונים להוכיח את המשפט הכללי על שמירת מספר הממדים (לתחום, וביתר פשטות: ל„סביבת" נקודה); כל ההוכחות, אף של כמה מגדולי הדור, נתגלו כלא־מספיקות, עד שבשנת 1911 הצליח בראור[1] לתת הוכחה שלימה. מתאריך זה התחילה התפתחות תורת־הממדים כמקצוע חשוב בפני עצמו, המסתמך על תורת הקבוצות וקשור בתורת העקומים והמשטחים במובן טופולוגי. אחת הבעיות העיקריות היא הגדרה גיאומטרית טהורה[2] למושג הממד, שנוסף על בראור ולֶביג טרחו והצליחו בה אוריסון[3] ומֶנגר.

הדוגמה לקבוצת־נקודות שהיא „מושלמת ולא־צפופה בשום מקום", המתוארת בפרק החמישי, עמ' 209—211, יכולה לשמש מופת לכך כמה קשה הדבר להגדיר את מושג הממד: שהרי מצד אחד אין קבוצה זו מכילה שום ריוח (קטע), מצד שני היא בעלת העצמה א של הרצף. (חקירה מעמיקה גלתה, שיש להעניק לה, כמו לקבוצת הנקודות הרציונליות, את הממד 0 ולא 1.) כדי לרמוז על נקודת־מוצא אפשרית להגדרה כללית, נצא מן העובדה שרואים אנו קו (ישר או עקום) כקבוצה בעלת ממד אחד, מפני שאפשר להפריד בין שתים מנקודותיו ע"י חיתוך הקו בנקודה אחת – כלומר, ביציר בעל 0 ממדים. כיוצא בזה נקרא המישור (או פני כדור) יציר דו־ממדי, הואיל ואפשר להפריד בין שתי נקודות במישור, אמנם לא מתוך חיתוך המישור בנקודה אחת בלבד, אך מתוך חיתוכו לאורך קו, כלומר לאורך יציר בעל ממד אחד. רעיון זה ממליץ על הגדרה אינדוקטיבית; אולם הוצאת הרעיון המופשט אל הפועל אינה פשוטה כל עיקר.

---

1. L. E. J. Brouwer. עיין *Math. Annalen*, כרך 70; השוה גם בכרכים 71 ו 72, וכן בחוברת:

E. Sperner: Neuer Beweis über die Invarianz der Dimensionenzahl und des Gebietes. 1928.

2. כבר H. Poincaré דרש הגדרה גיאומטרית ולא אנליטית למושג הממד, ובראור הצליח למלא דרישה זו. נסיון רציני ראשון בכוון זה נמצא כבר אצל B. Bolzano.

3. P. Urysohn. עיין בספרים:

K. Menger: Dimensionstheorie. 1928. 319 pp.

— — (unter Mitarbeit von G. Nöbeling): Kurventheorie. 1932. 376 pp.

M. Hurewicz & H. Wallman: Dimension theory. (*Princeton Math. Series*, No. 4.) 1941. 165 pp.

G. Bouligand: Les définitions modernes de la dimension. (*Actualités Scientifiques et Industr.*, No. 274.) 1935.

J. Farvard: Espace et dimension. 1950. 302 pp.

הנושאים שעסקנו בהם בקשר למושג הממד מתבססים באופן מכריע על שיטות מתורת־הקבוצות בטופולוגיה. חשיבותה של תורה זו לגבי מושגים גיאומטריים טהורים בולטת גם מהצגת בעיה מעין זו: מהו קו עקום, והיש זכות לקרוא בשם זה ליציר (כמו „עקומי־פיאנו", עיין בעמ' 306) המכסה ריבוע שלם? על המושגים בעלי חשיבות מכרעת, המסתמכים על השיטות ההן, נמנה מושג הרצף.

עתה, בהציגנו לפני הקורא בעיות טופולוגיות אחדות במישור, נתחיל בדוגמות מסוג אחר, לכאורה פשוט יותר: בבעיות שלגביהן אין צורך ברצף ובשאר המושגים „העדינים" המוגדרים בתורת־הקבוצות[1] כי אם רק במושגים „קומבינטוריים"[2] פשוטים ביותר המסתמכים על קבוצות סופיות בלבד. בכל זאת טרם הצליחו החוקרים לפתור אחדות מבעיות אלו. נתחיל באחת מאלה: בבעיה של ארבעת הצבעים.

לא אגזים אם אומר, שמתוך כל הבעיות המתימטיות המצפות לפתרונן, זוהי הפשוטה ביותר לפי טבעה וניסוחה. אמנם בפרק השלישי של הכרך הראשון צוינו בעיות אחדות מתורת־המספרים שעודן פתוחות, ושאפשר להסבירן לכל תלמיד בבית ספר עממי היודע את החיבור והכפל בין מספרים טבעיים ואת מושג המספר הראשוני, לרבות אולי ההעלאה לחזקה. אך את בעית ארבעת הצבעים יבין אף ילד בן שבע שלא למד חשבון! ואמנם מקור הבעיה אינו במדע אלא בתפקיד מעשי.

בכל מפה גיאוגרפית המתארת ארצות שונות במובן פוליטי רגילים להשתמש בצבעים שונים כדי להבדיל בין המדינות (הארצות) השונות. אין צורך להשתמש במספר צבעים כפי מספר הארצות המופיעות במפה; השינוי בצבעים בא בעיקר כדי להבדיל בטביעת־עין בין ארצות שכינות (מַצְרָנות). לכן הכלל היסודי הוא, שארצות שכינות זו לזו תהיינה צבועות בצבעים שונים. הביטוי „שכינות" המופיע כאן טעון ביאור נוסף: הכוונה לארצות הגובלות זו עם זו לאורך קו. אם השכינות מתבטאת בנקודה משותפת בלבד, או במספר נקודות,

---

1. אך תהיה זו טעות לחשוב, שתחום שימושיה הגיאומטריים של תורת־הקבוצות מצטמצמת בטופולוגיה. בייחוד בשלשים השנים האחרונות התרחב היקף הבעיות הגיאומטריות, שאין לטפל בהן אלא בעזרתה של תורת־הקבוצות, וחוקרים אחדים מרחיקים לכת עד כדי לקבוע, שחשיבותה העיקרית של תורת הקבוצות היא בגיאומטריה. אולם שאלות אלו קשות ועדינות הן מכדי שאפשר יהיה לתארן בספר זה. — השוה מה שנאמר בעמ' 23 על חשיבותה של תורת־הקבוצות בגיאומטריה.

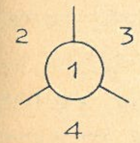
2. תיאור קצר ומעמיק לכמה בעיות מחלק זה של הטופולוגיה ניתן בהרצאה:

J. W. Alexander: Some problems in topology. *Internat. Math.-Kongress, Zürich* 1932, vol. 1, p. 249—257;

וכן בספר של **M. Fréchet** ו **K. Fan** שצויין בעמ' 300.

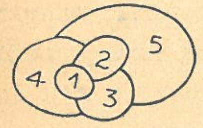
ציור 47

אין צורך להשתמש בצבעים שונים. למשל, אם ארבע ארצות גובלות כפי הציור 47, דהיינו כפי ארבעת התחומים הנוצרים במלבן ע״י שני הקרנזולים, הרי 1 ו 3, וכן 2 ו 4, גובלות זו עם זו בנקודה בלבד; לפי המוסכם לעיל נוכל אפוא להסתפק בשני צבעים: אחד לארצות 1 ו 3, השני לארצות 2 ו 4. לעומת זאת, אם גובלות ארבע הארצות כך (עיין בציור 48) שאחת היא כאי המוקף ע״י שלש האחרות – כפי שמוקפת שויצריה ע״י צרפת, גרמניה־אוסטריה ואיטליה – לא רק שלא יספיקו שני צבעים אלא אף לא שלשה. שהרי, ראשית, צריכות שלש הארצות המקיפות להיות בעלות צבעים, השונים מצבע הארץ המוקפת; שנית, כל אחת משלש הארצות המקיפות גובלת עם כל אחת משתי חברותיה, ולכן מוכרחים שלשת הצבעים האלה להיות גם שונים זה מזה. לפיכך אי אפשר להסתפק בפחות מארבעה צבעים.



ציור 48

טבעי הוא לעשות נסיון גם בחמישה צבעים, לאמור: מתוך ההשערה, שאף ארבעה צבעים לא יספיקו תמיד, נשתדל להראות צורך בחמישה צבעים. מסתבר, שיש לנסות לבנות לתכלית זו מפה המכילה חמש ארצות, באופן שכל אחת גובלת עם ארבע חברותיה. מי ששומע בפעם הראשונה על בעיה זו, משוכנע על־פי רוב, שבניה כזאת אפשרית היא. אולם בנסותו להוסיף על הארצות שבציור 48 ארץ חמישית, יגיע אל מפה מן הסוג המתואר בציור 49 ויווכח שהצליח אמנם בהשגת שכן נוסף אצל הארצות 2, 3, 4, אך הארץ 1 אינה גובלת עם הארץ החדשה 5, וממילא גם לא 5 עם 1; שכן אחד מארבעת התחומים המקוריים היה מוקף כולו ע״י שלשת חבריו. אמנם דוגמה כזו – ואפילו הוכחה כללית, שהושגה באמת לגבי אי־האפשרות של חמשה תחומים מַצרנים[1] – אינה מוכיחה ולא כלום לגבי הבעיה של ארבעת הצבעים.[2] גם הנסיון המעשי לא יוכל להראות שדי בארבעה צבעים, כי אפשר לשער שהצורך בצבעים שונים יגדל כגדול מספר הארצות במפה, ולמספר זה אין קצבה.



ציור 49

1. לעומת התחומים השכינים (המצרנים) יש בעיה מקבילה לגמרי, המתקבלת על־פי החלפה „דואלית", אם יובן מושג זה במובן טופולוגי. זוהי בעית הנקודות השכינות; כלומר, השאלה על מספרן המכסימלי של נקודות המקושרות ביניהן ע״י קווים שאינם נחתכים. כדי לעבור אל בעיה זו, יש רק לשים במקום כל תחום אחת מנקודותיו ולקשר את הנקודות.

2. מספר „הארצות המצרנות", כלומר המספר המכסימלי של ארצות שכל אחת מהן גובלת עם כל אחרת לאורך קו, אינו שוה בהכרח, אך על־כל־פנים שוה או קטן ממספר הצבעים הדרושים לצביעת כל מפה. השוה:
: Über das Problem der Nachbargebiete. *Math. Annalen,* vol. 38 (1891).

ברור שיש לפנינו בעיה טופולוגית; בפרט ברור, שעיוות רציף לשולי התחומים (הארצות) אינו משנה מאומה. לפיכך מותר, למשל, להניח שכל „ארץ" מוגבלת קטעים ישרים וקשתות מעגליות במספר סופי. הנחה זו מפשטת את הטיפול בבעיה.

בטרם נעסוק בשאלה אם מספיקים ארבעה צבעים כדי ל„צבוע" כל מפה במובן הנ״ל, יש להדגיש, שאין הבדל בדבר אם תוצג הבעיה לגבי המישור (מפה רגילה) או לגבי פני כדור (גלוֹבּוּס המשמש תבנית לכדור הארץ). על צד האמת, אם המפה המישורית היא סופית, נוכל ל„הדביק" אותה לכדור ע״י עיוותים מתאימים, בייחוד בשולי המפה. דבר אנלוגי קיים גם אם משתרעת המפה בכוונים מסויימים, או בכל הכוונים, לאין־סוף – כפי שדימו בנפשם הקדמונים, כי יבשת העולם (שחשבוה למישור) מוקפת אוקיינוֹס בלתי־מוגבל לכל רוחות העולם. אם נעמיד כדור על מישור־המפה, באיזו נקודה שהיא, ונכנה את נקודת המגע בין המישור והכדור בשם „הקוטב הדרומי" של הכדור, הרי הטלת המישור על הכדור, מן הקוטב הצפוני כ„מרכז־ההטלה", תיצור התאמה חד־חד־ערכית ורציפה („העתק סטיריאוגרפי", עיין בעמ׳ 298) בין נקודות המישור לבין נקודות הכדור „המנוקב"[1] בקוטב הצפוני.[2]

באשר לעצם הבעיה, הרי היה ידוע מזמן מתוך הנסיון, שארבעה צבעים הם לא רק נחוצים כי אם גם מספיקים כדי לצבוע כל מפה. רק באמצע המאה ה19 הכירו די־מורגן[3] ומיביוס שיש כאן בעיה מתימטית, הניתנת גם לניסוח הבא: כלום אפשר, לעומת כל חלוקת המישור לתחומים חלקיים במספר סופי, להתאים לכל תחום חלקי אחד המספרים 1, 2, 3, 4, באופן שיותאמו לתחומים גובלים תמיד מספרים שונים?

רק בשנת 1878 הציג קיילי את הבעיה בהרצאה פומבית של החברה המתימטית הלונדונית לפני קהל־מתימטיקנים רחב.[4] נסיון מהיר לפתור אותה

1. השוה לזה מה שנאמר להלן ב§3 בקשר למשפטו של אוילר.

2. לפי זה תותאם אמנם לכל הנקודות „האינסופיות" (הלא־אמיתיות) של המישור נקודה אחת בכדור, היא הקוטב הצפוני (מרכז ההטלה). בקיפול כזה של המישור יש לו נקודה לא־אמיתית אחת בלבד; המישור נראה „סגור" באינסוף. תיאורו של המישור כבעל נקודה לא־אמיתית אחת מועיל מאד בתורת הפונקציות המרוכבות, שבה מופיעות נקודותיו של המישור או של הכדור כגורם לפונקציות. (השוה בעמ׳ 252, וגם הרמז ב I, 7/256.)

3. A. de Morgan. בעצם לא היה הוא הראשון שעורר את השאלה אלא, בערך ב 1850, Francis Guthrie (שהיה באותו זמן סטודנט ושימש אחר כך פרופסור למתימטיקה בקיפטון), ודרך אחיו Frederick הוצגה הבעיה לפני די־מורגן. השוה Fred. Guthrie ב *Proceed. of the R. Society of Edinburgh*, כרך 10 (1878), עמ׳ 128.

4. עיין: **A. Cayley**: On the colouring of maps. *Proc. of the London Math. Soc.,* vol 9, p. 148.

שעה את הבעיה לא הצליח. ב1890 הוכיח היוד[1], שחמישה צבעים מספיקים לגבי כל מפה. ההוכחה אינה פשוטה, אף כי אין קושי מיוחד במהלכה, מכשיר חשוב להוכחת המשפט וכן להוכחת כמה עובדות אחרות בתחום הבעיה, משמש משפטו של אוילר המובא ב§3; כמבואר שם, בעצם אין זה אלא משפט מישורי, למרות ניסוחו המרחבי.

לעומת זאת לא הוכרעה הבעיה של ארבעה צבעים, עם כי גיאומטרים מעולים ניסו בה את כחם והגיעו מתוך חריפות ניכרת למסקנות חלקיות – ועם כי אין כמעט ספק בנכונות הדבר שארבעה צבעים מספיקים.[2]

כמה מסקנות הושגו בהיאבקות זו. למשל ידוע היום כי כלפי כל מפה שיש בה לא יותר מ37 תחומים, מספיקים ארבעה צבעים. אך אל יחשוב הקורא שלשם הוכחה זו אין צורך בשיטות מתימטיות, הואיל והנסיון היה יכול להראות את האפשרות; מחשבה זו מוזמת ע״י העובדה, שמספר המפות בעלות 37 או פחות תחומים, השונות במובן טופולוגי, נכתב ביותר משלשים ספרות. מכאן שאין תקוה רבה לסתור את המשפט המשוער (אם אינו נכון) מתוך נתינת דוגמה נגדית שתימצא דרך הנסיון.

אף כי לא נוכל להכנס כאן לשיטות שבעזרתן הוכחו משפט זה ואחרים מסוג דומה, נזכיר לפחות שנים מהמושגים החשובים ביותר המופיעים בתורה זו. בשם קדקוד קוראים, בהקבלה מסויימת לתורת המצולעים והפיאונים, לכל נקודה של המפה, המשותפת (כנקודת־שוליים) ליותר משנים מבין תחומי המפה; כלומר, לכל נקודה שבה נפגשות שלש צלעות (מקצועות) או יותר. אם נכנה בשם „סדר הקדקוד" את מספר הצלעות הנפגשות בו, הרי יש חשיבות רבה למפות שכל קדקדיהן הם מן הסדר 3; הן נקראות מפות תקינות. חשיבותו של מושג זה היא בכך שקל למדי להראות, שאם כל מפה תקינה ניתנת לצביעה בעזרת n צבעים, ניתנת כל מפה לצביעה בn צבעים. אפשר אפוא להסתפק במפות תקינות.

מושג חשוב אחר הוא מושג המפה הניתנת לצמצום; כלומר מפה שאת בעית צביעתה במספר מסוים של צבעים אפשר להעמיד על צביעת מפה תקינה בעלת פחות תחומים. כן קוראים לתחום מסוג ידוע, או למערכת תחומים,

---

1. P. J. Heawood היה מתלמידיו של קיילי ובמשך יובל שנים לא פסק מחקור בבעיה זו.

2. נציין את התיאורים הבאים למצב הבעיה:

A. Errera : Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs. 1921.
(מכיל גם מערכת־אכסיומות לטופולוגיה וביבליוגרפיה מקיפה)

— — : Une vue d'ensemble snr le problème des quatre couleurs. *Univ. e Polit. di Torino, Rendiconti*, vol. 11. 1952.

Ph. Franklin : The four color problem. *(The Scripta Mathematica Library*, No. 5.) 1941.

השוה גם עבודת־הדוקטור הירושלמית של חיים חוינצקי (חנני): תרומה לבעית ארבעת הצבעים. ירושלם, 1938.

בשם „תצורה מצַמצמת", אם מציאותו במפה גורמת לכך שהמפה תנתן לצמצום. למשל בהוכחת המשפט על חמישה צבעים (עמ׳ 312) מהווה כל תחום בעל ארבע צלעות או פחות, תצורה מצמצמת: שכן, קודם כל, בכווצנו אותו תחום עד הצטמצמו לנקודה בלבד, נקטין את מספר התחומים שבמפה; ברם אם מפה מצומצמת זו ניתנת לצביעה בעזרת חמישה צבעים, הוא הדין לגבי המפה המקורית – שכן התחום הנדון היה גובל בארבעה תחומים לכל היותר, ולפיכך עומד לרשותנו לשם צביעתו צבע נוסף.

לבסוף נציין מסקנות אחדות, שאינן קשורות בבעית ארבעת הצבעים בניסוחה הרגיל; מסקנות שאין הדבר קשה להוכיחן:

א) תנאי הכרחי ומספיק לכך, שמפה תנתן לצביעה בשני צבעים בלבד, הוא שכל קדקדי המפה יהיו בעלי סדרים זוגיים.

הדוגמה הידועה ביותר למפה כזו היא לוח השחמט, הצבוע בשני צבעים; כאן יש לכל נקודה הסדר 4.

ב) תנאי הכרחי ומספיק לכך, שמפה תקינה תנתן לצביעה בשלשה צבעים (לכל היותר), הוא שלכל תחום במפה יהיה מספר זוגי של צלעות.

ג) לקחנו, כתחום־המפה כולו, מישור או פני כדור או חלק מהם; לאמור, תחום שהוא לפי מספר ממדיו (2) ובמובן טופולוגי (עיין בסעיף הבא) פשוט ביותר. לכן מפתיע הדבר שלגבי תחום כה פשוט דוקא תקשה כל כך הבעיה, ואילו לגבי תחומים מסוג מסובך יותר נפתרה הבעיה בשלמותה.

ראשית, אין ענין רב בהכללת הבעיה לשלשה ממדים ויותר. שכן מתברר מיד שאצל הגופים אין חסם למספר הצבעים הנדרש, מכיון שכנגד כל מספר טבעי k אפשר לסדר k גופים במרחב התלת־ממדי באופן שכל אחד גובל עם כל חבריו. לעובדה זו, הנראית מפתיעה אם נשוונה לנסיון שבציור 49, ניתנת הוכחה פשוטה והסתכלותית במלואים לחלק החמישי, מספר יח).

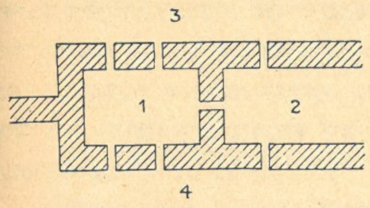
שנית, כלפי אותם משטחים בעלי טיפוס טופולוגי מסובך יותר, שלגביהם נחקרה בעית הצבעים, היא מצאה גם את פתרונה. דוגמה מענינת לכך היא מפה על פני טבעת (ציור 61, עמ׳ 327); לגבי כל מפה כזו מספיקים שבעה צבעים, ויש באמת (עיין שם) מפה בעלת שבעה תחומים על פני טבעת שאין לצבעה בפחות מ7 צבעים, הואיל וכל תחום גובל עם ששת חבריו. לגבי משטחים חד־צדדיים מסויימים המספר הנדון הוא שש; השוה להלן ב§3.

אחרי בעית ארבעת הצבעים נציג בעיה אחרת, אף היא מן הטופולוגיה הקומבינטורית, הדומה לקודמתה וגם קשורה בה קשר פנימי מסויים.[1] ניסוחה

---

1. הקשר מתבטא בייחוד בהשערתו של הפיסיקן P. G. Tait; עיין *Philos. Mag.*, המשך 5, כרך 17 (1884). השוה גם W. T. Tutte ב-*Journal of the London Math. Society*, vol. 21 (1946).

אולי פחות פשוט, ברם פתירתה קלה למדי. יש לה השם הספרותי המוזר: בעית הגשרים.[1]



ציור 50

בקיניגסברג של פרוסיה[2] – עיר הידועה כמולדתם של קַנט והילברט – יש נהר היוצר אי; בציור השלדי 50, שבו מקווקווים שטחי המים, מסומן האי ב 1 ושלשת שטחי היבשה האחרים ב 2, 3, 4. כפי שמראה הציור, מובילים חמשה גשרים אל האי; ארבעה מן היבשות 3 ו 4 במישרין, והחמישי מן היבשה 2 שבין שני פלגי הנהר; אל יבשה זו מובילים מ 3 ו 4 שני גשרים נוספים. במחצית הראשונה של המאה ה 18 התעוררה השאלה: האפשר לערוך טיול כך שהמטייל יעבור דרך כל הגשרים באיזה סדר שהוא, אך יעבור כל גשר פעם אחת בלבד?

יעיין־נא הקורא בשאלה זו; ודאי שגם לפני גשתו לניתוח העיוני ימצא את התשובה עליה.

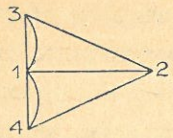
אוילר שמע על השאלה ופתר אותה מיד בצורתה הכללית: לאמור, בהחליפו את המספר 4 של היבשות במספר הכללי n, ובהניחו גם את סדרי הפלגים והגשרים ומספרם כשרירותיים. בעיה מוכללת זו, הנקראת בעית הגשרים של אוילר, היא בעלת אופי טופולוגי; שהרי פתירתה אינה תלויה בגודל היבשות והגשרים ובצורותיהם. לפיכך אפשר לשים במקום היבשות תחומים קטנים ככל הרצוי, ואפילו נקודות; הגשרים יומחשו לפי זה כקווים ישרים או עקומים המקשרים את „הנקודות"[3] והמכונים להלן „שבילים". (המחשה כזו לציור 50 ניתנת בציור 51.) לפי זה יש לנסח את הבעיה כך: נתונה תצורה

בכלל מעניינים הקשרים בין בעיות טופולוגיות מסוג זה לבין הפיסיקה; במסקנה טופולוגית חשובה פגע בראשונה Kirchhoff במחקריו על הסתעפות הזרם החשמלי (השוה *Poggendorffs Annalen*, כרך 72, 1847). עיין גם במה שנאמר בעמ' 299 לגבי Gauss.

1. בעיה זו מתקרבת לתחום המכונה „משחקים מתימטיים". גם משחקים ידועים מן הסוג הנקרא puzzle קשורים לטופולוגיה הקומבינטורית ולתורת הקבוצות הסופיות. ידועים כמה משחקים מסוג זה שמקורם בסין, ובי׳חוד המשחק המכונה „חידת ה־15" (15 אבנים הנמצאות על שטח של 16 מקומות, השוה בעמ' 326).

2. מאז מלחמת העולם השניה יש למחוק את האות פ' במלה „פרוסיה".

3. „נקודה" משמעותת כאן: נקודה שממנה יוצאים לפחות שלשה שבילים — או, אם מרשים גם נקודות ראשית ואחרית, שביל אחד בלבד. לעומת זאת נקודה, שממנה יוצאים רק שני שבילים (למשל כשוקי זווית שקדקדה היא הנקודה הנדונה), אינה עדיפה על כל נקודה החלה באמצע של אחד השבילים; שכן אנו נמצאים בשדה הטופולוגיה, ונוכל אפוא לעוות את הזווית בקדקוד עד ששתי השוקיים תהפוכנה לישר אחד או לקשת אחת.

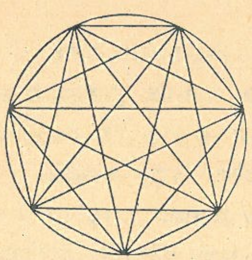


ציור 51

המכילה מספר נקודות ושבילים המקשרים ביניהן; האפשר לבנות את התצורה בעזרת קו (שבור) אחד (graph)? לאמור, האפשר לעבור על התצורה לפי מסילה העוברת על כל אחד מן השבילים, ועל כל אחד פעם אחת בלבד? אפשר גם להכליל את הבעיה ע"י החלפת הדרישה של קו שבור אחד במספר נתון של קווים שבורים.

בפתירת הבעיה מכריע הרעיון כי בכל נקודה, שאינה משמשת ראשית או אחרית („נקודת־קצה") למסילה המבוקשת, צריכים להפגש שבילים שמספרם זוגי; בקיצור: כל נקודה כזו צריכה להיות בעלת סדר זוגי, הגדול מ 2 (עיין בהערה הקודמת). שכן המגיע אל הנקודה צריך גם לעזבה וזאת בשביל אחר. לכן אין פתרון לבעיה של קיניגסברג, שבה יש לכל נקודה סדר אי־זוגי.

פשוט ביותר המקרה בו כל נקודה שבתצורה היא בעלת סדר זוגי; במקרה זה אפשר להתחיל בכל נקודה של התצורה סיבוב, העובר על כל שביל פעם אחת והמסתיים בנקודת המוצא. מובן שבסיבוב מותר לנגוע באותה הנקודה כמה פעמים. דוגמה פשוטה לתצורה כזו משמש מצולע בעל n צלעות על כל קרנזוליו, אם n הוא אי־זוגי וגדול מ 3. שהרי מכל קדקוד יוצאים $n-3$ קרנזולים, ועל מספר זוגי זה יש להוסיף עוד 2 כנגד שתי הצלעות הנפגשות בקדקוד הנדון; לנקודות הנוספות שבתצורה, שהן חיתוכי הקרנזולים בינם לבין עצמם, יש בדרך כלל הסדר 4. התצורה שכנגד $n=5$, המחומש עם „המחומש הכוכבי" שבתוכו (עמ' 284), ידועה היטב; אף תצורת הקרנזולים בלבד, המכונה בשם היווני פֶּנטַגראמה[1], מכילה רק נקודות בעלות סדר זוגי (4). בציור 52 ניתנת תצורת המשֻׁבע המשוכלל (השוה בעמ' 188). המעיין בה יווכח שיוכל להתחיל ולגמור סיבוב בעל התכונות הנ"ל בכל נקודה שבתצורה. — אם n זוגי, אין פתרון לבעיה; מרובע על שני קרנזוליו משמש דוגמה פשוטה לכך. כמו כן אין פתרון לגבי רשת הלבנים המופיעה בצורה הרגילה של כותל.

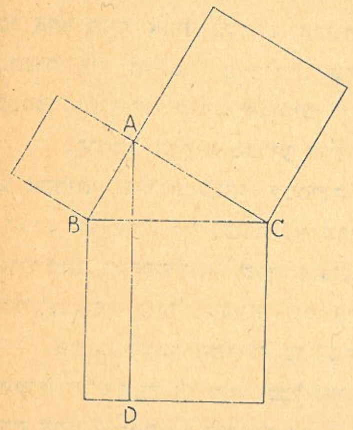

ציור 52

באשר לתצורה שיש בה גם נקודות בנות סדר אי־זוגי, יעיין נא הקורא בעצמו בתנאים למציאות פתרון לבעייתנו. בנקל יגיע לידי המסקנות הבאות, שהראשונה מהן מוכחת במלואים לחלק החמישי, מספר יט): א) מספר הנקודות בעלות סדר אי־זוגי צריך להיות זוגי. ב) אם מספרן 2, צריכה אחת מהן לשמש מוצא

---

1. $\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$ = חמש; תצורה זו, שבה קשורות אמונות תפלות אצל עמים רבים, מכונה גם „פנטאלפא" או „חותם־שלמה".

הסיבוב והשניה — תחנת־סיום. דוגמה לכך תשמש התצורה המתאימה להוכחתו הרגילה של משפט פיתגורס (ציור 53), שבה הנקודות A ו־D בלבד הן בעלות סדר אי־זוגי וצריכות אפוא לשמש אחת ראשית והשניה אחרית למעבר. ג) אם מספרן $2k$, ($k > 1$), אי אפשר לצייר את התצורה כולה בעזרת קו שבור אחד, אלא נחוצים k קווים כאלה. דוגמות: במקרה של עמ׳ 314/5 יש צורך בשני קווים שבורים. בשדה השחמט יש $28 = 4 \cdot 7$ נקודות בעלות סדר אי־זוגי, הלא הן נקודות השפה[1] (לכל אחת מהן יש הסדר 3); לכן אי אפשר לצייר את תצורת השדה בפחות מ 14 קווים שבורים.



ציור 53

לבסוף יצויין שאפשר לנסח את הבעיה הפשוטה שלפנינו גם בשפה הקרובה, אמנם רק בניסוחה, לבעית ארבעת הצבעים. נוכל לראות את התחומים (למשל 1 עד 4 בציור 50 או 51) כארצות, תחת קחתנו אותם כנקודות, ואת הגשרים כתחנות־הגבול שמותר להשתמש בהן לשם מעבר מארץ לארץ. השאלה תנוסח לפי זה כך: האפשר לנסוע דרך כל הארצות הנתונות בתנאי שעוברים דרך כל תחנת־גבול פעם אחת?

בהתאם לכך מביע סדרה של הנקודה, כמה תחנות־גבול לשכנותיה השונות יש לארץ הנדונה.

אחרי דוגמות אלו של בעיות מן הטופולוגיה הקומבינטורית תנתן דוגמה, לכאורה אף היא פשוטה מאד, מן הטופולוגיה „העדינה" או „הרציפה" המסתמכת על תורת־הקבוצות.

משולש נתון מחלק ו„מפריד" את כל נקודותיו של מישור המשולש לשתי מחלקות: הנקודות ש„בפנים" המשולש והנקודות ש„מחוצה לו". (הנקודות שבצלעות המשולש אינן מענינות אותנו; אפשר להכניסן באופן שרירותי למחלקה הראשונה או לשניה, אך מוטב להוציאן מכלל החלוקה.) עובדה זו נראית מבחינה הסתכלותית כמובנת מאליה; באמת אפשר להוכיחה על־סמך העובדות הפשוטות ביותר של הסדר (השוה ב§4 של הפרק השמיני). נבאר כאן ביאור נוסף שני מונחים שהשתמשנו בהם, והם: „מפריד", והניגוד „פנים־חוץ". הראשון ר״ל: אם נקשר נקודה פנימית ונקודה חיצונית (לשון אחר: שתי נקודות של

1. ארבע פינותיו של לוח השחמט אינן „נקודות" כל עיקר במובן המוגדר כאן.

המישור שאינן שייכות לאותה מחלקה) ע״י קטע ישר או קו שבור (ז״א מערכת סופית של קטעים), יחתוך הקטע או הקו לפחות אחת מצלעות המשולש. לעומת זאת אפשר לקשר שתי נקודות פנימיות, וכן שתי נקודות חיצוניות, ע״י קטע או ע״י קו שבור ללא פגיעה במשולש. שנית, בין שתי המחלקות יש להבחין על־פי מבחן זה: יש קוים ישרים המשתרעים כולם בתחום החיצוני, אולם אין ישרים העוברים במלואם בתחום הפנימי.

מובן הדבר, שאין לפנינו תכונה מיוחדת למשולש. קל הדבר להוכיח אותה תכונה לגבי כל מצולע „פשוט" (ז״א שצלעותיו אינן חודרות אחת לחברתה); כן לא יקשה הדבר לעבור מכאן ל„עקום סגור" מסוג פשוט, כגון מעגל או אליפסה. אך אם נשאל את עצמנו: מהו בכלל „עקום סגור"? לא תהיה התשובה פשוטה כל עיקר. הרי ראינו בעמ׳ 306, איך יוכל עקום להפוך עורו וללבוש תכונות משונות. הדרישה שיימצא משיק לעקום בכל אחת מנקודותיו, וכך שכוון המשיק ישתנה באופן רציף, תהווה תנאי חמור מדי בשביל שימושים ידועים, וגם תנאי שחומרתו מיותרת לפי מהות הענין. למטרה שלפנינו מתאימה מאד ההגדרה הכללית הבאה; בה מופיע שמו של C. Jordan, שהכניס רעיונות אלה לאוצרה הקלסי של המתימטיקה:

עקום שאפשר לראותו כהעתק (חד־חד־ערכי) רציף של מעגל, נקרא קו־ז׳ורדן סגור[1].

למושג זה יש אופי טופולוגי. ועתה אפשר לנסח את המשפט המפורסם, שבו יש להבין את המונח „מופרד" כפי שפרשנוהו לעיל:

משפט־העקום של ז׳ורדן. המישור מחולק ע״י כל קו־ז׳ורדן סגור שבמישור לשני תחומים מופרדים, תחום־הפנים ותחום־החוץ של העקום.

משפט זה נמנה על המשפטים החשובים ביותר במתימטיקה, הואיל ותפקידו אינו מוגבל לגיאומטריה; יש צורך לבסס עליו הוכחות יסודיות בחלקים שונים של האנליזה (בעצם כבר בחשבון האינפיניטיסימלי). לכאורה נראה הוא אף כאחד המשפטים הפשוטים ביותר; ברם השערה זו אינה מתאמתת. אדרבה,

1. תחת ההגדרה הגיאומטרית אפשר גם לתת הגדרה אנליטית, למשל בעזרת תיאורו „המיצדי" (הפראמטרי; השוה במלואים לחלק החמישי, מספר טז)) של עקום במישור:

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

אם f ו־g הן פונקציות חד־ערכיות ורציפות של המיצד t בריוח ידוע, ואם כנגד ערכים שונים של t מתקבלים תמיד זוגות שונים (x, y), תיקרא מערכת כל הנקודות (x, y) בשם „קשת של ז׳ורדן"; ובדיוק כך (בהוספת שעור שלישי z) אם הכוונה לעקום במרחב. זאת אומרת: קשת של ז׳ורדן היא תמונה חד־חד־ערכית של קטע (ריוח ההשתנות של t). נשלים את ההגדרה בקבענו: אם לשני קצות הריוח (של ערכי t) מותאם אותו הזוג (x, y) תיקרא מערכת הנקודות (x, y) בשם „קו־ז׳ורדן סגור".

הוכחת המשפט קשה למדי – גם עם השינויים המפַשטים שהוכנסו לאחר הוכחתו המקורית של ז׳ורדן משנת 1887 (הסובלת מליקויים אחדים). מספרן הרב של ההוכחות למשפט זה (בעיקר מ 1910 ואילך) הוא עדות לחשיבותו ולעמקו גם יחד. ואם תאמר: אין זה אלא פלפול מתימטי, כשדורשים הוכחה עיונית למשפט שהוא כה מובן באספקלריה של ההסתכלות – הנה לא רק שאינו מובן מאליו, אלא אפשר לתת דוגמות לקו־ז׳ורדן סגור, שלגביהן לא תצלח ההסתכלות לאשר (או לסתור) את המשפט. דוגמות כאלה מתקבלות שוב (השוה עמ׳ 307) ע״י בניית עקומים רציפים שהם מחוסרי־משיק בכל נקודה; דהיינו ע״י פונקציות רציפות ולא גזירות.[1]

מי שרוצה להתעמק בנושא זה, ישים לב למשפטו הבא של Schoenflies:
כל העתק טופולוגי בין מעגל לקו־ז׳ורדן אחר ניתן ל„הרחבה" במובָן זה, שקיים העתק טופולוגי בין תחומי־הפנים של שני העקומים, העובר באופן רציף אל ההעתק הנתון בין העקומים. הדבר המענין הוא, שאי אפשר להפוך משפט זה; לאמור: לא כל העתק טופולוגי בין תחומי־הפנים עובר אל העתק טופולוגי בין העקומים עצמם (שהם שפות התחומים), כי אם רק העתקים מיוחדים, כגון ההעתק הקונפורמי (עמ׳ 298).

אפשר להעביר את המושגים הנ״ל ואת משפטו של ז׳ורדן גם למרחב, ואפילו למרחב בעל כל מספר (n) של ממדים. באופן עקבי נכנה במרחב התלת־ממדי בשם „משטח־ז׳ורדן סגור" כל משטח המתקבל מתוך העתק טופולוגי של פני כדור. כל משטח כזה מפריד את המרחב לשני תחומים: תחום־הפנים ותחום־החוץ של המשטח.[2] אך למשפט המקביל למשפטו של Schoenflies אין תוקף בשלשה ממדים.

כדוגמה אחרונה של בעיה טופולוגית במישור – גם היא בעלת חשיבות בתורת־הפונקציות, לא פחות מאשר בגיאומטריה – תנתן דרגת ה„קשר" של תחומים[3] (במישור). נוח לסמוך כאן על המושג של קווי ז׳ורדן, כלומר

---

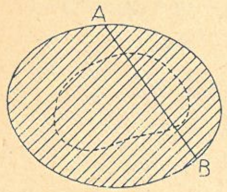
1. דוגמה מאלפת ניתנה ע״י H. von Koch; עיין מאמרו:
Sur une courbe sans tangente obtenue par une construction géometrique élémentaire. *Acta Mathem.*, vol. 30 (1906).
השוה: **K. Knopp**: Einheitliche Erzeugung uud Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und von Koch. *Archiv der Math. u. Physik*, (3) vol. 26 (1917).
בצורה גסה יש לומר: בניית העקום מתחילה מהיקפו של מגן־דוד, לפי תהליך אינסופי המוסיף חנודות בכל צעד וצעד. אפשר להגדיר „מסילה" ממרכזו של מגן־דוד זה, המתקרבת אל העקום הנידון כעין לוליָן דרך אינסוף חנודות, באופן שהעקום נמצא בין כל חנודות המסילה.

2. ההוכחה קשה מאד; היא ניתנה ע״י L. E. J. Brouwer ב־1911.

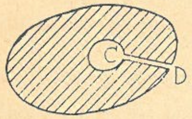
3. כנהוג, נבין ב„תחום" תמיד את התחום הפתוח, כלומר בלא שפתו. כשרוצים לרבות את השפה, מדברים על „תחום סגור". השוה הערה 2 שבעמ׳ 320.

על מושג מן הטופולוגיה „העדינה"; אך עצם מושג הקשר שייך לטופולוגיה הקומבינטורית.

יודגש במפורש, שאין הדברים תלויים בכך, אם מתכוונים למישור או למשטח עקום.



ציור 54



ציור 55

בציור 54 קְוּקַו תחום־הפנים של אליפסה; בציור 55 התחום המוגבל מבחוץ ע״י אליפסה ומבפנים ע״י אליפסה שניה המשתרעת כולה בתוך הראשונה. אין חשיבות לדבר, שלקחנו אליפסות דוקא; הרי מתוך עיוּת טופולוגי תעבור האליפסה שבציור 54 לאיזה קו־ז׳ורדן סגור, למשל לשפתו של מלבן או של משולש; כן יעבור זוג האליפסות שבציור 55 לזוג של קווי־ז׳ורדן שאחד מהם נמצא כולו בתוך חברו. נציין את ההבדל בין התחומים שבציורים 54 ו 55 בכמה אופנים:

א) שולי התחום מורכבים בציור 54 מרֶצף (קו־ז׳ורדן) אחד, בציור 55 משני רצפים.

ב) בחברנו אלו שתי נקודות שהן, A וB, של שולי התחום הראשון (ציור 54) ע״י קו המשתרע בפנים התחום, למשל ע״י הקטע AB או ע״י קו שבור מתאים, ובחתכנו את התחום לאורך אותו קו, מתפרד התחום לשני תחומים נפרדים. דבר זה יכול לקרות גם במקרה השני, אך לא לגבי כל שתי נקודות של השוליים יקרה זה בהכרח; אם החיתוך נעשה, למשל, בין הנקודות C וD (ציור 55), ישאר תחום קשיר אחד. דבר זה יומחש בצורה בולטת, אם יורחקו קצת זה מזה שני עברי החתך, כפי שנעשה בציור 55. אולם תחום חדש זה שקבלנוהו ע״י החיתוך, יעבור ע״י עוּות טופולוגי מתאים לצורת התחום שבציור 54.

אפשר לנתח באופן עיוני את המושג ההסתכלותי „קשיר" שהופיע כאן בדרך זו: תחום נקרא קשיר, אם אפשר לחבר כל שתי נקודות של התחום ע״י קו (לאו דוקא ישר אלא, למשל, קו שבור) באופן שכל נקודות הקו נמצאות בתחום עצמו. אין זה אפשרי במקרה של הציור 54 אחרי בצוע של חיתוך לאורך הקטע $\overline{AB}$; הקורא ידמה בנפשו שגם שם יורחקו זה מזה שני עברי החתך $\overline{AB}$.

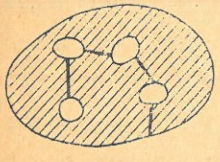
ג) נצייר קו־ז׳ורדן סגור בכל אחד מן הציורים! (עיין העקום הפנימי בציור 54; הקורא ידמה קו דומה המקיף את האליפסה הפנימית גם בציור 55, לפני חיתוך התחום.) במקרה הראשון אפשר לצמצם את הקו הסגור ע״י עיוּת טופולוגי למעגל קטן ככל הרצוי ללא הוצאתו מתוך התחום. ואילו במקרה השני אין זה אפשרי; שהרי לא נוכל לצמצם את הקו הסגור אלא עד שיתקרב לאליפסה הפנימית; תהא זאת קטנה כאשר היה – יש עוד מעגלים קטנים יותר העוברים כולם בפנים האליפסה הפנימית.

בשינוי־מה אפשר לבטא הבדל זה גם כך: תחום τ_1 מן הסוג הראשון מכיל את כל תחום־הפנים של כל קו־ז'ורדן סגור העובר בתוך τ_1; ואילו בתחום τ_2 מן הסוג השני קיימת אמנם תכונה זו לגבי קוים סגורים מסויימים אך לא לגבי כל קו סגור העובר בתוך τ_2[1].

בהסתמכנו על התכונות ב) ו־ג), נוכל להגדיר כך:

תחום[2] τ במישור נקרא פְּשוּט־קֶשֶׁר, אם כנגד כל קו־ז'ורדן סגור $\mathfrak{J}$ המשתרע כולו בתוך τ, נמצא גם תחום הפנים של $\mathfrak{J}$ כולו בתוך τ. אם אין זה מתמלא, נקרא τ רב־קשר. בפרט נקרא התחום τ כפול־קשר, אם אפשר לקשר שתי נקודות מתאימות של τ ע"י קטע או קו שבור באופן שע"י חיתוך התחום τ לאורך הקו („החתך") הופך τ לתחום פשוט־קשר.

בעזרת הגדרה אינדוקטיבית (עמ' 110) אפשר עתה להבחין בין האפשרויות השונות לגבי תחומים רבי־קשר שאינם כפולי קשר דוקא. שכן נוכל לקבוע: תחום שאינו פשוט־קשר, נקרא n־קשר או בעל דרגת־הקשר n, אם ע"י חיתוך לאורך קו שבור המקשר שתי נקודות מתאימות של שולי התחום אפשר להפוך את התחום לתחום שיש לו דרגת־הקשר $n-1$. בעזרת $n-1$ צעדים „נרד" כך לתחום פשוט־קשר. דרגת־הקשר היא מושג טופולוגי.


ציור 56

בציור 56 מופיע תחום (מקווקו) בעל דרגת־הקשר 5; וכן מצויירים בו ארבעה חתכים מתאימים שצירופם הופך את התחום לתחום פשוט־קשר. לפי ההבחנה א) מוגבל התחום המקורי ע"י חמישה רצפים.— הקורא ימחיש נא את הציור בתבנית של נייר — או, אם אפשר, של חומר גמיש יותר, בהכניסו חורים (מתאימים לארבעת התחומים הפנימיים) אל החתיכה המוגבלת ע"י הקו הסגור החיצוני, ובחתכו אחרי כך לפי ארבעת החתכים המצויירים. אם יחתוך לפי

1. יש להעדיף ניסוח חדש זה על הניסוח שבראשית ג), כי על־פי הניסוח החדש עובר תחום מן הסוג הראשון ע"י ניקוב באחת מנקודותיו בלבד (ז"א ע"י הוצאת נקודה אחת) אל תחום מן הסוג השני, וכך רצוי להגדיר. למשל, עיגול שייך לסוג הראשון; עיגול פרט למרכזו לסוג השני.

2. עד כאן השתמשנו במונח „תחום" לפי ההסתכלות, ללא הגדרה עיונית. למען הקורא שהתאמן בינתים במידה מספיקה תנתן גם הגדרה מדוייקת: קבוצת נקודות S במישור נקראת תחום, אם השתייכותה של איזו נקודה ל־S גוררת אחריה גם השתייכותה של סביבה ידועה של הנקודה (למשל של עיגול בעל מחוג קטן סביב הנקודה) ל־S ואם הקבוצה S קשירה לפי הפיסקה ב). אם נגדיר כך, לא תחשבנה נקודות השפה (השוליים) כנקודות התחום עצמו. שולי התחום בציור 55 מורכבים, כמובן, משתי האליפסות יחד. — בפרק זה כולו נשתמש במונח „תחום" במובן של תחום חסום; כלומר, תחום הנכלל בעיגול גדול למדי.

חלק מחתכים אלה בלבד, יקבל תחום שדרגת־הקשר שלו גדולה מ־1. (מובן שתחת העקומים הסגורים מותר לקחת, למשל, גם משולשים או מלבנים.)

§ 3. בעיות טופולוגיות במשטחים עקומים.

הדוגמה הראשונה הניתנת בסעיף זה ידועה לרבים מבין הקוראים מלימודי הסטיריאומטריה בבית הספר. שם מופיעה היא כבעיה במרחב התלת־ממדי, ואמנם כך המצב לא רק לאור הגיאומטריה האלמנטרית כי אם גם מתוך השקפת הפרק הששי (חטיבה שניה). אולם במסגרת הטופולוגיה קל להעבירה לשני ממדים, כלומר לתפשה כנוגעת למשטח עקום מסוג ידוע. הכוונה ל„משפטו של אוילר" על פיאונים. כבר דיקַרט הגיע למשפט זה, ויש לשער שהיה ידוע אפילו בתקופת היוונים; אולם הוא פורסם לראשונה ע"י אוילר בשנת 1758.

המשפט מדבר על „פיאון של אוילר", כלומר על גוף קמור (סופי) המוגבל מכל עבריו ע"י „פיאות" מישוריות ששוליהן מצולעים. הנחת הקמירות מבטיחה, שלא יווצרו מרחבים חלולים מעין „מערות". נצטמצם להלן תמיד בפיאונים מסוג זה. כפי שיוצא מן ההוכחה הניתנת להלן, אין כל השיבות להנחה — הנהוגה בסטיריאומטריה האלמנטרית — שהפיאות הן מישוריות: אם נצא מאיזה גוף קמור ונחלק את פניו לתחומים פשוטי־קשר, במשכנו קווים עקומים על פני הגוף, ישאר בתקפו כל מה שנאמר כאן על פיאון. (אפשר לומר בפשטות: נדון בפיאון המתקבל מתוך כדור ע"י עיוות רציף. אמנם הגדרה זו כוללת חוג רחב יותר של פיאונים.)

נניח שלפיאון יש q קדקדים, m מקצועות (צלעות) ו־p פיאות (משטחי שפה, המוגבלים במקרה דדן ע"י מצולעים). הטענה היא:

משפט הפיאונים של אוילר. בין מספרי קדקדיו, מקצועותיו ופיאותיו של פיאון קיים היחס

$$q+p=m+2.$$

לשם הוכחת[1] המשפט נשען מצד אחד על כך, שיש לפנינו טענה טופולוגית (אכן כל עיוות רציף אינו משנה מאומה), ומצד שני על מה שלמדנו

1. עשרות הוכחות ניתנו למשפטו של אוילר; H. Poincaré הכלילו ל־n ממדים בצורה $m_0-m_1+m_2-\ldots=1-(-1)^n$, אם m_0 מספר הקדקדים, m_1 מספר המקצועות, m_k,... מספר היצירים בעלי k ממדים. M. Dehn נתן בשנת 1905 הוכחה פשוטה למדי, שכחה יפה ל־3, 4 ו־5 ממדים. (לגבי בעיות הטופולוגיה הקומבינטורית במרחב בעל יותר מ־3 ממדים השוה את הרמזים בפרק השמיני, § 1.)

הכללה אחרת מכוונת ליצירי הגיאוגרפיה הפיסית על פני כדור הארץ; היא באה למצוא יחסים בין ההרים, העמקים, המעברות וכו' ביבשה; בשאלה זו דנו קיילי (1859) ו־J. C. Maxwell (1870). המחקר האחרון מכיל בתוכו כבר את הגרעין לפיתוחה החדישה של תורת הווריאציות „בגדול".

מחקר מעמיק על תורת הפיאונים במסגרת הטופולוגיה בכללה נתן E. Steinitz בספרו, שהופיע אחרי מותו עם השלמות מאת H. Rademacher:

Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie. 1934.

ב § 2 לגבי מערכות של „שבילים" ו„נקודות", כגון בבעית הגשרים (אף אותה פתר אוילר!). הפעם לא נדחה את ההוכחה למלואים; שכן אינה קשה במיוחד והיא מהווה תרגיל מצויין לכל קורא המתענין בטופולוגיה.

פיאון הוא משטח סגור, מחוסר שפה. אם נוציא ממנו אחת מפיאותיו, המוגבלת ע"י מצולע בעל N צלעות, יישאר משטח בעל שפה, והשפה היא אותו מצולע. נתאר לנו משטח אחרון זה עשוי מגומי ונעוות אותו, בשמרנו על מצב־הקדקדים וכו׳, עד שיעבור לתחום במישור (או על משטח עקום, למשל על פני כדור)! בתהליך זה יישמרו מספרי הקדקדים והמקצועות, ואילו מספר הפיאות יוקטן ב־1 (כנגד הפיאה שהוצאה); שפת התחום הוא מצולע בעל N צלעות (ישרות או עקומות). אולם מעתה לא נביא בחשבון את הקדקדים והמקצועות הנמצאים אחרי העיוות בשפת התחום; לפי זה עלינו לנכות N קדקדים וN מקצועות. לפיכך, אם יסומנו מספרי הקדקדים, המקצועות והפיאות שנותרו ב $\bar{q}$, $\bar{m}$, $\bar{p}$, יהיה

$$\bar{q}=q-N, \quad \bar{m}=m-N, \quad \bar{p}=p-1. \qquad (1)$$

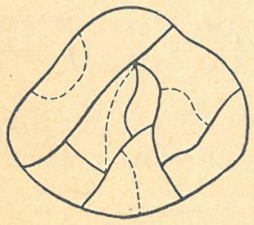
ועתה נראה את תצורת ה„קדקדים", ה„מקצועות" וה„פיאות" שנותרו — במישור, או במשטח שעליו פרשנו את שארית הפיאון — באספקלריה של בעית הגשרים (עמ׳ 313/4). מכיון שבכל קדקוד נפגשים לפחות שלשה ממקצועות הפיאון, ייראה כל קדקוד כ„נקודה" בעלת סדר הגדול מ 2. כמו כן ייראה כל מקצוע כ„שביל", במובן החריף שכל שביל מקשר נקודה עם אחת משכנותיה, פרט לשבילים המקשרים אחת הנקודות עם מקום שבשפה. לבסוף מחלקים השבילים את התחום כולו לתחומים „מינימליים", כלומר לתחומים חלקיים שבתוכם לא נמצא כל שביל. מספר הנקודות הוא $\bar{q}$, מספר השבילים $\bar{m}$, מספר התחומים המינימליים $\bar{p}$. הציור 57, למשל, מכיל 6 נקודות, 12 מקצועות ו 7 תחומים מינימליים, אם נתעלם מן הקווים המסורגים שבהם ידובר להלן.

הבה נתבונן בשינויים שיתהוו, אם יתווסף שביל חדש על אלה הנמצאים! לשביל יש שתי נקודות־קצה, ולגבי כל אחת מהן יש ברירה משולשת: א) הנקודה נמצאת בשפת התחום כולו; במקרה זה לא יוגדל על־ידיה מספר ה„נקודות" במובן הנ"ל. ב) הנקודה מתלכדת עם אחת הנקודות הנמצאות; גם במקרה זה לא יוגדל מספר הנקודות, ובשני המקרים לא תשפיע הנקודה החדשה על שאר השבילים. ג) הנקודה נמצאת בפנים אחד השבילים; במקרה זה היא מחלקת אותו שביל לשני שבילים חדשים ומגדילה עם זאת את מספר הנקודות

כמו כן מעמיק הספר H. S. M. Coxeter: Regular polytopes. London, 1948 & New York, 1949.

נזכיר עוד ספר אלמנטרי יותר:
M. Brückner: Vielecke uud Vielflache. Theorie und Geschichte. 1900.

ב 1. (צירופים אחדים של מקרים אלו הומחשו בציור 57 ע"י הקווים המסורגים.) בכל שלשת המקרים לא ישתנה אפוא המספר $\bar{q}-\bar{m}$ (כלומר, ההפרש בין מספרי הנקודות והשבילים), חוץ מצירופו של השביל עצמו, המגדיל את $\bar{m}$ ב 1. באשר לתחומים המינימליים, הרי מגדילה הוספת השביל את מספרם בכל מקרה ב 1. המסקנה הסופית היא אפוא: המספר $\bar{q}+\bar{p}-\bar{m}$ יישמר לעומת כל הוספה של שבילים.



ציור 57

לכן נקבל את הערך $\bar{q}+\bar{p}-\bar{m}$ כלפי כל תצורה בפשטות יתירה, אם נצא מתחום שאין בו שבילים ונקודות כל עיקר; לא נתחשב כאן בשפת התחום, כאמור לעיל. במקרה זה יהיה $\bar{q}=0$, $\bar{m}=0$, $\bar{p}=1$, ולכן

$$\bar{q}+\bar{p}-\bar{m}=1. \qquad (2)$$

לקורא המתקדם נעיר: התבססנו כאן על ההנחה שקו סגור אחד מגביל את התחום בכללו, כפי שהדבר נכון במקרה הפיאון דלעיל, שבו הקו הוא המצולע בעל N צלעות: כלומר, שפת הפיאה שהוצאה. לתחום כזה קראנו בעמ׳ 320 בשם „תחום פשוט־קשר". אילו היה התחום הכולל — שבו נמצאים הנקודות, השבילים והתחומים המינימליים — רב־קשר, כי אז היה החשבון משתנה. המספר $\bar{m}-\bar{q}-\bar{p}+2$ נותן בכל מקרה את דרגת־הקשר (עמ׳ 320) של התחום הכולל.

גמרנו את ההוכחה. שכן בהכניסנו אל השויון (2) את הערכים מ (1), נקבל

$$(q-N)+(p-1)-(m-N)=q+p-m-1=1,$$

ז"א $q+p=m+2$, מש"ל.

הוכחה אחרת למשפט אוילר, הנשענת על „תורת האילנות" של קיילי, ניתנת במלואים לחלק החמישי, מספר כ).

לפי התפיסה שנקטנו בהוכחה דלעיל, אפשר לתרגם מיד את המסקנה א) מעמ׳ 315 לשפת הפיאונים. מכיון שנמצאת לפנינו תצורה סגורה (תחום סגור) שאין בה נקודות־קצה, באות בחשבון רק „נקודות" בעלות סדר גדול מ 2, והן קדקדי הפיאון. המסקנה ההיא אומרת אפוא:

מספרם של אותם קדקדי הפיאון, שמהם יוצא מספר אי־זוגי של מקצועות, הוא זוגי.

קל להסיק ממשפטו של אוילר את המסקנה הסופית לגבי נושא, שכבר דן בו הכפר האחרון מספרי אבקלידס (עמ׳ 166), והוא: הפיאונים המשוכללים. אף־על־פי שנושא זה אינו שייך לטופולוגיה כי אם לגיאומטריה האקוויפורמית (הואיל ומדובר בו על שויון קטעים וזוויות), מכל מקום נביאנו כאן לשם נוחיות הדיון.

ראשית נשאל לפיאונים — אם ישנם — הממלאים את התנאי שלכל פיאותיהם יש אותו המספר N של קדקדים, ומכל קדקדיהם יוצא אותו המספר R של מקצועות. לפי זה מוגבלת כל פיאה ע"י

מצולע בעל N צלעות. הואיל ולאורך כל מקצוע נפגשות שתי פיאות וכל מקצוע מקשר שני קדקדים, קיים (הקורא יוכל לחשוב עַל קוביה)

$$pN = qR = 2m. \tag{3}$$

נקבל משוין זה לפי משפטו של אוילר משוואה „דיופנטית" (ו, 40/1) בין שלשת הנעלמים m, N, R:

$$2m\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{R}\right) = m+2, \quad m\left(\frac{2}{N}+\frac{2}{R}-1\right) = 2. \tag{4}$$

כל אחד מן המספרים הטבעיים N ו R אינו יכול, לפי הגדרתו, להיות קטן מ 3. לכן גורר אי־השוין (הנובע מהצורה השניה) $\frac{2}{N}+\frac{2}{R}>1$ אחריו את המסקנה:

$$\frac{2}{N}>1-\frac{2}{R}\geq\frac{1}{3}, \quad \frac{6}{N}>1, \quad N<6.$$

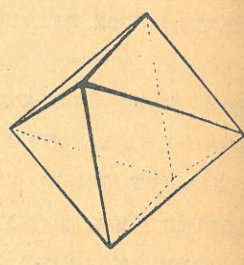
לפי אותו החשבון מתקבל גם $R<6$. נשארים אפוא לגבי N ו R הערכים 3, 4, 5 בלבד. לפי זה תמצה הרשימה הבאה, המעובדת עַל־פי היחסים (4) ו(3), את כל האפשרויות:

	p	q	m	R	N
ארבעון	4	4	6	3	3
תמניון	8	6	12	4	3
איקוֹסָאֶדרון	20	12	30	5	3
שִׁשון (כגון קוביה או תיבה)	6	8	12	3	4
תריסרון	12	20	30	3	5

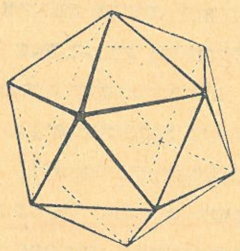
תשומת לב מיוחדת מעוררת העובדה כי הגענו אל המסקנה הזאת, שיכולים להיות רק חמישה סוגים של פיאונים משוכללים, ללא כל דרישה מֶטרית או אֶקוויפורמית, כגון שהפיאות מוגבלות עַל־ידי מצולעים משוכללים. הנחתנו הצטמצמה למספריהם של הקדקדים בכל פיאה ושל המקצועות בכל קדקוד. מכיון שנראה מיד כי באמת (אפילו במובן האקוויפורמי) יש חמישה פיאונים משוכללים, אפשר לומר: אין יותר פיאונים משוכללים במובן הטופולוגי מאשר במובן האקוויפורמי.

אם נוסיף עַל התנאי הקודם כתנאי שני, כי המצולעים המגבילים את הפיאות השונות של אותו הפיאון יהיו משוכללים (עמ' 188) וחופפים זה לזה, ותנאי מתאים לגבי הפינות היוצאות מן הקדקדים, נקבל את חמשת הפיאונים הנקראים הגופים המשוכללים, או גם גופי אפלטון.

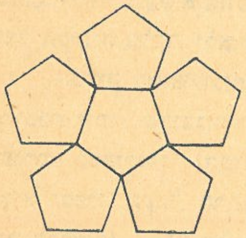
שנים מהם אינם טעונים ביאור נוסף: הארבעון המשוכלל, המוגבל עַל־ידי ארבעה משולשים שווי־צלעות שוים, והקוביה המוגבלת עַל־ידי ששה ריבועים שוים. באשר לתמניון ולאיקוסָאֶדרון[1], ניתנות להם בציורים 58 ו 59 דיאגרמות (דהיינו, ציורים דרך הטלה למישור). צורת התריסרון תהיה מובנת ביתר קלות מתוך מתן שיטה ליצירת תבניתו המרחבית עצמה. לשם כך יש לכוֹף את חמשת המחומשים החיצוניים שבציור 60 סביב המחומש



ציור 58



ציור 59



ציור 60

הפנימי עד כדי מגע בין כל זוג של מחומשים שכנים. בדרך זו יווצר מעין סל, פתוח לצד אחד, ששוליו הם עשרה מקצועות (צלעות מחומשים). אם שמים על סל זה, כצמיד פתיל, סל חופף לו, כך שעשרת המקצועות של האחד יצמדו לעשרת המקצועות של חברו, יווצר גוף סגור המוגבל ע"י שנים־עשר מחומשים משוכללים, והוא התריסרוֹן.

קדקדיו של כל פיאון משוכלל נמצאים על פני כדור אחד. המישור ם העוברים דרך מרכז הכדור ואחד־אחד מן המקצועות, יוצרים רשת „משוכללת" על פני הכדור; וחילופו: מתוך המצולעים הכדוריים הללו קל לבנות את הפיאונים המשוכללים.

נסיים את הדיון בגופים המשוכללים, בעוררנו בעיה טופולוגית הנוגעת לגופים אלו.

מתוך הלך־המחשבה שנקטנו בסעיף הקודם יש לשאול: האפשר לעבור בקו שבור אחד בלבד על כל מקצועות התצורה המרחבית הנוצרת ע"י מקצועותיו של גוף משוכלל? הכוונה היא, כאן כמו שם, שעוברים על כל מקצוע פעם אחת בלבד; אך מותר לחזור על אותה הנקודה. מובן שהבעיה, לעמקו של דבר, אינה מרחבית; שהרי אם נחליף את הפיאון בדיאגרמה שלו במישור, לא ישתנה מאומה לאור השקפתנו. קל להגיע בעזרת השיטה המבוארת ב § 2 לידי המסקנה, שהדבר אפשרי – וביתר דיוק: אפשרי בעזרת קו שבור

1. מן המלים היווניות εἴκοσι = 20, ἕδρα = מושב, משטח. גם השמות הלועזיים לשאר הפיאונים הללו נגזרים משמות המספרים ביוונית: τέτταρα = 4, ἕξ = 6, ὀκτώ = 8, δώδεκα = 12.

סגור – אצל התמניון, שבכל אחד מקדקדיו נפגשים ארבעה מקצועות, אולם אינו אפשרי אצל שאר הפיאונים המשוכללים, הואיל וקדקדיהם כולם בעלי סדר אי־זוגי. כבן־זוגו הדואלי של התמניון (במובן הדואליות במרחב, דהיינו מתוך התאמת נקודות למישרים, וחילוף הדבר; השוה בעמ׳ 229) יש לראות את הקוביה; לפי זה אפשר לעבור על הקוביה „במובן הדואלי", כלומר: מפיאה לפיאה דרך המקצועות, כך שעוברים על כל מקצוע פעם אחת ויחידה, בעוד שמותר לחזור על אותה הפיאה כמה פעמים. מחמת הדואליות אפשרי דבר זה אצל הקוביה בלבד, ולא אצל שאר הגופים חמשוכללים.

הבעיה הטופולוגית הפשוטה שלפנינו יכולה לשמש מוצא לבעיה דומה, מסובכת יותר, שהוצגה לא כבעיה מתימטית כי אם בתורת משחק. חוקר מפורסם כהמילטון [1] (השוה I, 216), בהיותו האסטרונום המלכותי של אירלנד, הביא בפני הקהל הרחב משחקים הנוגעים לטופולוגיה על פני הפיאונים (המשוכללים), בפרט על פני התריסרון והאיקוסאדרון; ואמנם יש „משחקים" שבהם טמונות בעיות מתימטיות קשות מאד.[2]

בלא להכנס לפרטים [3] נציין, כדוגמה, אחת משאלות המשחק הנידון: לעבור, בנסיעה לאורך מקצועות התריסרון, על כל עשרים קדקדיו – ועל כל אחד פעם אחת בלבד – בתנאי שיהיו נתונים מראש חמשת הקדקדים הראשונים שבנסיעה.

דובר כאן על נושא שלבו של אדם גס בו: הפיאונים. מי מתקשה לתאר לעצמו קוביה או פירמידה? נעבור עתה לנושא, שגם הוא פשוט בעצם ונוח לתפיסה הסתכלותית, אך אינו שכיח בדמיונו של אדם; ולא עוד אלא שאף הגיאומטרים בעצמם לא הרגישו במציאותם של היצירים הנדונים עד לפני כמאה שנה. נקדים הערות אחדות, מובנות מאליהן כמעט, על משטחים!

---

1. The traveller's dodecahedron, or a voyage round the world, invented by Sir W. R. Hamilton, forming a new and highly amusing game for the drawing room, particularly interesting to students in mathematics, illustrating the principles of the Icosian calculus. London, 1859.

כבר לייבניץ (באחד ממכתביו אל N. Remond) הביע את המשאלה, שאיש מוכשר יטפל לפי שיטה מתימטית ופיסיקלית בכל מיני משחקים, שכן „שכל האדם מצטיין במשחקים כמעט יותר מבכל דבר אחר".

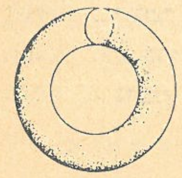
2. מאידך יש שמשחק, המרתק אליו את תשומת לב הקהל הרחב מקטון ועד גדול, מפסיד פתאום את ערכו וחשיבותו ע״י טיפול מתימטי המצליח לתת פתרון מושלם למשחק. כך קרה בשנת 1879 ל„משחק ה־15" (עמ׳ 314) שזרע בזמנו שגעון־ממש בכל אירופה.

3. לגבי משחק־המילטון וכמה שאלות טופולוגיות אחרות, השוה את הספר, שהוא אלמנטרי, אך מעמיק ורב־צדדי:

W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen uud Spiele.

שני כרכים, מהדורה שניה, 1910 ו1918.

יש משטחים עקומים שהם „סגורים" [1], כלומר שאין להם שוליים (שפה). הדוגמה הפשוטה ביותר מהווים פני כדור או פני אליפסואיד. דוגמה של משטח עקום סגור מסוג לגמרי אחר (השוה להלן) משמשים פני צמיג, מעין זה הסובב אופן מכונית, או גם פני טבעת רגילה; הכוונה אפוא למשטח הנוצר מתוך סיבוב מעגל (או אליפסה) סביב ציר שמחוצה לו במישור המעגל. משטח כזה ייקרא טבעת. (השוה ציור 61; להלן נזדקק לחתך שבציור לשם מטרה מיוחדת.) הקורא ישים לב לכך, שהמדובר הוא במשטח ולא בגוף; משום כך השתמשנו במונח „פָנים"! לפני טבעת רגילה או לפני צמיג יש מלבד פני־החוץ הנראים, גם עבר מבפנים; נוכל לקרבו לדמיוננו למשל בהתכוונ‌נו לטבעת של כסף מצופה זהב ובתארנו כמשטח הנידון את הציפוי הדק לבדו.



ציור 61

לעומת משטחים סגורים כאלה יש משטחים אחרים בעלי שוליים או משטחים פתוחים. מי שקורע דף מתוך ספר זה יקבל חלקה מישורית – או, אם יכוף את הדף, חלקה ממשטח עקום – ששוליה מלבן, או עיוות של מלבן. חיתוכם של פני כדור לשני חצאים ייצור שתי „כיפות", וכל כיפה מוגבלת היא ע״י מעגל שלם המשמש שוליה. בחתכנו טבעת במקום אחד, כבציור 61, ובמתחנו את קצות החתך הנה והנה, נהפוך אותה למשטח־צינור, למשל למשטח־גליל סופי; השוליים הם שני מעגלים או עקומים סגורים אחרים.

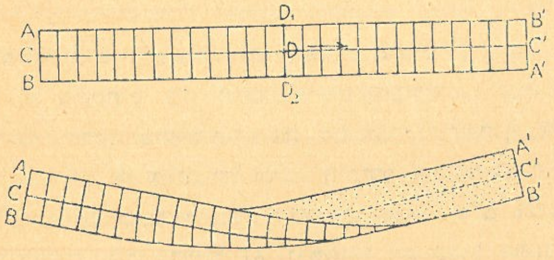
הצד השוה שבכל הדוגמות האלה וכיוצאות בהן הוא: יש למשטח שני צדדים (עֲברים, פָנים). לשם הבלטת עובדה זו נקח לנו תבניות למשטחים הנ״ל, עשויות מנייר או מחומר (לבן) אחר. נבחר לנו מקום שרירותי, הנמצא בהכרח באחד משני עברי המשטח, נשחיר את סביבת המקום ונמשיך בהטלת הצבע השחור ברציפות ככל האפשר; רק בתנאי, המתבטל מעצמו כלפי המשטחים הסגורים, שלא נעבור על שולי המשטח בתהליך ההשחרה. לפי זה יהיו בכל מקרה שני צדי המשטח נבדלים זה מזה בצורה מוחשית לחלוטין: אחד השחיר, והצד השני נשאר לבן. אי אפשר להגיע מן הצד הלבן אל השחור, או חילופו, אלא מתוך קפיצה מעבר לשוליים, או מתוך „ניקוב" המשטח לשם חדירה מעברו האחד לעברו השני.

הקורא יתפלא בודאי על הדגשת הדברים האלה, בחשבו למובן מאליו שלכל משטח יש שני צדדים. הנחה זו נראית כה ברורה הואיל ואנו רגילים לתאר לנו משטח כגבולו של גוף, והרי גוף במובן הרגיל מפריד את

---

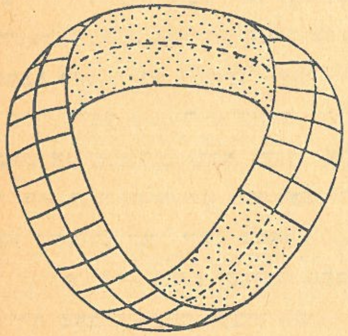
1. נשתמש כאן במונח זה במובן, שהוא שונה מן המובן שהופיע אצל קבוצות (עמ׳ 303); וכן לקמן לגבי המונח „פתוח".

המרחב לשני חלקים: צד הפנים של הגוף וצד החוץ. חלוקה זו מבחינה ממילא בין שני צדי המשטח. (כך ראו המתימטיקנים במשך תקופה ממושכת גם את הפיאונים כגופים, עד הכירם כי תפיסתם כמשטחים מפשטת את הטיפול.) אולם ההשערה, כאילו לכל משטח יש שני צדדים, אינה מתאשרת: יש משטחים — הן פתוחים הן סגורים — שאין להם אלא צד אחד בלבד: משטחים חד־צדדיים. עובדה זו, שהיא פשוטה ומפתעת כאחד, נתגלתה ע״י Möbius[1] ו Listing בשנת 1858, ועל שמו של מיביוס נקראת הדוגמה הפשוטה ביותר למשטח מסוג זה: סֶרט של מיביוס. קל מאד ליצור תבנית של סרט כזה: נצא מפסת־נייר ארוכה במקצת בצורת מלבן, כפי הציור 62, נרביץ (נעקל) את השפה $\overline{B'A'}$ פעם אחת סביב הציר CC' (השוה



ציורים 62, 63

בציור 63) ונחבר בדבק את השפות $\overline{AB}$ ו $\overline{A'B'}$, ואולם (לרגל ההרבצה) כך ש A' (לא B'!) יתלכד עם A, B' עם B (עיין בציור 64). אחרי הגדירנו כך את המשטח, נבחר במקום מסויים, למשל ב D, ונשחיר את סביבתו למעלה ולמטה עד שולי המשטח (עד D_1 ו D_2), ומשם נתקדם על גבי המשטח בכוון מסויים, למשל בכוון החץ, בהשחירנו כנגד הרוחב $\overline{D_1D_2}$. והנה אחרי התקדמות כדי אורך המלבן המקורי נמצאים אנו „מאחורי" סביבת D, מעֵבר לצד שיצאנו ממנו; אחרי התקדמות־משנה כדי אותו האורך נשוב למקום D שיצאנו ממנו. עברנו כך לאורך המשטח והשחרנו את כולו; כלומר, התברר, שיש לסרט של



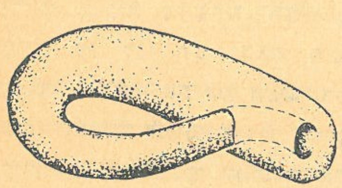
ציור 64

1. הוא, וביתר שיטתיות F. Klein, נתנו גם הגדרה ומבחנים עִיוּנִיִּים לחד־צדדיותו של משטח, ללא תלות בתיאור המשטח במרחב. בקשר לכך מתעוררת השאלה העדינה במקצת, אם ועד כמה יש לראות את תכונתו של משטח, להיות דו־צדדי או חד־צדדי, כתכונה טופולוגית; von Dyck ו Steinitz נתנו תשובה מדוייקת על שאלה זו.

מיביוס צד אחד בלבד. אם נעמיד על משטח זה, למשל ב D, בובה כך שראש הבובה מופנה למעלה, ונעבירנה על גבי המשטח לפי כיוון התקדמותנו הנ״ל, תופיע הבובה במקום שמעֵבר ל D וראשה למטה; אך בשובה למקום המוצא תעמוד כבראשונה.

הפתעה חדשה צפויה לנו אם נחתוך את המשטח החד־צדדי שלפנינו חתך שלם לארכו. בחתכנו פני כדור לפי איזה קו שהוא עד שובנו למקום המוצא, ייפרד המשטח והיה לשני משטחים שונים. ואילו סרט־מיביוס, אם נחתכנו לפי הקו DC' ונמשיך עד שובנו אל מקום המוצא D, לא ייפרד המשטח אלא תתקבל מעין עניבה, ארוכה פי שנים מקודמתה ובעלת שני עיקולים, אך דו־צדדית כמשטחים רגילים. אם נחתוך גם עניבה זו לארכה עד תומה, תתקבלנה אמנם שתי עניבות, אך הן שלובות אשה אל תוך אחותה. הקורא יאשר נא דרך הנסיון המעשי טְענות אלה, בצאתו מתבנית של נייר ובחתכו במספריים!

עד כאן עסקנו בסרט של מיביוס, שהוא משטח חד־צדדי פתוח; השוליים הם עקום סגור אחד במרחב, העובר (לפי הסימון בציור 62) מ A דרך D_1 אל B' $(=B)$, ומשם דרך D_2 בחזרה אל A' $(=A)$.[1] אולם יש גם משטחים חד־צדדיים סגורים.[2] נתאר את הדוגמה המכונה „צנצנת של קליין". כדי ליצור אותה נצא (השוה ציור 65) מצינור פתוח של גומי כפי שרגילים לקשור אותו לברז של מים. בחברנו זה לזה את פיות הצינור — המתואר, כמובן כמשטח ולא כגוף — נקבל טבעת (עמ׳ 327). אולם כאן נפעיל על הצנור תהליך אחר; כדי לתארו באופן מוחשי, נניח שפיו האחד של הצינור וסביבתו יהיו צרים במקצת מהצינור בכללו. נעקם את הצינור ונקרב את הפה הצר אל איזה מקום באמצע הצינור מבחוץ; כאן נחדיר את הפה אל תוך הצינור ונעבירנו בפנים עד הפה השני, כך ששני הפיות יופיעו כמעגלים משותפי־מרכז. לבסוף נלכד את שני הפיות בעקמנו את הפנימי קצת החוצה ואת החיצוני קצת פנימה, ובהרחיבנו במידה מספיקה את הפה הצר. בדרך זו נוצר משטח סגור, „הצנצנת של קליין"; יש לו עקום־חדירה סגור (מעגל) במקום בו חודר פיו הצר של הצינור אל משטח הצינור. מי



ציור 65

1. אי אפשר אמנם — בניגוד למלבן המקורי $ABA'B'$ — להפוך שוליים אלו למעגל מתוך עיוות־ממש, מפני שדבר זה מצריך חדירת הסרט אל עצמו, דבר שאין לבצעו בתבנית.

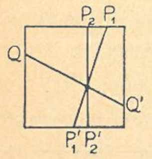
2. כל המשטחים הללו הם בעלי נקודות „מיוחדות"; לאמור: יש בהם מקומות, ששם מתלכדות נקודות אשר נחוץ לראותן כשונות מתוך השקפת הקשר (ההתקדמות הרציפה). אך אין זה חידוש; גם בין העקומים הסגורים במישור מגדירים עקומים בעלי „נקודות כפולות", כגון הלֶמניסקָטה (או הפֶּנטאגראמה, עמ׳ 284; או עקומו של פיאנו, עמ׳ 306).

שמתחיל להשחיר את פני הצנצנת יגיע באופן רציף מכל מקום הנראה לעין אל כל מקום הסמוי מן העין: יש לצנצנת צד אחד בלבד. מאידך אין לה שוליים; ברם נקודותיו של מעגל החדירה נחשבות פעמיים, כנגד שני מעברי ההתקדמות האפשריים. לא יקשה להווכח שמישור, החותך את הצנצנת של קליין לארכה באופן שיוצרו שני חצאים סימטריים, יגרום להופעת שני סרטי־מיביוס.

דוגמה אחרת של משטח סגור חד־צדדי, ואפילו מישורי, הכרנו לדעת ב § 3 של הפרק הששי (עמ׳ 249—260): המישור הפרוייקטיבי. אולם דוגמה זו היא, בניגוד לכל הקודמות, יציר שאינו חסום אלא משתרע אל האינסוף; משום כך קשה יותר לתארו בדמיון. קבענו בפרק הששי במסגרת הגיאומטריה הפרוייקטיבית, שבכל קו ישר במישור חלה נקודה „לא־אמיתית" אחת ויחידה; לשון אחר: כל ישר, ולכן גם המישור הפרוייקטיבי, הוא סגור „באינסוף". בלכתנו בכוון מסוים למרחקים, עתידים אנו לשוב מן הכוון הנגדי למקום המוצא; אך אם יצאנו בקומה זקופה, נשוב ורגלינו נצמדים במישור מעברו השני, כשראשנו מופנה למטה. יש כאן המחשה כביכול במרחב הדו־ממדי הפרוייקטיבי לביטוי השגור ש„מקבילים נחתכים באינסוף"; הישר הנמשך ע״י ראשי במהלך הנ״ל, חותך בנקודה הלא־אמיתית את הישר המקביל הנמשך ע״י רגלי.

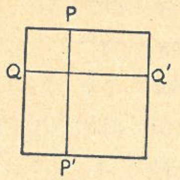
לדוגמה זו של משטח חד־צדדי יש להוסיף שתי הערות המכוונות לנושא שבו נדון להלן בסעיף זה: דרגות־הקשר של משטח.

ראשית, נוכל להמחיש את תכונותיו הטופולוגיות של המישור הפרוייקטיבי על פי תבנית סופית. לשם כך נעמיד כדור על המישור ונתאים כל נקודה על פני חצי־הכדור „הצפוני" (כלומר, המחצית המרוחקת מן המישור, לרבות את הקו המשוה) אל הנקודה שבה הישר, המקשר את נקודת־הכדור הנדונה למרכז הכדור, חותך את המישור. לפי זה יותאם כל זוג של נקודות נגדיות ב„קו המשוה" אל נקודה לא־אמיתית מסויימת של המישור הפרוייקטיבי. כך נוצר העתק — לא רק טופולוגי אלא בעל קרבה אמיצה הרבה יותר — בין המישור הפרוייקטיבי לבין חצי־כדור, בתנאי שנזהה זו עם זו כל שתי נקודות נגדיות של הקו המשוה. לפי זה מותאם, למשל, לכל ישר במישור העובר דרך „הקוטב הדרומי" (היא נקודת המגע בין המישור והכדור, ומותאמת היא ל„קוטב הצפוני") חצי־מעגל ראשי דרך הקוטב הצפוני. והנה נוכל להעתיק את חצי־הכדור הנידון (הצפוני) אל עיגול שבו שוב נזהה כל שתי נקודות נגדיות שבמעגל המגביל את העיגול. לבסוף, עיוות טופולוגי הופך את העיגול לריבוע (ציור 66), בתנאי שנזהה כל שתי נקודות „נגדיות" שבהיקף הריבוע, כגון P_1 ו P'_1, P_2 ו P'_2, Q ו Q'. תחומו של ריבוע זה הוא אפוא תבנית טופולוגית סופית למישור הפרוייקטיבי.

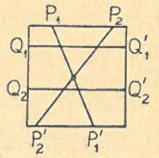


ציור 66

ינסה־נא הקורא לראות לפי שיטה זו ריבוע או מלבן, אך מתוך זיהויים אחרים בין נקודות ההיקף, כתבניות למשטחים אחרים — כגון לסרט של מיביוס (עיין ציור 67), לטבעת (ציור 68), לצנצנת של קליין.

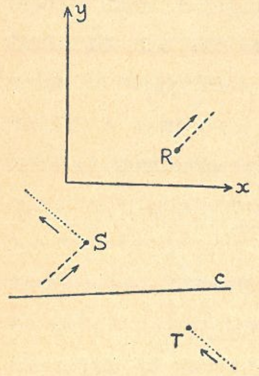


ציור 68



ציור 67

שנית, במישור המטרי של הגיאומטריה האנליטית הרגילה, וכמו כן במישור האַפיני, מחלק כל קו ישר, וכן כל זווית, את המישור לשני תחומים נפרדים. (השוה גם בפרק השמיני, § 4.) לא כן הדבר במישור הפרוייקטיבי. נסתכל למשל בזווית הישרה, ששוקיה ציר ה x החיובי וציר ה y החיובי (ציר 69). הנקודה R נמצאת בפנים הזווית, הנקודה S מחוצה לה. ברם בצעדנו מ R ימינה, נעבור דרך נקודתה הלא־אמיתית של קרן זו ונגיע משמאל אל S, בלא שעברנו דרך שוקי הזווית; הזווית אינה מחלקת אפוא את המישור הפרוייקטיבי לשני חלקים נפרדים. כיוצא בזה, אם נמשוך ישר c מחוץ לזוית הישרה, יש לתחום שבין הזווית הישרה והישר c במישור המטרי התכונה, שבתוכו נמצאת הנקודה S ומחוצה לו למשל הנקודה T, וכן R. ואילו במישור הפרוייקטיבי מתבטלת תכונה זו; נוכל להתקדם מ S דרך הקרן המנוקדת ונגיע, מעֵבר לנקודתה הלא־אמיתית והלאה, במסילה המנוקדת אל T, בלא שעברנו את שוקי הזווית או את הישר c.



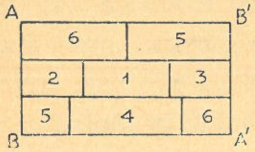
ציור 69

בהתאם לכך מפסידה במישור הפרוייקטיבי — וכן למשל על פני הכדור — ההבחנה בין תחום־הפנים ותחום־החוץ (השוה עמ׳ 317) של קו סגור, כגון משולש (מישורי או כדורי) או מעגל, את האופי המוחלט שיש לה במישור הרגיל. הקורא יזכור את הסיפור על שיכור, הפוגע בחושך בגדר הסובבת גן זואולוגי, ואחרי הקיפו את הגן כולו מגיע הוא לידי המסקנה, שאסרוהו במחנה ריכוז; במישור הפרוייקטיבי צודקת מסקנה זו.[1]

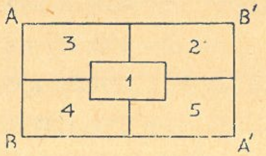
1. השוה סיפור משעשע קל של המתימטיקן D. E. Smith שהופיע ב *Scripta Mathem.*, כרך 11 (1945), עמ׳ 370—372.

כדוגמה נוספת למשטח חד־צדדי נתן במלואים לחלק החמישי, מספר כא), פיאון חד־צדדי.

בסופה של סקירה קצרה זו על הנושא של משטחים חד־צדדיים, תקויים ההבטחה מעמ׳ 313 לעורר את בעית הצבעים במשטח חד־צדדי. נראה שעל משטח חד־צדדי אפשר לבנות ששה תחומים, באופן שכל אחד גובל עם כל חמשת חבריו לאורך קו משותף. לשם בניה זו נצא (עיין בציור 70) מתיאור הדומה לזה שבציור 62, רק ששטח המלבן מחולק לתחומים המסומנים ב 1, 2, 3, 4, 5, 6. במישור – כלומר במשטח הדו־צדדי הנמצא לפנינו בציור כמו שהוא – מספיקים, כמובן, ארבעה צבעים (ולא פחות); הקורא „יצבע" נא בעצמו את המפה שלפנינו בצבעים 1, 2, 3, 4! (את התחומים הצבועים בציור ב 1, 2, 3, 4 יוכל להשאיר כך.) אולם אם נלכד, דרך עיקול במרחב כמו בעמ׳ 328, את הנקודות A ו A׳, וכן B ו B׳, באופן שהקטע $\overline{A'B'}$ יתלכד עם הקטע $\overline{AB}$ ושיווצר סרט של מיביוס, יתברר ש„עירוב־פרשיות" זה מכריח אותנו להשתמש בששה צבעים. עוד יותר שקוף הוא הציור 71, שבו אפשר להסתפק בחמשה צבעים אחרי ליכוד $\overline{A'B'}$ עם $\overline{AB}$ –



ציור 70



ציור 71

אך לא בארבעה. לעומת זאת אפשר לצבוע במישור הרגיל את התחום 4 בצבע 2, ואת התחום 5 ב 3; כלומר, להסתפק בשלשה צבעים.

כמו כן, בהתאם למה שנאמר בעמ׳ 313, יש במישור הפרוייקטיבי מפות שאין לצבען בפחות מששה צבעים. גם דבר זה מתואר ע״י הציור 70, אם נדמה בנפשנו שכל התחומים החיצוניים נמשכים עד אינסוף. מאידך, כפי שנאמר לעיל, הוכח ששה צבעים מספיקים על משטח זה תמיד, כלומר בכל מפה.

נושא שלישי לגבי משטחים ישמש לנו מושג בעל חשיבות רבה בגיאומטריה ובתורת־הפונקציות המכונה מינו של משטח. כאן נצטמצם בדרך כלל במשטחים דו־צדדיים.

נקח כדוגמות פשוטות את שלשת המשטחים הבאים, שכולם סגורים הם במובן של עמ׳ 327: א) כדור (או אליפסואיד או קוביה או תיבה); ב) טבעת, כצורתה בציור 61 [1], או גם כדור בעל ידית המאפשרת לאחוז בו; ג) קערת־מרק

1. בלועזית קוראים לטבת בשם הרומי torus.

בעלת שתי ידיות, בתנאי שמכסה הקערה צמוד אליה לצמיתות (לשון אחר: כדור שצמחו לו שתי ידיות; עיין בציור 72). לא יקשה הדבר לראות שאין להעביר משטח אחד ממשטחים אלה למשנהו בעזרת העתק טופולוגי. לכן ננסה לברר תכונה טופולוגית אפיינית לכל אחת מדוגמות אלו! (כמובן, מדובר כאן תמיד בפניו של הגוף הנידון.)


ציור 72

אם יצוייר על פני הכדור, או על פני משטח אחר מהסוג א), „חֲתך חוזר" – כלומר קו ז׳ורדן סגור (עמ׳ 317); במקרה הכדור, למשל, מעגל – הרי ייפרד המשטח הסגור ע״י החתך והיה לשני משטחים נבדלים, שהם משטחים פתוחים; שפתם המשותפת היא החתך. אפשר להפריד גם את הטבעת לשני משטחים נבדלים ע״י חתך חוזר מתאים, למשל ע״י מעגל קטן על פני הטבעת סביב לאחת מנקודות הטבעת. אולם לא כל חתך חוזר מביא לידי הפרדת הטבעת; חתך מן הסוג המסומן בציור 61 (מעגל „מירידיאני") אינו מפרידו אלא הופכו למשטח קשיר אחר, רק שזהו פתוח: בעל שפה משני עבריו (שפה לפי צורת החתך). המשטח החדש שוה־ערך הוא במובן טופולוגי לגליל סופי. ואולם אפשר להוכיח, שאם נמשוך על פני משטח חדש זה איזה חתך חוזר שהוא, ייפרד תמיד המשטח לשנים. ובכן לא כל חתך חוזר, אך כל זוג של חתכים חוזרים מפרידים את הטבעת.

באשר לדוגמה ג), הרי גם כאן יוכל להספיק חתך חוזר אחד להפרדת המשטח לשנים; למשל החתך החותך את המכסה מן הקערה. אך כאן אפשר ליצור לא חתך אחד בלבד אלא שני חתכים חוזרים בלא שיופרד המשטח; למשל שני החתכים הנראים בציור 72 (אחד סביב לחלקה האמצעי של הקערה ואחד סביב לאחת הידיות), או גם חתכים סביב לשתי הידיות, כפי שאחד מהם (סביב לידית השמאלית) מופיע בציור. מתוך שני חיתוכים כאלה ייהפך המשטח הנתון למשטח חדש, קשיר גם הוא, המוגבל ע״י שני זוגות של קווים סגורים; ברם כל חתך חוזר על פני משטח חדש זה מפרידו לשני משטחים נבדלים. בפרט אפשר להפוך, דרך העברה טופולוגית (למשל דרך עיוות של חומר פלסטי), את המשטח החדש לפני־כדור שמהם נחתכו שני זוגות של עיגולים.

נוכל להרבות בדוגמות הולכות ומסתבכות בדרך פשוטה מאד: בהוסיפנו יותר ויותר ידיות לקערה (לכדור); או (היינו הך!) בקחתנו חתיכת שעוה בצורת עוגה פחוסה ובנקבנו אותה בחורים החודרים מלמעלה למטה. כללו של דבר: לעומת משטח דו־צדדי סגור נתון יש מספר טבעי מסויים g באופן שמערכת ידועה של g התכים חוזרים (שאינם נחתכים) על־פני המשטח עדיין אינה מפרידה את המשטח לשנים, בעוד שכל מערכת של $g+1$ חתכים כאלה מפרידה אותו. במקרה הפשוט ביותר, כגון

של כדור או תיבה, מצאנו $g=0$[1]. המספר g נקרא המין של המשטח הסגור[2]. למשטחי הפיאונים, שלגביהם הוכחנו בראשית הסעיף הזה את משפטו של אוילר, יש כמובן המין 0 כמו לכדור[3].

עד כאן נקטנו, כמוצא, משטח סגור דוקא. אם המשטח פתוח, אפשר אמנם להשאיר את הגדרת המין בתקפה, אך יש לעורר שאלה נוספת: ע״י כמה קווים סגורים מוגבל המשטח, כלומר מכמה קווים מורכבים שולי המשטח? במקרה של חצי־כדור המספר הוא 1, וכן לגבי קערת־המרק הנ״ל בעלת הידיות אחרי סילוק המכסה; במקרה של גליל סופי, או של הקערה (הסתומה) אחרי שבירת אחת הידיות, המספר שוה ל 2; במקרה של קערה זו אחרי שבירת שתי הידיות — 4; וכן הלאה.

נקבל צורה „נורמלית" למשטח ששוליו מורכבים מ r קווים סגורים, אם ניצור על פני כדור r „נקבים" עגולים. כל משטח מסוג זה, שקל לתארו בדמיון (כנגד $r=2$, למשל, יוכל הקורא לתאר לו את הנקבים אצל הקטבים הצפוני והדרומי), נחשב מהמין $g=0$; שהרי כל חתך, היוצא מאחת מנקודות־הפנים של המשטח וחוזר אל עצמו, מפריד את המשטח לשנים. תוצאה זו יכולה גם להיגרם ע״י חתך היוצא מנקודת־שוליים אחת ומשתרע עד נקודת־שוליים אחרת; למשל קשת קטנה, המקשרת שתי נקודות בשולי החור שאצל הקוטב הצפוני, מפרידה את המשטח לשנים. אך אין הדבר כך לגבי כל חתך מסוג זה; למשל מעלת־אורך (מרידיאן), המקשרת נקודת־שוליים בסביבת הקוטב הצפוני לנקודת־שוליים בסביבת הקוטב הדרומי, אינה מפרידה את המשטח לשנים.

לפיכך אפשר להגדיר במשטח פתוח מספר טבעי שלישי, נוסף על המין g ומספר קווי־השוליים r, העונה על השאלה: מהו המספר המכסימלי של

---

1. גם בקטעים הקרובים נכלול במונח „מספר טבעי" את האפשרות של 0.

2. רגילים לסמן את מין המשטח באות p. תחת זאת נשתמש כאן באות g (genus = מין) כדי למנוע החלפה באות p (פיאות) שהופיעה במשפט אוילר.

3. קיימת הכללה למשפט אוילר לגבי משטחים דו־צדדיים בעלי כל מין שהוא, והיא: אם q, m, p מסמנים שוב את מספרי הקדקדים, המקצועות והפיאות בפיאון שמינו g, הרי קיים היחס $q+p=m+2-2g$. לעומת $g=0$ זהו משפטו הרגיל של אוילר. ההגבלה למשטח דו־צדדי מכרעת כאן; לגבי משטחים חד־צדדיים קיימת ניסחה אחרת. יודגש עוד פעם, שמנקודת השקפה טופולוגית אין כל חשיבות לדבר, שלפנינו פיאון רגיל דוקא, המוגבל ע״י פיאות מישוריות. במשטחים עקומים סגורים, כמו פני כדור וכו׳, נוכל לבחור במספר נקודות המכונות „קדקדים" ולקשרם ב„מקצועות" (עקומים); כל תחום מינימלי המוגבל ע״י המקצועות ייקרא במקרה זה „פיאה".

אין קושי בהוכחת ההכללה הנ״ל, מתוך חיתוך המשטח עד הגיעו למין 0, ומתוך שימוש בצורה „הנורמלית" הנזכרת להלן.

מעבר זה ממשטחים עקומים לפיאונים רגילים מסביר עוד פעם את משמעות המונח „טופולוגיה קומבינטורית". לפי שיטה זו אף לא יקשה לעבור למרחבים מרובי־ממדים.

„חתכי־רוחב", מנקודה אחת של שולי־המשטח אל משנֶהָ, כך שביצוע החתכים אינו מפריד את המשטח לשנים? אם מספר מכסימלי זה יסומן ב$(c-1)$, באופן שעל־כל־פנים c חתכים גורמים להפרדה, נקרא המספר הטבעי c (שהוא חיובי ממש) דרגת־הקשר של המשטח[1]. יש הקבלה שלימה בין מושג זה לבין דרגת־הקשר שדובר עליה בסעיף הקודם לגבי תחומים במישור. באמת אין כל הבדל מתוך האספקלריה הטופולוגית: עיגול במישור, שהופיע שם כתחום פשוט־קשר $(c=1)$, שקול הוא כנגד כדור בעל נקב אחד, למשל בקוטב הצפוני.

רימן, שיצר מושגים אלה מחמת חשיבותם המכרעת לביסוסו לתורת הפונקציות המרוכבות[2], גילה את היחס הבא, הקיים לגבי כל משטח פתוח:

$$c=r+2g.$$

במלים: דרגת־הקשר שוה לסכום של מספר קווי־השוליים ושל כְּפוּל־המין[3]. לכן תחום פשוט־קשר $(c=1)$ הוא תמיד בעל המין 0 ומוגבל ע״י קו סגור יחיד. במחקרי רימן על פונקציות אלגבריות וטרַנסצֶנדֶנטיות ותיאורן ע״י משטחים „מרובי־עָלים", נתגלו כוחה וחשיבותה של גישה טופולוגית זו באנליזה בפעם הראשונה.

אחרי הגדרת המושגים דלעיל לגבי משטחים דו־צדדיים קל לנסח את התנאי לכך שאפשר להפוך שני משטחים דו־צדדיים זה אל זה ע״י העברה טופולוגית. לשם כך הכרחי ומספיק הוא שהמין ומספרם של קווי־השוליים יהיו שוים בשני המשטחים; כלומר, $g_1=g_2$ ו־$r_1=r_2$. ממילא תהיה שוה במקרה זה גם דרגת־הקשר. לפיכך, אם שני המשטחים סגורים הם, מספיק שיש להם אותו המין. בשים לב להערה 3 בעמ׳ 334 אפשר לנסח את התנאי הראשון לגבי פיאונים, ולגבי משטחים השקולים כנגדם, גם כך: סכום מספרי הקדקדים והפיאות, פחות מספר המקצועות, צריך להיות שוה. הפרש זה הוא אפוא תמיד זוגי, שוה ל $2-2g$. — קל להבין שתנאים אלה הכרחיים הם; קשה יותר להוכיח שהם מספיקים, והדרך הנוחה לכך היא קביעת „צורות נורמליות" לכל משטח.

אפשר להגדיר מושג מקביל למין גם לגבי משטחים חד־צדדיים ולנסח, בהתאם לכך, את התנאי לאקוויוָלנטיות טופולוגית בין שני משטחים כאלה.

בסעיף הקודם למדנו שלשם צביעת פני הכדור (משטח סגור דו־צדדי בעל המין 0) מספיקים על כל פנים 5 צבעים, וכנראה אף 4, ושאין במציאות על גבי כדור יותר מארבעה תחומים מצרנים (עיין בעמ׳ 310). במשטח סגור דו־צדדי

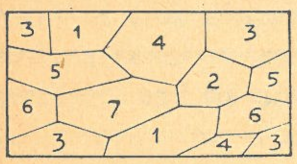
---

1. אפשר להעביר את המושג של דרגת־הקשר גם אל משטחים סגורים, בעזרת „ניקוב" המשטח באחת מנקודותיו.

2. השוה בפרט את מאמרו משנת 1857 על תורת הפונקציות של Abel. עיין „כל כתבי רימן" (1876), עמ׳ 81—135.

3. השוה מאמרו של Heffter הנזכר בעמ׳ 310.

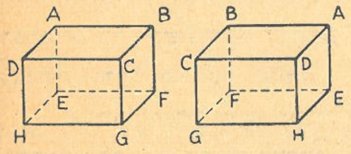
בעל המין 1, האקוויולנטי לטבעת, מספיקים על כל פנים 7 צבעים (עמ׳ 313). נתן עתה דוגמה של מפה על־גבי טבעת, שבה גובלים עם כל תחום 6 תחומים; לכן באמת נחוצים שבעה צבעים. „נצבע" קודם כל 14 „ארצות" בתוך מלבן בשבעה צבעים כפי המתואר בציור 73. נעקם את המלבן במרחב באופן שהצלעות העליונה והתחתונה תפגשנה ויווצר גליל; לאורך שפה משותפת זו יתקשרו התחומים הצבועים ב 3, 4, 1, 3. לבסוף נעקם את הגליל בצורה שהפיות הפתוחים שכנגד צלעות המלבן הימנית והשמאלית יפגשו ותווצר טבעת; ע״י עיקום זה יתקשרו התחומים המסומנים ב 3, 5, 6, 3 מימין ומשמאל, ולפיכך מתאשר מן הציור באופן מוחשי, שעם כל אחד משבעת התחומים גובלים ששה תחומים.



ציור 73

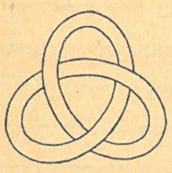
על־סמך שיטותיה של הטופולוגיה הקומבינטורית שלמדנון כאן, קל למדי לתאר מרחב תלת־ממדי סגור; הלא זה מושג בעל חשיבות גדולה בפיסיקה החדישה (השוה גם בפרק השמיני, § 3). זה עתה ראינו שוב, איך אפשר לעבור מתחום מישורי פתוח, כגון מלבן, למשטח עקום סגור, כגון טבעת: מתוך כך שמזהים באופן מתאים חלקים שונים של השוליים; בציור 63, למשל, וכן בציורים 67 ו 68, יש לזהות זוגות של צלעות נגדיות במלבן. זוהי שיטה נוחה ופוריה מאד בטופולוגיה, שאפשר לבצעה גם לגבי יצירים אחרים שעסקנו בהם, כגון הצנצנת של קליין. עתה נשתמש בה במרחב התלת־ממדי!

בשתי תיבות חופפות נסמן את שמונת הקדקדים של כל אחת באותם הסמלים לפי סדרים שונים, כפי שסומנו בציור 74. נתאר לנו כל תיבה כחדר, וכל אחת מפיאותיה של כל תיבה כדלת (בצורת מלבן). נקרב את הדלתות המסומנות בצורה שוה זו אל זו עד כדי ליכוד. אפשר לדמות ליכוד זה באופן הסתכלותי־חלקי במרחבנו הרגיל: למשל ע״י קירוב התיבות עד לליכוד המלבנים $BCGF$ משמאל ומימין, וכן – על־סמך עיקום ועוות מתאימים, מתוך ההנחה שהתיבות עשויות מחומר גמיש – עד לליכוד שני המלבנים $ABCD$ ושני המלבנים $EFGH$. אך כוונתנו היא לכל שש הדרכים האפשריות לליכוד בבת אחת לעומת כל שש פיאותיה של כל תיבה. כך שגם, למשל, שני המלבנים $ADHE$ יתלכדו. באופן זה נקבל מעין „תבנית" למרחב תלת־ממדי ידוע, שהוא סופי וסגור. אפשר להתקדם בו ללא גבול; אולם, מתוך התקדמות לכל כוון שהוא, עתידים לשוב אל מקום־המוצא.



ציור 74

נסתפק בשלש הדוגמות דלעיל לבעיות טופולוגית במשטחים עקומים. אפשר להוסיף עליהן כהנה וכהנה; בפרט להוסיף בעיות, שקל לנסחן ללא טכניקה מתימטית מרובה, אף שהטיפול כרוך על־פי־רוב בקושי גדול. כך המצב בתורת המִשְׁלָבוֹת ובתורת הצַמוֹת (סוג מיוחד של תצורות פשוטות יותר הקרובות למשלבות פתוחות). בשם משלבת מכנים כל עקום מרחבי סגור; עקום כזה משולב בדרך כלל. הדוגמה הפשוטה ביותר היא משלבת־התלתן, שהיטלה על מישור נמצא בציור 75. (לגבי נקודות־ההצטלבות נחוץ לציין איזה ענף עובר מעל לחברו, ולשם זה מתוארים העקומים בציור כסרטים.) סוג מיוחד של משלבות מהוות אלה שיש לראותן כעקומי־השוליים של משטח חד־צדדי. החל מ Tait נגשה אסכולה רחבה של גיאומטרים אנגליים לבעיות אלו, אך ההתקדמות הצטמצמה בעיקר במסקנות פרוטות. כמה חוקרים בדורנו, כגון אלכסנדר, אַרטין [1] ואחרים, משתמשים בעיקר בשיטותיה של תורת החבורות.[2] בעיות פיסיקליות ידועות[3] הניעו כבר את גאוס לתביעת פיתוחה של תורת המשלבות. השאלה הכללית היסודית היא: מתי שקולות שתי משלבות זו כנגד זו מבחינה טופולוגית; יש לשים לב לכך שאין שאלה זו מתלכדת לגמרי עם העברתה „הפיסית" של משלבת אחת לחברתה, כלומר עם עיוותה הרציף. הבעיות המתעוררות כאן מסובכות הן למדי. למשל: הגדרה עיונית להבדל בין עקום סגור לא־משולב (כגון אליפסה, או עקום דומה במרחב) לבין משלבת־ממש; או מיון המשלבות ובניית נציג לכל מחלקה של משלבות שהן שוות־ערך במובן טופולוגי. מענין הדבר, שבכל מרחב בעל מספר־ממדים זוגי אין במציאות משלבות במלוא מובן המונח; לא רק במישור, כי אם גם במרחב בעל ארבעה ממדים (פרק שמיני, § 1).


ציור 75

בעיה טופולוגית אחרת מוצאת את ביטויה אפילו בגופו של בן אדם. לכל איש שלא נמרטו שערותיו יש „מערבל" שערות בשיא ראשו. אין זו תכונה ביולוגית מקרית של היונקים בעלי שערות, כפי שחשבו זואולוגים ידועים, כי אם תוצאה טופולוגית מן העובדה שבכל היקפו של הראש מכוונות השערות כלפי חוץ. שכן קיים משפט, הנקרא „משפט־Brouwer על נקודה יציבה",

---

1. E. Artin. עיין מאמרו על תורת הצמית שהופיע ב *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ.*, כרך 4 (1925).

2. השוה:

K. Reidemeister: Knotentheorie. *Ergebnisse der Mathematik*, vol. II (1932).

3. דוגמה אחרת לחשיבות השיטה הטופולוגית בפיסיקה, לפחות בתקופה ידועה, משמשות התצורות האפשריות בהרכבת אטומים. אגב, לפי עדותו של קנט התאונן כבר הביולוג המפורסם G. L. L. Buffon (במאה ה 18) על אי־התפתחותה של analysis situs הגיאומטרית, שממנה ציפה לעזרה בחקירת האפשרויות להזרעה.

הקובע: אם לכל נקודה בעיגול או על חצי־כדור מותאם באופן רציף כוון (וגודל) מסויים („שדה וֶקטוריאלי"), ואם כל הכוונים בשפה (בקו המקיף) מכוונים כלפי חוץ (או כלפי פנים), הרי יש בפנים התחום לפחות נקודה יציבה אחת; לאמור: נקודה שאין בה כל כוון (בעלת הוֶקטור 0). גם כאן, כמו לגבי בעית הצבעים וענינים אחרים, יש הבדל בין המשטחים הפשוטים הנ"ל לבין משטחים אחרים כגון טבעת; באמת לבעלי קרחת, שבסיס שערותיהם הוא תחום כפול־קשר, אין על־פי רוב מערבל שערות. למשפטים טופולוגיים דומים על נקודות יציבות יש שימושים חשובים באלגברה (למשל המשפט היסודי, השוה עמ' 299), ואף בתורת מסילותיהם של הכוכבים (Poincaré).

עם ויתור על הוספת דוגמות מיוחדות אסור לנו לדלג לגמרי על נקודה עקרונית אחת: כאן דובר על טופולוגיה תמיד בשים לב למרחב „הרגיל" של הגיאומטריה (האֲפינית או הפרוייקטיבית). אך זה ארבעים שנה ויותר התחילו הטופולוגים – בפרט אלה המסתמכים על תורת הקבוצות, ובראשם פרֵישֶׁה[1] והאוסדורף – לעסוק במרחבים כלליים או „טופולוגיים". הצד השוה בכל המחקרים האלה הוא, שיוצאים הם ממושג ראשוני אחד, כגון רוחק[2], נקודת־גבול, סביבה, קבוצה פתוחה וסגורה וכו', שאינו מוגדר על־פי מושגים מֶטריים אלא קבוע ע"י אכסיומות (תכונות ראשוניות) המתכוונות לקבוצות „מופשטות" (עמ' 5); איברי הקבוצות נקראות „נקודות". לשם דוגמה תובאנה אכסיומות־הסביבה של האוסדורף[3] המטילות על מושג הסביבה את התנאים הבאים:

א) כנגד כל נקודה x יש לפחות קבוצה אחת של נקודות V_x המכונה „סביבה של x" והמכילה בין איבריה את x עצמה.

ב) אם V_x ו U_x הן סביבות של x, יש סביבה W_x של x שהיא קבוצה חלקית של V_x ושל U_x.

ג) אם y הוא איבר של V_x, יש סביבה V_y של y כך ש V_y קבוצה חלקית של V_x.

ד) אם x ו y הן נקודות שונות, יש סביבות V_x ו V_y שאין להן נקודה משותפת.

התכונות א) עד ד) מובנות מאליהן על־פי משמעותו הרגילה של המושג „סביבה". מאידך רחוקות הן מקבוע מושג הקרוב למושג רגיל זה דוקא; יש

1. השוה הספר: M. Fréchet: Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale. 1928.

2. אם המושג „רוחק" ממלא את „רילַציית־המשולש", האומרת שסכום הרחקים בין A ל C ובין C ל B שוה או גדול מן הרוחק בין A ל B, מקבלים מרחב הקרוב למרחב הרגיל והמכונה (לפי האוסדורף) מרחב מטרי. לגבי הקשר בין מרחב כזה וההגדרות של Fréchet עיין מאמרו של E. W. Chittenden ב Transactions of the American Math. Society, vol. 18 (1917).

3. עיין בספרו הראשון המצוטט בעמ' 41 (פרק שביעי של הספר).

גמישות קיצונית למושג ששומה עליו לקיים רק את ארבעת התנאים הללו. ואמנם מרחב טופולוגי יכול להיות רחוק מאד ממה שקוראים בגיאומטריה הרגילה בשם „מרחב". לא רק שיש כאן אותה גמישות המרשה, בהתאם לתפיסת הטופולוגיה, כל העברה חד־חד־ערכית ורציפה (עיין לעיל עמ' 298) והמשנה אפוא רחקים, זוויות, יחסים כפולים וכו'; אלא שאין צורך שבמרחב כזה יהיה אפשר בכלל להגדיר מושגים כאלה לפי משמעותם הרגילה: המרחב אינו ניתן בהכרח ל„מֶטריסַציה", למשל להעתק טופולוגי על מרחב שבו מוגדר הרוחק. אף־על־פי־כן אפשר לפתח תורה בעלת תוכן מגוון במרחב טופולוגי כזה; למשל אפשר לציין את „נקודת־הגבול" L של סידרת־נקודות מתכנסת $(l_1, l_2, l_3, \ldots)$ – השוה I, 283 – בצורה: בכל „סביבה" של L נמצאות כמעט כל הנקודות l_k, ז"א כולן פרט למספר סופי של נקודות היוצאות מן הכלל.

גם מתוך השקפת המרחב הרגיל יש ערך לגישה מופשטת זו: שכן מאפשרת היא לברר אילו מבין משפטי הגיאומטריה קיימים על־סמך גישה כנ"ל, ובאיזו הדרגה נחוץ להוסיף, זה אחרי זה, תנאים מפרטים נוספים, כדי להבטיח סוגים מסויימים של עובדות גיאומטריות פרוטות יותר.

הסקירה שניתנה בפרק זה על אחד המקצועות הצעירים שבמתימטיקה, מקצוע שלהתפתחותו העתידה נועדו בודאי גדולות ונצורות, הספיקה על־כל־פנים ללמדנו דבר זה: יש כאן התפתחות מתימטית לקראת מושגים איכותיים סטרוקטורליים (מבניים) יותר מכמותיים – התפתחות שיש לה גם הקבלת־מה בחלקים ידועים של הפיסיקה העיונית. התפתחות דומה אפשר להכיר בתורה מתימטית אחרת, צעירה והרת־אפשרויות גם היא: באלגברה המופשטת (I, 195/6), לרבות קשריה ללוגיקה הסימבולית ולתורת היחסים (הרילציות). ואמנם יש קווי מגע הדוקים בין מקצועות אלה.[1] לשניהם היתה השפעה מעמיקה על התפתחות המתימטיקה החדישה לכווניה השונים, ואפיינית אימרתו של אחד החוקרים הרב־צדדיים ביותר של דורנו[2] בהרצאתו על „שמורות": בימינו נלחמים זה בזה מלאך הטופולוגיה והשטן הממונה על האלגברה המופשטת, על כיבושו של כל מקצוע ומקצוע במתימטיקה.

חיבה יתירה נודעת לאספקלריה ההסתכלותית המשמשת דחיפה חזקה בהתפתחות הטופולוגיה, בפרט בכוונה הקומבינטורי. יש הרואים אספקלריה זו כ„דרך־המלך" למתימטיקה, שמציאותה הוכחשה ע"י החכם היווני בענותו לאלכסנדר

1. בייחוד הבליטו קשר זה מחקריו של M. H. Stone

2. H. Weyl (נפטר ב 1955). עיין ב Duke Math. Journal, כרך 5, 1939. השוה גם בספר: E. T. Bell: The development of mathematics, 2nd ed. 1945.

מוקדון; שכן ללא הסתמכות על גדלים ומספרים, ועפ"ר ללא צורך בחשבונות, באוירה צחה ושקופה, רואה המתימטיקן המחונן חוש טופולוגי כמה עובדות מן האנליזה שיש להם שם צביון מסובך ומעורפל. יתכן שכבר לייבניץ הרגיש בכך, בדרשו את פיתוחה של „תורת המצב" על־יד „תורת הגודל". גם על ההתחרות בין השיטה הסינתיטית והשיטה האנליטית בגיאומטריה (§ 3 של הפרק החמישי) שבה ניצחה כביכול הגיאומטריה האנליטית ה„לא־גיאומטרית", הפיצה הגישה הטופולוגית אור חדש, בגלותה טוהר גיאומטרי ותוקף שיטתי כאחד בטופולוגיה.

פרק שמיני: מרחבים מרובי־ממדים ולא־אבקלידיים. יסודות הגיאומטריה.

§ 1. מרחבים ליניאריים בעלי ארבעה ממדים ויותר.

כדי להגיע לבניה גיאומטרית טהורה, הסתכלותית כביכול, של מרחב בעל ארבעה ממדים, ניטיב לעשות בעיינינו קודם כל בשאלה: כיצד מגיעים אל המרחב הרגיל בעל שלשה ממדים לפי שיטה בנייתית ו„גיניטית" (התהוותית) — בניגוד הן לדרך החשבונית, לפי שיטת הגיאומטריה האנליטית, הן לדרך האכסיומטית (§ 4)? הכוונה היא לבניה המתפתחת צעד אחרי צעד, לפי מספר הולך וגדל של ממדים.

המרחב בעל „אפס ממדים", דהיינו הנקודה, פשוט הוא מכדי טיפול גיאומטרי. לפיכך נתחיל במרחב חד־ממדי; ביתר פירוט: בקו הישר. הרבינו לטפל בו, למשל ב§ 1 של הפרק הקודם, וכן בפרק הששי של הכרך הראשון. כאן נתקע יתדותינו רק בשתים מתכונותיו של הישר.

התכונה הראשונה, שנכנה אותה גם „דרישת הישר" (ושיש לה חשיבות, כמובן, רק כעלות מספר הממדים על 1), אומרת (השוה ב§ 4) שאפשר לקשר כל שתי נקודות נתונות שונות ע"י ישר, וכי ישר קבוע ע"י כל שתים מנקודותיו[1]. הטענה, שיש „מרחב" בעל ממד אחד, פירושה אפוא שיש קו S בעל תכונה כפולה זו. תכונתו השניה של הישר מתבטאת ביחס־הסדר בין נקודות הישר. בצורה שיטתית ייחקר יחס הסדר ב§ 4 (מערכת II). כאן נניח יחס זה, הקובע שנקודה מסויימת של הישר „נמצאת בין" שתי נקודות נתונות אחרות — כלומר, יחס בעל שלשה „גורמים" או „מקומות פנויים"

1. תכונה זו בלבד אינה מציינת את הישר באופן חד־ערכי בין כל הקווים האפשריים. אם ה„מרחב" הוא למשל פניו של חצי־כדור פרט לשפה (ל„קו המשוה", עיין להלן ב§ 3), קבוע כל קטע של כל מעגל ראשי על פני הכדור ע"י כל שתים מנקודותיו; נוכל אפוא לראות מעגלים כאלה כ„קווים ישרים". ביחסיותו זו של מושג הקו הישר נרבה לדון בסעיפים הבאים.

(עיין I, 8) — כיחס הידוע לנו. נשאל: איזה מבנה לעולם (למרחב) החד־ממדי גורר אחריו סדר זה?

כדי לתאר את הענין באספקלריה הסתכלותית[1], שתועיל להלן לבירור דברים מסובכים יותר, נדמה בנפשנו כאילו מצויים בעלי חיים ושכל בעולם זה S, שהוא קו ישר בלבד. צורתם של תושבי העולם ההוא יכולה להיות נקודה (בעלת אפס ממדים) או קטע (בעל ממד אחד). אך תושב מסויים אינו יכול להבחין כלפי חברו הקרוב אליו – לא דרך מגע ולא דרך ראייה – אם חברו הוא נקודה או קטע; שהרי הוא יכול לנגוע ולהסתכל בקצה חברו בלבד, והקצה הוא על כל פנים נקודה. הנקודות בפנים הקטע נעלמות מעיני התושבים, כמו שנעלמות מאתנו הנקודות שבתוך בטננו או בטן חברנו. כן לא יוכל תושב מסויים a להכיר בעזרת מגע או ראייה[2], אם נמצאים בשכנותו, מלבד שני שכניו הקרובים, תושבים נוספים של העולם S. ואם יפנה יציר השוכן במרחב דו־ממדי, ז"א באיזה מישור המכיל את הישר S (כגון נמלה שטוחה), אל a בהודעה, שראה בסביבת a חמשה תושבים אחרים של S סדורים אחד על־יד חברו לאורך הישר S, יענה: הדבר בלתי אפשרי; שהרי אם נמצא אתה בחלל העולם (ז"א בישר S), לא תוכל להרגיש ולהביט אלא בנקודה אחת מזה ובאחת מזה — וכלום יש מציאות פיסית מחוץ לחלל לעולם (קרי: מחוץ לS)? וכן, אם תציע הנמלה לa להכניס את a למקום אחר בS, כלומר בין שכנים שונים מאלה שהיו לa מעודו עד היום ההוא, יענה a: הלא אי אפשר לחדור אל תוכו של אחד משכני ולצאת בעברו השני, והרי אין דרך אחרת לביצוע הצעתך! אמנם הנמלה תטען: „לא ולא, אלא אוציאך למישור מחוץ לעולמך S, ואוליכך אל מקום אחר שמשם תראה את עולמך כולו, ואחזירך אחר כך לS בין שני תושבים אחרים." אך על כך יענה a: זהו פיטפוט בעלמא, שהרי מחוץ לעולם אין מקום!

מתוך ידיעה (או אפילו רק מתוך מחשבה שאפשרי הדבר), שחלל העולם כולו (המרחב) אינו מצטמצם בממד אחד, נשים פנינו לבניית מרחב דו־ממדי. לשם כך נצא מן המרחב „הקודם", כלומר מהישר S, ונדרוש:

דרישת הממד השני: מחוץ לישר S (למרחב החד־ממדי) יש במציאות לפחות נקודה אחת p_3.

1. תיאור הסתכלותי זה צריך, כמובן, להיתפס בהגבלות רבות וללא כל כח־הוכחה מדעי. הוא אינו חלק של הבנין השיטתי שבסעיף זה, ואינו בא אלא לסלק קשיים פסיכולוגיים מסויימים היכולים להתעורר כשנעבור אל מרחב בעל ארבעה ממדים.

2. כמובן, אם קיים חוש שמיעה בעולם ההוא, ואם יש פיות לתושב a בשני קצות הקטע שלו, יוכל תושב אחר b לקבוע את ארכו של a, ואילו גם את הרוחק בין a לb, מתוך ההפרש הזמני בהגיע שני קולות חד־זמניים מa אל b

בעזרת דרישה עיקרית זו ושתי דרישות צדדיות, שתנוסחנה להלן, נבנה את המרחב הדו־ממדי P[1] – כלומר, המישור – כדלקמן: על פי מה שנאמר לעיל בדרישת הישר, נקשר כל נקודה של הישר S לנקודה p_3 ע״י קו ישר. כל שנים מבין ישרים אלה שונים הם; שכן, אם p_1 ו p_2 הן שתי נקודות שונות של S, לא יוכל הישר $p_1 p_3$ להתלכד עם הישר $p_2 p_3$, מכיון שבמקרה זה היו חלות באותו ישר גם p_1 גם p_2, ז״א הישר הוא (על־סמך תכונות הישר, עיין לעיל) הישר S ואינו מכיל אפוא את הנקודה p_3 שמחוצה לS. מתקבל על הדעת, שאפשר להגדיר את את המישור כקבוצת כל הנקודות החלות בכל הישרים הללו, המקשרים את נקודותיו של S לp_3. אולם בנקטנו הגדרה זו עלינו לבטל הנחה, שאמנם אינה הכרחית (כפי שיתברר בסעיפים 2 ו 3) אך אפשרית, והמקובלת בגיאומטריה האלמנטרית: הרי לפי ההגדרה המוצעת כאן למישור, יחתוך כל ישר דרך p_3 את הישר S, ואין אפוא ישר דרך p_3 המקביל אל S. בהתאם להנחה המקובלת נדרוש אפוא (השוה § 2):

דרישת המקביל: אם נתון ישר S ונקודה מחוצה לו, יש במישור הקבוע ע״י שניהם ישר אחד ויחיד דרך הנקודה שאינו חותך את S; הוא נקרא המקביל לS דרך הנקודה הנדונה.

על סמך דרישת המקביל[2] נשלים את הגדרת המישור P, בהוסיפנו על כל הנקודות שצוינו לעיל את הנקודות החלות במקביל לS דרך p_3. בזה בנינו את המרחב הדו־ממדי P בשלמותו, בצאתנו ממרחב חד־ממדי S ובספחנו אליו נקודה אחת מחוצה לS.

ברם המרחב P אינו סתם דו־ממדי, אלא מישור דוקא; כלומר, אותו יציר מיוחד המכונה „מרחב דו־ממדי קווי (ליניארי)”. נוכל להבין את תכונתו העיקרית של מרחב קווי, אם נציב לעומתו מרחב דו־ממדי לא־קווי, כגון פני כדור, פני היפרבולואיד וכו׳. אם נקשר בקו ישר שתי נקודות שעל גבי כדור, הרי שאר נקודותיו של ישר זה אינן חלות בפני הכדור; וכן בדרך כלל במקרה של „משטח עקום”. ננסח אפוא את תכונתו המצויינת של המישור כך:

דרישת קוויותו של המישור: אם שתי נקודות של ישר חלות במישור, חל הישר כולו (כלומר, חלות כל נקודותיו) באותו מישור.

יצויין מראש, שפעם אחת בלבד – לגבי המרחב הדו־ממדי – נחוץ לדרוש את קוויותו של המרחב. אם נבנה באופן עקבי, ע״י משיכת ישרים, מרחבים מרובי־ממדים (עיין להלן), נוכל להוכיח את קוויותם על־סמך הדרישה שנוסחה זה עתה.

1. P רומז על השם plane, כשם ש S רומז על straight line.

2. אם נדייק בלשוננו, עלינו לכנות אפוא P בשם „מרחב דו־ממדי אבקלידי” (כלומר ממלא את אכסיומת המקבילים של אבקלידס). כן יהיו כל המרחבים מרובי־הממדים שיופיעו בסעיף זה מרחבים אבקלידיים.

נוסיף הערה שהיא מועילה מאד לשם המעבר לשלשה ממדים ויותר! במישור P הנוצר מהישר S והנקודה p_3 – הוא יסומן בהתאם לכך גם ב$[S, p_3]$ – יהא נתון ישר אחר S' ואיזו נקודה שהיא q_3 שאינה חלה בS'. על־פי דרישת הקוויות חל כל ישר, המקשר אחת מנקודותיו של S' לq_3, כולו ב$[S, p_3]$, וכן המקביל לS' דרך q_3. לפיכך, אם נגדיר מישור $[S', q_3]$ כפי שהגדרנו לעיל את המישור $P = [S, p_3]$, הרי מתברר שכל נקודותיו של $[S', q_3]$ חלות במישור $[S, p_3]$. לא יקשה לראות שאפשר להפוך היסק זה ללא כל שינוי; לאמור: שני המישורים מתלכדים. העלינו אפוא:

משפט 1. המישור P נקבע (לאו דוקא ע״י S ו p_3, אלא כמו־כן) ע״י כל ישר שהוא של P יחד עם כל נקודה שהיא של P שאינה חלה באותו ישר.

משפט זה קובע, שהמישור אינו תלוי בדרך המיוחדת שבה בנינוהו. התכונה המתבטאת במשפט 1 אנלוגית היא אפוא לתכונת הישר (עמ׳ 340), שעל פיה נקבע הישר ע״י כל שתים מנקודותיו.

על־סמך היפוך הגיוני נוכל לתת לדרישת הקוויות צורה חדשה, שמשמעות הסתכלותית יש לה אמנם רק לגבי תושביו של מרחב תלת־ממדי, והיא: ישר, שאינו חל בשלימותו במישור P, יש לו לכל היותר נקודה אחת משותפת עם P.

נקרב שוב להסתכלותנו את העולם הדו־ממדי P, בדַמותנו בנפשנו בריות החיות בעולם זה! תושביו אלה של P יהיו (אם נתעלם מן האפשרות הקיצונה של נקודה בלבד) חד־ממדיים, כגון קטע, קשת מעגלית וכו׳, או דו־ממדיים, כגון משולש, מרובע, עיגול, אליפסה (הכוונה תמיד לשטח כולו ולא להיקף בלבד). אך אם יש להם חוש־ראייה – ואם עיניהם נמצאות בהיקף השטח, כפי שעינינו הן בשולי גופנו – אין הם יכולים באמצעות חוש זה להבחין בין הצורות השונות הנ״ל: קטע, זווית של משולש, קשת מעגלית וכו׳, כולם נראים להם כקטע ישר – כשם שהנוסעים באניה רואים את החוף כקו ישר, כל עוד רחוקים הם ממנו במידה כזו, שהם שטוחים כביכול לעומת החוף, על אף בליטות וקיעורים שיש שבחוף; או כשם שמטבע עגול המונח על־גבי שולחן נראה לעין, היורדת ומתקרבת למישור השולחן, ראשית כאליפסה ולבסוף כקטע ישר.[1] אותם תושבי המישור שצורתם קטע ישר יכולים, כמובן, להפוך עצמם ל„נעלמים” בעיני המסתכל – כמו שבדוגמה הקודמת, אם במקום המטבע מונחת מחט דקה מאד על־גבי השולחן, המסתכל במחט ממישור השולחן בכוון ארכה

1. כיוצא בזה: גם בעולמנו־אנו נוכל לראות בעצם – לפחות בעין אחת – רק את היטלי הגופים על מישור, ולא את הגופים בשלשה ממדים; אלא שהתרגלנו בעזרת התאורה וכו׳ להכירם בצורתם המרחבית. מכאן חוסר־היכולת של מי שהיה עוור, להבחין בין דגופים לאמיתם בתקופה הראשונה לאחר שנפקחו עיניו.

של המחט, אינו רואה אלא נקודה. רק חוש המישוש מאפשר לבריות אלה להבחין בין משולש, עיגול וכו׳.

אם ידבר יציר b מן העולם התלת־ממדי אל תושביו השטוחים של העולם P, הרי יחשבוהו לשד (אוב, מלאך), כל עוד לא חתך b בגופו את המישור P – בחינת „קול דברים הם שומעים ותמונה אינם רואים זולתי קול". ברם כאשר יחתוך b את המישור P, יחשבוהו ליציר־החיתוך בינו לבין P. אם המבקר הוא גליל מעגלי שצירו מאונך אל P, ידמה להם כמעגל; אם b הוא כדור, יחשבוהו אמנם גם כן למעגל, אבל לקוסם קסמים היודע להגדיל ולהקטין את קוטרו, ואף להצטמצם לנקודה בלבד – ברגע בו ישיק המישור P את הכדור, לפני העלמו אל „מחוץ לעולם" (כלומר, אל מחוץ ל P). ואם b, בהימצאו מעל למישור P, יספר לתושבי P שהביט מלמעלה אל „קרבם" (לפנים המשולש, העיגול וכו׳), או שהבחין את החפצים בתוך „ארון" (דו־ממדי, כמובן) נעול מכל עבריו, הרי יענו לו: איך אפשר להציץ אל תוך הקיבה, או אל תוך ארגז הנעול מבחוץ? אין כל משמעות לביטוי „להביט מלמעלה", הואיל ודבר כזה אינו בנמצא בין ממדי העולם (המכונים, למשל, „צפון־דרום" ו„מזרח־מערב"). אמנם יוכל המבקר להוכיח בראיה מעשית לתושבי P את צדקת טענתו, בקחתו את החפצים שבארון הנעול אל הממד השלישי ובהחזירו אותם אל המישור P מחוץ לארון, אף כי לא נגע במנעולו; תושבי P לא יבינו איך יכול לעשות כך ויחשבוהו לקוסם קסמים. כמו כן, אם יקח b איזה תושב של P, שידיו (ככל גופו) שטוחות (מעין צללי־ידיים) ויסובבהו בממד השלישי הַרְבָּצה של 180^0 סביב ציר החל ב P, באופן שה„פנים" יוחלפו ב„עורף", הריהו חוזר אל עולמו כשידו הימנית הפכה יד שמאלית – תופעה רגילה בעינינו־אנו לגבי אותם צללים אך בלתי־מובנת לתושבי P.

אם מניעים „נקודה חומרית" ב P, נגיד: צפונה, n יחידות־אורך, יווצר קטע בעל האורך n. כשמניעים קטע זה, בהקבלה לעצמו, n יחידות־אורך מזרחה (ז"א בכוון מאונך לקטע), יווצר ריבוע בעל השטח n^2. לכן יגידו תושבי P, אם הם מתימטיקנים: לחזקה הראשונה ולשניה של כל מספר חיובי n יש משמעות גיאומטרית; אך לא לחזקה השלישית n^3, שכן לא נותרה אפשרות להניע את הריבוע, בהקבלה לעצמו, אל איזה ממד נוסף.

הבה נבנה, בהתאם לשיטה שנקטנוה כלפי המישור, את המרחב התלת־ממדי הקווי R_3! „קווי", ר"ל שגם למרחב זה, כלקודמו P, יש תכונת הקוויות מעמ׳ 342. ננסח את הדרישה החדשה, שהיא מתמלאת לכאורה מאליה, אך מהווה דרישה מחוסרת תוכן הסתכלותי לגבי תושבי המישור P, כדלקמן:

דרישת הממד השלישי: מחוץ למישור P (למרחב הדו־ממדי) יש במציאות לפחות נקודה אחת p_4.

התהליך לבנית המרחב R_3 אנלוגי הוא, עד כדי דמיון מילולי, לבנית המרחב הדו־ממדי. בהתאם לדרישת הישר נקשר כל נקודה של P ל p_4 בקו ישר. כל שני ישרים הקבועים ע"י נקודות שונות של P, שונים הם; אחרת היה הישר המשותף חל כולו ב P מחמת קוויותו של המישור. על נקודותיהם של כל הישרים הללו נצטרך להוסיף – בהתאם לדרישת המקביל, עמ׳ 342 – את הישרים דרך p_4 המקבילים למישור P; כלומר, את הישרים המקבילים לקווים הישרים שב P. הלא ישרים אלה אינם חותכים את P, ולכן נקודותיהם אינן כלולות בין נקודות הישרים המקשרים את P ל p_4. את המקבילים הללו נקבל בצורה נוחה, בבנותנו לגבי כל ישר s ב P את המישור הקבוע ע"י s והנקודה p_4, ובהעבירנו (באותו מישור) את המקביל ל s דרך p_4.[1] מקבילים אלה יוצרים, כידוע, את „המישור המקביל" ל P דרך p_4; נקודותיו (פרט ל p_4) היו נעדרות אילו הסתפקנו בישרים העוברים דרך הנקודות של P. לפי צורת־בניתו זו נסמן את המרחב R_3 גם ב $[P, p_4]$.

ועתה, הודות לדרישת הקוויות שבמישור, אין צורך בדרישה נוספת, אלא נוכיח

משפט 2. אם שתי נקודות של ישר חלות במרחב R_3, חל הישר כולו (כלומר, כל נקודותיו) ב R_3. לשון אחר: R_3 הוא מרחב קווי.

בדרך היפוך הגיוני נוכל לנסח (השוה בעמ׳ 343) את המשפט גם בצורה זו, שאמנם אינה „הסתכלותית" בשבילנו, תושבי ה R_3 (השוה להלן אצל R_4): ישר, שאינו נמצא בשלמותו במרחב R_3, יש לו לכל היותר נקודה אחת משותפת עם R_3.

נסתפק כאן בהבלטת רעיון כללי לגבי הוכחת המשפט 2, שהיא נמצאת במלואים לחלק החמישי, מספר כב). ההוכחה לכך, שנקודה ידועה חלה ב R_3, פירושה לפי הגדרת ה R_3: להוכיח שהישר המקשר את הנקודה ל p_4, חותך את המישור P או מקביל לו; כלומר, שהישר ההוא אינו מצטלב עם P, כפי שמצטלבים למשל במרחבנו שני ישרים שאינם חלים במישור אחד. ואמנם במרחב בעל ארבעה ממדים יכול ישר להצטלב עם מישור (עיין להלן), ואין הדבר רחוק יותר משרחוק בעיני התושבים של המישור P הרעיון ששני ישרים יכולים להצטלב.

לפיכך, מי שקרא בתשומת לב, ולא לשם בדיחות הדעת בעלמא, את מה שנאמר לעיל על תושבי העולם החד־ממדי S והעולם הדו־ממדי P, לא יטעה

---

1. כמובן אין צורך לקחת לשם זה את כל הישרים של P. מספיק לקחת את „אלומת" כל הישרים של P העוברים דרך נקודה קבועה, והמציגים אפוא את כל הכוונים שב P. כל ישר אחר של P הריהו מקביל לאחד מן הישרים הנ"ל, וגורם אפוא לאותו המקביל דרך p_4. – אגב, אלומה זו מספיקה גם ליצירת כל שאר נקודותיו של R_3; שהרי כל נקודה של P חלה באחד מבין ישרי האלומה. לפיכך אפשר לבטא את התהליך שבראשית הקטע דלעיל כך: נקשר כל נקודה, החלה באחד מבין ישרי האלומה, ל p_4 בקו ישר.

לחשוב את המשפט 2 למובן מאליו, באמרו: וכי היכן תימצאנה נקודותיו של הישר הנידון אם לא במרחב R_3? על צד האמת זקוקים אנו במרחב הדו־ממדי P אפילו לאכסיומה מיוחדת (דרישת הקוויות) כדי להבטיח, שכל ישר בעל שתי נקודות משותפות עם P חל כולו ב P. תושבי העולם P היו יכולים לטעון באותה זכות (קרי: באותו חוסר־הגיון): וכי היכן תימצאנה נקודות הישר אם לא בעולמנו?

מן המשפט 2 נובע מיד (השוה משפט 1):

משפט 3. המרחב R_3, שנקבע לעיל ע״י P ו p_4, יכול להקבע גם ע״י כל מישור P' שהוא של R_3[1] יחד עם כל נקודה שהיא q_4 של R_3 שאינה חלה במישור P'.

שהרי כל נקודה של המרחב $[P', q_4]$ נמצאת ב R_3, בהיותה חלה בישר, המקשר אחת הנקודות של המישור P' לנקודה q_4 – כלומר בישר המקשר שתי נקודות של R_3; והלא לפי המשפט 2 כל נקודה, החלה בישר כזה, נמצאת ב R_3. חילוף הדבר, ז״א שכל נקודה של R_3 נמצאת במרחב $[P', q_4]$, גם הוא נכון, מכיון ש P ו p_4 משמשים באותם התפקידים במרחב $[P', q_4]$ שבהם משמשים P' ו q_4 ב $[P, p_4]$.

בעצם היינו חייבים להשלים הוכחת המשפט 3 מתוך תשומת־לב למקבילים, כלומר לנקודות החלות במקבילים ל P' דרך q_4; לא יקשה לקורא לבצע השלמה זו. אולם נפרק מעלינו עול זה של הדאגה המתמדת למקבילים כל„ישרים יוצאים מן הכלל״, מתוך הסתמכות על מה שלמדנו בפרק הששי (בפרט בעמ׳ 227): מקבילים הם ישרים בעלי נקודה לא־אמיתית משותפת. בהתאם לכך תהיה הגדרת המישור $P = [S, p_3]$: הוא קבוצת הנקודות החלות בישרים המקשרים את p_3 לנקודות הישר S, לרבות הישר המקשר את p_3 לנקודה הלא־אמיתית של S. וכן יוגדר המרחב $R_3 = [P, p_4]$ כקבוצת הנקודות החלות בישרים המקשרים את p_4 לנקודות המישור P, לרבות הנקודות הלא־אמיתיות של P. כידוע לנו מעמ׳ 229, חלות כל הנקודות הלא־אמיתיות של P בישר הלא־אמיתי של המישור.

נגמור את פרשת בנייתם של המרחבים בעלי ממד אחד עד שלשה ממדים בציון היציר הגיאומטרי האָפייני לכל מרחב; כלומר, היציר „הפשוט ביותר״, הקבוע ע״י מספר מינימלי של נקודות שהן הכרחיות ומספיקות לבנית המרחב הנדון.

הישר קבוע ע״י שתים מנקודותיו; לפיכך מספר הנקודות האפייני למרחב החד־ממדי S, הוא 2. נכנה מספר נקודות אפייני זה בשם משקל־הנקודות של המרחב. נוכל לתאר שתי נקודות כקצותיו של קטע. כמו כן קבוע מישור

1. כגון מישור הקבוע ע״י p_4 ואחד הישרים של P.

ע״י ישר ונקודה מחוצה לו; לאמור: ע״י שלש נקודות. משקל־הנקודות של P, מרחב דו־ממדי, שוה אפוא ל 3, ואפשר לתפוס את הנקודות כקדקדיו של משולש. את המרחב R_3 בנינו ממישור ונקודה מחוצה לו; לכן משקל־הנקודות של מרחב תלת־ממדי הוא 4, וארבע הנקודות הנדונות, שאינן חלות במישור אחד, יוצרות ארבעון.

קוראים ליציר הפשוט ביותר, הקבוע ע״י מספר נקודות כמשקל־הנקודות של המרחב הנידון, בשם הפַשטון של המרחב. לפי זה פשטוני המרחבים בעלי ממד אחד, שנים ושלשה ממדים הם הקטע, המשולש, הארבעון. לעומת יצירים קוויים אחרים בעלי מספר־ממדים שוה, מצטיינים הפשטונים בתכונה גיאומטרית פשוטה: אין להם קרנזולים (מישורי־קרנזול, וכו׳). לשון אחר: כל קטע המקשר שני קדקדים של פשטון הוא צלע (מקצוע), כל מישור הקבוע ע״י שלשה קדקדים הוא פאה, וכו׳. אין הדבר כך לגבי מלבן וריבוע, או לגבי תיבה וקוביה; יצירים אלו אינם פשטונים, ויש להם קרנזולים או מישורי־קרנזול.

ועתה נבנה את המרחב (הקווי) R_4 בעל ארבעה ממדים לפי אותו תהליך, שהוליך אותנו מן הישר אל המישור וממנו אל R_3! נצא אפוא מן המרחב התלת־ממדי R_3 ונדרוש (השוה עמ׳ 344):

דרישת הממד הרביעי: מחוץ לR_3 יש במציאות לפחות נקודה אחת p_5.

השאלה העשויה לעלות על הדעת „היכן נמצאת נקודה כזו?״ על כל פנים אינה בעלת אופי מתימטי. גם מבחינה הגיונית נוכל לראותה כילדותית למדי, לאחר תהליכי התקדמותנו בסעיף זה, שהרי אותה שאלה יכולים לשאול תושבי העולם S לגבי דרישת הממד השני, ותושבי העולם P לגבי דרישת הממד השלישי. (אין מקום לדון כאן בצד הפסיכולוגי־פיסיולוגי והפיסיקלי של השאלה.)

ובכן נבנה את המרחב R_4 כפי שבנינו את המרחבים P ו R_3! ראשית, נקשר את כל נקודותיו של R_3[1] לנקודה p_5 ע״י ישרים. נוכל לעשות זאת, למשל, בקבענו נקודה מסויימת (שרירותית) ב R_3 ובצאתנו מאלומת כל הישרים העוברים דרך אותה נקודה; הנקודות החלות בישרים של אלומה מרחבית זאת הן כל הנקודות ב R_3, וכל אחת נקשר ל p_5. שנית, נצרף למערכת הנקודות שבישרים האלה את הנקודות שבישרים העוברים דרך p_5 והמקבילים למרחב R_3; לאמור: המקבילים לאחד הישרים של R_3. (הלא קראנו בעמ׳ 345 לישר „מקביל למישור״, אם הוא מקביל לאחד מבין ישרי המישור.) גם מקבילים

1. לקמן נבין ב R_3 את המרחב התלת־ממדי שיצאנו ממנו לשם בנית המרחב R_4 – ולא איזה מרחב תלת־ממדי שהוא.

אלה נקבל בצורה נוחה בצאתנו מאלומת הישרים ב R_3 שקבענוה לעיל. שהרי כל ישר של R_3 מקביל לישר אחד ויחיד מבין הישרים של אותה אלומה; לכן נקבל את המקבילים הדרושים דרך p_5, בהעבירנו מקביל דרך p_5 לכל ישר מהאלומה, במישור הקבוע ע״י הישר ו p_5. (לפי דרישת המקביל יש במישור זה מקביל אחד ויחיד מן הסוג הדרוש.) לבסוף, בספחנו את נקודות המקבילים הללו למערכת הנקודות שבישרים דרך R_3, נקבל **קבוצה של נקודות שתוגדר כמרחב הארבע־ממדי** R_4.

השם „ארבעה ממדים" עקבי הוא ומתקבל על הדעת; שכן, מצד אחד אין המרחב החדש מסתפק בנקודות ה R_3 (שכולן חלות בו ושהנקודה p_5 אינה נכללת בו), ומצד שני ביצענו צעד מינימלי מעבר ל R_3 והלאה, בספחנו בעיקרו של דבר נקודה אחת בלבד; הוספנו עליה רק את הנקודות שסיפוחן הכרחי על סמך דרישת הקוויות ודרישת המקביל. לפי הגדרתו זו יסומן המרחב R_4 גם ב $[R_3, p_5]$.

על־פי מה שלמדנו בדבר נקודותיו הלא־אמיתיות של R_3, נוכל לנסח את צעדנו האחרון (לגבי מקבילים) בבנית ה R_4 גם בצורה זו: נקשר בקווים ישרים את הנקודה p_5 לכל נקודותיו של „המישור הלא־אמיתי של R_3" שבו חלות כל הנקודות הלא־אמיתיות שב R_3. לניסוח פשוט זה יש יתרון בולט, שכן על פיו מתאחדים שני הצעדים לכלל הבא: **נקשר את** p_5 **לכל נקודותיו** (האמיתיות והלא־אמיתיות) של R_3 **בקווים ישרים, ונסמן ב** R_4 **את קבוצת הנקודות החלות בישרים אלה.**

בטרם נוכיח אחדות מתכונותיו הפשוטות של R_4, נקדים הערה שהיא כמעט מובנת מאליה ושכוחה יפה לא במרחב R_3 בלבד כי אם בכל מרחב המכיל את R_3. הואיל ומישור הוא קבוע ע״י ישר ונקודה מחוצה לו, קובעים גם כל שני ישרים נחתכים מישור שבו חלים שניהם; כדי לקבעו נצא מאחד הישרים ומאיזו נקודה, שונה מנקודת החיתוך, של הישר השני. כמו כן קובעים שני ישרים מקבילים מישור. לעומת זאת שני ישרים, **שאין** להם נקודה (אמיתית או לא־אמיתית) משותפת – כלומר, שני ישרים **מצטלבים** – אינם חלים במישור אחד;[1] עובדה זו אינה אלא היפוכו ההגיוני של המשפט הטוען שלשני ישרים החלים במישור אחד יש נקודה משותפת, אמיתית או לא־אמיתית.

משפט 4. מישור העובר דרך הנקודה p_5 של R_4 אינו מכיל שני ישרים של R_3; ז״א הוא מכיל ישר אחד של R_3 או לא שום ישר של R_3.

1. כאן אנו מסתמכים על דרישת המקביל. בגיאומטריה הלא־אבקלידית שנדון בה בסעיף הבא, יש במישור זוגות של ישרים באופן ששני ישרי הזוג אינם נחתכים ואינם מקבילים („על־מקבילים").

הוכחה: יהיו s_1 ו s_2 שני ישרים שונים של R_3. אם הם מצטלבים אינם חלים במישור אחד. לכן נוכל להצטמצם במקרה ש s_1 ו s_2 נחתכים או מקבילים; במקרה זה הם קובעים, כאמור לעיל, מישור של R_3. אך מישור זה, כמישור שחל כולו ב R_3, אינו מכיל את הנקודה p_5; מש״ל.

אפשר לנסח את המשפט 4 גם בצורה זו:

משפט *4. מישור העובר דרך p_5 ודרך ישר s של R_3, „חותך" את המרחב R_3 בישר s; לאמור: לאותו מישור אין נקודות משותפות עם R_3 אלא נקודותיו של s בלבד.

ואמנם אילו היתה למישור נקודה נוספת משותפת עם R_3, היה המישור כולו חל ב R_3.

טענת המשפט 4 אנלוגית היא לגמרי לעובדה הבאה, הקיימת במרחבנו R_3: אם π הוא מישור ו p נקודה מחוצה לו, הרי מישור העובר דרך p ודרך ישר מסויים s של π חותך את π בישר s ותו לא – כלומר, לא בשום נקודה מחוץ ל s. וכן במרחב הדו־ממדי: ישר במישור, העובר דרך נקודה p של הישר s ודרך נקודה מחוץ ל s, חותך את s בנקודה p בלבד.

משפט 5. ישר העובר דרך הנקודה p_5, אינו מכיל שתי נקודות של R_3; לשון אחר: הוא מכיל **לכל היותר נקודה אחת** של R_3.

משפט זה אינו חדש בשבילנו, שכן מביע הוא רק את קוויותו של המרחב R_3 (משפט 2 בעמ׳ 345). ואכן אילו חלו באותו ישר שתי נקודות של R_3, היו **כל** נקודותיו ב R_3. – המשפט אנלוגי הוא למשפט האומר, שלמישור ולישר שאינו חל כולו באותו מישור, משותפת לכל היותר נקודה אחת. ואף־על־פי־כן יש הבדל בין משפט זה, במשמעותו במרחבנו הרגיל, לבין המשפט 5. במשפט 5 יש לתפוס „לכל היותר" דוקא; דהיינו, בדרך כלל אין אפילו נקודה משותפת אחת (עיין להלן). ואילו ב R_3 יש למישור ולישר **תמיד** נקודה משותפת, אמיתית או לא־אמיתית. להלן נראה שהבדל זה אינו אלא תוצאה מהגבלתו של מרחבנו R_3, ז״א מן המספר „הקטן" (3) של ממדיו.

משפט 6. המשותף לשני מישורים שונים π_1 ו π_2 של R_4, העוברים שניהם דרך p_5 וכל אחד דרך ישר (s_1 ו s_2) של R_3, הוא:

ישר, אם s_1 ו s_2 נחתכים או מקבילים;

נקודה, אם s_1 ו s_2 מצטלבים.

הוכחה: ראשית, אם יש ל s_1 ול s_2 הנקודה המשותפת (אמיתית או לא־אמיתית) p, הרי יש ל π_1 ול π_2, מלבד הנקודה המשותפת p_5, גם הנקודה המשותפת השניה p, שהיא שונה מ p_5, הואיל ו p_5 חלה מחוץ ל R_3. לפיכך משותף להם הישר p_5p כולו, על־פי דרישת קוויותו של המישור. מאידך, אי־אפשר שיותר מאשר ישר יהיה משותף לשני מישורים שונים.

שנית, יהיו s_1 ו s_2 ישרים מצטלבים של R_3. אילו היו משותפות ל π_1 ול π_2

שתי נקודות, ולכן גם הישר s המקשר אותן, כי אז היו הישרים s_1 ו־s של π_1 נחתכים (או מקבילים), והוא הדין לגבי הישרים s_2 ו־s במישור π_2. פרוש הדבר, ש־s מקשר שתי נקודות (אמיתיות או לא־אמיתיות) של R_3; נקודות אלו שונות הן, שהרי חלות הן בישרים המצטלבים s_1 ו־s_2. לכן היה s — שהוא הישר המשותף למישורים π_1 ו־π_2 — גם הוא ישר של R_3. ברם דבר זה סותר את ההנחה שלפיה משותפת לשני המישורים על כל פנים הנקודה p_5 שהיא חלה מחוץ ל־R_3; שכן שני מישורים המכילים ישר ונקודה משותפים מתלכדים הם.

המשפט 6 מראה, שבמרחב ארבע־ממדי יכולים שני מישורים להיחתך בנקודה אחת בלבד. גדולה מזו: זהו המקרה „הנורמלי", כפי שהמקרה „הנורמלי" לגבי שני ישרים במרחב תלת־ממדי הוא, שהם מצטלבים ולא שהם נחתכים או מקבילים.

משפט 7. המרחב R_4 הוא קווי; כלומר, כל ישר ששתים מנקודותיו חלות ב־R_4, חל כולו ב־R_4.

הוכחתו של משפט זה, שהיא אנלוגית להוכחת המשפט 2, נמצאת במלואים לחלק החמישי, מספר כג). ההוכחה פשוטה למדי, הואיל ואפשר לבצעה בשלימותה במישור.

מתוך משפט זה נובע, בהקבלה למשפט 3 ולהוכחתו:

משפט 8. המרחב R_4, שנקבע לעיל ע"י R_3 ו־p_5, יכול להיקבע גם ע"י כל מרחב תלת־ממדי שהוא R'_3 של R_4 [1] יחד עם כל נקודה q_5 של R_4 שאינה חלה ב־R'_3.

ואכן כל נקודה של המרחב $[R'_3, q_5]$ נמצאת ב־R_4; שהרי הנקודה חלה בישר, המקשר שתי נקודות של R_4, והחל אפוא כולו ב־R_4 על־פי המשפט 7. וכן חילוף הדבר.

בנית המרחב R_4 והמשפטים 7 ו 8 והוכחותיהם נוסחו במחשבה תחילה בצורה מקבילה לחלוטין לבנית המרחב R_3 ולמשפטים 2 ו3. מתוך כוונה זו הקדמנו לגבי המרחב התלת־ממדי תהליכים, הנראים כמובנים מאליהם, כדי להבליט את העובדה שאין עקרונות חדשים אצל המרחב הארבע־ממדי. ובכן ברור, שלפי אותו תהליך אפשר להמשיך ללא כל קושי יסודי ולהגיע לידי מרחבים קוויים בעלי חמישה, ששה ויותר ממדים[2].

---

1. כגון מרחב הקבוע ע"י p_5 ואחד המישורים של R_3.

2. יצויינו כאן ספרים אחדים על מרחבים מרובי־ממדים. (יש לראות את H. Grasmann כיורה אבן־הפנה לגיאומטריה במרחבים כאלה. אמנם ספרו המעמיק והמהפכני מ 1844 לא זכה להבנה אצל בני דורו. תיאור גיאומטרי טהור ל־R_4 נתן בראשונה G. Veronese בשנת 1881.) ספרים אלמנטריים הם:

H. P. Manning: The fourth dimensiou, simply explained. 1910.

D. B. Mair: Fourfold geometry. 1935.

לא נחזור על התהליך החד־גוני של בנית המרחבים האלה. אך אין בניה זו עיקר, אלא הרב־גוניות הגיאומטרית ההולכת וגדלה כִּרבוֹת מספר הממדים. רמזים להתפתחות זו ינתנו להלן מתוך ציון יצירים אחדים במרחב R_4. כן נתווה את הרעיון הכללי המוביל להרכבת מרחב חדש מתוך מרחבים נתונים.

בסוף דיוננו במרחב R_3 הכנסנו את מושג הַפַּשְׁטוֹן, שמספר קדקדיו שוה למשקל־הנקודות של המרחב הנדון. נסמן מעתה את הפשטון[1] בעל n קדקדים ב־s_n; ברור ש־s_n הוא הפשטון של המרחב בעל $n-1$ ממדים, דהיינו R_{n-1}. s_2 הוא אפוא הקטע, s_3 המשולש, s_4 הארבעוֹן. הבה נבדוק את הפשטון s_5 במרחב R_4!

s_5 קבוע ע"י חמש נקודות (קדקדים) שאינן חלות כולן במרחב תלת־ממדי אחד. ברם אם נבחר כרצוננו בארבעה מבין חמשת הקדקדים — בחירה זו יכולה להעשות בחמשה אופנים שונים, כנגד השמטת אחד־אחד מבין חמשת הקדקדים — הרי ארבע נקודות אלו, שאינן חלות במישור אחד[2], קובעות מרחב תלת־ממדי, ובתוכו ארבעוֹן. הפשטון s_5 „מוגבל" אפוא ע"י חמשה „מרחבים פאתיים" תלת־ממדיים, כשם שהארבעון s_4 מוגבל ע"י ארבע פיאות מישוריות. כמו שיש לכל אחת מפיאות אלו צורת משולש, כן מופיע כאן כל מרחב פאתי בצורת ארבעון. בהשתמשנו, תחת „מרחב פאתי", בקיצור „תא", נכנה את הפשטון s_5 בשם מחומש־תאים.

H. de Vries: De vierde dimensie. (בהולנדית; הוצאה גרמנית, 1926)

R. Weitzenböck: Der vierdimensionale Raum. 1929.

סיפור נובליסטי, כביכול, הבא לתאר את חייהם של תושבי המרחב הדו־ממדי, על־מנת להקל את הבנת הממד הרביעי, הוא:

A Square (pseudonym for E. A. Abbott): Flatland.

הופיע בכמה מהדורות. מהדורה ששית, אוקספורד, 1950.

הספרים הבאים מרחיקים לכת יותר:

E. Bertini: Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi. (הופיע גם בגרמנית, 1924)

A. R. Forsyth: Geometry of four dimensions. 2 vols. 1930.

D.M.Y. Somerville: An introduction to the geometry of n dimensions. 1929.

סומרביל פרסם ב 1911 ביבליוגרפיה של הגיאומטריה הלא־אבקלידית, של הגיאומטריה מרובת־הממדים, ושל יסודות הגיאומטריה. כמו כן יש רשימה ביבליוגרפית רחבה בתיאורו המצויין של C. Segre („מרחבים מרובי־ממדים") שהופיע ב 1920 בכרך השלישי של *Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften*. מתוך השקפה מעמיקה יותר נכנסת הגיאומטריה מרובת־הממדים, ובפרט זו של ארבעה ממדים, לתחום הגיאומטריה הדיפרנציאלית החדישה ולתורת היחסות הכללית. על נושאים אלה יש ספרות עצומה, הדורשת ידיעות קודמות רחבות. די להזכיר בין מחברי הספרים מסוג זה את השמות:

W. Blaschke, A.S. Eddington, T. Levi-Civita, G. Ricci, I.A. Schouten, H. Weyl.

1. המונח הרומי לפשטון הוא simplex; לכן בחרנו באות s.

2. אילו חלו במישור, היתה הוספת הנקודה החמישית קובעת R_3 לכל היותר, ולא R_4.

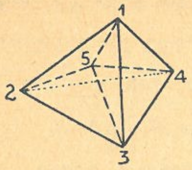
כל קדקוד של s_5 מקושר לכל קדקוד אחר ע"י מקצוע (קטע ישר). בעקבנו אחרי מקצועות אלה לגבי כל קדקוד לחוד, נקבל $5\cdot 4 = 20$ מקצועות; אך כל מקצוע מופיע כאן פעמיים, מתוך גשתנו לכל אחד משני קצותיו. לכן יש ל s_5 ס"ה $\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ מקצועות. את פיאותיו של s_5 נקבל, בקחתנו בכל אופן אפשרי שלשה מבין חמשת קדקדיו, הקובעים משולש (מישור), והואיל ומכל קדקוד יוצאים ארבעה מקצועות, שכל זוג מהם קובע משולש, נגיע לידי $5\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=5\cdot 6$ משולשים. אולם היות ואנו חוזרים כך על כל משולש שלש פעמים (אצל כל אחד מקדקדיו), יש ס"ה $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$ פיאות, כל אחת בצורת משולש. המסקנה היא אפוא: לפשטון s_5 של R_4 יש 5 קדקדים, 10 מקצועות, 10 פיאות ו 5 תאים, לעומת 4 קדקדיו, 6 מקצועותיו ו 4 פיאותיו של הארבעון (הפשטון של R_3). המערכת (5, 10, 10, 5) אפיינית לפשטון s_5 של R_4, כשם שהמערכת (4, 6, 4) אפיינית לארבעון (לפשטון של R_3).

הקורא הבקי במקצת בתורת הצירופים, או בחוק למַקדמים הבינוֹמיים, יעמוד מיד על החוק המתגלם כאן, ויוכל לפתח יחסים מתאימים לגבי פשטוני המרחבים R_5, R_6 וכו'. נדגיש שמספר הקדקדים שוה למספר התאים (וב R_n: למספר התאים בעלי $n-1$ ממדים); כי נקבל תאים אלה, בהשמיטנו אחד אחד מבין הקדקדים.

תארנו בדרך זו את ה"גוף" ב R_4, שקראנו לו בשם "מחומש־תאים", בדרך עיונית. אך כלום אפשר למצוא לו גם המחשה הסתכלותית במקצת, הניתנת לראיה בעינים? לכאורה תהיה התשובה שלילית, הואיל ולא נוכל לראות עצמים ארבע־ממדיים. אולם נזכור נא, שאנו רגילים לצייר, דהיינו: לתאר במישור, גופים תלת־ממדיים; מדוע יקשה יותר לתאר ע"י דיאגרמה במרחב R_3 יציר ארבע־ממדי? משרטטים אנו ארבעון בציור מישורי, בשרטטנו ראשית משולש וברשמנו שנית, במישור המשולש, נקודה רביעית (למשל בפנים המשולש), שנקשר אותה לשלשת קדקדי המשולש ע"י קטעים ישרים. כיוצא בזה נמחיש את מחומש־התאים בבנותנו ארבעון, בקבעֵנו – במרחב הקבוע ע"י הארבעון, כלומר במרחבנו התלת־ממדי – נקודה חמישית, למשל בפנים הארבעון, ובקשרנו את הנקודה החדשה לארבעת קדקדי הארבעון ע"י קטעים ישרים. בגוף זה, אם ניצור אותו כתבנית עשויה מחוטים, נוכל "להביט־ממש" בכל 10 המקצועות, 10 הפיאות ו 5 התאים. דיאגרמה זו אינה רחוקה לגבי תפיסתנו מהמרחק של ציור רגיל לארבעון לגבי תפיסת תושבי R_2, שאינם יכולים אמנם לדַמות בנפשם את הקדקוד הרביעי במרחבם, אך יכולים הם למששו בציור המישורי.

גדולה מזו: יש לאל ידנו לשרטט את מחומש־התאים. הלא הדיאגרמה הנ"ל מהווה גוף תלת־ממדי, והרי רגילים אנו לתאר גופים כאלה בעזרת ציור במישור. הבה נשרטט s_5 (עיין בציור 76), בצאתנו מציורו של ארבעון

(המשולש 123, ובמישורו נקודה 4), ובהכניסנו באיזה מקום שהוא באותו מישור נקודה חדשה 5. מתקבלת אפוא דיאגרמה של דיאגרמה.



ציור 76

מתוך ציור זה, או מתוך דיאגרמה מרחבית עשויה מחוטים, נוכל עתה לאשר דרך ראייה־ממש את כל מה שנאמר לעיל על מחומש־התאים על־סמך עיון מופשט. נוכל לראות לא רק את עשרת המקצועות $\overline{12}$, $\overline{13}$, וכו' ואת עשר הפיאות $\overline{123}$, $\overline{124}$ וכו', כי אם גם את חמשת התאים (ארבעונים) $\overline{1234}$, $\overline{2345}$, $\overline{3451}$, $\overline{4512}$, $\overline{5123}$ המגבילים את s_5; וכן לספור בציור את הפיאות היוצאות מכל קדקוד, וכדומה.

אם נבצע תהליך־דיאגרמה כפול על הפשטון s_6 במרחב החמש־ממדי R_5, נגיע לתבנית תלת־ממדי לפשטון זה.

נוכל להתקדם עתה אל "גופים" או, כפי שמוטב לומר (בהקבלה למונח "פיאוֹן" ב R_3), אל "תאוֹנים" ב R_4. הפשוט בין התאונים המשוכללים ב R_4, האנלוֹגיים לפיאונים המשוכללים ב R_3 (עמ' 324/5), הוא מחומש־התאים המשוכלל, המוגבל ע"י חמשה ארבעונים משוכללים; קל לברר את תכונותיו על־פי מה שנאמר עד כאן. אגב, חקירה מדוקדקת מראה שב R_4 יש ששה תאונים משוכללים; ואולם מהמרחב R_5 והלאה יש שלשה בלבד, האנלוגיים לארבעוֹן (דהיינו, הפשטון המשוכלל של המרחב הנדון), לקוביה (עיין להלן), ולתמניון[1].

בדיוננו בתושבי המרחב R_2 נתעוררה המחשבה: נקודה[2] הנעה n יחידות־אורך בכוון ידוע, יוצרת קטע, כלומר יציר בעל ממד אחד ושני קדקדים. בנוֹע יציר זה ב R_2 n יחידות־אורך בכוון מאונך לו, יווצר ריבוע, כלומר יציר בעל שני ממדים, 4 קדקדים ו 4 צלעות (שהם יצירים בעלי (2–1) ממדים, דהיינו חד־ממדיים); "תכולתו" – במקרה שלפנינו: שטחו – שוה ל n^2. בעיני תושביו של R_2 אין זה אמנם ענין שבהסתכלות, אך לפחות אפשרי לפי ההגיון, שהריבוע ינוע אל ממד שלישי n יחידות־אורך בכוון שהוא מאונך למישור הריבוע; בעינינו־אנו הדבר פשוט בהחלט. בדרך זו יווצר יציר בעל 3 ממדים, 8 קדקדים, 6 פיאות (יצירים בעלי (3–1) ממדים, דהיינו דו־ממדיים), ותכולתו (נפחו) שוה ל n^3; היא הקוביה. אנו רגילים לטעון, שאמנם לחזקה השלישית יש משמעות גיאומטרית של תכולה, ברם לא לרביעית. אולם הקורא נוכח לדעת, שטענה זו שרירותית היא בהחלט מבחינה הגיונית, והוא ישאל אפוא את עצמו

1. השוה למשל: P.H. Schoute: Die Polytope. 1905 (זהו הכרך השני של ספר על גיאומטריה מרובת־ממדים).

2. נוכל לראות את הנקודה כיציר (מצולע, פיאון וכו') בעל קדקוד אחד ו 0 צלעות.

מה יקרֶה, אם קוביה תנוע n יחידות־אורך בכוון „המאונך למרחבו התלת־ממדי". הוא ינחש מטעמי אנלוגיה, שיווצר יציר בעל 4 ממדים, 16 קדקדים, 8 תאים (יצירים בעלי (4—1) ממדים, דהיינו תלת־ממדיים), שיש לו התכולה n^4. דבר זה מתאים לסדרות [1]

$$(0,1,2,3,4,\ldots),\quad (1,2,4,8,16,\ldots),\quad (0,2,4,6,8,\ldots),\quad (1,n,n^2,n^3,n^4,\ldots).$$

ואמנם החקירה העיונית מאשרת זאת: עומד לפנינו התאון המשוכלל בעל 8 תאים, המהווה לעומת „המקצוע" 1 (תחת n דלעיל) את יחידת התכולה ב R_4, כמו שממלאת הקוביה בעלת המקצוע 1 תפקיד זה ב R_3. אם יחידת־האורך נקבעה לס"מ, תהיה אפוא יחידת התכולה ב R_4: ס"מ בחזקה הרביעית. לכן מכונה תאון זה תאון־המידה. נעיר עוד, שמספר מקצועותיו של תאון זה הוא 32 ומספר פיאותיו 24. נקבל, אפוא, לעומת המערכת (5,10,10,5) במחומש־התאים, את המערכת (16,32,24,8) בתאון־המידה של R_4.

לגבי תושבי המרחב R_4 משמש תאון מסוג זה (לאו דוקא משוכלל) ארון לשמירת כספם ונכסיהם, ולא ארון או „סייף" בצורת קוביה או תיבה בשלשה ממדים. אדרבה: כשם שאנו, יצירים תלת־ממדיים, יכולים לגנוב מארונו של תושב העולם הדו־ממדי P את תכנו ללא פגיעה במנעול: ע"י העברת התוכן אל הממד השלישי והחזרתו אל P (עמ' 344), כך יוכלו תושבי העולם R_4 להוציא את תוכן ארונותינו־אנו, ללא פגיעה במנעול, בהעבירם את התוכן אל הממד הרביעי, ולהחזירו אחר כך אל R_3. וכן יוכלו תושבי R_4 לראות מן הממד הרביעי את לבו וקיבתו של תושב R_3 גם בלעדי קרני X וכו', כפי שאנו רואים „מלמעלה" את „קיבתם" של תושבי P.

בעמ' 344 ניתן תיאור לפליאתו של תושב העולם P על כך, שאנו יכולים להפוך את ידו הימנית (השטוחה) לשמאלית, בהוציאנו אותה [2] אל הממד השלישי ובסובבנו אותה שם הרבצה של 180^0. אנחנו נתפלא לא פחות מזה, אם יבצע כלפינו אורח מ R_4 סיבוב אנלוגי במימד הרביעי ויחזירנו לעולמנו, כשידנו הימנית נהפכה ליד שמאלית — ללא כל עיוות מיכאני, אך ורק מתוך תנועה במרחב R_4.

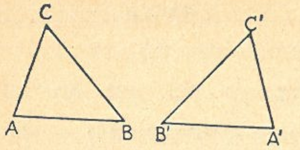
נברר דבר זה בצורה פחות מקרית! המדובר הוא ביצירים גיאומטריים, שהם אמנם חופפים, אך ללא אפשרות ביצוע ממשי של חפיפה במרחב

---

1. ה 1 שבראשית הסידרה האחרונה מתבאר בזה, שתכולת הנקודה צריכה להיתפס ביחידות־מידה בעלות 0 ממדים — כשם שבמדידת הקטע הכוונה ליחידות חד־ממדיות, במדידת הריבוע ליחידות דו־ממדיות, וכו'.

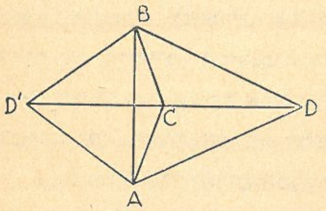
2. תיאור זה אינו בא, כמובן, אלא לשבר את האוזן. במובן פיסי לא נוכל להחזיק בעצם בעל שני ממדים בלבד, אלא רק בעצם (כגון בפיסת־ניר דקה) אשר ממדו השלישי קטן מאד. וכן לא יוכל תושב של R_4 „להחזיק" בשום עצם מעולמנו R_3.

הנדון. שני המשולשים שבציור 77 אמנם חופפים הם, אך נמצאים במצב תאום (סימטרי); A ו A', B ו B', C ו C' הם קדקדים מותאמים זה לזה. אולם אי אפשר להעביר אחד המשולשים למשנהו ע"י תנועה במישור הציור, בהתאם לכך שמגמת־הסיבוב (השוה I, 147) ABC נגדית למגמת־הסיבוב A'B'C'. (אפשר אמנם להעביר אחד המשולשים לשני ע"י השתקפות ב„ציר־התאימות".) לעומת זאת קל (השוה בעמ' 344) להעביר, דרך תנועה בלבד, אחד המשולשים למשנהו ע"י הוצאתו לממד השלישי והרבצתו ב 180^0.



ציור 77

כיוצא בזה ב R_3: שני הארבעונים ABCD ו ABCD' (ציור 78), המתקבלים מן המשולש ABC ע"י העלאת אנכים שוים אך נגדיים על המישור ABC בנקודה C, חופפים הם במובן גיאומטרי. ברם אי אפשר לבצע את חפיפת האחד על משנהו ב R_3; רביעית־הנקודות המתאימה קובעת במקרה אחד סיבוב „ימני", במשנהו סיבוב „שמאלי". הארבעונים נמצאים במצב תאום, ואחד נהפך למשנהו לא ע"י תנועה ב R_3, אלא ע"י השתקפות ב„מישור־התאימות" ABC. ב R_4 אפשר להפוך את אחד הארבעונים ולהעבירו למשנהו ע"י תנועה בלבד: ע"י „סיבובו" של R_3 כולו סביב המישור ABC בממד הרביעי, שכן אחרי מחצית סיבוב שלם תחזור הנקודה D אל R_3 ותתפוס את מקומה של הנקודה D'. (כמו־כן אפשר להתיר משלבת סגורה של R_3 — השוה ציור 75, עמ' 337 — ב R_4, בלי לקרוע אותה.) אמנם לשם ביסוסן המדויק של מסקנות אלו ודומות להן יש להתעמק יותר בתכונותיו של R_4 (בפרט בסיבובים במרחב זה) ממה שעשינו כאן; אך האנלוגיה השלימה ל R_3 תספיק להסביר את הדברים גם לקורא שלא תהא לו הזדמנות להתעמק בענין.



ציור 78

בביאור התאון המשוכלל בעל 8 תאים שניתן למעלה דובר על „כוון מאונך ל R_3". הבה נקרב קצת להבנתנו את המונח הזה וכן את מושג ההקבלה ב R_4!

בלימודי הסטיריאוֹמטריה (הגיאומטריה במרחב) בבית הספר התיכון מוכיחים את המשפט היסודי הבא, שאינו פשוט כפי שהוא נראה: יהי s ישר, ו p נקודה של s; כל הישרים של R_3 המאונכים ל s בנקודה p חלים במישור אחד, המכונה „המישור המאונך ל s ב p". בהתאמה גמורה לכך קיים ב R_4:

משפט 9. כל הישרים של R_4, המאונכים לישר s בנקודה מסויימת p של s, חלים במרחב תלת־ממדי מסויים, הנקרא המרחב R_3

המאונך ל־s בנקודה p. (מובן ש־R_3 זה מכיל את הנקודה p.)

סקירה על דרך ההוכחה למשפט זה ניתנת במלואים לחלק החמישי, מספר כד). נוסיף כאן, שמשפט זה – או התאון המשוכלל בעל 8 תאים, השקול כנגדו – הוא המפתח לגיאומטריה האנליטית ב־R_4. נבנה, ראשית, במרחב R_3 הנזכר במשפט 9 מערכת־שעורים קרטיסית רגילה שמוצאה בנקודה p. אם נוסיף על שלשת ציריה, שכל אחד מהם מאונך לשני חבריו, ציר רביעי באחד משני כווני הישר s הנזכר במשפט 9, הרי יש לפנינו מערכת של ארבעה צירי־שעורים, שכל אחד מהם מאונך לשלשת חבריו; מערכת זו מאפשרת קביעה לכל נקודה של R_4 בעזרת ארבעת שעוריו „הקרטיסיים".

מתקבל על הדעת – ובאמת כך המצב – שקיים משפט אנלוגי למשפט 9 בכל מרחב. לאמור: אם s הוא ישר של המרחב ה־n־ממדי R_n ($n>1$), חלים כל הישרים, המאונכים ל־s בנקודה p של s, במרחב מסויים בעל $n-1$ ממדים, הנקרא המרחב המאונך ל־s ב־p. במקרה $n=2$, כלומר במקרה של מישור, המרחב המאונך הוא קו ישר אחד בלבד.

היחסים בין ישרים המכונים „מאונך" ו„מקביל" הם נגדיים זה לזה, ומשום כך יש אנלוגיה מעמיקה בין תכונותיהם. במושג ההקבלה נוכל לטפל ביתר קלות, מכיון שיש לרשותנו מכשיר חד ובכל זאת נוח לשימוש: שיטת הנקודות הלא־אמיתיות. נסתייע בשיטה זו כדי להבהיר תכונות אחדות של היחסים הנ"ל.

נתחיל בשיקול הבא לגבי שני מישורים מאונכים זה לזה ב־R_3 הרגיל! האם באמת „מאונכים" הם במלוא מובן המלה? כלומר: אחרי בחירת נקודה שרירותית משותפת לשני המישורים, האם כל ישר דרך נקודה זו במישור האחד מאונך לכל ישר דרך אותה נקודה במישור השני[1]? לא ולא! אדרבא, יש גם דבר־מה מקביל בין שני מישורים כאלה; שהרי מערכת הישרים המקבילים לישר־החיתוך במישור האחד, ומערכת המקבילים המתאימה במישור השני, מצטרפות למערכת אחת של ישרים, שכל אחד מהם מקביל לכל ישר אחר של המערכת. נגלה על נקלה את המקור לכך, בזכרנו את פרשת הנקודות הלא־אמיתיות (השוה בעמ' 227). הן היציר הלא־אמיתי של R_3 הוא מישור לא־אמיתי, ובמישור זה חלים היצירים הלא־אמיתיים של שני המישורים המאונכים הנתונים; כל אחד מהיצירים האלה הוא ישר. שני ישרים במרחב תלת־ממדי אינם נחתכים בדרך כלל. אך הואיל והיציר הלא־אמיתי הנ"ל הוא דו־ממדי בלבד,

---

1. מי שיעיין היטב במערכת־שעורים קרטיסית של R_4 (או בתאון המשוכלל בעל 8 תאים) ויצרף לכך את ההוכחה במספר כד) של המלואים לחלק החמישי, יווכח שב־R_4 יש באמת מישורים בעלי נקודה משותפת אחת בלבד, שהם מאונכים במובן מכסימלי זה; למשל המישור הקבוע ע"י זוג אחד מצירי־השעורים הנ"ל והמישור הקבוע ע"י הזוג השני. אמנם הם „מישורים מאונכים בהחלט".

בהכרח נחתכים שני הישרים הלא־אמיתיים הנדונים במישורם המשותף; כלומר, יש להם נקודה משותפת, שהיא הנקודה הלא־אמיתית המשותפת לשתי המערכות הנ"ל של מקבילים. נוכל אפוא לבטא את המצב כך: שני מישורים ב־R_3 אינם יכולים להיות „מאונכים בהחלט", מפני ש־R_3 הוא מעוט־ממדים; דבר זה גורם לכך, שקימת גם מידת־מה של הקבלה בין „מישורים מאונכים" ב־R_3. לגבי שני מישורים של R_3 קימת ברירה זו בלבד: או שישריהם הלא־אמיתיים מתלכדים (כלומר, שהמישורים מקבילים), או שהם נחתכים – ברם לא שהם מצטלבים. לעומת זאת, מישור וישר המאונך לו אין להם כל גורם מקביל; שכן לישר הלא־אמיתי של המישור ולנקודה הלא־אמיתית של הישר אין כל דבר משותף.

ועתה נפנה אל R_4! עלינו להעניק לו באיפן עקבי מרחב תלת־ממדי לא־אמיתי, שבו חלים מישוריהם הלא־אמיתיים של כל ה־R_3־ים הנמצאים ב־R_4. נסמן מרחב זה ב־I_3. לכל ישר אמיתי של R_4 (כלומר, לישר שאינו חל כולו ב־I_3) יש נקודה אחת ויחידה משותפת עם I_3; שני ישרים של R_4 מקבילים אם, ורק אם, נקודותיהם הלא־אמיתיות מתלכדות. אך לגבי שני מישורים של R_4 יש ברירה לא רק בין שתי אפשרויות (כב־R_3, כפי שפירשנו לעיל) כי אם בין שלש: ישריהם הלא־אמיתיים יכולים להתלכד, להיחתך, או להצטלב ב־I_3. במקרה הראשון המישורים מקבילים; באחרון אין כל הקבלה ביניהם. במצב זה נמצאים שני מישורים „מאונכים בהחלט" (עיין בהערה בעמ' 356), וביתר כלליות כל שני מישורים הנחתכים בנקודה אמיתית אחת בלבד. כאן יש לנו ראיה חדשה לכך, שזהו המקרה הכללי לגבי שני מישורים ב־R_4; הלא המקרה הכללי לגבי שני ישרים במרחב תלת־ממדי (כאן ב־I_3) הוא: שיצטלבו.

נשארת האפשרות הבינונית, שבה משותפת לשני המישורים של R_4 נקודה לא־אמיתית אחת ויחידה. אולי נוטה הקורא לזהות זאת למקרה, שלמישורים יש ישר אמיתי משותף, דהיינו שחלים הם באותו R_3. מובן שאז משותפת להם נקודה לא־אמיתית אחת. אך זה רחוק מהיות המקרה הכללי לאפשרות זו – כרחוק המקרה הכללי של נקודה לא־אמיתית משותפת בין מישור לישר ב־R_3 מן המקרה הפרוט שבו חל הישר במישור. אדרבא, המקרה הכללי הוא זה שהנקודה הלא־אמיתית המשותפת לשני המישורים היא נקודתם המשותפת היחידה. (במשל הנ"ל מ־R_3, המקרה הכללי הוא שהישר מקביל למישור.) במישור האחד זוהי הנקודה המשותפת למערכת אינסופית מסויימת של ישרים מקבילים; והוא הדין במישור השני. ברם בתוך שתי מערכות אלו של ישרים, שכולם מקבילים, אין שום ישר החל בשני המישורים הנתונים גם יחד. באשר לכל זוג אחר של ישרים (לא־מקבילים) בכל אחד משני המישורים, הרי ישרים אלה אינם נחתכים ואינם מקבילים אלא מצטלבים.

לאפשרות הנ"ל בדבר היחס בין שני מישורים ב־R_4 ניתן כאן לא תיאור

איכותי בעלמא, כי אם תיאור כמותי במובן הבא: המַכסימום של שיתוף ב-I_3 בין שני מישורים של R_4 (לאמור: בין שני ישרים ב-I_3) הוא, בלשון משקל־הנקודות (עמ׳ 346): שתי נקודות, ולכן ישר לא־אמיתי; דבר זה קיים כלפי מישורים מקבילים, שישריהם הלא־אמיתיים מתלכדים. מאידך, המינימום הוא: אף לא נקודה אחת, כגון מישורים מאונכים בהחלט. אם משותפת להם נקודה אחת, משותף להם חצי המכסימום; לכן נקראים הם מישורים מקבילים־למחצה. מדידה כמותית זו לדרגת־ההקבלה היא כללית ואינה מצטמצמת לא בערך $\frac{1}{2}$ ולא ביחס בין מישורים דוקא. בקחתנו, למשל, מישור מסויים ו-R_3 מסויים ב-R_4, נקבל כיציריהם הלא־אמיתיים ישר ומישור ב-I_3. המכסימום של שיתוף ביניהם הוא ישר: כשהישר חל במישור; כלומר, שתי נקודות. ואילו המינימום הוא נקודה אחת, שהרי במרחב תלת־ממדי לא יוכל ישר להצטלב במישור. מישור ו-R_3 הם אפוא ב-R_4 לפחות „מקבילים למחצה". (לא כן במרחב בעל חמישה ממדים, שיצירו הלא־אמיתי הוא מרחב ארבע־ממדי, בו יכולים ישר ומישור להצטלב.) כן שני מישורים ב-R_3 הם לפחות מקבילים־למחצה (עיין לעיל). אך שני מרחבים תלת־ממדיים במרחב בעל ארבעה ממדים, יציריהם הלא־אמיתיים הם מישורים (בעלי משקלי־נקודות 3); ומכיון שלשני מישורים ב-I_3 יש לפחות ישר משותף (בעל משקל־הנקודות 2), יוצא שהמרחבים הם מקבילים לגמרי או מקבילים במידת $\frac{2}{3}$.

אפשר לקבוע בדרך אנלוגית גם את מידת היחס „מרחב (מישור, ישר) מאונך למרחב אחר". שני מישורים ב-R_3 המאונכים זה לזה, מקבילים הם למחצה, ומאונכים למחצה, לפי מה שהתבאר לעיל.

דיוננו ב-R_4 הצטמצם עד כאן בישרים, במישורים ובמרחבים תלת־ממדיים קוויים; הצד השוה שבהם שכולם מרחבים קוויים. ברם ב-R_3 עוסקים, אפילו בלימודים האלמנטריים, גם במרחבים לא־קוויים; לאמור: במרחבים עקומים. המרחב העקום הדו־ממדי הפשוט ביותר ב-R_3[1] (הואיל ויש לו „עיקום חיובי קבוע") הוא משטח־הכדור (פני כדור). כשם שחפשנו ומצאנו ב-R_4 את היציר המתאים לארבעון או לקוביה של R_3, כך יש לשאול ליציר העקום התלת־ממדי של R_4 המתאים למשטח־הכדור של R_3. בלא להכנס לתוך תוכה של שאלה זו — דבר המצריך חקירת הסיבובים ב-R_4 — נוכל להסתייע לגביו בניחוש, בזכרנו את רושם הופעתו של כדור בעיני תושביו של המישור P (עמ׳ 344).

היציר התלת־ממדי הנדון ב-R_4 יוגדר כמערכת כל הנקודות של R_4 שיש

1. המעגל הוא מרחב עקום חד־ממדי, גם הוא בעל עיקום חיובי קבוע.

להן רוחק קבוע r מנקודה נתונה c; נקרא לו בשם על־כדור[1]. יציר זה חותך כל מרחב תלת־ממדי, המכיל את הנקודה c, בכדור בעל המחוג r. יש אינסוף מרחבים ואינסוף כדורים כאלה — כשם שיש ב-R_3 אינסוף מישורים דרך מרכזו של כדור, וכל מישור כזה חותך את הכדור במעגל שמחוגו שוה למחוג הכדור. כמו כן חותך כל מישור דרך c את העל־כדור במעגל בעל המחוג r, וכל ישר דרך c בשתי נקודות בנות הרוחק $2r$ שהאמצע ביניהן הוא c. בדרך זו מתאשר, שיש לפנינו יציר עקום ולא קווי; כי הלא למרחבים הקוויים היתה אפיינית התכונה שכל ישר, ששתי נקודות משותפות לו עם המרחב, חל כולו במרחב.

עד כאן הסתכלנו בעל־כדור קבוע ובמישור משתנה דרך מרכזו. מאידך, אם נשאר במרחבנו הקבוע R_3 ונחשוב על על־כדור מתנועע, הרי לא נרגיש בו כל עוד לא יחתוך את מרחבנו. המעבר ממצבים אלה, שבהם אין נקודה משותפת בין R_3 והעל־כדור, אל מצבי־החיתוך יביא בהכרח לידי מצב שבו יש נקודה אחת ויחידה משותפת לעל־כדור ולמרחבנו; לשון אחר: שבו מצטמצם כדור החיתוך בין R_3 והעל־כדור בנקודה אחת בלבד. במקרה זה „משיק" מרחבנו לעל־כדור, והמחוג מנקודת־המגע אל מרכזו של העל־כדור מאונך למרחבנו. ברם כאשר יחתוך העל־כדור ממש את R_3, יהיו יצירי־החיתוך (הדו־ממדיים) משטחי־כדור — של כדור לא בעל מחוג קבוע אלא בעל מחוג משתַנה. אנו רואים כדור ההולך ומשנה את גדלו, כפי שרואים תושבי המישור P כדור רגיל הנכנס אל מרחבם כמעגל המשנה את מחוגו (עמ׳ 344).

תפסנו כאן את העל־כִדור כמרחב תלת־ממדי, המגביל „גוף" ארבע־ממדי. (השוה את ההבדל בין פני־כדור לגוף־הכדור, או בין קו־המעגל לעיגול!) מרחב תלת־ממדי זה הוא דוגמה למרחב סופי אך לא־מוגבל (מחוסר שפה); ברם הוא אינו קווי אלא עקום. על מרחבים כאלה, שיש להם תפקיד חשוב בפיסיקה החדישה, רמזנו בפרק הקודם (עמ׳ 336; השוה גם להלן ב-§3).

כנושא אחרון לטיולנו זה בעולמות מרובי־ממדים נעורר את השאלה של קביעת מרחב ע״י מרחבים אחרים.

אפשר לקבוע את המרחב R_3 בדרכים שונות. לעיל בנינוהו מתוך מישור ונקודה מחוצה לו. אך יש לבנותו גם מתוך שני ישרים מצטלבים. לא די לומר: מתוך שני ישרים שונים; שכן, אם יש לישרים נקודה (אמיתית או לא־אמיתית) משותפת, הרי קובעים הם יחד מישור בלבד ולא R_3. כמו כן אפשר

1. בגיאומטריה האנליטית של R_4 תהיה משוואת העל־כדור, אם לנקודה c יש השעורים הקרטיסיים c_1, c_2, c_3, c_4:

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 + (u-c_4)^2 = r^2.$$

השוה את הנוסח לרוחק שבסוף הסעיף הזה.

לבנות את R_4, לא רק מתוך R_3 ונקודה מחוצה לו כפי שעשינו לעיל, אלא גם מתוך מישור וישר המצטלב במישור, או מתוך שני מישורים בעלי נקודה משותפת יחידה. נברר עתה באופן שיטתי את האפשרויות השונות של בנית כל מרחב שהוא. לשם אחידות נסמן כל מרחב (קווי) בעל n ממדים ב R_n; לכן יסומן המישור ב R_2, הישר ב R_1, והנקודה ב R_0.

ראינו לעיל ש R_n נקבע ע"י $n+1$ נקודות בלתי־תלויות (כלומר, נקודות שאינן חלות במרחב בעל $n-1$ ממדים). לפיכך קראנו למספר $m=n+1$ משקל־הנקודות של המרחב R_n. ננסח את שאלתנו כך: יהיו נתונים שני מרחבים מסויימים שמספרי־ממדיהם הם n_1 ו n_2, ולכן משקלי־נקודותיהם הם $m_1=n_1+1$ ו $m_2=n_2+1$; מהו המרחב „המורכב" משני המרחבים הנתונים?

הדוגמות דלעיל מראות, ששאלה זו אינה מנוסחת כל צרכה. הלא ראינו, ששני ישרים קובעים R_2 אם הם נחתכים, אך R_3 אם הם מצטלבים; וכן ששני מישורים קובעים R_3 אם משותף להם ישר, אך R_4 אם משותפת להם נקודה אחת בלבד (וכן R_5 אם אין להם כל נקודה משותפת). לכן נקל לעצמנו את החקירה בהניחנו לעת־עתה, שאין לשני המרחבים R_{n_1} ו R_{n_2} כל נקודה משותפת; כלומר, שהם „מצטלבים". בסוף הדיון נשתחרר מהנחה זו.

ענין „ההרכבה" יקבל מובן מדוייק לפי הנוסח הבא: יהי s_{m_1} פשטון של המרחב R_{n_1}, s_{m_2} פשטון של R_{n_2} ($m_1=n_1+1$, $m_2=n_2+1$); איזה פשטון יתקבל מתוך הרכבת שני פשטונים אלה? נספח, ראשית, אחד (q_1) מקדקדי s_{m_2} לכל קדקדי s_{m_1}. הואיל ולפי ההנחה אין כל נקודה משותפת לשני המרחבים, לא יחול הקדקוד q_1 במרחב R_{n_1}; לכן יקבע q_1 יחד עם קדקדי s_{m_1} פשטון בעל m_1+1 קדקדים, כלומר מרחב $[R_{n_1}, q_1]$ בעל n_1+1 ממדים. נמשיך את התהליך ונוכיח, ששום קדקוד אחר q_2 של הפשטון s_{m_2} אינו חל במרחב $[R_{n_1}, q_1]$. ואכן הן לפי הדרך לבנית המרחבים, שהלכנו בה בעלותנו מממד לממד, היתה משמעות השתייכותו של q_2 למרחב $[R_{n_1}, q_1]$, שהישר $q_1 q_2$ חותך את המרחב R_{n_1}, בניגוד להנחתנו שאין כל נקודה משותפת ל R_{n_1} ול R_{n_2}. על פי אינדוקציה שלימה אפשר להמשיך תהליך־הוכחה זה ללא כל קושי; מתברר שכל קדקוד נוסף של הפשטון s_{m_2} המסופח למרחב שנתקבל עד עתה, אינו חל במרחב זה. לפיכך נקבל בסוף התהליך פשטון בעל m_1+m_2 קדקדים, הקובע מרחב שמשקל־נקודותיו הוא m_1+m_2; לפי זה מספר ממדיו הוא m_1+m_2-1. יש לסמן מרחב זה ב־ $R_{n_1+n_2+1}$; שהרי קיים:

$$m_1+m_2-1=(n_1+1)+(n_2+1)-1=n_1+n_2+1.$$

אפשר להפוך תהליך זה; כלומר, להפריד מרחב, שמשקל־הנקודות שלו הוא m, לשני מרחבים „מצטלבים" שמשקלי־נקודותיהם הם m_1 ו m_2, אם $m=m_1+m_2$.

בהשמיטנו את הנחת ההצטלבות, נדון עתה במקרה[1] שלשני המרחבים הנתונים R ו R', בעלי משקלי־הנקודות m_1 ו m_2, יש מרחב משותף $\bar{R}$ בעל משקל־הנקודות $m_{1,2}$. יהי $s_{m_{1,2}}$ פשטון במרחב משותף זה. בהוסיפנו על קדקדיו עוד $m_1-m_{1,2}$ קדקדים מתאימים לא־תלויים, נקבל פשטון s_{m_1} שהוא אפייני למרחב R; אילו הוספנו $m_2-m_{1,2}$ קדקדים אחרים, היינו מקבלים פשטון s_{m_2} מתאים ל R'. נסמן ב R^* את המרחב הקבוע ע"י הפשטון s^* (ב R') שקדקדיו הם $m_2-m_{1,2}$ הקדקדים הנוספים האחרונים בלבד. במקרה זה קיימים, כפי שלא יקשה לראות, המשפטים הבאים:

א) הרכבת הפשטונים $s_{m_{1,2}}$ ו s^* יחד מביאה לידי הפשטון s_{m_2};

ב) זאת אומרת, בהתאם לקטע הקודם (הואיל ול s^* יש $m_2-m_{1,2}$ קדקדים): המרחבים $\bar{R}$ ו R^* מצטלבים;

ג) לפי ב) מצטלבים גם המרחבים R ו R^*, הואיל והמרחב R^* חל ב R', והרי אין ל R ול R' משותף אלא $\bar{R}$.

ד) על־פי ג) גוררת אחריה מסקנת הקטע הקודם (הדן במרחבים מצטלבים) שהמרחבים R ו R^* יחד קובעים מרחב, שמשקל־נקודותיו הוא $m_1+m_2-m_{1,2}$.

בשימנו לב לכך, שמספר ממדיו של המרחב האחרון הוא

$$m_1+m_2-m_{1,2}-1=(n_1+1)+(n_2+1)-(n_{1,2}+1)-1=n_1+n_2-n_{1,2},$$

אם n_1, n_2, $n_{1,2}$ מסמנים את מספרי־ממדיהם של המרחבים R, R', $\bar{R}$, נקבל אפוא כמסקנה סופית:

משפט 10. אם המשותף בין מרחבים נתונים, בעלי משקלי־הנקודות m_1 ו m_2, הוא מרחב שמשקל־נקודותיו $m_{1,2}$, קובעת הרכבת המרחבים הנתונים יחד מרחב שמשקל־נקודותיו הוא:

$$m=m_1+m_2-m_{1,2}.$$

לפיכך, אם המרחבים הנתונים מצטלבים, נקבל שוב את הנוסחה הפשוטה:

$$m=m_1+m_2.$$

המסקנה מתבטאת על־פי מספרי הממדים בצורה:

$$n=n_1+n_2-n_{1,2}.$$

מסקנה זו אנלוגית לגמרי לנוסחה הקובעת את הנפח לסכום של גופים בעלי חלק משותף מסויים.

שמא יעלה על דעת הקורא שהנוסחה האחרונה סותרת את המסקנה הפרוטה דלעיל $n=n_1+n_2+1$ (באם מצטלבים המרחבים הנתונים). ולא היא; כי במקרה זה המרחב המשותף אינו מכיל שום נקודה, ולכן יש להעניק לו את מספר־הממדים $n_{1,2}=-1$ (בהתאם לכך שמספר ממדיו של מרחב המכיל נקודה אחת בלבד הוא 0).

1. הקורא המתחיל יוכל לדלג על קטע זה (עד משפט 10), שקשה במקצת להבינו כראוי.

דוגמות

1) $n_1=1$, $n_2=1$, $n_{1,2}=-1$ (ז״א אין שום נקודה משותפת לשני הישרים). נקבל $n=1+1-(-1)=1+1+1=3$; כלומר, שני ישרים מצטלבים קובעים מרחב בעל שלשה ממדים. לשון אחר: שני ישרים ב R_3 יכולים להצטלב; הכוונה היא, שהשלישיה ($n_1=1$, $n_2=1$, $n=3$) אפשרית אפילו בשביל $n_{1,2}=-1$ (לא כל שכן בשביל ערך לא־שלילי ל $n_{1,2}$), ובמקרה זה ייקבע R_3 ע״י שני הישרים. מאידך, אם למשל $n_{1,2}=0$, ז״א $m_{1,2}=1$, הרי משותפת נקודה אחת לשני הישרים ב R_3; במקרה זה קובעים הישרים לא R_3 כי אם מישור R_2 בלבד, בהתאם ליחס $n=1+1-0=2$.

2) $n_1=2$, $n_2=1$. אם $n=3$, גוררת המשוואה $3=2+1-x$ אחריה $x=0$. לאמור: אי אפשר להם למישור ולישר להימצא ב R_3 אלא מתוך נקודה משותפת אחת (מרחב משותף בעל 0 ממדים), ואז יקבעו שניהם את ה R_3. אפשר גם $x=1$, ז״א שהמרחב המשותף הוא ישר, ובמקרה זה מתקבל $n=2$; כלומר, הישר חל במישור, ושניהם יחדו אינם קובעים אלא אותו מישור.

לעומת זאת, אם $n=4$ יחד עם $n_1=2$, $n_2=1$, גורר $4=2+1-x$ אחריו $x=-1$; לאמור: ב R_4 יכולים מישור וישר גם להצטלב, ובמקרה זה הם קובעים יחדו את R_4.

3) $n_1=3$, $n_2=2$. אם $n=4$, גוררת המשוואה $4=3+2-x$ אחריה $x=1$; לאמור, למרחב תלת־ממדי ולמישור החלים באותו R_4, משותף לפחות ישר.

4) $n_1=3$, $n_2=3$. אם $n=4$, נקבל מהמשוואה $4=3+3-x$ את הערך $x=2$; לאמור: ב R_4 משותף לשני מרחבים תלת־ממדיים לפחות מישור. ואולם כנגד $n=5,6,7$ נקבל $x=1,0,-1$; לאמור: משותף לשני R_3 ים ב R_5 לפחות ישר, ב R_6 לפחות נקודה, ואילו במרחב בעל שבעה ממדים יכולים שני R_3 ים אפילו להצטלב, כמו שיכולים להצטלב שני ישרים ב R_3.

הדוגמות מראות בעליל באיזו קלות יש לפתור שאלות מסוג זה בעזרת המשפט 10 **במרחבים בעלי כל מספר שהוא של ממדים.**

יש לשער שאחדים מבין קוראי הסעיף הזה, שתכנו העיקרי נגמר במשפט 10, יטענו: אמנם נכון הדבר שבנינו את המרחבים בעלי ארבעה ממדים ויותר בדרך מתאימה לגמרי לבניית המרחבים המופיעים בגיאומטריה הרגילה, ושלא היתה נחוצה לשם זה אפילו התאמצות והפשטה יתירה או מהפכה שכלית מעמיקה. אולם הרי הכל תלוי בהנחת **מציאותה** של נקודה מחוץ למרחב המובטח כבר – ואם אמנם אין סיבה ברורה מראש למה נגמור בממד השלישי דוקא, הרי יכול להיות כי הנחת הממד הרביעי, למשל, תגרור אחריה איזו סתירה הגיונית, הסמויה מן העין עד שתתקבל פתאום מתוך המשך המחשבה

הגיאומטרית במרחבים בעלי ארבעה ממדים או יותר! יצירתם הבנייתית „הסינתיטית" שלפנינו אין לאל ידה לסלק לחלוטין חשש כזה. כדי לצאת ידי פקפוק זה, נוכיח עתה **שאין מקום לחשוש, ושהגיאומטריה במרחב בעל ארבעה ממדים ויותר אינה יכולה להביאנו לעולם לידי סתירה.**

יודגש שוב, שאין לנו כאן ענין בשאלות פסיכולוגיות, או בשאלה הפיסיקלית – שקשה למדי לנסחה בצורה יעילה – אם המרחב האמפירי (הנסיוני) שבו אנו חיים הוא „במקרה" בעל שלשה ממדים דוקא. עומדת לדיון השאלה ההגיונית־מתימטית בלבד.

נוכיח את חוסר־הסתירה של R_4 לפי השיטה שהשתמשנו בה ב §3 של הפרק החמישי; נשוב אליה גם בסעיפים הבאים. עומק משמעותה וחשיבותה של שיטה זו יתגלה לכשנדון (בכרך־ההשלמה לספר זה) ביסודות המתימטיקה בכלל. נשוב ונדגיש, שאיננו מתכונים כאן לא לגיאומטריה האנליטית ולא לגיאומטריה בכלל, כי אם **לאריתמטיקה**. מטרתנו היא **ליצור למרחב הארבע־ממדי תבנית אריתמטית טהורה**, שבה מתמלאים כל היחסים הקיימים בין נקודותיו של המרחב ההוא על־סמך בנייתו הגיאומטרית־סינתיטית. והנה באריתמטיקה (שאנו מניחים אותה כמחוסרת סתירה) אין דנים בממדים. ושם בודאי אין כל יתרון למספר 3 לעומת 4 או מספר גדול מ 4. אם קיימת אפוא תבנית אריתמטית שבה מתגשמים היחסים הקיימים ב R_4, הרי מוכיחה היא שלעולם לא תוכל להופיע סתירה בגיאומטריה של מרחב כזה.

לתכלית זו נקבע מתוך התאמה גמורה להגדרה שבעמ' 176:

הגדרה. כל רביעיה סדורה (a, b, c, d) של מספרים ממשיים תיקרא **נקודה**. השויון בין נקודות יוגדר ע״י הכלל: $(a_1,b_1,c_1,d_1)=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ אם, ורק אם, קיימים כל השויונות

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ c_1=c_2,\ d_1=d_2.$$

קבוצת כל הנקודות (x,y,z,u) המקיימות את המשוואה

$$(1)\quad Ax+By+Cz+Du+E=0$$

כנגד קבועים ממשיים נתונים E,D,C,B,A שאינם מתאפסים כולם יחד, נקראת **מרחב תלת־ממדי**. לכן שוה המרחב (1) למרחב $A'x+B'y+C'z+D'u+E'=0$ אם, ורק אם, קיימת המתכונת

$$A':B':C':D':E'=A:B:C:D:E.$$

על כל נקודה הממלאת את המשוואה (1) אומרים, שהיא „חלה במרחב התלת־ממדי (1)".

אחרי מה שלמדנו בפרק החמישי, אין צורך להרחיב את הדיבור על המשך הדברים. נגדיר את הרוחק בין שתי נקודות (a_1,b_1,c_1,d_1) ו (a_2,b_2,c_2,d_2) כערך הלא־שלילי של השורש הריבועי

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+(d_1-d_2)^2}$$

אם נתונים שני מרחבים תלת־ממדיים שונים, נקראת מערכת הנקודות (x,y,z,u) החלות בשניהם בשם מ י ש ו ר. המישור מתבטא אפוא גם בצורת שתי משוואות[1] בנות הצורה

$$z=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1, \qquad u=\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2,$$

כשם שהמרחב (1) מתבטא גם בביטוי ליניארי של u ע״י x,y,z. בהוסיפנו על שני המרחבים הללו (או על המישור) מרחב תלת־ממדי שונה, נקבל שלש משוואות מן הסוג (1), המרשות לבטא שלשה מארבעת המשתנים בצורה ליניארית ע״י המשתנה הרביעי. קבוצת הנקודות המתאימות נקראת י ש ר, בהתאם לכך שההשתנות מצטמצמת כאן ב„ממד אחד״. לבסוף, אם נקח ארבעה מרחבים מן הסוג (1) ש„אינם תלויים באופן ליניארי״ – כלומר, שאי אפשר לתארם כשלשה מרחבים בלבד – הרי הם קובעים כיצירם המשותף נקודה אחת. בשפה אריתמטית זאת אומרת, לפתור מערכת של ארבע משוואות ליניאריות עם ארבעה נעלמים. לפי מה שנאמר לעיל בקטע זה, נוכל לתפוס את ארבעת המרחבים גם כשני מישורים „כלליים״, ומתאשר אפוא שאלה נחתכים בנקודה אחת בלבד. (לא הפלינו כאן בין יצירים אמיתיים ולא־אמיתיים.)

אפשר לנסח ולמלא בתבנית זו את כל היחסים ב R_4 שציינו בסעיף זה בין היצירים הקוויים השונים בעלי פחות מארבעה ממדים. בפרט א י ן צ ו ר ך ב ד ר י ש ו ת מ י ו ח ד ו ת; דרישת הקוויות של המישור, למשל, הופכת למשפט שקל להוכיחו, הן במרחב הארבע־ממדי הן במרחבים התלת־ממדיים והדו־ממדיים המוגדרים באופן אנלוגי. על נקלה נוצרת תבנית מתאימה למרחב הקווי R_n בעל n ממדים (n מספר טבעי איזה שהוא). לפיכך, אילו היתה כלולה סתירה בבניית המרחב R_n, היתה הסתירה צריכה להתגלות גם בתבנית האריתמטית ל R_n. לכן המרחב R_n מחוסר־סתירה הוא בדיוק כמרחבנו R_3.

§ 2. ה ג י א ו מ ט ר י ה ה„מָ ח ל ט ת״ ו ה ג י א ו מ ט ר י ה ה הִ פֶּ ר ב ו ל י ת.

ב § 4 של פרק זה תנתן מערכת שלימה של כל „הדרישות״ או „האכסיומות״ שעליהן אפשר לבסס את הגיאומטריה כולה ביסוס דידוקטיבי במובן שמגמתו תוארה ב § 2 של הפרק החמישי (עמ׳ 157). לשם הבנת הסעיף הנוכחי והסעיף 3 אין צורך בידיעת האכסיומות; אולם הקורא הרוצה להתעמק ייטיב לעשות בחזרוֹ שנית על שני הסעיפים, אחרי התוודעו אל השיטה האכסיומטית בגיאומטריה. בסעיף זה נסתפק בעמדה הפשוטה, אף שאינה מפורשת תכלית דיוק, האומרת:

1. במקרים מיוחדים נחוץ, כידוע מן האלגברה, להעדיף בביטוי מפורש זה משתנים אחרים תחת z ו u. הקורא יזכור למשל את המשוואה $x=a$ בגיאומטריה האנליטית של המישור, שאינה מקרה פרוט לצורה המפורשת הרגילה $y=\alpha x+\beta$ של המשוואה $Ax+By+C=0$.

נשאיר את יסודות הגיאומטריה הרגילים כמו שהם, פרט לעקרון אחד שאותו נבטל או נשַׁנה, בפתחנו ע״י זה גיאומטריה „לא־אבקלידית״.

בעצם אין עמדה זו שונה מעמדת הסעיף הקודם. גם בו ביטלנו עקרון אחד בלבד: העקרון המגביל את המרחב לשלשה ממדים; או בלשון האכסיומטיקה שב § 4: העקרון הקובע שלשני מישורים בעלי נקודה משותפת יש לפחות נקודה משותפת שניה, ולכן ישר משותף. ברם אין להשוות את המצב בשני המקרים במובן היסטורי ופסיכולוגי. הצעד קדימה המתואר בסעיף זה, ועוד יותר הצעד המתואר ב § 3, היו מ ה פ כ ו ת ממש, שבהן נאבקו הוגי־הדעות במשך דורות רבים ושמסקנותיהן נתקבלו תחילה, אף בין המתימטיקנים, באטיות ומתוך היסוס. זמן ארוך הרבה יותר עבר עד שהפילוסופים עמדו על משמעות ההשקפה החדשה ועל חשיבותה לגבי תורת־ההכרה, ולא חסרו עד הדור האחרון פילוסופים בעלי שם הכופרים בגיאומטריה הלא־אבקלידית והשמים אותה ללעג, כפרי דמיון מתימטי ריק ומחוסר־תוכן. מאידך, בה במידה שהשכילו הפילוסופים לתפוס את הענין, התברר שיש כאן מ ה פ כ ה פ י ל ו ס ו פ י ת כ מ ע ט י ו ת ר מ מ ת י מ ט י ת, וכי אסכולות כזו של ק נ ט והנלוות עליה חייבות לבסס מחדש מקצת יסודותיהן שנתרופפו. מצד שני היתה הגיאומטריה הלא־אבקלידית לראש־פינה בפיסיקה, כדברי נבואתו של ר י מ ן (עיין ב § 3) – אמנם רק כעבור יובל שנים ויותר. המדובר לא במכשיר תקיף בלבד אלא ב ע צ ם ה ב ס י ס ה מ א פ ש ר ל ת פ ו ס ר ע י ו נ ו ת פ י ס י ק ל י י ם י ד ו ע י ם ולנסחם בשפה מתאימה.

בגשתנו אל העקרון שאנו עומדים לבטלו בסעיף זה – הלא היא הדרישה החמישית של א ב ק ל י ד ס (עמ׳ 161) – יהיה זה מועיל לנסח לפחות שתים מן האכסיומות הרגילות שתופענה גם ב § 4, והן:

1) דרך שתי נקודות עובר ישר אחד בלבד (כלומר, לא יותר מישר אחד). לשון אחר: הישר ק ב ו ע ע״י כל שתים מנקודותיו.

2) מתוך שלש נקודות שונות, החלות באותו הישר, נמצאת אחת בלבד ב י ן שתי חברותיה. (מספיק לומר: נמצאת ל כ ל ה י ו ת ר א ח ת בין שתי חברותיה.)

אכסיומות אלו, הפשוטות תכלית פשטות, אינן דורשות ביאור נוסף. באכסיומה 1) השתמשנו במפורש גם ב § 1 (עמ׳ 340).

נתחיל במבוא היסטורי קצר[1]. בניגוד בולט למדי לשאר ה„דרישות״ וה„אמיתוֹנים״ הנמצאים בראשית ספרו של אבקלידס, הרי הדרישה החמישית

1. יש תיאורים מפורטים להתפתחותה של הגיאומטריה הלא־אבקלידית לפני היגלותה ובתקופת צאתה לאור. השוה:

P. Stäckel und F. Engel: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. 1895.

F. Engel und P. Stäckel: Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

אינה נראית מובנת מאליה, ובניסוחו של אבקלידס עושה היא אפילו רושם מסובך במקצת (הנחלש בניסוח האֶקוִיוָלנטי: אין יותר ממקביל אחד וכו'). לפיכך אין להתפלא על כך, שעוד בתקופת היוונים ובמשך כל המאות בשנים שעברו עד סוף המאה ה18, לא חדלו הנסיונות להוכיח את הטענה הנדונה; לאמור: להעבירה מבין דרישות הגיאומטריה אל מערכת המשפטים. יותר מ250 חיבורים רציניים חוברו על נושא זה; המחברים היו בתקופה הראשונה יוונים וערבים, אחר כך איטלקים, אנגלים, גרמנים, צרפתים והונגרים. ה„הוכחות" השונות שניתנו במשך הזמן לדרישת אבקלידס, עד כמה שלא היו בהן שגיאות־סתם, לקו בזה שהשתמשו בהנחות מסויימות, שנראו אותה שעה למחברים כמובנות מאליהן או שנכנסו להוכחה מתוך היסח הדעת של המחבר – אף כי לאמיתו של דבר שקולות הן כנגד המשפט העומד להוכחה, דהיינו כנגד הדרישה החמישית. לפיכך, מה שהוכיחו על צד האמת בדרך זו אינה הטענה המבוקשת אלא טענה על שויון־ערך בין שתי טענות. הנחות כאלה הן:

א) ישר החותך אחד משני ישרים מקבילים (ז"א לא־נחתכים), חותך גם את השני.

ב) דרך כל נקודה שבתוך זווית מסויימת (קטנה מזווית שטוחה) עובר ישר החותך את שני שוקי הזווית.

ג) המקום הגיאומטרי לכל הנקודות, הנמצאות במישור נתון בצד מסויים של ישר נתון וברוחק שוה מן הישר, הוא קו ישר. (השוה משפט 13 בסוף הסעיף הזה.)

ד) סכום הזוויות במשולש שוה ל180^0.

ה) יש משולשים דומים שאינם חופפים.

ו) דרך כל שלש נקודות, שאינן חלות בישר אחד, עובר מעגל.

אחרי שכבר J. Wallis נקט שיטה עצמאית לשם חקירת הבעיה, פרסם ה„אבא" הישוי סקירי[1] את פרי מחקריו החריפים בשם „אבקלידס מטוהר מדופי". מחשבתו המרכזית היא להסתכל ב„מרובע שוֵה־שוקיים

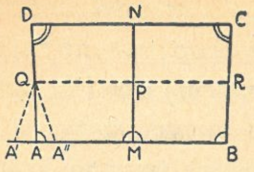
שני כרכים 1899 ו 1913. (הכרך הראשון מוקדש למאמרי Lobachevski, השני למחקריהם של Wolfgang Bolyai ובנו Johann.)

מאמרי לובצ'יבסקי, הכתובים רוסית, תורגמו לכמה שפות; הוצאה אנגלית:

N. Lobachevski: Geometrical researches on the theory of parallels, edited by G. B. Halsted (1891; new ed. 1914).

הAppendix של יוחנן בוליאי הוצאה מחדש, בשפתה המקורית (רומית), ע"י אקדמית המדעים ההונגרית ב 1903; כמו כן הTentamen של אביו ב 1899/1904.

1. Pater G. Saccheri. חיבורו, הכתוב רומית, נמצא בספרם של Stäckel-Engel שצויין לעיל. השוה הספר 276pp. 1920. **G. B. Halsted:** Saccheri's Euclides vindicatus, רומית עם תרגום אנגלי.



ציור 79

ובעל שתי זוויות ישרות", כלומר במרובע ABCD (ציור 79), שבו הזוויות אצל A וB (דוקא שתי זוויות רצופות) הן ישרות, והצלעות $\overline{AD}$ ו $\overline{BC}$ שוות. בהתאם לניסוח הרגיל לגבי משולש שוה־שוקיים קוראים ל$\overline{AB}$ בסיס המרובע. ללא שימוש בדרישת המקבילים מוכיח סקירי שגם הזוויות אצל D וC שוות זו לזו[1] – אך לא שהן ישרות; נשארת גם האפשרות ששתיהן חדות או ששתיהן קהות. ביתר דיוק:

משפט־עזר. במרובע כנ"ל הזוויות שממול הבסיס חדות הן אם $\overline{AB}>\overline{DC}$, קהות אם $\overline{AB}<\overline{DC}$, וישרות אם $\overline{AB}=\overline{DC}$; וחילופו[2].

לפיכך יש במציאות מלבן (כל־שכן ריבוע) בגיאומטריה האבקלידית בלבד.

גדולה מזו. סקירי הוכיח ללא דרישת המקבילים, אמנם בדרך קשה למדי, משפט זה: אם אחד משלושת המקרים האלה מתגשם במרובע מסויים מן הסוג הנ"ל, הריהו מתגשם בכל מרובע כזה. לכן יש להבדיל בין שלש אפשרויות כלליות בלבד המכונות השערות הזווית הישרה, הזווית החדה, הזווית הקהה. השערת הזווית הישרה שקולה כנגד דרישת המקבילים: היא גוררת אחריה דרישה זו, וגם נובעת ממנה.

והנה רעיונו העיקרי של סקירי: הוא מניח שקיימת אחת משתי הדרישות האחרות ומנסה להסיק מהנחה זו סתירה – שתאשר אפוא, כהוכחה דרך־שלילה, את דרישת אבקלידס כאחד ממשפטיה של הגיאומטריה. הוא הצליח באמת להגיע מתוך השערת הזווית הקהה לידי סתירה (עיין להלן); ואילו בהיסקיו לגבי השערת הזווית החדה יש טעות. בעיני בני דורו נראו מוזרות מאד, ולפחות כדברים שאין לקבלם מבחינה פסיכולוגית, המסקנות שהסיק במישרין מהשערת הזווית החדה, כגון (השוה המשפטים 10 ו 11 בסוף הסעיף הזה): סכום הזוויות במשולש קטן הוא מ180^0 (וגדול מ180^0 על־פי השערת הזווית הקהה, השוה להלן); יש זוג של ישרים המתקרבים זה לזה באופן „אַסימפּטוטי" ואינם נחתכים; הזווית מעל לקוטר בחצי־עיגול קטנה היא מזווית ישרה, וכו'.

---

1. לשם כך יש להעלות את האנך MN החוצה את $\overline{AB}$, ולהראות ששני המרובעים הנוצרים חופפים הם. לכן MN חוצה גם את $\overline{DC}$ ומאונך לו.

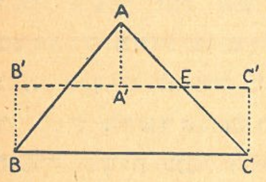
2. קל לראות דבר זה. אם P הוא האמצע של $\overline{MN}$, נעביר QR דרך P ומאונך ל MN. במקרה זה, אם נקצה את המרובע PQDN מעברו השני של PQ, נקבל (עיין בציור 79) כקדקוד המתאים לD נקודה A' אם $\overline{AB}>\overline{DC}$ ונקודה A'' אם $\overline{AB}<\overline{DC}$. והנה הזווית QA'B חדה היא, הזווית QA''B קהה.

למברט[1] הוסיף על אלה מסקנות אחרות, כגון מציאותה של יחידת־אורך מוחלטת, ואת המשפט הטוען ששטחו של משולש מתכונתי הוא להפרש בין 180^0 לבין סכום הזוויות שבמשולש.

הדרגה האחרונה בהיאבקות זו מצויינת ע״י מחקריו של המתימטיקן הגדול והרב־צדדי לג׳ונדר[2]. בטרם נפרט אותם, נקדים

משפט 1. אם קיימת השערת הזווית הישרה — או החדה — או הקהה, הרי סכום הזוויות שבמשולש שוה ל 180^0 — או קטן מזה — או גדול מזה; וחילופו.

הוכחה. נקשר במשולש ABC (ציור 80) את אמצעי הצלעות $\overline{AB}$ ו $\overline{AC}$, שהם D ו E (D לא צויין בציור), ע״י ישר, ונוריד על ישר זה משלשת קדקדי המשולש אנכים AA', BB', CC'. לפי זה המשולשים $AA'E$ ו $CC'E$ חופפים הם[3], על־סמך $\overline{AE} = \overline{CE}$, ועל־סמך השויון בין הזוויות אצל E מזה, ובין הזוויות הישרות אצל A' ו C' מזה. כמו כן חופפים המשולשים $AA'D$ ו $BB'D$. שני יחסי־חפיפות אלה גוררים אחריהם את השויונות הבאים



ציור 80

$$\measuredangle DAA' = \measuredangle DBB', \quad \measuredangle EAA' = \measuredangle ECC'.$$

לכן סכום הזוויות שבמשולש ABC שוה הוא לסכום הזוויות $B'BC$ ו $C'CB$.

מאידך, המרובע $B'C'CB$ הוא „מרובע שוה־שוקיים בעל שתי זוויות ישרות״ (אצל B' ו C') במובנו של סקירי, הואיל וקיים $\overline{BB'} = \overline{AA'} = \overline{CC'}$ לכן סכום הזוויות $\measuredangle B'BC$ ו $\measuredangle C'CB$ הוא שוה או קטן או גדול מ 180^0 בהתאם להשערות הזווית הישרה או החדה או הקהה, מש״ל.

חילוף הדברים מתקבל מתוך היפוך הגיוני (השוה I, 326).

מן המשפט 1 נובע, על־סמך מסקנתו של סקירי שהובאה בעמ׳ 367: אם סכום הזוויות במשולש מסויים שוה — או קטן — או גדול ל(מ) 180^0, קיים אותו דבר לגבי כל משולש. זהו אחד המשפטים הנקראים על שמו של לג׳ונדר, אף כי בעצם נכלל הוא במסקנתו של סקירי.

גם המשפט הבא של לג׳ונדר נמצא כבר אצל סקירי:

1. J. H. Lambert. חיבורו „תורת המקבילים״ הועתק גם הוא בספר הנ״ל של שטיקל ואנגל. אצלו מופיעות השערות הזווית החדה והקהה בצורה שונה קצת מזו של סקירי: על־סמך מרובע בעל שלש זוויות ישרות, ולא רק שתים כבציור 79. אפשר לנסח זאת כך: נקשר את האמצעים של $\overline{AB}$ ושל $\overline{DC}$ בציור 79 ע״י ישר; במקרה זה קל להוכיח שישר זה יוצר עם AB ועם DC זוויות ישרות, ולכן נשאר ספק רק, למשל, לגבי הזווית אצל D.

2. A. M. Legendre. ספרו הנפוץ במהדורות רבות (מ 1794 ואילך) Éléments de géométrie הרחיב מאד את חוג המתענינים ביסודות הגיאומטריה.

3. משפטי החפיפה הרגילים כחם יפה ללא שימוש בדרישת המקבילים; השוה §4.

משפט 2. השערת הזווית הקהה אינה אפשרית. לשון אחר: סכום הזוויות במשולש שוה ל 180^0 או קטן מזה.

הוכחתו של לג׳ונדר למשפט זה, הנמצאת במלואים לחלק החמישי, מספר כה), יפה היא ומענינת מכמה בחינות. מלבד שאר האכסיומות הגיאומטריות הנמצאות במערכות I עד III שב §4, מסתמכת ההוכחה בייחוד על „אכסיומת ארכימדס״ (עיין גם בעמ׳ 165); באמת ממלאה תפקיד מכריע בהוכחה האפשרות להקצות קטע נתון בקו ישר מספר פעמים כה גדול עד שהסכום יעלה על קטע נתון שני, גדול מן הראשון. בקשר לכך נכנסת לתוך ההוכחה באופן סתום גם ההנחה שלקו ישר אין אורך סופי בלבד — הנחה הנובעת בעיקר מן האכסיומה 2) שבעמ׳ 365.[1]

לבסוף התיימר לג׳ונדר להוכיח, שגם השערת הזווית החדה אינה אפשרית וכי סכום הזויות במשולש שוה אפוא ל 180^0 — מסקנה השקולה כנגד דרישת אבקלידס. אולם הוכחתו זו אינה מראה אלא שההשערה הנ״ל גוררת אחריה ששלש זוויותיו של משולש קובעות את המשולש לחלוטין; כלומר, גם את צלעותיו. לג׳ונדר דחה מסקנה זו, הסותרת את מציאותם של משולשים דומים (השוה ה) בעמ׳ 366), כאבסורדית — בהסכימו לדעת לַמְבֶּרְט — הואיל ומתנגדת היא ליחסוּתה ושרירוּתה של יחידת־המידה לאורך. (באמת יחסות זו היא „משפט קדום״ של הגיאומטריה האבקלידית.)

מתוך נסיונות מיואשים כאלה להוכיח את הדרישה החמישית, עבר הרבע הראשון למאה ה 19. אך בעצם הזמן ההוא צץ — כמעט בבת אחת ואצל אנשים[2] שחיו בשלוש ארצות שונות (רוסיה, הונגריה, גרמניה) באופן בלתי־תלוי[3] — הרעיון המהפכני, פרי עמל והתאמצות מתמידים שהושקעו בנסיונות ההם במשך אלפיים שנה: לא הצלחנו להוכיח את הדרישה, הואיל ואי

1. השוה למשפטי Legendre (לרבות המשפט 1 דלעיל והמשפט הקודם בעמ׳ 367) מאמרו של M. Dehn בכרך 53 של *Mathem. Annalen* (1900), והתיאור בפרק השני של הספר „יסודות הגיאומטריה״ להילברט (השוה ב §4). שם מתבהרים גם היחסים המסובכים למדי בין ההנחות על מקבילים (אחד, שנים, אף אחד לא) ובין האפשרויות לסכום הזוויות במשולש, בהסתמכות על אכסיומת ארכימדס או בלעדיה.

2. N. I. Lobachevski, Johann Bolyai, C.F. Gauss. האחרון לא פרסם את מסקנותיו המרחיקות־לכת אלא הסתפק ברמזים, ברם אחרי מותו התגלה בעזבונו חומר מסועף. גם שני אנשים מן הצד, הפרופסור למשפטים F. K. Schweikart ונכדנו Taurinus, נטלו חלק עצמאי בהתפתחות מהפכנית זו. אביו של יוחנן בוליאי, Wolfgang B., עסק במשך כל ימי חייו בשאלת המקבילים, אך בעיקר מתוך תקוה להוכיח את דרישת אבקלידס; בייחוד הסתמך על ההנחה ה) שבעמ׳ 366 שקיווה להוכיחה. טראגית ביותר היא ההתפתחות אצל Saccheri שלאחר התקדמות חשובה לקראת האפשרות של גיאומטריה שאינה אבקלידית הרס את מפעלו־הוא ע״י „הוכחה״ שנקודת־מוצאה היא מוטעית. באמת נשכח סקירי במשך תקופה ארוכה. — השוה את הספרים שצויינו בעמ׳ 365.

3. הביצוע המתימטי היה בלתי־תלוי לחלוטין. ברם מפתח פסיכולוגי לחד־זמניותו של הרעיון נמצא אולי בזה, שאביו של י. בוליאי היה ידידו של גאוס, ומורו של לובצ׳יבסקי היה תלמידו של גאוס.

אפשר להוכיחה. ובכן איך נוכיח משפט שלילי כזה, הטוען שאין אפשרות להוכיח הנחה מסויימת? כאן לפנינו בעיה כללית פילוסופית־מתימטית שנתקלנו בה כבר בפרק השני של הכרך הראשון (I, 17): בעית אי־התלות בין הנחות או אכסיומות שונות. השאלה שלפנינו יכולה להיקרא שאלת אי־תלותה של אכסיומת המקבילים בשאר האכסיומות של הגיאומטריה.

לא נסתמך על מה שנאמר בכרך הראשון לגבי ביסוס האריתמטיקה, אלא נצא שוב מן הבדיחה הידועה: ארכה של אניה מסויימת הוא 100 מטר ורחבה 20 מטר; בהתאם לכך מהו גילו של הקברניט? הדרך הפשוטה ביותר להראות שכאן לפנינו בדיחה — כלומר, שממדי האניה אינם קובעים את גיל הקברניט, ז״א שגיל זה אינו תלוי בממדי האניה — היא דרך השלילה: אילו היתה כאן תלות, באופן שהממדים הנ״ל גוררים אחריהם את הגיל a, הרי מינויו של איש בגיל שונה מ a כקברניט יביא לידי סתירה; והלא מינוי כזה בודאי אפשרי הוא!

וכן במקרה שלנו: ההשערה, שאפשר להוכיח את אכסיומת המקבילים מתוך שאר האכסיומות, תיסתר ע״י בנית גיאומטריה שבה מתמלאות שאר האכסיומות יחד עם שלילתה של אכסיומת המקבילים; לאמור: עם ההנחה, שדרך הנקודה הנדונה מחוץ לישר s עוברים שני מקבילים שונים ל s, ולא אחד בלבד. אמנם בבנית גיאומטריה כזו טרחו גם כמה מן החוקרים הקודמים, אך מתוך מגמה פסיכולוגית הפוכה: מתוך התקוה שבגיאומטריה זו תתגלה סתירה, המורה על אי־האפשרות לספח לשאר האכסיומות את שלילתה של אכסיומת המקבילים; סתירה זו תהווה אפוא הוכחה, דרך שלילה, לאכסיומת המקבילים. לפיכך, אם כאן דובר ב„בנית" גיאומטריה, הרי נחוץ להוכיח שגיאומטריה זו היא מחוסרת־סתירה; או בנוסח צנוע: מחוסרת־סתירה בה במידה שמחוסרת־סתירה הגיאומטריה הרגילה, האבקלידית. משמעותה של „צניעות" זו תתברר בחלק הששי, הדן ביסודות המתימטיקה.

בדרך זו הלכו באמת החוקרים מראשית המאה ה19, ששמותיהם נזכרו למעלה. אמנם הם הסתפקו בהסברת חוסר־הסתירה של הגיאומטריה החדשה, בעיקר על־סמך מערכת הנוסחות (הטריגונומטריות וכו׳) הקיימות באותה גיאומטריה; לעומת זאת לא הצליחו, ובעצם לא ניסו, לתת הוכחה שלימה לחוסר־סתירה. העדר בנין שיטתי לגיאומטריה הפרוייקטיבית מזה ולגיאומטריה הארבע־ממדית מזה הקשה את השגתה של הוכחה שלימה. רק מאמצע המאה ה19 ואילך הוכח חוסר־הסתירה באופן שלם, בעיקר על־ידי קליין, שהסתמך על חקירותיו של קיילי (השוה בסעיף הבא).[1]

1. עיין: A. Cayley: Collected Math. Papers, vol. 2 (1889), p. 561. (המאמר הופיע ב 1859)
F. Klein: *Mathem. Annalen*, vols. 1, 4, 6, 7, 37.

נוסיף מלים ספורות על האופן בו קבל העולם המדעי את תגלית המרחב הלא־אבקלידי. אמנם גאוס לא פרסם כל דבר מפורש על מחקריו, ותיאורו של י. בוליאי היה קצר והועב לאחר מעשה ע״י היסוסיו־הוא לגבי תגליתו, וכן ע״י התקפותיו החולניות במקצת על חבריו. אך מפעלו של לובצ׳יבסקי, שפרסם את תגליותיו בשפה ברורה ובסידור שיטתי (ברוסית, בצרפתית ובגרמנית), ושזכה בהכרתו הלא־מוגבלת של גדול־הדור גאוס, היה יכול לצפות לכך, שהעולם יקבל את מסקנותיו ויכיר באפיים המהפכני. אולם אין לדמות את עולם העיון לעולם המעשה, שבו הכריחה בדור האחרון פצצת האטום גם את עם הארץ להכיר במהפכות המתחוללות במדע. המשפט הקדום, שהדריך את בני האדם במשך אלפי שנים בתמונת־העולם האבקלידית כבתמונה יחידה והכרחית, לא מיהר להיכנע. עמדה ספקנית זו חוזקה ע״י הפילוסופיה. קנט הורה בזמנו, שהסתכלותנו המרחבית היא אמנם סינתיטית, אך a priori. ותורתו שלטה במשך המאה ה19 ברוב מרכזי ההוראה הפילוסופית. ואמנם לפע״ד נכון הדבר, שהגיאומטריה הלא־אבקלידית סותרת את תורת קנט באחד מעמודי התווך שלה; נסיונותיהם של המפשרים בין שתי התורות נראים כאילו כְּפָאם שֵׁד. עוד באמצע המאה ה19 ביסס אחד מגדולי הפילוסופים הבריטיים, John Stuart Mill — בדיוק כחוקר יווני אחד שקדם לו באלפיים שנה — את הכרתו בגיאומטריה האבקלידית כבאפשרות היחידה, על העקרון

יצויינו כאן ספרים אחדים (בעיקר אלמנטריים) מתוך הספרות רחבת־הידיים על גיאומטריה לא־אבקלידית, במובן הסעיף הזה והבא גם יחד:

יר״ה הולצברג: אכסיומטיקה ויסודות ההנדסה הלא־אבקלידית. (בסטנציל, ללא ציון השנה)

H. S. Carslaw: The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry. 1916.

J. L. Coolidge: The elements of non-euclidean geometry. 1909.

H. S. M. Coxeter: Non-euclidean geometry. *Math. Expositions*, No. 2. 2nd ed. 1947.

L. P. Eisenhart: Riemannian geometry. 1926. 2nd ed., 1949. 306 pp.

D. M. Y. Somerville: The elements of non-euclidean geometry. 1914.

E. Wolfe: Introduction to non-euclidean geometry. 2nd printing. 1948. 247 pp.

F. S. Woods: Non-euclidean geometry. נמצא באוסף: *Monographs on topics of modern mathematics etc.*, 3rd impr., 1924.

P. Barbarin: La géométrie non-euclidienne. (Coll. *Scientia*, No. 15.) 1928.

E. Cartan: Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. 2nd ed. 1951. 378 pp.

A. Macleod: Introduction à la géométrie non-euclidienne. 1922.

G. Verriest: Introduction à la géométrie non-euclidienne par la méthode élémentaire. 1951. 193 pp.

R. Bonola: La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critico. 1906. (הופיע במהדורות שונות; גם באנגלית ובגרמנית.)

R. Baldus: Nichteuklidische Geometrie. (Samml. *Göschen*, No. 970.) 1927.

F. Klein: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. 1928.

H. Liebmann: Nichteuklidische Geometrie. 3rd ed. 1923.

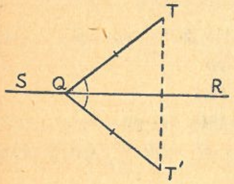
השוה גם החלק השני של H. Poincaré: La science et l'hypothèse (הופיע בשפות שונות ובמהדורות רבות)

ג) מעמ׳ 366, בחשבו אותו למובן מאליו[1]. (לא יאמן כי יְסופר שאחד מגדולי הפילוסופים הגרמנים, Driesch, הרים עוד לפני שלשים שנה, ככמה מחבריו, את קולו כדי להכריז קבל עם ועדה שהגיאומטריה האבקלידית הכרחית היא מטעמים פילוסופיים. השוה גם ראשית הסעיף 3.)

מאמצע המאה ה 19 התחילו מתימטיקנים בעלי שם, שמספרם הלך וגדל, לעורר את תשומת לבו של העולם המתימטי והפילוסופי[2] לקראת הכרה בחשיבות התורה החדשה – בפרט גם למען האנליזה המתימטית. בסוף המאה ה 19 נמצא במלוא זהרו מסע הנצחון של הגיאומטריה הלא־אבקלידית בתורת הפונקציות. מלבד הכוון הנזכר של קיילי וקליין עמדו במרכז התנועה בעיקר גיאומטרים איטלקיים: בראשם G. Battaglini שהעמיד, החל מ 1867, את עתונו Giornale di Matematiche לרשות התורה החדשה, ובלטרמי[3] שמאמרו בכרך 6 של אותו עתון (1868) הפיץ אור מפתיע על הפולמוס בדבר ביסוס הגיאומטריה, בתתו העתק חופף של „המישור ההיפרבולי״ על משטח ממשי בעל „עיקום שלילי קבוע״ של המרחב האבקלידי (הפסיבדוספירה).

הבה נתן תיאור קצר להתחלות של אותה הגיאומטריה המותרת על אכסיומת המקבילים, בשמרה עם זה על שאר עקרונותיה של הגיאומטריה הרגילה. תורה זו כוללת אפוא את הגיאומטריה האבקלידית ואת הגיאומטריה „ההיפרבולית״, שבה יש שני מקבילים ולא אחד בלבד. לתורה כוללת זו קרא בוליאי בשם גיאומטריה מוחלטת, לובצ׳יבסקי בשם פאנגיאומטריה[4].

נתחיל בהערה פשוטה זו: קל להוכיח, ללא שימוש באכסיומת המקבילים, שמנקודה T מחוץ לישר s אפשר להוריד אנך אחד ויחיד על s. האפשרות להוריד בכלל אנך נובעת על נקלה מן הציור 81, בו מסמן Q נקודה שרירותית של $s = QR$, והנקודה T' נבחרה בעברו של s הנגדי ל T באופן שקיים $\sphericalangle T'QR = \sphericalangle TQR$ ו $\overline{QT'} = \overline{QT}$. לפי זה מתברר מיד שהישר TT' מאונך



ציור 81

1. עיין: J. St. Mill: A system of logic. Vol. 2 (7th ed., 1868), p. 156

2. קהל הפיסיקנים התחיל מתעניין במאוחר; בין היוצאים מן הכלל יש לקרוא בשם Helmholtz (עיין מאמרו משנת 1868 „על העובדות המשמשות יסוד לגיאומטריה״; השוה שָם מאמרו של רימן הנזכר בראשית הסעיף הבא.) חשיבותה המכרעת של הגיאומטריה הלא־אבקלידית בפיסיקה בהתאם לנבואתו המוקדמת של רימן, הוכרה רק במאה ה 20.

3. E. Beltrami. שם המאמר: Saggio di interpretazione della geometria non euclidea (הופיע בתרגום צרפתי בכרך הששי [1869] של *Annales Scientif. de l'École Normale Supérieure*).

4. pan-geometria; המלה היוונית $\pi\tilde{\alpha}\nu$ ר״ל שלם, כולל.

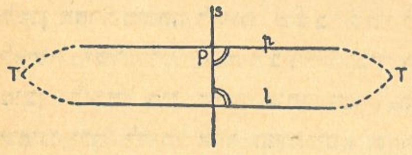
ל s. מאידך, אילו היו שני אנכים יורדים מ T אל s, כלומר: אילו היו p ו l שני אנכים על s, הנחתכים בנקודה ידועה T – השוה ציור 82, שבו מסמנים ‹‹ זוויות ישרות – כי אז היתה קיימת מעברו השני של s[1] נקודה במצב תאום (סימטרי) ל T; זאת אומרת: שני הישרים השונים p ו l יעברו דרך הנקודות T ו T', בניגוד ל 1) בעמ׳ 365. בלשון אבקלידס, עיין בעמ׳ 162: הישרים p ו l היו „כולאים מרחב״ ביניהם.

כמו כן אפשר להוכיח ללא שימוש באכסיומת־המקבילים, שאפשר להעלות בנקודה נתונה של ישר נתון, לכל אחד מעבריו, אנך אחד ויחיד.

מייחודו של האנך המורד מנקודה אל ישר יוצא (השוה ציור 82):

משפט 3. בהנתן ישר l ונקודה P מחוצה לו, יש במישור הקבוע ע״י l ו P ישר p דרך P שאינו חותך לעולם את l.

לשם פשטות יתירה בוצעה כאן בניית הישר p בעזרת שתי הזוויות הישרות המופיעות בציור 82. היינו יכולים לקחת את המקרה הכללי של אבקלידס (עמ׳ 161/2) בו משלימות הזוויות הפנימיות בין p ל s ובין l ל s זו את זו לסכום של 180^0.

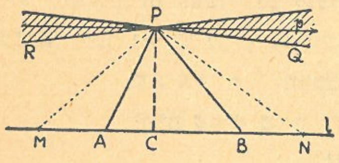


ציור 82

אם נסתמך על דרישתו החמישית של אבקלידס, יוצא ש p הוא הישר היחיד דרך P במישור הנידון שאינו חותך את l. שכן, כל ישר p' דרך P באותו מישור השונה מ p יוצר עם s, באחד משני עבריו של s, זווית הקטנה מזווית ישרה והמשלימה אפוא אחת משתי הזוויות הפנימיות בין l ו s (ששתיהן ישרות) לסכום הקטן מ 180^0, ובאותו עבר של s נחתכים, לפי דרישת אבקלידס, p' ו l; לאמור: p הוא הישר היחיד דרך P בעל התכונה המבוקשת. לא יקשה להפוך מהלך־מחשבה זה, דהיינו, להראות שהנחת מקביל יחיד גוררת אחריה את דרישת אבקלידס.

ועתה, בהסתמכנו על המשפט 3, נפנה להגדרה כללית לישרים מקבילים (לא רק לא־חותכים!) בגיאומטריה המוחלטת.

יהא שוב l איזה ישר שהוא ו P נקודה מחוצה לו (ציור 83); כל המחשבה (בסעיף זה כולו) מבוצעת במישור הקבוע ע״י l ו P. ישרים רבים לאינסוף דרך P חותכים את l, למשל בנקודות A ו B; נקבל ישרים אלה



ציור 83

1. בשני חלקי ההוכחה השתמשנו במציאות „שני עברים״ לקו ישר, העבר של T והעבר הנגדי (אחרת היו T ו T' יכולות להתלכד). כך הכנסנו באופן מכריע את עובדות „הסדר״; השוה 2) בעמ׳ 365 והמערכת השניה של אכסיומות ב §4.

בקשרנו את P לכל נקודותיו של l. מאידך, אם נוריד מ P את האנך PC אל l, הרי קובע המשפט 3 שהישר p דרך P המאונך ל PC אינו חותך את l. דרך P עוברים אפוא גם ישרים חותכים גם לא־חותכים (ביחס ל l).

נקח אחד החותכים, כגון PB, ונסב אותו בנקודה P עד הגיעו למצב של p. לגבי סיבוב כזה יש להבחין בין שני כווניו של הישר; לכן ניטיב לעשות אם נבין מעתה כל ישר כישר מכוון; נבטא את הכוון גם בסימון, תוך הבחנה בין PB (כוון אל B) לבין BP. (בסיבוב הנ"ל נבין p בכוון הנרמז בציור 83.) בפרקים י' וי"א של הכרך הראשון עסקנו ברציפות במובן אנליטי ובפרק השביעי של כרך זה (עמ' 302) חזרנו על אותה מחשבה מנקודת־מבט גיאומטרית; הצד השווה שבשתי הגישות היה שאין „קפיצות" או „ליקויים" ברצף המספרים והנקודות, כי אם מעבר רציף. לפי כך מוכרח להיות מעבר רציף מן הישרים החותכים דרך P, כגון PB, אל הלא־חותכים כגון p. לשון אחר: מוכרח להיות מצב־גבול (השוה מושג „החיתוך" ב I, 121—125), לאמור, ישר דרך P המבדיל בין הישרים משני הסוגים. מלכתחילה אין זה מובן לאיזה סוג שייך אותו ישר „המבדיל" בעצמו, אך במקרה דנא ברור שאינו יכול להיות אחד החותכים; שהרי מעבר לנקודת־החיתוך של ישר חותך (לפי הציור 83: מימינו) יש נקודות נוספות של l, וגם הן קובעות עם P ישרים חותכים, ז"א ישרים מן הסוג הראשון. (למשל, מעבר ל PB יש עוד PN.) לכן מוכרח הישר המבדיל להיות לא־חותך; הוא יכונה בשם „מקביל ל l". נגדיר אפוא (השוה בציור 83), בציינו מעתה במונח „ישר" ישר מכוון:

הגדרה[1]. יהי PB ישר החותך את הישר $l = AB$ בנקודה B. הישר PQ נקרא מקביל לישר l בנקודה P[2] אם הוא ממלא את שני התנאים הבאים:

א) PQ אינו חותך לעולם את l;

ב) כל ישר דרך P העובר בתחום הזווית $\sphericalangle BPQ$ חותך את l.

הגדרה זו מביאה בחשבון אותם חלקי הישרים $l = AB$ ו PQ הנמצאים באותו העבר של PB; בהיקבע הנקודה P והעבר הנדון – קבוע המקביל PQ לחלוטין.

תהליך זה אפשרי גם לגבי העבר השני, הקבוע ע"י הכוון הנגדי של l. בהתאם לכך יתקבל (עיין בציור 83) הישר PR המקביל ל BA.

משפט 4. המקביל (PR) ל BA דרך P יוצר עם האנך PC זווית שהיא שוה לזווית שבין המקביל (PQ) ל AB והאנך. כלומר:

$$\sphericalangle RPC = \sphericalangle QPC.$$

הערך המשותף מכונה זווית־ההקבלה כנגד הרוחק $\overline{PC}$.

הוכחה (דרך שלילה). אילו היתה הזווית $\sphericalangle RPC$ גדולה מ $\sphericalangle QPC$,

1. מובן שבהגדרה זו לא נשתנה PB מכל שאר החותכים, כגון PA או PC. כמו כן מובן שאין ההגדרה מוציאה את האפשרות ש PQ מזדהה עם p.

2. רק אחרי הוכחת המשפט 5 (בעמ' 375) נוכל לוותר על ההוספה „בנקודה P".

היינו יכולים, על פי הגדרת המקביל, למשוך בתחום הזווית RPC ישר PM החותך את BA ב M, באופן שקיים $\sphericalangle MPC = \sphericalangle QPC$. נקבע על AB, מעבר ל C והלאה (בצאתנו מ M), את הנקודה N באופן שיהיה $\overline{MC} = \overline{NC}$. לבסוף נקשר גם את N ל P בישר. המשולשים MPC ו NPC חופפים הם (שויון בשתי צלעות ובזווית הישרה שביניהן), ולכן קיים לפי הנחתנו דלעיל:

$$\sphericalangle NPC = \sphericalangle MPC = \sphericalangle QPC.$$

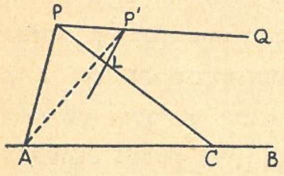
והנה סתירה: שהרי הזווית $\sphericalangle NPC$ קטנה היא מ $\sphericalangle QPC$ ולא שוה לה, מכיון ש PQ מקביל לישר AB ו PN חותכו.

כמו כן אין הזווית $\sphericalangle QPC$ יכולה להיות גדולה מ $\sphericalangle RPC$; מש"ל.

כדי שלא למתוח את סבלנות הקורא יתר על המידה, יאושר מיד שבגיאומטריה האבקלידית, ז"א על־סמך אכסיומת המקבילים, זווית־ההקבלה היא זווית ישרה. שם היא קבועה אפוא ואינה תלויה ברוחק $\overline{PC}$; ולא עוד אלא ששני המקבילים PQ ו PR חלים באותו הישר, שהוא המקביל אל AB ואל BA בנקודה P[1]. אך ההגדרות והמשפטים הקודמים והבאים אינם תלויים כל עיקר בכך, אם מתמלאת אכסיומת המקבילים אם לאו.

אם המקבילים PQ ו PR אינם חלים בישר אחד, יש דמיון־מה בינם לבין האסימפטוטות של היפרבולה (עיין בציור 44 ב I, 281). משום כך (השוה משפט 10, להלן) מכונה בשם גיאומטריה היפרבולית הגיאומטריה, שבה עוברים דרך נקודה נתונה שני מקבילים שונים שאינם חלים בישר אחד. במקרה זה יש אפוא אינסוף ישרים דרך P שאינם חותכים את AB ו BA: הלא הם כל הישרים הנמשכים בתחומי־הזוויות, שיווצרו ע"י שני המקבילים PQ ו PR יחד עם המשכיהם אחורנית מעבר ל P. על הישרים הללו נמנה גם הישר p. (עיין התחום המקוקו בציור 83.)

מתוך הוכחת המשפט 4 יוכל להתקבל הרושם כאילו יש לנקודה P, כנקודה החלה במקבילים PQ ו PR, תפקיד מיוחד. אין הדבר כך, אלא קיים:



ציור 84

משפט 5. ישר המקביל לישר נתון AB, מקביל לו בכל נקודותיו.

הוכחה. יהי PQ מקביל ל AB בנקודה P לפי ההגדרה דלעיל, ותהי P' איזו נקודה שהיא[2] של PQ (עיין בציור 84). נוכיח ש PQ מקביל ל AB גם בנקודה P', לפי ההגדרה הנ"ל.

1. כמובן יש לראות גם כאן את שני הכוונים כשני מקבילים. ברם העיקר הוא ששניהם חלים בישר אחד.

2. בהוכחה הנחנו שהנקודה P' חלה בישר המכוון PQ בעברה של P הנוטה ל Q. אם תחול בעבר השני, תבוצע ההוכחה באופן מתאים; ברם במקרה זה יהא עלינו לקחת את L בעבר השני של הישר (מ P' והלאה).

נעביר את הישר $P'A$, וכן נעביר בתחום הזווית $AP'Q$ איזה ישר שהוא דרך P'; נקודה שרירותית של הישר האחרון (בעברה של P' הנוטה אל AB) תסומן ב L. הישר PL מוכרח לחתוך את AB בנקודה ידועה C, הואיל וPQ מקביל לAB. לכן יחתוך $P'L$ את AB בנקודה החלה בין A ל C[1]. כללו של דבר: כל ישר דרך P' בתחום הזווית $AP'Q$ חותך את AB, בעוד ש $P'Q$ עצמו אינו חותך את AB. לפי ההגדרה מקביל אפוא PQ ל AB ב P'. לשון אחר: הישר PQ שומר בכל נקודותיו על תכונת ההקבלה לAB; מש״ל.

משפט 6. יחס ההקבלה בין ישרים (מכוונים) הוא סימֶטרי וטרַנסיטיבי. לאמור: אם הישר CD מקביל לAB, מקביל גם AB לCD; ואם CD מקביל לAB, בו בזמן שEF מקביל ל CD, מקביל EF לAB.

משפט זה אינו מובן מאליו כל עיקר והוכחתו דורשת עיון. לטענתו השניה ניתנת הוכחה, לשם דוגמה, במלואים לחלק החמישי, מס. כו). נעיר שבהתאם לכך עלינו לראות כל ישר כמקביל לעצמו. הקורא ישים לב לכך, שהישרים שלנו הם מכוונים! שאם לא כן היו המקבילים (ל AB ול BA) PQ ו PR (ציור 83) מקבילים זה לזה, והרי הם נחתכים ב P.

הבה נעזוב אחרי המשפטים הכלליים הקודמים את תחום הגיאומטריה „המוחלטת"; מתוך שלילתה של דרישת־המקבילים האבקלידית — לשון אחר: מתוך שלילת העקרון, שהמקבילים לAB ולBA דרך P חלים בישר אחד — נגיע לאותה מגמה (לא־אבקלידית) של הגיאומטריה המוחלטת, שקראנו לה בשם הגיאומטריה ההיפרבולית. אין אפוא ברירה, אחרי קבלת כל שאר האכסיומות, אלא בין הגיאומטריה האבקלידית ובין הגיאומטריה ההיפרבולית.

בבנותנו את הגיאומטריה ההיפרבולית נוכל לבחור כרצוננו באחת מנקודות־המוצא השונות: למשל, נוכל לצאת מן ההנחה הנ״ל לגבי המקבילים, ולהגיע למשפט על סכום הזוויות במשולש; או לצאת מהשערת הזווית החדה (עמ׳ 367) או מן הדרישה, שסכום הזוויות במשולש קטן מזווית שטוחה, ולהוכיח מתוך זה שיש שני מקבילים שונים. מטעמי נוחיות והיסטוריה (אבקלידס!) נצעד בדרך הראשונה. נסתפק בציון הלך־המחשבה להתחלות הראשונות של הגיאומטריה ההיפרבולית במישור, פרט לטריגונומטריה. להלן ובמלואים נוכיח משפטים בודדים בלבד, בעלי חשיבות עקרונית. נתחיל אפוא בהנחה דלקמן:

השערת לובצ׳יבסקי. שני המקבילים לAB ולBA העוברים דרך הנקודה P שמחוץ לAB, אינם חלים בישר אחד. (ציור 83.)

1. דבר זה נובע לא רק באופן הסתכלותי מתוך הציור, כי אם גם דרך היסק עיוני מאכסיומות הסדר (מערכת שניה ב § 4; בפרט מאכסיומת Pasch).

מתוך הציור 83 והמשפט 4 מתקבל אפוא לגבי זווית־ההקבלה (כנגד כל רוחק חיובי $\overline{PC}$):

$$\sphericalangle QPC = \sphericalangle RPC < 90^0.$$

בהאריכנו את הישרים QP ו RP מעבר ל P והלאה, נקבל שני תחומי־זוויות (זוויות קדקדיות בעלות הקדקוד המשותף P שדרכו עובר p; הם התחומים המקווקווים בציור 83), באופן שכל ישר דרך P העובר באחד התחומים, ולכן גם במשנהו, לא יחתוך לעולם את הישר l. התחום מוגבל ע״י שני המקבילים ל l דרך P והישר p חוצהו.

קל להכליל את אי־השוויון $\sphericalangle QPC < 90^0$ אל המקרה שהזווית בין PC ו CB בציור 83 אינה ישרה דוקא. המסקנה היא (השוה בציור 8, עמ׳ 161), המתכוון אמנם לדרישת אבקלידס לפיה נחתכים הישרים): סכומן של שתי הזוויות הפנימיות בין שני מקבילים וישר החותך את שניהם, באותו העבר של החותך, קטן מזווית שטוחה בגיאומטריה ההיפרבולית.

משפט 7. זווית־ההקבלה QPC (עיין במשפט 4 ובציור 83) היא פונקציה מוֹנוֹטוֹנית יורדת של הרוחק $\overline{PC}$. ביתר פירוט: ככל שתתרחק הנקודה P מן הישר l, כן תקטן הזווית בין האנך מ P ל l ובין המקביל ל l דרך P.

מותר לדבר על „המקביל" סתם (כלומר, לא לציין את כוונו של l) בגלל הסימטריה בין שני עברי האנך המתבטאת במשפט 4.

הוכחת המשפט 7 נמצאת במלואים לחלק החמישי, מס. כז). — גם המשפט 7 ניתן בקלות להכללה למקרה שבו הזווית בין PC ובין l אינה ישרה דוקא. ראינו כבר בעמ׳ 375 שבגיאומטריה ההיפרבולית שני ישרים בעלי אנך משותף אינם לא נחתכים ולא מקבילים. היפוך המשפט הזה הוא עמוק יותר; ננסחוֹ כך:

משפט 8. לשני ישרים שאינם נחתכים ואינם מקבילים יש תמיד אנך משותף. הם מכונים „ישרים על־מקבילים".

הוכחת אלמנטרית למשפט זה, הכוללת בניה לאנך המשותף, ניתנה בראשונה ע״י הילברט במאמרו על „ביסוס חדש" לגיאומטריה ההיפרבולית (1903)[1]. השוה גם המשפט 12 בעמ׳ 379.

על־פי המשפט 7 הולכת וקטנה זווית־ההקבלה ללא קץ עם התרחקות הנקודה P, שדרכה עובר המקביל, מן הישר l (השוה בציור 83, ובציור שבמס. כז) למלואים). יש פונקציות ההולכות וקטנות, אך נשארות בכל זאת תמיד למעלה מחסם חיובי קבוע; למשל הפונקציה — או העקום במישור (x, y) — $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$, הנשארת תמיד גדולה מ 1 (עקום העובר כולו למעלה מן הישר

1. עיין בכרך 57 של *Math. Annalen*. המאמר הועתק כנספח שלישי בספרו של הילברט על יסודות הגיאומטריה (עיין להלן בעמ׳ 401).

$1 = y$). אין הדבר כך לגבי זווית־ההקבלה; בעזרת המשפטים האחרונים קל להוכיח שזווית זו, הקבועה בגיאומטריה האבקלידית (כזווית ישרה), תרד בגיאומטריה ההיפרבולית עד מתחת לכל ערך חיובי נתון; כדי להורידה נחוץ רק להגדיל במידה מספקת את הרוחק $\overline{PC}$. לאמור:

משפט 9. כל זווית חיובית (קטנה מישרה) משמשת זווית־הקבלה כלפי רוחק מסויים.

במלואים לחלק החמישי, מס. כח), נוכיח את המשפט המפתיע הבא:

משפט 10. כל שני מקבילים מתקרבים זה לזה באופן „אסימפטוטי", ז"א כך שהרוחק ביניהם הולך ויורד מתחת לכל ערך חיובי נתון.

תכונת המקבילים המתוארת במשפט זה משמשת גורם לשם „גיאומטריה היפרבולית". שכן אותו יחס ממש קיים בין ענפי ההיפרבולה והאסימפטוטות שלה. אנלוגיה נוספת להיפרבולה מתבטאת להלן במשפט 12.

בגיאומטריה ההיפרבולית יש אפוא יתר הצדקה הסתכלותית מאשר בגיאומטריה האבקלידית למימרה (השוה בעמ' 221) „שני מקבילים נפגשים באינסוף", אמנם כאן בכיוון אחד בלבד: בכוון ההקבלה; הלא בכוון הנגדי הולכים המקבילים ומתרחקים זה מזה. לשם בנין שיטתי אלמנטרי של הגיאומטריה ההיפרבולית מן התועלת להכניס את „הקצה המשותף" לכל הישרים המכוונים המקבילים (כנקודה לא־אמיתית); בדרך זו הולך מאמרו של הילברט הנזכר לעיל, שמטרתו: לבסס את הגיאומטריה ההיפרבולית לפי שיטה, הפשוטה לאין ערוך משיטותיהם של לובצ'יבסקי וקליין, וללא שימוש באכסיומות הרציפות (§ 4, מערכת V).

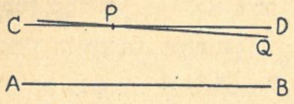
בניגוד ליחס בין מקבילים המתבטא במשפט 10, קיים:

משפט 11. כל שני ישרים שאינם מקבילים מתרחקים זה מזה, אם ממשיכים אותם במידה מספיקה בכל אחד משני הכוונים; ביתר דיוק: הרוחק ביניהם הולך וגדל מעל לכל ערך נתון.

משפט זה כולל שני מקרים שונים בהחלט. ראשית, המקרה של שני ישרים נחתכים. לגביהם קיים אותו דבר גם בגיאומטריה האבקלידית, ולכן תכונת הישרים אין בה כדי להפתיענו. כנגד מקרה זה נוותר על ההוכחה, אף כי אינה טריביאלית. המקרה השני שונה הוא, הלא זהו המקרה של ישרים על־מקבילים, בעלי אנך משותף (משפט 8). נוכיח את המשפט 11 כנגד מקרה זה, בהסתמכנו על נכונותו במקרה הראשון.

יהא ברור הדבר שבשני המקרים מתרחקים הישרים זה מזה בשני הכוונים; במקרה הראשון נקבל עובדה זו, כהסתכלותית למדי, ללא הוכחה, ואילו במקרה השני יתברר הדבר להלן. (הלא בכוון אחד מתרחקים אפילו שני מקבילים זה מזה!)

הוכחה למקרה השני. יהיו AB ו־CD ישרים שאינם נחתכים ואינם מקבילים (ציור 85). דרך איזו נקודה שהיא P של CD נעביר את המקביל PQ ל־AB. על־פי ההנחה שונה PQ מ־CD. בהתאם למקרה הראשון שבמשפט 11 מתרחקים CD ו־PQ זה מזה – אפילו בשני כווניהם – מעבר לכל רוחק נתון. מאידך, המקבילים PQ ו־AB, אף כי אינם נחתכים, מתקרבים זה לזה בכווניהם אלה. לכן הולכים ומתרחקים AB ו־CD בכוונים אלה (אל B ו־D) כפי שקובע המשפט 11.



ציור 85

מהוכחה זו עדיין אין להסיק שהישר המכוון CD מתרחק, החל מ־P, באופן מונוטוני מ־AB. באשר לכוון השני, אפשר להגיע למטרה מתאימה בעזרת המקביל השני דרך P. הבהרה נוספת מתקבלת מן המשפט הבא, שהוכחתו כלולה בהוכחת המשפט 14.

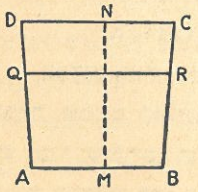
משפט 12. הרוחק הקטן ביותר בין שני ישרים על־מקבילים הוא אורך האנך המשותף (משפט 8). הם מתרחקים זה מזה באופן מונוטוני, ומעל לכל מידה נתונה, מן האנך והלאה (בשני הכוונים).

דינם של שני ישרים כאלה הוא אפוא כדין שני ענפיה של היפרבולה, המתרחקים גם הם בשני הכוונים, מזה ומזה למקום שכנותם הקרובה, ששם יש להם אנך משותף.

מן המשפטים 10 ו־11 יוצא, ללא שימוש במשפט 12:

משפט 13. בגיאומטריה ההיפרבולית אין ישרים שהרוחק ביניהם קבוע. המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק נתון מן ישר מסויים באחד מעבריו הוא אפוא קו עקום.

כדי לקבוע את סכום הזוויות במשולש[1], נסמוך על מה שנאמר בעמ' 366 עד 369 לגבי מסקנות סקירי. נבנה כמו שם מרובע $ABCD$ שוה־שוקיים ($\overline{AD} = \overline{BC}$) ובעל שתי זוויות ישרות על־יד הבסיס $\overline{AB}$; עיין בציור 86. נניח שהזוויות (השוות) אצל D ו־C היו גם הן ישרות. דבר זה גורר אחריו (עיין במשפט־העזר בעמ' 367) את השווין $\overline{DC} = \overline{AB}$. נקצה על השוקיים מ־$D$ ומ־C קטעים שוים: $\overline{DQ} = \overline{CR}$. במקרה זה יהיו $ABRQ$ ו־$DCRQ$ שניהם מרובעים שוי־שוקיים בעלי שתי זוויות ישרות: זוויות אלו נמצאות במרובע הראשון על יד הבסיס $\overline{AB}$, בשני (לפי ההנחה) על יד הבסיס $\overline{DC}$.



ציור 86

1. הקורא המתקשה בהוכחה זו למשפט 14 יוכל לדלג עליה בקריאה הראשונה.

לפיכך צריך QR להיות מאונך לAD ולBC; שאם לא כן, ז"א אילו היו באחד מן המרובעים הזוויות ממול לבסיס חדות, ובשני קהות, היה זה, לפי משפט־העזר הנ"ל, גורם לכך שQR יהיה גדול מאחד הקטעים $\overline{AB}$ ו$\overline{DC}$ וקטן ממשנהו – והלא דבר זה מן הנמנע הוא, הואיל ושני הקטעים שוים. בדרך זו מצאנו, שהרוחק בין הישרים AD וBC בנקודה Q, שהוא $\overline{QR}$, שוה לרוחק בנקודות A $(\overline{AB})$ וD $(\overline{DC})$.

היסקים אלה לא ישתנו במאומה, אם נקח את הנקודות Q וR לא בצלעות $\overline{AD}$ ו$\overline{BC}$ עצמן כי אם בהמשכיהן, למשל מעבר לD ולC. מסקנתנו תהיה אפוא: ההנחה שהזוויות אצל D וC ישרות הן, גורמת לכך שהישרים AD וBC נמצאים ברוחק קבוע זה מזה. הואיל ודבר זה אי־אפשרי בגיאומטריה ההיפרבולית, לפי המשפט 13, מתברר שבגיאומטריה זו הזוויות אצל D וC אינן ישרות.

לבסוף, כדי להווכח שהן חדות דוקא, נעלה בציור 86, כבציור 79 בעמ' 367, את האנך על AB החוצה את $\overline{AB}$. אנך זה, בעל העקב M, חותך את DC בנקודה ידועה N בין D לC ומאונך בה לDC (עיין שם, הערה 1); כלומר, $\overline{DN}$ מודד את הרוחק בין הישרים AD וMN בנקודה N. לפי המשפט 11 הולך וגדל הרוחק בין הישרים האלה בעלי האנך המשותף AM. כל עוד לא נסמוך על המשפט 12 (שטרם הוכח) לא נוכל לטעון במישרין, שכבר בנקודה N הושג רוחק הגדול מ$\overline{AM}$. אכן בעקיפין נגיע לידי מסקנה זו: אילו היה $\overline{AM} < \overline{DN}$ היינו מגיעים, בהמשיכנו את AD מעבר לD והלאה במידה מספיקה, סוף־סוף לרוחק שהוא גדול מ$\overline{AM}$, ולכן, מפני רציפות המעבר, יהיה הרוחק בנקודה מסויימת שוה ל$\overline{AM}$. ואולם דבר זה גורם לכך, לפי משפט־העזר בעמ' 367, שגם הזווית הרביעית (המתאימה לזו שאצל D) היא ישרה. אך כבר בחלק הראשון של ההוכחה סתרנו אפשרות זו.

לכן קיים $\overline{DN} > \overline{AM}$; ובדרך זו הוכח גם המשפט 12. קבלנו אפוא:

משפט 14. הזוויות שממול לבסיס במרובע שוה־שוקיים בעל שתי זוויות ישרות חדות הן בגיאומטריה ההיפרבולית. לכן סכום הזוויות שבמשולש קטן מ180^0.

הטענה האחרונה נובעת מן המשפט 1. מהוכחתו (עיין בציור 80, עמ' 368) מתברר, שסכום הזוויות במשולש שוה לסכום הזוויות החדות מול הבסיס במרובע ידוע שוה־שוקיים ובעל שתי זוויות ישרות; קל להסיק מכאן, שיש משולש שסכום זוויותיו קטן מערך חיובי נתון – ויהיה זה קטן כאשר יהיה.

נסיים את תיאורנו להתחלות הגיאומטריה ההיפרבולית בשני משפטים על שויון־השטח בין משולשים.

בפרק החמישי (עמ' 196) הוגדר המושג של מצולעים שווי־הפרדה; בשם זה קראנו לשני מצולעים, שאפשר להפריד כל אחד מהם למספר שוה של

משולשים, באופן שלכל משולש בהפרדה האחת מותאם משולש חופף בהפרדה השניה. (נוכל להסתפק כאן במושג פרוט זה לשויון שטחים.) כאמור לעיל, יוצא מן ההוכחה למשפט 1 (השוה ציור 80) שכל משולש נתון הוא שוה־הפרדה למרובע מסויים שוה־שוקיים ובעל שתי זוויות ישרות, שיש לו התכונות הבאות: א) הצלע מול „בסיס" המרובע מתלכדת עם אחת הצלעות של המשולש; ב) סכום הזוויות (השוות) שממול הבסיס, שוה לסכום הזוויות במשולש.

והנה בגיאומטריה ההיפרבולית קבוע לחלוטין כל מרובע מן הסוג הנ"ל, אם נתונה הצלע שממול לבסיס והזוויות (השוות) שעל־יד צלע זו. לשם הוכחת הדבר נסתמך שוב על הציור 86 (ללא שימוש בקטע המקוקו). נניח ש$CDQR$ ו$CDAB$ הם שני מרובעים מן הסוג הנ"ל, שבסיסיהם הם $\overline{QR}$ ו $\overline{AB}$; הזוויות שעל־יד בסיסים אלה הן אפוא ישרות והצלע מול הבסיס, וכן הזוויות שעל ידה, משותפות לשני המרובעים. טענתנו היא שהבסיסים מתלכדים, ולכן מתלכדים המרובעים עצמם. שהרי אילו היו שונים, היה $ABRQ$ מרובע בעל ארבע זוויות ישרות, בניגוד למשפט 14.

לפיכך יוצא מן ההוכחה הזאת:

משפט 15. בגיאומטריה ההיפרבולית שני משולשים הם שווי־שטח (ואפילו שווי־הפרדה) אם משתווים הם בצלע אחת ובסכום הזוויות.

נוסיף ללא הוכחה עובדה מעמיקה יותר:

משפט 16. בגיאומטריה ההיפרבולית שני משולשים הם שווי־שטח אם סכומי הזוויות שוים, והם חופפים אם זוויותיהם שוות בהתאמה. שטחו של משולש מתכונתי להפרש בין זווית שטוחה וסכום הזוויות במשולש. (הפרש זה מכונה „גרעון המשולש".)

יש להשוות לטענה בדבר החפיפה את ההנחה ה) בעמ' 366. באשר לטענה האחרונה, אפשר לומר אף שהשטח שוה לגרעון המשולש הנדון; ניסוח זה קובע את יחידת־השטח בגיאומטריה ההיפרבולית. הואיל וההפרש אינו עולה על הגודל הקבוע 180^0 (כלומר, π), יוצא מתוך המשפט ששטחו של משולש אינו יכול לעלות מעל לערך קבוע מסויים, ותהיינה צלעותיו גדולות כאשר תהיינה – אף במקרה ששלושת קדקדי המשולש הן נקודות לא־אמיתיות (השוה בעמ' 378). (במשולש כזה מקבילה כל צלע, בשני כווניה השונים, לכוון מסויים של שתי הצלעות האחרות.) לפיכך אפשר, כפי שגילה כבר גאוס, לצרף אל ההנחות שבעמ' 366 את ההנחה הבאה, כשקולה כנגד אכסיומת־המקבילים: יש משולש ששטחו גדול מערך שרירותי נתון.

עובדה מפתיעה לגבי השטח תוכל להימצא בכך שבגיאומטריה ההיפרבולית חוסמים שני מקבילים, החל מנקודות נתונות בכל אחד מהם (למשל,

החל מהנקודות P ו A של המקבילים PQ ו AB בציור 83, דהיינו מימין לקטע $\overline{PA}$), תחום בעל שטח סופי – ולא שטח אינסופי כבגיאומטריה האבקלידית. אך עובדה זו נראית פחות מפתעת, אם נשקיף על השטח הנידון כעל שטחו של משולש בעל הקדקדים P ו A, שקדקדו השלישי הוא נקודה לא־אמיתית: „הקצה" המשותף של המקבילים PQ ו AB. טענתנו נובעת אפוא מן המשפט 16. לעומת זאת „חוסמים" שני ישרים על־מקבילים (למשל, החל מאנכם המשותף לאחד מעבריו) שטח אינסופי, כמו בגיאומטריה האבקלידית.

חלק מכריע בתיאור הגיאומטריה ההיפרבולית, לפי השיטה האלמנטרית שנקטנו כאן, מהווה הטריגונומטריה ההיפרבולית. אך לא כאן המקום לטפל בה.

§ 3. הגיאומטריות האֶלְפטיות. על הוכחות לחוסר־סתירה של הגיאומטריות הלא־אבקלידיות.

בסעיף הקודם הוכח, מתוך הנחותיו של אבקלידס או האכסיומות של הילברט (§ 4) פרט לאכסיומת המקבילים, המשפט 3 (עמ' 373), שלפיו יש תמיד לעומת ישר s ונקודה P מחוץ ל s – במישור הקבוע ע"י שניהם – ישר שאינו חותך את s. בניסוח אחר ובשיטה אחרת הוכיחו דבר זה סקירי ולג'ונדר (משפט 2). לפיכך, אם שוללים את אכסיומת אבקלידס, נשארת הברירה היחידה שדרך P עוברים אינסוף ישרים שאינם חותכים את s, וביניהם שנים הנקראים מקבילים.

רימַן, הגאון שהתווה בימי חייו הקצרים את עיקרי התפתחותה של המתימטיקה למשך יובל שנים אחרי מותו, צעד הלאה צעד נועז ביותר בהרצאתו שבטכס כניסתו כמורה לאוניברסיטה של גיטינגן – שנושאה היה: „על ההשערות המשמשות יסוד לגיאומטריה". ההרצאה הודפסה לאחר מותו[1]. שם עורר את השאלה, איזה מבנה יוטל על המרחב ע"י הדרישה שאין במציאות מקבילים כל עיקר; לשון אחר: ע"י הדרישה של השערת הזווית הקהה (עמ' 367). בעצם היתה מגמת ההרצאה נועזה הרבה יותר. בעוד שממציאי הגיאומטריה ההיפרבולית התקדמו באופן עקרוני לפי שיטת אבקלידס, אם אמנם בכוון נגדי לכוונו, הרי נוקט רימן שיטה אחרת לגמרי (המתיחסת במובן ידוע אל השיטה „הקלסית" כפי שמתיחסת תורת־היחסות הכללית משנת 1914 ואילך אל תורת־היחסות הפרוטה מ 1905). שיטתו מכוונת להבנת תכונות המרחב מתוך תכונותיו ב„אֶלמנטים הקטנים־לאינסוף" (האינפיניטֶסימליים); לשם כך יש לתאר את המרחב כקבוצה של מערכות־מספרים (ז"א של גדלים בעלי

1. רימן קרא את ההרצאה בשנת 1854; היא הופיעה בכרך 13 של „מאמרי חברת־המדעים בגיטינגן", ואחרי כך ב„כל כתבי רימן" (1876). השוה את ההוצאה החדשה עם הערותיו של H. Weyl (1919).

מספר מסויים של ממדים), ובתכונותיה האנליטיות (בעיקר ב„אלמנט־הקשת") של קבוצה זו תלוי הדבר, איזו גיאומטריה קיימת במרחב.

רעיונות כלליים אלו קשים הם ועמוקים משאפשר יהיה לתארם, ואפילו לרמוז אליהם, במסגרתו של ספר זה[1]. אך מכל מקום מן הראוי לצטט למען הקורא המתקדם שני קטעים מסוף הרצאתו של רימן, שאמנם יעבירונו מעבר לגיאומטריה (כמקצוע מתימטי) אל הפיסיקה, אך משום כך דוקא יקדימו תשובה לשאלה ידועה שיכלה להתעורר כבר בקשר לסעיף הקודם. הוא אומר: „בהמשיכנו את הבניות במרחב עד למרחקים שאין להם קצבה, עלינו להבחין בין חוסר־גבול לבין האינסוף... כל תפיסה של העולם החיצוני יוצאת מן ההנחה, שלמרחב אין גבול... ולהנחה זו יש ודאות אֶמפירית העולה על כל נסיון חיצוני. ברם אין הנחה זו גוררת אחריה כל עיקר את אינסופיותו של העולם; אדרבה, העולם היה מוכרח להיות סופי – אם, מתוך ההשערה של אי־תלות הגופים במקומותיהם, מעניקים לו מידת־עיקום קבועה[2] – אילו היה ערך חיובי למידת־העיקום, יהא הערך קטן כאשר יהיה." ובקשר למקורה האמיתי של מהות המידה במרחב הוא ממשיך: „אין להגיע לכלל הכרעה בבעיות אלו אלא בדרך זו: יוצאים מתוך התפיסה המקובלת והמאושרת של התופעות לאור הנסיון, בהתאם ליסודות שהונחו ע"י ניוטון, ומשנים לאט־לאט את צורתה על־סמך עובדות שאין לבארן על־פי אותה תפיסה[3]. מחקרים מן הסוג המצוי פה, היוצאים ממושגים כלליים, לא יוכלו לשמש אלא תריס, שמא יימנע תהליך־השינוי הנ"ל מתוך הגבלה־מראש של המושגים, ושמא תיעצר ההתקדמות בהבנת הקשר בין העצמים ע"י משפטים קדומים מסורתיים. אך תהליך זה מעביר אותנו לתחומו של מדע אחר, לתחום הפיסיקה..."

לפרוגרמה מעמיקה זו של רימן יש להשוות את שתי ההערות הבאות של Eddington השניה (רומזת לא רק למבנה המרחב הפיסיקלי אלא גם, למשל, לחוקי קֶפלר על מסילות כוכבי־הלכת, או לשימוש במטריצות בתוך המיכניקה של הקוואנטים):

„מצאנו דפוס־עָקב מוזר בחופו של ים הנעלם. המצאנו השערות מעמיקות,

1. הקורא, שיש לו ההכנה המתימטית הדרושה להבנת רעיונות מסוג זה, בעיקר בתחום הגיאומטריה הדיפרֶנציאלית, ימצא סקירה מתימטית־פילוסופית מעמיקה ב § 15 של ספרו הקטן של H. Weyl שהופיע גם בעברית: ה. וייל, פילוסופיה של המתימטיקה (על פי תרגומו של דוד מאוחד, התקין ובאר א"ה פרנקל); ירושלים, תש"ה. המקור הופיע בגרמנית ב 1925, והוצאה אנגלית מורחבת ב 1949.

2. עיין להלן בעמ' 392. השוה גם מה שנאמר בעמ' 372 בקשר לבֶּלטרָמי.

3. כיוצא בזה אומר הוא כבר בראשית הרצאתו: „יוצא מזה (מתוך מציאות אפשרויות שונות למהות המידה) שאין להסיק את משפטי הגיאומטריה מתוך מושגי־גודל כלליים; יש להסיק מן הנסיון את התכונות שבהן שונה המרחב (הממשי) ממערכות־גדלים אחרות..."

זו אחר זו, כדי להסביר את מקורו. לבסוף הצלחנו למצוא תבנית יציר שגרם לדפוס־העקב – והנה הוא דפוסנו־אנו."

„יש להשוות את המתימטיקן למתַכנן מלבושים המתעלם לגמרי מן היצירים שמלבושיו אולי יתאימו להם. אמנם אומנותו מקורה מן הצורך להלביש יצירים מסויימים, אך מקור זה טמון בימי קדם. ברם עד היום הזה יש וקורה שיופיע יציר המתאים דוקא לאחד המלבושים, כאילו נוצר הבגד לצרכיו־הוא. במקרה זה אין קץ להפתעתו ולהתלהבותו של המתכנן."

מתוך הרעיונות הנ"ל של רימן מסיקים אנו לשם המטרה שלפנינו שני דברים.

ראשית, כבר על־פי התיאור הניתן בסעיף הקודם מתעוררת הקושיה: איך אפשר לתאר את הגיאומטריה האבקלידית ואת הגיאומטריה ההיפרבולית כשתי אפשרויות שיש לעיין בהן! בשלמא לגבי המרחב בעל ארבעה ממדים ויותר, הרי אין הוא סותר את מרחבנו הרגיל אלא מרחיב אותו; אולם שתי הגיאומטריות הנ"ל הרי נמצאות הן בבחינת „תרתי דסתרי". שכן „באמת" אפשרית רק מציאות או של מקביל אחד או של שני מקבילים; לשון אחר: סכום הזוויות במשולש או ששוה הוא לזווית שטוחה או שהוא קטן ממנה, ולא זה אף זה. ברם השואל כך טועה בכתובת פנייתו: לגבי המרחב „הממשי" הוא שואל, והרי הגיאומטריה כמקצוע מתימטי חוקרת לא את המרחב הממשי כי אם את כל מבני־המרחב האפשריים. הבחנה זו בין המרחב המתימטי לבין המרחב הפיסיקלי־הממשי, שהנסיונות במדעי הטבע באים לחקרו – אולי מובנת היא מאליה בעינינו, אך לא היתה מובנת לפני מאה שנה. והנה בא רימן והציב בהרצאתו הנ"ל מטרה מקיפה, עיונית ומעשית כאחת, למחקר הגיאומטרי: למנוע את הסכנה, שמא לא יוכל הפיסיקן להגיע לאותו מבנה למרחב שימצאנו מתאים לפי תוצאת נסיונותיו, מחוסר הכנה מתימטית. לאמור: על המתימטיקן להכין מחסן רחב־ידיים של סוגי־מרחב אפשריים, כדי שיוכלו האסטרונום והפיסיקן, על־פי מסקנותיהם ההולכות ומתפתחות בהתאם להתקדמות הנסיונות, לבחור להם מתוכו אותו מבנה של מרחב שיתאים להם. ספק הוא אם ניחש רימן – ועל־כל־פנים לא ניחש איש זולתו – ששים שנה בלבד אחרי הרצאתו יבוא יום בו לא יוכל באמת החוקר הפיסיקלי לרקום את הלבוש המתימטי לניסוח מסקנותיו אלא על־סמך הרעיונות שבהרצאת רימן. חוקר זה היה איינשטיין, ממציא תורת־היחסות הכללית (1914); היא זקוקה לגיאומטריה במרחב תלת־ממדי שהוא אמנם לא־מוגבל אך סופי.[1]

לפיכך אין כאן כל סתירה. מנקודת השקפה גיאומטרית צרופה יש

1. כבר בכרך הראשון (I, 340) רמזנו לזאת ולתופעה המקבילה בדבר התורה היוונית של חֲתכי־החרוט, שבלעדיה לא היתה יכולה להתפתח, למעלה מאלף שנה אחרי כך, האסטרונומיה החדישה.

עולמות אבקלידיים ועולמות היפרבוליים. בסעיף זה יתברר שיש גם עולמות מסוג שלישי; ולא עוד אלא שהתפתחות הפיסיקה בדור האחרון מסבירה לנו את האפשרות שעולמנו־אנו שייך לסוג שלישי זה דוקא.

שנית, האכסיומות המקובלות של הגיאומטריה מבוססות הן באופן סתום על ההנחה, שהמרחב הוא לא רק לא־מוגבל אלא גם אינסופי; בפרט, שהקו הישר (האֲפיני או המֶטרי) הוא קו אינסופי פתוח, ולא סופי וסגור (חוזר אל עצמו) כמו האליפסה. אם הישר קו סופי וסגור הוא, לא יתכן לקבל את העקרון 2) בעמ' 365; שהרי במקרה זה, אם ניתנות שלש נקודות בקו ישר, נמצאת כל אחת מהן בין שתי חברותיה – כמו שכל אחד משלשה מקומות שבקו המשוה נמצא בין שני האחרים. באשר לעקרון 1) שם, נברר להלן האפשר להשלים בינו לבין מרחב סופי אם לא.

עתה תנתן סקירה על התחלות הגיאומטריה, או הגיאומטריות, שאין בהן מקבילים כל עיקר; כל גיאומטריה מסוג זה נקראת גיאומטריה רימנית או אֶליפטית.[1] בניגוד לגיאומטריה ההיפרבולית, שהיא חד־פרצופית (כמו הגיאומטריה האבקלידית), יש טיפוסים שונים לגיאומטריה האליפטית.

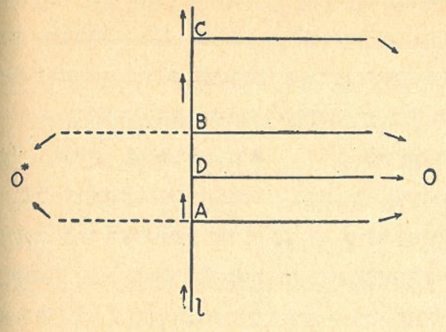
אין הבדל עקרוני בדבר, אם נצא מהשערת הזווית הקהה (עמ' 367) או נתבסס על הנחת אי־מציאותם של מקבילים. על סמך ההשערה הראשונה ובעזרת אכסיומות אחרות, פרט לאכסיומת המקבילים, אפשר להוכיח שאין מקבילים כל עיקר. לכן נעמיד כיסוד הבנין את ההנחה הבאה, בהתאמה להנחה שבעמ' 376:

השערת רימן. אם נתונים ישר s ונקודה מחוצה לו P, חותך כל ישר דרך P החל במישור $[s, P]$ את הישר s.

בהתאם לכך בטלים מאליהם המשפטים 2 עד 6 שהוכחו בסעיף הקודם בגיאומטריה „המוחלטת". הגיאומטריה האליפטית אינה כלולה בגיאומטריה המוחלטת, מתוך שהיא עומדת בסתירה למשפט 3, המופיע בספרו של אבקלידס לפני אכסיומת המקבילים. מיד נראה משום מה בטלה הוכחתו של אבקלידס בתורה שלפנינו.

הבא נצא מאיזה ישר שהוא AB ונעלה, במישור מסויים שבו חל AB ולעבר מסויים של AB באותו מישור, את האנכים בנקודות השרירותיות A ו־B (עיין בציור 87 שבו האנכים מכוונים ימינה). לפי הנחת רימן נחתכים אנכים אלו בנקודה ידועה O; ביתר דיוק (הואיל ותתעורר האפשרות ששני ישרים שונים יפגשו ביותר מאשר בנקודה אחת): נניח ש־O היא נקודת־חיתוך לשני האנכים

1. לשם ביאורו של מ׳נח זה נסתפק בהערה, שהאליפסה (בניגוד להיפרבולה ולפראבולה) אינה משתרעת לאינסוף, כמו שבקו הישר (או במישור, או במרחב) האליפטי אין מקום להתרחקות עד אינסוף – בניגוד לישר (וכו׳) ההיפרבולי או האבקלידי (פראבולי).



ציור 87

הנ״ל, באופן שלא ייפגשו הישרים AO ו BO בין A ל O ובין B ל O (לפי כוון ההתקדמות מ A, או מ B, אל O).

ננסה לקיים את האכסיומות הרגילות של הגיאומטריה, פרט לאכסיומת המקבילים, עד שיתברר לנו שאין לקיים פלונית או אלמונית. בהתאם לכך ננהג זהירות כלפי המשפטים הרגילים שבהם נשתמש לקמן.

המשולש ABO הוא בעל זוויות שוות (ישרות) על־יד „הבסיס״ AB. לכן, לפי תורת המשולש „שוה־השוקיים״ (כלומר, לפי משפט־החפיפה השני לגבי המשולשים ABO ו BAO), שוות גם הצלעות $\overline{AO}$ ו $\overline{BO}$. הנקודה O נמצאת אפוא ברוחק שוה מ A ומ B. במשולש ABO סכום־הזוויות גדול הוא מזווית שטוחה.

אם אפשר (עיין להלן; כלומר, אם $\overline{AB}$ אינו „גדול מדי״) נקצה בישר AB מעבר ל B עוד פעם את הקטע $\overline{AB}$ ונקבל נקודה C, באופן שקיים $\overline{BC}=\overline{AB}$. בהעלותנו את האנך ב C, באותו עבר של AB כמקודם, עד חתכו את BO, נקבל משולש החופף על ABO; לכן יתלכד ראש המשולש החדש אף הוא עם O, וקיים $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$. אפשר להמשיך בניה זו ללא הגבלה, כל עוד „יימצא מקום״ להקצאת קטעים בישר AB.

אם הנקודה D היא האמצע בין A ל B, מראה אותה המחשבה שגם האנך ב D על AB לעבר הנדון עובר דרך O; לפיכך חופפים המשולשים ADO ו BDO, וקיים $\overline{AO}=\overline{DO}$. הוא הדין אם $\overline{AD}$ הוא איזה חלק רציונלי של $\overline{AB}$, כלומר $\overline{AD}=\frac{m}{n}\overline{AB}$ (n ו m מספרים טבעיים). לפי מעבר רציף ממספרים רציונליים לאי־רציונליים (השוה בפרק הששי של הכרך הראשון, ודוגמה 4 ב I, 283) יש להסיק מתוך המעבר לגבול, שהרוחק בין O ובין כל נקודה של הישר AB שוה ל $\overline{AO}$. דבר זה מפתיע במקצת; הלא לפי זה מתיחס הישר AB לנקודה O כפי שמתיחס מעגל למרכזו.

נוכל לבצע בניות אלו גם בעברו השני של AB; במקרה זה נקבל משולשים החופפים על אלה שקבלנו עד עתה. אם נסמן את נקודת־החיתוך המשותפת של כל האנכים החדשים ב O^*, יהיה $\overline{AO}=\overline{AO^*}$. גם O^* משמש אפוא מעין „מרכז״ לישר AB.

יצאנו מישר מסויים $AB=l$, בצאתנו מאיזה ישר אחר l' ובהעלותנו שוב אנכים משני עבריו, נקבל נקודות O' ו O'^* הנמצאות באותו הרוחק מ l'

בו נמצאות O ו O^* מ $AB=l$; לשם הוכחת הדבר די לבנות משולשים חופפים, דהיינו להקצות ב l' קטעים שוים ל $\overline{AB}$ וכו׳ ולהשתמש במשפט־החפיפה השני. לפיכך הגודל $\overline{AO}$ הוא „עולמי״; כלומר, אינו תלוי, לא רק לא בנקודה A אלא אף לא בישר l.

לבסוף יוצא מהיסקינו, שלכל קו ישר יש אורך סופי קבוע, והוא שוה לכל הישרים. שכן בקבענו את היחידה למדידת זוויות איך שנקבענה — למשל בתתנו לזווית הישרה את המידה $\frac{\pi}{2}$ (מידה מעגלית; עיין I, 242/3) — קיימת, לפי מה שנאמר לעיל בקשר לציור 87, המתכונת $\sphericalangle AOD : \sphericalangle AOB = \overline{AD} : \overline{AB}$, וכן לגבי כל הנקודות בישר AB, שכל שתים מהן יוצרות יחד עם O משולש שוה־שוקיים בעל זוויות ישרות על־יד בסיסו. לזווית המלאה (סיבוב שלם סביב O) מתאים לפי זה ארכו $|l|$ של הישר כולו. לפיכך קיים:

$$|l| = \overline{AB} \cdot \frac{2\pi}{\sphericalangle AOB}.$$

משפט 1. כל האנכים על ישר מסויים לעברו האחד נפגשים בנקודה אחת O; הרוחק Δ בין O לישר אינו תלוי בישר, אלא הוא גודל קבוע במרחב האליפטי הנדון. גם לעברו השני של הישר נפגשים האנכים ברוחק Δ, בנקודה מסויימת O^*. הישר במרחב האליפטי הוא קו סגור בעל אורך סופי קבוע; לפיכך, אם נתונות שלש נקודות באותו הישר, נמצאת כל אחת מהן בין שתי חברותיה — בניגוד ל 2) בעמ׳ 365.

הטענה האחרונה של משפט זה נובעת במישרין מסופיותו של הישר; השוה החצים שבהן סומן בציור 87 כוון־התקדמות מסויים (שרירותי) בישר AB.

בטרם נמשיך בחקירתה של גיאומטריה זו, נעיר שהמשפטים 13, 15, 16 של הסעיף הקודם קיימים בשינויים מתאימים גם בגיאומטריה האליפטית. ההוכחות הן ברובן אנלוגיות לגמרי להוכחות שבגיאומטריה ההיפרבולית, ובמיעוטן קלות יותר. כך, למשל, נובע מיד מהנחת רימן, שאין במציאות זוג ישרים בעלי רוחק קבוע, וכן שסכום הזוויות במשולש (לפחות במשולשים ידועים, כגון במשולשים ABO וכו׳ בציור 87) גדול מזווית שטוחה. ננסח את המסקנות המתאימות (גם למשפט 14) בצורה זו[1]:

משפט 2. הזוויות שממול הבסיס במרובע שוה־שוקיים בעל שתי זוויות ישרות (עמ׳ 366/7) הן קהות בגיאומטריה האֶליפטית. לפיכך גדול סכום הזוויות במשולש מ 180^0. שני משולשים הם שווי־שטח (ואפילו שווי־הפרדה) אם סכומי זוויותיהם שוים הם;

1. על הוכחת חלקים מן המשפט נוותר באותו ההיקף כבסעיף הקודם וגם לא נשתמש להלן בטענות אלו.

הם חופפים אם זוויותיהם המתאימות שוות. שטחו של משולש מתכונתי להפרש בין סכום זוויותיו לבין זווית שטוחה – הפרש המכונה „עודף המשולש".

נשוב למשפט 1. לפיו יש בידינו ברירה יסודית בין שתי אפשרויות; אף נראה להלן, שהן לא רק אפשרויות הגיוניות בעלמא, אלא שמתאימות להן למעשה גיאומטריות שונות.

מקרה ראשון: הנקודה O^* שונה מ O;

מקרה שני: הנקודה O^* מתלכדת עם O.

נטפל בשני המקרים בעיקר לא לפי השיטה האלמנטרית של אבקלידס כי אם בעזרת העתקה מתאימה, המראה מיד את חוסר הסתירה של כל אחת משתי הגיאומטריות.

במקרה הראשון, שנכנה אותו בשם „גיאומטריה דו־אֶליפטית" (עיין במשפטים 3 ו4 דלהלן), יהיה הרוחק בין O ל O^*, דהיינו אורך הקטע OAO^*, שוה ל 2Δ על־פי המשפט 1; כמובן הוא שוה גם לאורך הקטע OCO^*, אם C מסמן איזו נקודה שהיא של הישר AB. כל ישר העובר דרך O, הריהו מאונך לישר AB וחותכו בנקודה שהרוחק בינה לבין O הוא Δ; לכן, אם יומשך האנך מעבר ל AB כדי Δ, תושג הנקודה O^*. לפיכך כל הישרים העוברים דרך O נפגשים שוב בנקודה O^*, הנקראת נקודה נגדית לO; כל הישרים האלה חותכים את הישר AB בזווית ישרה.

יצאנו כאן מאיזה ישר שהוא $AB = l$ והגענו לנקודות O ו O^*. נוכל גם להתקדם בכוון הפוך; כלומר, לצאת מאיזו נקודה שהיא P, להעביר דרכה איזה ישר שהוא ולהעלות ברוחק Δ מ P, באיזה עבר שהוא של P, את האנך (הממלא את מקומו של הישר l); בהאריכנו את הישר מעבר לאותו אנך והלאה, נשיג ברוחק Δ את הנקודה P^* „הנגדית ל P".

בגיאומטריה הדו־אליפטית עלינו לוותר אפוא לא רק על העקרון 2) כי אם גם על העקרון 1) שבעמ' 365. האכסיומה הטוענת שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר יחיד העובר דרכן, אינה מתמלאת בגיאומטריה זו; שהרי דרך כל נקודה נתונה והנקודה „הנגדית לה" עוברים אינסוף ישרים[1]. שני ישרים יכולים אפוא „לכלוא מרחב", בניגוד לדרישה הששית של אבקלידס (עמ' 162). מאידך לא יקשה לראות, ששתי נקודות הרחוקות זו מזו פחות[2] מ 2Δ, קובעות גם בגיאומטריה שלפנינו ישר באופן חד־ערכי. לשון אחר: האכסיומות של הגיאומטריה מתמלאות בכל תחום מצומצם (במידה מספיקה) של

1. ברם שלש נקודות החלות בישר אחד קובעות ישר זה על כל פנים.

2. על פי המשפט 4 דלהלן יכלנו גם לומר: שתי נקודות שהרוחק ביניהן שונה מ 2Δ; כלומר שאינן נגדיות זו לזו.

המישור. לכאורה יש להוסיף „פרט לעקרון 2) ולאכסיומת המקבילים". ואולם העקרון 2) הריהו בטל רק כלפי הישר בשלמותו, ואכסיומת המקבילים היא בכלל טענה המכוונת לתחומים מרוחקים למדי של המישור.

ננסח את עיקרי הדברים, שאמנם רק רמזנו על הדרך להוכחתם, בצורה זו:

משפט 3. אם הנקודות O ו O^*, המוגדרות במשפט 1, הן שונות, בטל המשפט שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר יחיד העובר דרכן; רק בתחום מצומצם של המישור נשאר בתקפו משפט זה (וכן שאר האכסיומות). לכל נקודה P של המישור מותאמת נקודה אחרת, הנקודה „הנגדית" P^*, הנמצאת ברוחק הקבוע 2Δ (משפט 1) מ P, וכל ישר s דרך P עובר גם דרך P^*. הישר[1] m המאונך לישר s באמצע בין P ל P^* חוצה את כל הקטעים $\overline{PP^*}$ ומאונך הוא לכולם.

לפי זה יש לישר m הנזכר בסוף המשפט אפייו של מעגל בעל המחוג Δ סביב המרכז P; הוא הדין לגבי כל ישר בגיאומטריה הדו־אליפטית. תופעה משונה היא, שבאותה הזכות מופיעה „כמרכז" ל m גם הנקודה P^*, וכי „מעגל" כזה קבוע ע"י שתים מנקודותיו בלבד, בתנאי שלא תהיינה נגדיות. הקורא בודאי מופתע מתופעה זו ויהרהר, אם נזדמנה לו פעם תופעה כמו מעגל אחד סביב שני מרכזים שונים. הוא ימצא חיש מהר, שדבר כזה ידוע לו מנעוריו: הלא הקו המשוה של כדור הארץ הוא מעגל כזה, המתואר סביב שני הקטבים כ„מרכזים"; „מחוג" המעגל בשני המקרים הוא רבע היקפו של כדור הארץ (חצי קו־אורך)[2]. מצב אנלוגי קיים על־גבי כל כדור וכלפי כל „מעגל ראשי" שעליו. בהתאם למה שהתברר כאן בגיאומטריה הדו־אליפטית, קבוע במרחב האבקלידי כל מעגל ראשי על־גבי כדור (למשל, כל קו־אורך של כדור הארץ) ע"י כל שתים מנקודותיו, בתנאי שאלה שלא תהיינה נקודות נגדיות (כגון שני הקטבים, או שתי נקודות נגדיות בקו המשוה).

באשר למסילה (הישרה) המביאה מ O אל O^* (או חילופו), היה לנגד עינינו הציור 87 שלפיו יוצאים אנו, למשל, מ O דרך A ומגיעים ל O^*. אך הואיל והישר הוא קו סופי וסגור, יש באותו קו ישר מסילה שניה המובילה מ O ל O^*: אפשר לצאת מ O בהמשך הכוון AO מעבר לO והלאה (בציור, בכוון

1. לכאורה צ"ל „ישר" בלי ה"א הידיעה; שהרי על הישר s נוכל להעלות אנך (ברוחק Δ בכל אחד משני עבריו (ביחס ל P). הוא הדין לכאורה לגבי קביעת הנקודה הנגדית P^* ע"י P. ברם מיד נראה שבאמת הכל קבוע באופן חד־ערכי.

2. יש להוסיף הסתייגויות אחדות. ראשית, המחוג נמדד כאן על־גבי כדור הארץ ולא כקטע ישר המקשר את שתי הנקודות. שנית, תפסנו את הארץ ככדור (ולא כאֶליפסואיד), ובפרט התעלמנו מן הפחיסה בקטבים. – כידוע, נבעה הגדרת המֶטר ממקור זה: רצו לקבעו כחלק ה־10,000,000 של רבע היקפו של כדור הארץ (בקו המשוה).

„ימינה"). אחרי מהלך כדי Δ משיגים את הישר $AB = l$, המאונך למסילתנו, בנקודה הנגדית ל-A, ואם נמשיך לצעוד במסילתנו שנית כדי Δ, עתידים אנו להשיג שוב את הנקודה O^*. מכיון שאפשר להחליף O בכל נקודה אחרת, נקבל:

משפט 4. אורך הישר בגיאומטריה הדו־אליפטית שוה ל-4Δ. הישר הוא קו סגור בעל שני מרכזים, ו„מחוגו" הוא Δ.

אורך הישר גדול אפוא פי שנים מן הרוחק בין O ל-O^*. משום כך כנינו גיאומטריה זו בשם „דו־אליפטית".

לכאורה נדרשים מן הקורא הפשטה ו„עיקום־מחשבה" במידה מרובה, כדי שיבין כהלכה את המשפטים 1, 3, 4; המשפטים שבסעיף הקודם נראים פחות מהפכניים. אולם נהפוך הוא; לגיאומטריה הדו־אליפטית במישור יש תבנית הידועה לכל בר־השכלה, והמבנה שלה פשוט הוא עד כדי כך שרבים יטענו: אין הגיאומטריה הרימנית אלא מעשה־תרמית, הבא לכנות בשמות מתרברבים חדשים ענינים פשוטים וידועים. באופן הגיוני אין שחר לטענה זו, וכדי להבין זאת עלינו רק להבחין בין תורה מסויימת ובין העתקים שהם באופן חלקי „איסומורפיים". אך לא נאריך בדבר; כי על כן נמצאת הזמה ברורה לטענה הנ"ל בסוג השני של הגיאומטריה הרימנית, בגיאומטריה החד־אליפטית (עיין להלן); הזמה אחרת ניתנת מתוך המעבר לשלשה ממדים.

על פי מה שנאמר לעיל על קו סגור בעל מרכז(ים) ומחוג, קל להבין מהי התבנית הפשוטה הנדונה; הלא היא הגיאומטריה על פני כדור. משטח זה הוא, ככל משטח, בעצם יציר גיאומטרי דו־ממדי, עם הופיעו בגיאומטריה האבקלידית במרחב התלת־ממדי. נדמה בנפשנו (השוה בעמ' 343) בריות „שטוחות", בעלות שני ממדים בלבד, הגרות על פני כדור ואינן יודעות מאומה על מציאותו של עולם אחר או של „ממד שלישי", והמשתמשות אפוא במונח „מישור" כלפי עולמם[1]. תושבים אלה של הכדור, שנתארם לנו כקטנים בהשואה אל שטח פני הכדור, לומדים מן הנסיון שיש בעולמם קווים, שהם קבועים כבר ע"י שתים מנקודותיהם; לכן יקראו לקווים אלה בשם „ישרים" — אעפ"י ש„באמת" הם מעגלים ראשיים על גבי הכדור. אין לבוז להם בגלל השקפה זו. שהרי אינם יודעים שבעולם עקום הם חיים, והנסיון בתחום מוגבל לא יוכל ללמדם שיש אשר דרך שתי נקודות יעברו „ישרים" שונים (דרך נקודות נגדיות על־גבי הכדור, שהן חלות בקצות קוטר אחד). במשך הזמן יתקדמו בחקירת

1. אגב, דמיון זה אינו רחוק ביותר מתנאי חיינו־אנו על פני האדמה. הלא ממדינו־אנו, ואפילו הגובה והעומק המכסימליים שאליהם נוכל לעלות ולרדת מעל פני האדמה ומתחתם, קטנטנים הם בהשוואה להיקף הארץ, ובהתאם לכך נראים פני האדמה (ביתר בהירות: פני הים) בעינינו קרובים מאד למישור. מה שמבדיל בעיקר בינינו לבין המשל דלעיל הוא תפיסתנו ההסתכלותית של הממד השלישי הנשענת על קומתנו הזקופה — ולא כח־הפשטה עיוני; עדות, או לפחות אסמכתא, לכך היא חולשתנו בתפיסת הממד הרביעי.

מרחבם וימצאו את המקרה המיוחד הנ"ל, שבו שתי נקודות אינן קובעות את הישר; מאידך יווכחו לדעת שכל שני ישרים נחתכים, ז"א שאין במציאות מקבילים, בהתאם להנחת רימן. כמו כן יתגלה להם, שאמנם סכום הזוויות במשולשים „קטנים" קרוב מאד לזווית שטוחה, אך הוא הולך וגדל עם גדול צלעות המשולש; משולש בעל שלש זוויות ישרות נוצר, למשל, אם קדקוד אחד חל באחד „הקטבים" ושני חבריו בשתי נקודות של „הקו המשוה" הרחוקות זו מזו כדי רבע היקפו. כן יכירו לראות שה„ישרים" שלהם, ואף עולמם כולו, אמנם בלתי מוגבלים הם אך סופיים; לישר יש אורך מסויים ולעולם כולו שטח סופי. בודאי ישתמשו גם הם על־פי רוב בגיאומטריה האבקלידית, המשובחת בגלל פשטותה — ברם מתוך ההכרה שיש כאן רק קירוב לגיאומטריה האמיתית, קירוב המספיק לגבי חלקים מצומצמים של מרחבם.

קל לראות שהמשפטים 1 עד 4 מתאשרים בגיאומטריה על פני הכדור; נציין זאת בעזרת דוגמות אחדות, הידועות היטב מן הגיאוגרפיה, ושעם זאת יש להן אופי כללי.

כל קווי האורך — דהיינו: כל (חצאי) המעגלים הראשיים העוברים דרך אחד הקטבים — מאונכים לקו המשוה וכולם נפגשים הן בקוטב הצפוני O הן בקוטב הדרומי O^*. Δ הוא הרוחק בין הקוטב לקו המשוה, דהיינו רבע היקפו של הכדור. ארכו של „ישר", כלומר של איזה מעגל ראשי שהוא, הוא ההיקף השלם 4Δ (משפט 4); לכל ישר יש שני „מרכזים" ברוחק Δ משני עברי הישר. כל ישר דרך איזו נקודה שהיא P עובר גם דרך הנקודה הנגדית ה„אנטיפודית", כשם שעובר כל קו־אורך דרך שני הקטבים גם יחד. מרובע שווה־שוקיים ובעל שתי זוויות ישרות נוצר, למשל, כאשר בקצותיו של איזה קטע (קטן מ-2Δ) בקו המשוה מעלים קווי־אורך לאותו העבר (צפונה או דרומה) ומקצים בשניהן קטעים שווים; המעגל הראשי המקשר את קצות הקטעים[1] יוצר עם שני קווי־האורך זוויות פנימיות קהות. — מחציתו השניה של המשפט 2 מוכחת כלפי כדור בטריגונומטריה הכדורית הרגילה.

העתק זה בין המישור הדו־אֶליפטי לבין פני הכדור מראה, שהגיאומטריה שלפנינו מחוסרת סתירה. שהרי אילו היה אפשר להגיע מהנחותינו — לאמור: מהנחת רימן ומן ההנחה כי O^* שונה מ-O — בעזרת היסקים הגיוניים לידי סתירה, היה ההעתק שלפנינו מעביר את הסתירה לגיאומטריה על פני כדור, ובה בודאי אין סתירה.

1. הכוונה לחלק הקטן משני חלקיו של המעגל הראשי, המקשרים את קצות הקטעים. הרי כל שתי נקודות בגיאומטריה שלנו, הקובעות ישר בכלל, קובעות בישר זה שני קטעים שונים — קטן וגדול — בהיות הישר קו סגור. כמו כן יש להגביל את הזוויות במשולש לזוויות חדות, ישרות וקהות, כלומר, יש להוציא זוויות גדולות מ-π; אחרת היו שני קטעים „ישרים" היוצאים מנקודה אחת ואינם חלים באותו „הישר" קובעים שני משולשים שונים ולא־חופפים.

עד כאן נוגע הדבר לפלָנימטריה הרימנית בלבד. אולם בעיקרו של דבר אין קושי להוסיף ממד שלישי; הדבר מקשה על הסתכלותנו, משום שהמדובר הוא במרחבים עקומים (סופיים). כבר בפרק הקודם רמזנו על מרחב סופי תלת־ממדי (עמ' 336). ולא עוד אלא שב־§ 1 של פרק זה נגענו אפילו באותו יציר גיאומטרי שאליו אפשר להעתיק מרחב אליפטי בעל שלשה ממדים באותו המובן ממש, בו הועתק כאן המישור האליפטי אל פני כדור: הלא הוא ה־R_3 העקום המגביל את ה„גוף" ב־R_4 המכונה על־כדור (עמ' 359).

אין להתפלא על כך, שהעתקת המרחב האליפטי (העקום) התלת־ממדי נשענת על מרחב (קווי) בעל ארבע ממדים; הלא גם לשם העתקת המישור האליפטי השתמשנו במרחב (פני כדור) שהוא אמנם – כמרחב עקום – דו־ממדי בלבד, אך מופיע בעינינו, שהסתכלותנו העניה רגילה במרחבים קוויים, כיציר במרחב תלת־ממדי. חוסר הסתירה של המרחב האליפטי התלת־ממדי E מסתמך אפוא, לפי התהליך דלעיל, על חוסר הסתירה של העל־כדור H; ההעתק יתאים לישרים של E את „מעגליו הראשיים" של H (חתכי H במישורים דרך המרכז של H), וכן למישורים של E את „כדוריו הראשיים" של H (חתכי H ב־R_3־ים קוויים העוברים דרך המרכז של H).

נסיים את דיוננו בגיאומטריה הדו־אליפטית בהערה, שהיא עקרונית ומעשית יחדו. העתקנו את המישור האליפטי אל פני כדור; כלומר אל יציר מרחבי, שאי אפשר לשרטטו בשני ממדים. והנה בראשית הפרק השביעי נגענו בשיטה, המאפשרת לנו להעתיק פני כדור אל מישור: ההעתקה הסטיריאוגרפית; העתקה זו שומרת אפילו על הזוויות בין עקומים מותאמים. לפי זה נוכל להעתיק את המישור האליפטי אל המישור האבקלידי; לאמור: לבנות העתק מישורי לגיאומטריה שלפנינו. לשם כך די להעתיק את המישור האליפטי אל פני הכדור, כפי שהדבר בוצע לעיל, ואת פני הכדור נעתיק בעזרת העתקה סטיריאוגרפית אל המישור האבקלידי. לא נוכל לנגוע כאן בתכונותיה של העתקה זו; נזכיר רק (עיין שם) שהמעגלים הראשיים על פני הכדור מועברים בהעתקה סטיריאוגרפית אל מעגלים החותכים מעגל קבוע מסויים בשתי נקודות נגדיות. מעגלים אלה „מייצגים" אפוא את הישרים של המישור האליפטי, וחקירת המעגלים הללו מגלה את תכונות הישרים האליפטיים.

כללו של דבר: חקירת גיאומטריה מסויימת (לא פשוטה ביותר) במישור האבקלידי מאפשרת לנו למצוא ולהוכיח את כל משפטיה של גיאומטרית־המישור הדו־אליפטית; וכן נקבל העתק של המרחב התלת־ממדי האליפטי אל גיאומטריה מסויימת במרחב התלת־ממדי האבקלידי, בצרפנו להעתקתו הנ"ל של המרחב האליפטי אל „פני" העל־כדור „העתקה סטיריאוגרפית" של המרחב העקום המגביל את העל־כדור

אל R_3 הרגיל. כל ריח של סוד ופלא, שלפנים היה נודף מן הגיאומטריה האליפטית, ודאי מתבטל על־סמך האפשרות להעתיקה אל המרחב האבקלידי, וכך מקבלת המהפכה של רימן צבע פילוסופי יותר ממתימטי־טכני. נשארת אפוא כהפתעה עיקרית חשיבותם הגדולה של שימושי המהפכה הזאת בפיסיקה.

לאחר שהארכנו בתיאור הגיאומטריה הדו־אליפטית, נוכל לקצר בחקירת המקרה השני שנשאר בידינו מתוך הברירה היסודית שבעמ' 388: הגיאומטריה „החד־אליפטית", המתקבלת מתוך ההנחה שהנקודות O ו־O* (משפט 1 וציור 87) מתלכדות. בדרך זו נקבל יתרון עקרוני עצום אחד על הגיאומטריה הדו־אליפטית: נשאר בתקפו העקרון של הגיאומטריות האבקלידית וההיפרבולית, שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר אחד ויחיד (עיין 1) בעמ' 365). תמורת זה מופיעה סטיה חדשה משאר הגיאומטריות בתחום הסדר: נוסף על ביטול העקרון 2) מעמ' 365 – הוא בטל בכל גיאומטריה אליפטית, הואיל והישר הוא קו סגור – מתבטל גם המשפט שהמישור מחולק, ע"י כל ישר החל בו, לשני תחומים נפרדים. משפט זה (משפט 7 בעמ' 408) קיים לא רק בגיאומטריות האבקלידית וההיפרבולית כי אם גם בדו־אליפטית; לשם הוכחת הדבר מספיק, לפי שיטת ההעתקה אל פני כדור, לסמוך על כך שכל מעגל ראשי מפריד את פני הכדור לשני חצאי־כדור. אכן לפי הנחתנו דלעיל לא יהיה תוקף למשפט הנ"ל; הלא הנקודה O נמצאת עתה „משני עבריו" של הישר AB (ציור 87). כמו כן מישור נתון אינו מחלק את המרחב לשני חלקים נפרדים בגיאומטריה זו.

הקורא יזכור, שגם במישור הפרוייקטיבי אין תוקף למשפט הנ"ל (עמ' 331); ואמנם יש קשר אמיץ בין המישור הפרוייקטיבי לבין המישור החד־אליפטי. לא יקשה עלינו להבין קשר זה, בזכרנו שהגיאומטריה הפרוייקטיבית דואגת דוקא לכך, שכל שני ישרים באותו המישור יחתכו זה את זה; הלא לשם כך מכניסה היא את הנקודות הלא־אמיתיות.

המשפט 3 מתבטל בגיאומטריה החד־אליפטית ותחת המשפט 4 נקבל, על־סמך המשפט 1 והיחס O = O*, את המסקנה הבאה, המבארת את השם „גיאומטריה חד־אליפטית":

משפט 5. אם הנקודות O ו־O* (משפט 1) מתלכדות, שוה אורך הישר ל־2Δ.

נפנה מיד לשאלה, כיצד יש לבנות יציר מהמרחב האבקלידי המשמש תבנית לגיאומטריה זו. התשובה פשוטה היא ומובנת בנקל אחרי ביאור העתקתה של הגיאומטריה הדו־אליפטית; אולם נחוץ רעיון חדש אחד, הנראה פשוט אחרי הכנסתו – ועם זאת לא עלה על דעת החוקרים במשך זמן ממושך.

נסתכל בפניו של כדור! כאן אולי המקום לציין מה נשתנה הכדור,

למשל, מאליפסואיד בדרך כלל. באמת אפשר להגדיר גם על־גבי משטח זה, וכן על משטחים עקומים אחרים, קווים עקומים מסויימים המכונים „גיאודיטיים", עקומים בעלי תכונות דומות מאד לתכונות הישר במישור האבקלידי. אם המשטח הוא סופי וסגור, כמו האליפסואיד, יהיו גם העקומים הגיאודיטיים קווים סופיים סגורים. אך תכונה אחת נעדרת; בדרך כלל אי אפשר להשאיר בתקפם את משפטי החפיפה למשולשים (למשל, משפט־החפיפה הראשון, שעליו אפשר לסמוך את האחרים; השוה ב§4, מערכת III). לא נוכל לנמק כאן דבר זה, וכן נוסיף ללא הוכחה את העובדה הבאה המתקבלת על הדעת: משפטי־החפיפה נשמרים, אם יש למשטח הנדון „עיקום" קבוע, שאינו תלוי במקום. (יש להבין את מושג העיקום כפי שהגדירו גאוס בביסוסו המפורסם לתורת המשטחים העקומים.) המשטח הפשוט ביותר בעל עיקום קבוע הוא המישור. יש לו בכל מקום העיקום 0; כלומר, הוא משטח קווי (ליניארי) ולא עקום. בין כל המשטחים יש עיקום חיובי קבוע רק לכדורים[1]. באמת עיקומו של כדור שוה בכל מקום; הוא תלוי במחוג הכדור בלבד. לכן אם נשאף להעתקה השומרת על תכונות כה יסודיות כמשפטי החפיפה, אין לנו אלא הכדור; הקווים הגיאודיטיים על־גבי כדור הם המעגלים הראשיים.[2]

אחרי רמזים אלה נשוב אל עצם עניננו, אל תבנית לגיאומטריה החד־אליפטית. כאמור לעיל, נחתכים שני מעגלים ראשיים על־גבי כדור לא בנקודה אחת כי אם בשתי נקודות „אנטיפודיות" (נגדיות). אם נתאים אפוא למעגלים הראשיים קווים ישרים במישור האליפטי, לא תקבענה כל שתי נקודות ישר אחד בלבד. לפיכך אם נרצה לקיים את קביעת הישר ע"י כל שתים מנקודותיו, נוכל להשתמש בטכסיס פשוט עד מאד: עלינו להצטמצם בחצי־כדור בלבד[3] ולזהות זו עם זו כל שתי נקודות שהן קצותיו של קוטר אחד של הכדור, והחלות אפוא בשפתו של חצי־הכדור.

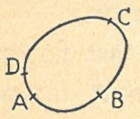
נבאר זאת ביתר פירוט! נצא מכדור שלם, אך בתתנו זכות־בכורה למחצית אחת של פני הכדור; למשל, לחצי־הכדור „הצפוני", לרבות הקו המשוה. נראה תמיד זוג של נקודות המהוות קצותיו של אותו הקוטר כנקודה אחת; בדרך כלל נתפוס את קצהו „הצפוני" של כל קוטר ואך מבין הנקודות שבקו המשוה נבחר בנקודותיו של חצי־מעגל שרירותי. אם נדון ביציר גיאומטרי

1. ביתר דיוק: בין המשטחים מחוסרי שפה שאין בהם נקודות „מיוחדות" (סינגולריות). אפשר להוכיח זאת בעזרת שיטות של הגיאומטריה הדיפרנציאלית. — יש גם משטחים בעלי עיקום שלילי קבוע

2. מכאן מובן השימוש במלה גיאודיטי = שייך לחלוקת (למדידת) כדור־הארץ; מן המלים $\gamma\tilde{\eta}$ = ארץ ו$\delta\alpha\acute{\iota}o\mu\alpha\iota$ = חָלֵק.

3. היה אפשר גם להסתכל בכדור שלם ולזהות כל שתי נקודות נגדיות (השוה בקטע הבא); אך, התהליך דלעיל נראה הסתכלותי יותר.

(על גבי הכדור), העובר מצפון אל עברו הדרומי של הקו המשוה, נחליף את הנקודות הנמצאות מדרום לקו המשוה בנקודות הנגדיות. בהתאם לכך קובעות כל שתי נקודות, השונות על פי הגדרתנו, ישר יחיד שבו הן חלות[1]; וכן קובעים כל שני ישרים נקודה אחת בה הם נפגשים. הישרים הם קווים סגורים. במקום עקרון־הסדר 2) מעמ' 365 אפשר לקבוע, כתחליף חלש יותר, יחס־ה„הפרדה" בין ארבע נקודות, שאפיינית לו תכונה זו: כל רביעית־נקודות (A,B,C,D) בישר אחד מתפרקת באופן אחד ויחיד לשני זוגות, כך שנקודות הזוג האחד מפרידות בין נקודות הזוג השני; למשל, בציור 88 מפרידים הזוגות (A,C) ו (B,D) זה את זה.



ציור 88

בסיומו של סעיף זה נשוב לנושא שבו עסקנו בסעיף הקודם. שם בנינו את התחלות הגיאומטריה ההיפרבולית לפי השיטה „האלמנטרית" (האבקלידית) בלבד. בדרך זו אפשר להסביר את חוסר־הסתירה של הגיאומטריה הנדונה, אולם לא להוכיחו; שכן המפקפק יכול לטעון: עד כאן לא הגעת לידי סתירה, אבל סופך להגיע אליה — כפי שקיוו במאה ה 18 סַקירי וחבריו. רק השיטה של העתקת הגיאומטריה החדשה לתבנית, לקוחה מהגיאומטריה האבקלידית, שיטה שהשתמשנו בה פעמיים בסעיף זה, תוכל להביאנו לידי הוכחה מָשלמת לחוסר הסתירה; ביתר זהירות: לידי הוכחה שהגיאומטריה הנדונה בטוחה ובצורה בה במידה כגיאומטריה האבקלידית.

ובכן נתאר עתה, בקווים כלליים עקרוניים בלבד, דרך ליצירת תבנית גם לגבי הגיאומטריה ההיפרבולית; נצטמצם במישור, עם כי אין קושי עקרוני בהעברת הרעיון למרחב כולו. נקח את כלי הזיין העיקרי מן הגיאומטויה הפרוייקטיבית (פרק ששי, §3), ונלך בסידור החומר בהתאם לבנין האכסיומטי שבסעיף הבא.

במישור נתון P, שבו מבוצעת הבניה דלהלן בשלימותה, נבחר אליפסה שרירותית; הואיל וצורתה של האליפסה אינה מעלה ואינה מורידה, ומכיון שאין אנו מעונינים כאן בכלליות יתירה, נקח כאליפסה הנדונה מעגל C. נכנה את היצירים, המשמשים נקודות וישרים של התבנית לגיאומטריה ההיפרבולית שאנו עומדים להקימה במסגרת הגיאומטריה האבקלידית, בשמות: נקודות היפרבוליות וישרים היפרבוליים. הגדרתם פשוטה מאד: כל נקודה שבפנים המעגל — למעט את נקודותיו של קו המעגל בעצמו — נקראת „נקודה היפרבולית"; כל מיתר של C פרט לקצותיו (כלומר, אותו

1. לעומת זאת קובעות שתי נקודות שני קטעים ישרים שונים המשלימים זה זה את זה לישר שלם.

חלק של כל ישר ב-P הנמצא בפנים המעגל C) נקרא „ישר היפרבולי". אם נתפוס את יחסי החילה (נקודה „חלה" בישר) והסדר (נקודה נמצאת „בין" שתי נקודות אחרות בישר אחד) במובן הרגיל, מתמלאות באופן ברור התכונות הרגילות של החילה והסדר; ביתר דיוק: האכסיומות I, 1–3 [1] ו-II, 1–4 בעמ׳ 403–407.

המושג „קטע היפרבולי" מוגדר כמערכת הנקודות בין שתי נקודות היפרבוליות שונות A ו-B (בישר הקבוע ע"י A ו-B); נסמן את הקטע, כרגיל, ב-$\overline{AB}$. נבין כרגיל גם את המושגים „חצי־קרן" (מחצית ישר, החֵל מנקודה מסויימת באחד משני הכוונים) ו„זווית" (זוג של חצאי־קרניים היוצאים מאותה הנקודה); זווית תהיה תמיד קטנה מזווית שטוחה. אולם השויון (החפיפה) בין קטעים וזוויות לא יוגדר בדרך הרגילה על־סמך תנועות, ז"א על־סמך העברות של הגיאומטריה המטרית (עמ׳ 223), כי אם על סמך העברות פרוייקטיביות מסויימות כדלהלן.

בשם „העברה חופפת-H" [2] נבין כל העברה פרוייקטיבית של המישור P אל עצמו, המעתיקה ראשית את C לעצמו, שנית כל נקודה היפרבולית שוב לנקודה היפרבולית (שונה מהמקורית או שוה לה). לצורך הבנת התנאי הראשון, הקובע את C כשמורה (עמ׳ 231) של ההעברה, יזכור נא הקורא לשם השוואה את ההעברות האֲפיניות, שיכולנו לציינן כאותן העברות פרוייקטיביות המעתיקות את הישר הלא־אמיתי לעצמו. באשר לתנאי השני, הריהו מקבל את חשיבותו מתוך המשפט הבא (משפט־עזר), שקל להוכיחו על פי שיטותיה של הגיאומטריה הפרוייקטיבית: כל העברה המקיימת את התנאים הנ"ל, מעבירה את תחום־הפנים של C לעצמו ואינה משנה את הסדר בין סידרת־נקודות סופית שכל נקודותיה חלות באותו קטע היפרבולי, לרבות קצות הקטע. (משמעות העיקרית של התנאי השני היא שלילת האפשרות של העתקת תחום־הפנים של C לתחום־החוץ של C.) לפיכך מעתיקה כל העברה חופפת-H כל קטע היפרבולי לקטע היפרבולי. ההעברות החופפות-H ממלאות בגיאומטריה שלפנינו את התפקיד, שממלאות התנועות בגיאומטריה המֶטרית האבקלידית.

לבסוף נכנה שני קטעים היפרבוליים „חופפים-H" (או שווים-H), אם יש העברה חופפת-H, המעתיקה את קצות הקטע האחד לקצות הקטע השני; וכן שתי זוויות היפרבוליות „חופפות-H", אם יש העברה חופפת-H המעתיקה את חצאי־הקרניים, המשמשים שוקיה של אחת הזוויות, לשוקי חברתה.

על־פי הגדרות אלו מתמלאים כל התנאים לגבי החפיפה (השוויון) בין קטעים היפרבוליים וזוויות היפרבוליות, הנכללים באכסיומות של המערכת III

1. שאר האכסיומות של המערכת I מיותרות הן או בטלות, הואיל ונמצאים אנו במישור (בשני ממדים) בלבד.

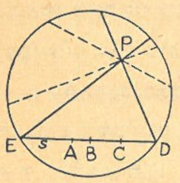
2. האות H משמשת קיצור לציון „במובן היפרבולי".

בסעיף הבא. הוכחת הדבר הזה מהווה את הקושי היחיד בכל התהליך שלפנינו. לשם הבהרת השיטה תנתן במלואים לחלק החמישי, מס. כט), סקירה על ההוכחה למילוי האכסיומה III, 1 בדבר „הקצאת קטעים" (עמ׳ 409). אכסיומה זו, המהווה במסגרת הנוכחית משפט העומד להוכחה, תנוסח במקרה שלפנינו כך:

אם A ו-B הן שתי נקודות של הישר ההיפרבולי s, ו-A′ נקודה של הישר ההיפרבולי s', קיימת בעבר נתון (מ-A′) של s' נקודה B′ של s', כך שהקטעים ההיפרבוליים $\overline{AB}$ ו-$\overline{A'B'}$ הם חופפים-H.

מי שהבין את הדרך להוכחת העובדה הזאת לא יראה קושי עקרוני בהוכחת שאר האכסיומות III. בפרט נובעת הטרַנסיטיביות של החפיפה ההיפרבולית (III, 2) מן העובדה, שההעברות החופפות-H יוצרות חבורה.

לבסוף מתמלאות במישור ההיפרבולי גם אכסיומות הרציפות, בין אם ננסחן לפי הילברט (§4) בין אם נצא מן הניסוח הרגיל של דידקינד (השוה בפרק ששי של הכרך הראשון). קל להוכיח זאת, הואיל והעיקר כאן יחסי הסדר בקו ישר, והלא הם מתאימים בישר האבקלידי ובישר ההיפרבולי. בפרט מתמלאת אכסיומת ארכימדס (עמ׳ 165; V, 1 ב-§ 4). לאמר: אם A הוא קדקדה של „חצי־קרן היפרבולית" והנקודות B ו-C חלות בקרן זו באופן ש-B נמצאת בין A ו-C (עיין בציור 89) — במקרה זה „קטן" הקטע ההיפרבולי $\overline{AB}$, גם במובן היפרבולי, מן הקטע ההיפרבולי $\overline{AC}$ — אפשר להקצות באותו חצי־קרן, מקדקדו A, את הקטע $\overline{AB}$ פעמים ממושכות במספר כזה שמגיעים לנקודה הנמצאת מעבר ל-C והלאה[1]. דבר זה אינו מובן מאליו; שכן אם תסומן נקודת־החיתוך הרגילה (האבקלידית) בין חצי־הקרן AB ובין המעגל C ב-D, אי־אפשר להגיע במישור ההיפרבולי עד D מתוך הקצאת $\overline{AB}$ (או קטע היפרבולי אחר) מספר פעמים, ויהי המספר גדול כאשר יהיה. לכן נחוץ להוכיח את טענתנו בזהירות על־פי הגדרת החפיפה (ז"א ההקצאה) ההיפרבולית. (אי־האפשרות שהודגשה זה עתה ברורה מלכתחילה; שהרי D אינה נקודה היפרבולית כל עיקר: היא נקודה לא־אמיתית, „רחוקה לאינסוף", של הישר ההיפרבולי AB, ולכן ודאי הדבר, שלא נוכל להגיע אליה בהקצותנו קטעים סופיים.)



ציור 89

בגיאומטריה זו של המישור ההיפרבולי מתמלאות אפוא, נוסף על האכסיומות I, 1–3, גם כל האכסיומות II, III, V שב-§4. לעומת זאת קיים:

משפט ראשי: במישור ההיפרבולי שלפנינו אין תוקף לאכסיומת המקבילים. דרך נקודה נתונה P עוברים שני מקבילים לישר נתון s.

1. נוסח מדוקדק יותר נמצא במקומות שנזכרו לעיל.

משפט זה, המכריע באופן סופי את הוויכוחים סביב דרישת אבקלידס במשך אלפיים שנה, הוא עתה מובן מאליו. בציור 89 סומן ב־s ישר היפרבולי הקבוע ע״י הנקודות A ו־B והחותך במובן הרגיל את המעגל C בשתי נקודות אבקלידיות D ו־E. בקשרנו את הנקודה הנתונה P אל D ו־E, נקבל שני ישרים היפרבוליים שאין להם נקודה היפרבולית משותפת עם s, בעוד שכל ישר היפרבולי דרך P, העובר בתחום־הזווית DPE, חותך את s בנקודה היפרבולית. לפי הגדרת המקבילים (עמ׳ 374) יהיו אפוא שני הישרים ההיפרבוליים PD ו־PE (ש־D ו־E אינן שייכות להם) מקבילים לישר s בשני כווניו. אנו רואים בציור 89 גם את העל־מקבילים (עמ׳ 377): הלא הם כל הישרים דרך P העוברים בתחום־הזווית בין אחד המקבילים (למשל PE) ובין המשכו־אחורנית של המקביל השני (DP). שנים מן העל־מקבילים מקווקווים בציור 89.

בנייתה של הגיאומטריה ההיפרבולית, כפי שהוצגה כאן, יכולה להיעשות גם במרחב התלת־ממדי, תחת במישור. לשם כך יש לצאת מכדור או מאליפסואיד, במקום המעגל C, ולהגדיר „מישור היפרבולי" כאותו חלק של מישור רגיל הנמצא בפנים הכדור. כל שאר ההגדרות והמשפטים יש להכליל באופן מתאים לשלשה ממדים. במקרה זה מתמלאות גם האכסיומות 4—8 של המערכת I (עמ׳ 404/5); כלומר, כל אכסיומות הגיאומטריה, פרט לאכסיומת המקבילים.

תארנו בכך, לפחות בקווים עיקריים, פתרון מוחלט וסופי לאחת הבעיות העתיקות ביותר של המתימטיקה כולה: לאי־האפשרות להוכיח את דרישתו החמישית של אבקלידס בעזרת שאר עקרונות הגיאומטריה. אמנם שתי ההוכחות לקיום גיאומטריה לא־אבקלידית, שהופיעו בצורת הגיאומטריות החד־אליפטית והדו־אליפטית, מוחלטות אף הן; אך בגיאומטריות אלו לא נשמרו שאר עקרונות הגיאומטריה בשלמותם: הישר מופיע בהן כקו סגור, ולכן אין אכסיומת־הסדר II, 3 מתמלאת. לעומת זאת נשמרו במרחב של „הנקודות ההיפרבוליות" — אמנם מתוך פירוש חדש לכמה מושגים ראשוניים, הסוטה מן הפירוש הרגיל — כל האכסיומות הנמנות ב־§ 4, פרט לאכסיומת המקבילים; וכל הבניה בוצעה בתוך הגיאומטריה האבקלידית, ללא כל הנחה נוספת או מתנגדת לה. מכיון שהתברר שמתמלאת כאן שלילתה של אכסיומת המקבילים, לא תוכלנה שאר האכסיומות לגרור אחריהן אכסיומה זו, וכל נסיון בכוון זה נידון מראש לכשלון.

§ 4. בִּסוּס אכסיומטי לגיאומטריה לפי הילברט.

בסעיף הקודם ראינו, שלעתים יש תועלת בתפיסת מושגים כמו „נקודה", „ישר", „חופף" וכו׳ במשמעות השונה ממשמעותם הרגילה. ובכן מתעוררת השאלה: מהי בכלל משמעותם „הרגילה" של מושגי הגיאומטריה? שאלה זו מופנית כאן לא כלפי הגיאומטריה כמדע נסיוני, אינדוקטיבי, כי אם

מתוך האספקלריה הדידוקטיבית שעליה הרחבנו את הדיבור בראשית הפרק החמישי. לפי תפיסה זו אסור להכניס לתוך מושגי הגיאומטריה כל נימה הסתכלותית; שהרי נימה זו, או שהיא מיותרת וללא תועלת ושימוש, כהגדרותיו של אבקלידס (עמ׳ 161), או שמשתמשים בה בהוכחות והורסים בכך את אפייו הדידוקטיבי של ביסוס הגיאומטריה, שלפיו נובעות סוף־סוף כל ההוכחות מן המבנה הפורמלי של המשפטים הראשוניים (האכסיומות) מצד אחד ומשיטות ההיסק ההגיוניות מצד שני.

נדון בצד העקרוני והפילוסופי של שיטה „אכסיומטית" זו בפרוטרוט בחלק הששי (בכרך־ההשלמה). כאן נסתפק בתאור שטחי של השיטה בהיקף הנחוץ לשם הבנת החומר שבסעיף זה. אפשר לראות את האכסיומות כאוסף של משפטים גיאומטריים („פשוטים ומעטים ככל האפשר"), שהם מספיקים כדי להוכיח מתוכם, בעזרת היסקים הגיוניים בלבד, את כל משפטי הגיאומטריה[1]. במסגרת בניה כזו לגיאומטריה אין אפוא כל משמעות של תוכן לאכסיומות, ורק צורתן הפורמלית, כלומר המבנה שעל־פיו מתקשרים המושגים השונים המופיעים באכסיומות, משמשת יסוד למדע הגיאומטרי. לפיכך אין מקום לשאול אם האכסיומות „נכונות" אלא רק, למשל, אם הן גוררות אחריהן סתירה הגיונית, אם הן מספיקות לביסוס הגיאומטריה כולה, אם אחת מהן מיותרת (דהיינו, נתונה להוכחה בעזרת שאר האכסיומות). לאור האופי הפורמלי הזה יש להבין את אימרתו הידועה של B. Russell: המתימטיקה היא המדע, שבו אינך יודע אף פעם במה אתה דן ואינך בטוח לעולם אם נכונות טענותיך.

מי שניגש לראשונה לנושא זה עלול לשער, שמדע המבוסס כולו על רקע פורמלי בלבד חלול הוא ואינו אלא משחק. הדיון בהשערה זו תלוי, כמובן, בתפיסת המושגים „חלול" ו„משחק". אך למעשה מראים התגלית שיש מדע דידוקטיבי מצד אחד, ובנין הגיאומטריה כדוגמה למדע כזה מצד שני, שאין לבטל מדע בגלל אפייו הפורמלי.

כדי לצייר ציור כלשהו למהות כוונתנו, בדברנו זה עתה על המבנה הפורמלי של האכסיומות, נצא משתי דוגמות פשוטות:

א) דרך כל שתי נקודות עובר קו ישר.

ב) יש במציאות לפחות שתי נקודות.

יש כאן לפנינו שלשה סוגי דברים. ראשית, עצמים כגון: „נקודה" או „ישר"; נקרא להם „עצמים ראשוניים" של התורה הנדונה, דהיינו של הגיאומטריה. שנית, היחס „עובר דרך ..." מקשר עצמים שונים, כגון נקודות וישרים. הדבר יבלוט ביתר בהירות, אם נשתמש בשם יותר „נייטרלי" ופחות הסתכלותי, למשל בשם „חל" המופיע ביחס „נקודה חלה בישר". בהתאם לכך

1. אמנם מושג זה של „שלימות" למערכת־אכסיומות טעון ניתוח וליבון, וגם הסתייגות בהתאם למשפטו של גידל (עמ׳ 263).

יש לבטא את המשפט א) בצורה המדוקדקת: בהנתן שתי נקודות שונות [1] יש קו ישר, באופן שכל אחת משתי הנקודות חלה באותו ישר. יחסים בין עצמים ראשוניים שאינם מתבססים, דרך הגדרה, על יחסים „פשוטים יותר" – כגון יחס החילה – נכנה בשם „יחסים ראשוניים". שלישית, יש כאן מושג המציאות, שאין לו בעצם אופי מתימתטי כי אם הגיוני. לא נדון בו במיוחד אלא נקבלו מן הלוגיקה, כפי שאנו מקבלים את ההיסקים ההגיוניים. מושג זה מופיע במשפט ב) בצורה: יש במציאות נקודה P ויש במציאות נקודה השונה מ P.

הצד הפורמלי שבשיטה האכסיומטית מתבטא אפוא בכך, שאין צורך – ולאמיתו של דבר, גם אין תועלת – בביאור הסתכלותי או פסיכולוגי למהות הישר או הנקודה; כלומר בביאור מהותם של המושגים הראשוניים, הכוללים את העצמים הראשוניים למיניהם. כן אל נדמה בנפשנו תיאור של ממש כלפי טיבם של היחסים הראשוניים המקשרים עצמים ראשוניים, כגון יחס החילה. תנאי אחד בלבד נתבע מן המושגים והיחסים הראשוניים: שימַלאו את המשפטים הראשוניים המכונים אכסיומות. בדרך כלל אפשר „לממש" תנאי זה מתוך נתינת משמעויות מוחשיות שונות־בהחלט למושגים וליחסים הראשוניים, כפי שראינו בסעיף הקודם. בפני כס־המשפט של האכסיומטיקה אין מבחינים ומעדיפים בין משמעויות שונות כאלו, ולכן אין להכניס משמעות מוחשית כל עיקר – אם לא מתוך זיקה פסיכולוגית להסתכלות־מה לעומת האויר הצח והקר של הלוגיקה.

מובן מאליו, שהגיאומטריה עוסקת גם במושגים נוספים, מסובכים מן המושגים הראשוניים, וכן ביחסים נוספים על היחסים הראשוניים. בזאת אין השיטה האכסיומטית שונה מכל שיטה אחרת; אחרי שנמצאים ברשותנו מושגים (לרבות יחסים) ומשפטים ראשוניים, נוסיף מושגים פחות פשוטים דרך הגדרה, ומשפטים פחות פשוטים דרך הוכחה, כפי שיתבאר להלן.

כאמור, לא נעסוק כאן בבעיות הכלליות והעקרוניות של השיטה האכסיומטית; מקומן בחלק הששי. אולם יש שאלה אחת שלא נוכל להתעלם ממנה כאן, והיא: כיצד עלינו לבחור את האכסיומות ואת המושגים הראשוניים המופיעים בהן? מתוך מה שנאמר לעיל מתברר, שאין תשובה קבועה על שאלה זו; שהרי אין פסק־דין חד־ערכי הקובע, איזה מבין שני משפטים „פשוט" מחברו, או איזה מושג פשוט תכלית פשטות. אפשר להעדיף מערכת אכסיומות שבה יהיה מספר המושגים הראשוניים קטן ביותר; מאידך נוכל לבחור במערכת בעלת מספר מינימלי של אכסיומות. (במקרה זה

1. אל נא יטעה הקורא מתוך צורתו הדקדוקית של המשפט ויחשוב „שתי" ו„שונות" לתארים (תכונות) כמו בביטוי „ילד קטן נחמד". משמעותה של האימרה „יש שתי נקודות שונות" היא: יש נקודה P ויש נקודה Q שאינה מזדהה עם P. „שוה" במובן הזהות ושלילתו „שונה" הם מושגים הגיוניים ולא מתימטיים, כל־שכן לא גיאומטריים; מלבד זה הם מציינים, כמובן, יחסים ולא תכונות (עיין ב I, 7).

מחמירה במיוחד השאלה על אי־התלות בין האכסיומות, שלמדנו להכירה בצביונה הפשוט בראשונה ב I, 13.) גישה שלישית תבכר מערכת הבנויה, אם לפי המושגים הראשוניים אם לפי מבנה האכסיומות, על פי קשר אמיץ ליחסים שבמציאות הטבע, מתוך טענה שהמדע העיוני בא לשמש להם מסגרת; במקרה שלפנינו: ליחסים המוחשיים שבמרחב „הממשי", הפיסיקלי. יש פנים לכאן ולכאן, ויקשה הדבר לשפוט באופן מוחלט ואובייקטיבי, לאיזו גישה יש לתת זכות בכורה.

התיאור הניתן בסעיף זה מתבסס על מערכת האכסיומות של הילברט, שפורסמה בפעם הראשונה ב־1899 [1] ושוכללה מבחינות שונות במשך שלשים השנים הבאות, בעיקר ע״י הילברט עצמו ותלמידיו. לא כאן המקום לציין את הגישות האכסיומטיות האחרות אל ביסוס הגיאומטריה לסוגיהן השונים; ביסוסו של הילברט היה בין הראשונים והשפיע השפעה חזקה מכולם, הודות למזיגה מוצלחת ביותר של פשטות מדעית עם קרבה לנקודות־המוצא של הגיאומטריה האלמנטרית (האבקלידית). תמורת זאת מכניס ביסוס זה מספר גדול (8) של מושגים ראשוניים (שלשה סוגי „עצמים" וחמשה „יחסים"), בו בזמן שביסוסם של וֶבלן ומור [2], למשל, מסתפק במינימום של חומר „ראשוני": בסוג אחד של עצמים וביחס אחד. הצעד המכריע הראשון לשם ביסוס אכסיומטי לגיאומטריה במובן החדיש – עוד לפני הילברט – נעשה ע״י פאש [3], והישגיו באכסיומות הסדר עברו למערכותיהם של כל חבריו; גישתו קרובה ביותר לגיאומטריה כמדע נסיוני [4].

הבה נבסס את הגיאומטריה על פי תיאורו של הילברט! נסטה ממנו, לפי צורתו המתוקנת משנת 1930, בפרטים בודדים בלבד. בדרך כלל לא נתן הוכחות למשפטים הנובעים מן האכסיומות; נוכיח משפטים מעטים בלבד מחמת חשיבותם

1. **D. Hilbert**: Grundlagen der Geometrie. 7th (8th) ed., 1930 (1956). הספר תורגם לאנגלית ע״י E. J. Townsend, לצרפתית ע״י L. Langel. השוה גם **G. B. Halsted**: Rational geometry ... based on Hilbert's foundations (1914), וספרו של MacLeod המצוטט בעמ׳ 371.

2. **O. Veblen**: *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. 5 (1904). **R. L. Moore**: *ibidem*, vol. 9 (1908). המאמר הראשון באוסף של J. W. A. Young (עיין בעמ׳ 191), הכתוב ע״י וֶבלן, נותן מזיגה משופרת של שני המאמרים האלה.

3. **M. Pasch**: Vorlesungen über neuere Geometrie. 1882. ספר זה הופיע בשנת 1926 מחדש, בצירוף נספח הדן בהתפתחותו ההיסטורית של ביסוס הגיאומטריה מאת M. Dehn.

4. יצויינו גם הספרים **H. F. Baker**: Principles of geometry. 2 vols. 1929/30.
H. G. Forder: The foundations of Euclidean geometry. 1927.
R. L. Goodstein and **E. J. F. Primrose**: Axiomatic projective geometry. 1953.
G. de B. Robinson: The foundations of geometry. 1940.

העקרונית היוצאת מן הכלל. הוכחת כל המשפטים – ואפילו מתוך צמצום באלה המופיעים להלן במפורש – היתה דורשת תיאור רחב־ידיים. כן לא נבליט את שאלת אי־תלותן ההדדית של האכסיומות אלא במקרים בודדים.

באשר למושגים הראשוניים, יופיעו להבא שלשה סוגים שונים של עצמים ראשוניים (לא־מוגדרים), המכונים נקודות, ישרים, מישורים. בין עצמים אלה לבין עצמם ולבין עצמים נוספים, המוגדרים על־סמך המושגים הראשוניים, יופיעו חמישה יחסים ראשוניים (לא־מוגדרים); ואלה הם:

א) הנקודה P חלה בישר s. במקום זה נשתמש, לשם נוחיות, גם בביטויים אחרים, כגון: „הישר s עובר דרך הנקודה P", או „P היא נקודה של s". אם P ו־Q חלות ב־s, נאמר גם „s מקשר את הנקודות P ו־Q"; אם P חלה בכל אחד משני ישרים שונים s ו־t, נאמר גם „s ו־t נפגשים או נחתכים ב־P", וכו'.

ב) הנקודה P חלה במישור π. נאמר גם „π עובר דרך P", „P היא נקודה של π", וכו'.

ג) הנקודה Q נמצאת בין הנקודה P והנקודה R. (יחס זה מופיע רק בתנאי ששלש הנקודות Q, P, R חלות בישר אחד, כפי שמודגש באכסיומה II, 1.)

היחס א) קושר נקודה וישר, היחס ב) נקודה ומישור, היחס ג) שלש נקודות. לעומת זאת קושרים שני היחסים הראשוניים הנותרים עצמים, שבעצמם אינם ראשוניים כי אם מוגדרים על־סמך המושגים הראשוניים, והם: „קטע" ו„זווית". נסמן לשם פשטות, וכדי להתקרב לביטויים הרגילים בגיאומטריה, את שני היחסים הנדונים באותה המלה „חופף" (או „שוה"); אף־על־פי־כן יחסים שונים הם, כפי שיוצא מן העובדה, שהם קושרים עצמים מסוגים שונים. הערה זו כחה יפה, כמובן, גם כלפי השימוש ב„חילה" ב־א) ו־ב) לעיל. שני היחסים הנדונים הם:

ד) הקטע a חופף על (או שוה ל־) הקטע b.

ה) הזווית α חופפת על (או שוה ל־) הזווית β.

נשוב ונדגיש שאין כל משמעות של תוכן למושגים שנזכרו כאן. אין אנו רשאים לטעון לגבי נקודות, חפיפה וכו' אלא מה שאפשר להסיק, דרך היסקים הגיוניים, מן האכסיומות הבאות, ללא מתן משמעות של תוכן למושגים הראשוניים, וכל שכן ללא שימוש בהסתכלות גיאומטרית.

כל שאר המושגים והיחסים המופיעים בגיאומטריה ניתנים להגדרה בעזרת אלה שהוכנסו כאן ללא הגדרה. במידה שנשתמש במושגים נוספים, נגדירם להלן.

ועתה ננסח את אכסיומות הגיאומטריה, בפלגנו אותן לחמש מערכות. שלש המערכות הראשונות מצויינות ע"י היחסים הראשוניים המופיעים בהן, ועל פיהם הן נקראות: במערכת הראשונה מופיעים היחסים א)

ו־ב) בלבד („חל"); במערכת השניה מתווסף עליהם היחס ג) („בין"), ובמערכת השלישית–היחסים ד) ו־ה) („חופף"). באכסיומות של שלש מערכות אלו מסתיימת בניית הגיאומטריה בקוויה העיקריים. המערכות הרביעית והחמישית, הכוללות – בניגוד לקודמותיהן – אכסיומות מעטות בלבד (הרביעית אחת, החמישית שתים), באות כדי להוציא סוגי גיאומטריה מסויימים, השונים אך מעט באופן יחסי מן הגיאומטריה הרגילה. בחלק מן הגיאומטריות ההן כבר עסקנו בספר זה.

אחרי כל מערכה ומערכה נוסיף את ההגדרות והמשפטים העיקריים המתבססים על האכסיומות של אותה מערכת בצירוף המערכות הקודמות לה. כדי להקל על הקורא את הבנת המשמעות שתהיה לאכסיומות אם יֻתפסו המושגים הראשוניים במובנם „הרגיל" (שאליו רומזים השמות הניתנים למושגים ההם), נוסיף מדי פעם בפעם הערות המכוונות ל„מובן רגיל" זה – הערות המסתמכות על מה שלמדנו בפרק זה ובפרקים הקודמים.

I. מערכת ראשונה: אכסיומות החילה (1–8).

I, 1. לעומת כל שתי נקודות שונות יש ישר אחד לפחות, באופן שבאותו ישר חלה כל אחת מהנקודות. בכל ישר חלות לפחות שתי נקודות שונות.

I, 2. לעומת כל שתי נקודות שונות אין במציאות יותר מישר אחד שבו חלות שתי הנקודות.

שתי האכסיומות 1 (רישא!) ו־2 יחד מציינות, ששתי נקודות קובעות ישר אחד ויחיד וכי לנקודות אלו אין תפקיד מיוחד לגבי הישר – לאמור: שהישר קבוע ע"י כל שתים מנקודותיו. הישר הקבוע ע"י הנקודות P ו־Q יסומן ב־PQ או ב־QP.

אולי ישאל הקורא: משום מה לא נתאחדו שתי הטענות 1 (רישא) ו־2 לאכסיומה אחת? התשובה הכללית והעקרונית היא: רצוי לפלג את האכסיומות בקעים בקעים, כדי להקל את בדיקת אי־התלות בין טענותיהן וכדי להוציא ככל האפשר מן האכסיומות חלקים שאינם דרושים, בהיותם ניתנים להוכחה. במקרה שלפנינו הדבר שקוף ביותר ומשום כך מפיץ הוא אור בהיר על הענין בכלליותו: הלא בסעיף הקודם התוודענו אל גיאומטריה – הגיאומטריה הדו־אליפטית – שבה מתמלאת האכסיומה 1, אך לא 2, אם נפרש חילה במובן הרגיל. באמת עובר שם דרך כל שתי נקודות שונות תמיד ישר, אולם לא תמיד ישר אחד בלבד.

I, 3. יש במציאות שלש נקודות שאינן חלות בישר אחד.

אכסיומה זו מבטיחה ל„מרחב", כלומר לקבוצת כל הנקודות שבנמצא, יותר ממימד אחד. (השוה „דרישת הממד השני" בעמ' 341.) לפיכך יש למרחב לפחות שני ממדים.

אם פנינו מועדות למרחב דו־ממדי בלבד, נוכל לסיים כאן את אכסיומות החילה ולוותר על המושג הראשוני „מישור" ועל היחס הראשוני „נקודה חלה במישור". באשר למערכות II—V של אכסיומות, אין הבדל לגביהן אם יש למרחב שני ממדים או יותר, הואיל וכל האכסיומות שבהן מכוונות לישר ולמישור בלבד, כלומר למרחב חד־ או דו־ממדי. לכן מוצדק הדבר לקרוא לחמש האכסיומות הבאות (I, 4—8) בשם אכסיומות המרחב (התלת־ממדי).

I, 4. לעומת כל שלש נקודות[1] שאינן חלות בישר אחד[2], יש לפחות מישור אחד שבו חלות שלשתן. בכל מישור חלה לפחות נקודה אחת.

הקורא ישים לב לכך שהמלה „חלה", המופיעה שלש פעמים באכסיומה זו, מכוונת תחילה ליחס הראשוני א), ואילו בפעמיים הבאות ליחס הראשוני ב). הבחנה זו נחוצה גם באכסיומות הבאות.

I, 5. לעומת כל שלש נקודות שאינן חלות בישר אחד, אין במציאות יותר ממישור אחד שבו חלות שלשתן.

היחס בין האכסיומות 4 ו5 דומה ליחס שבין האכסיומות 1 ו2, אלא שכאן מדובר במישור תחת ישר, וב„חילה" ב) תחת א). שלש נקודות P, Q, R, שאינן חלות בישר אחד, קובעות אפוא מישור מסויים שבו הן חלות; המישור יסומן בABC, והוא קבוע ע"י כל שלישיה של נקודות החלות בו ואינן חלות בישר אחד.

I, 6. אם שתי נקודות של הישר s חלות במישור π, חלה כל נקודה של s במישור π.

כבר ב־§ 1 (עמ' 342) התוודענו אל אכסיומה זו; הלא זוהי דרישת „קוויותו" של המישור. על־סמך האכסיומה 6 נוכל להגדיר יחס נוסף, יחס נגזר ולא ראשוני; נוח לכנותו גם כן בשם „חילה":

הגדרה. אם שתי נקודות (ולכן כל הנקודות) של הישר s חלות במישור π, אומרים: הישר s חל במישור π, π „עובר" דרך s, s הוא ישר של π, וכו'.

---

1. מעתה נוותר בדרך־כלל על ההוספה „שונות"; אם מדובר על שתים, שלש,... נקודות, שני ישרים וכו', הכוונה תמיד לעצמים שונים. אגב, באכסיומות I, 3 ו 4 שלש הנקודות הן שונות זו מזו על כל פנים; הלא אחרת היו חלות בישר אחד על־פי האכסיומה I, 1.

2. אפשר ואפשר להשמיט באכסיומה זו — אולם לא ב I, 3 ו I, 5 — את המלים „שאינן חלות בישר אחד", אלא שהשמטה זו תהפוך את האכסיומה לדרישה חזקה יותר: לדרישה שיש מישור בעל התכונה הנדונה בין אם הנקודות חלות בישר אחד בין אם לאו. (כיוצא בזה היינו יכולים להשמיט את המלה „שונות" בראשית האכסיומה I, 1.) השיטה האכסיומטית הלא היא שואפת לכך שהאכסיומות תדרושנה מעט ככל האפשר, כדי שיֻתר הטענות תובטחנה דרך הוכחה.

I, 7. אם הנקודה P חלה בשני המישורים π וϱ, יש נקודה אחרת Q שגם היא חלה בπ ובϱ.

כוונת האכסיומה 7 ברורה על־פי מה שלמדנו ב§ 1. אם המרחב הוא בעל שני ממדים בלבד, אין האכסיומה קובעת כל חידוש; שכן במקרה זה מזדהים π וϱ זה עם זה ועם המרחב כולו. וטענת האכסיומה 7 כלולה כבר בסיפא של האכסיומה 1. יש חידוש באכסיומה זו רק אם יש למרחב לפחות שלושה ממדים, ובמקרה זה היא באה לבטל את האפשרות של יותר משלושה ממדים. באמת, במרחב של ארבעה ממדים או יותר אין הטענה נכונה; שהרי שם יוכל להצטמטם — ובדרך כלל מצטמצם באמת — המשותף בין שני מישורים לנקודה אחת לכל היותר, כפי שראינו בעמ' 349. לפיכך „משמעותה" של האכסיומה 7 היא: יש למרחב לכל היותר שלשה ממדים.

I, 8. יש במציאות ארבע נקודות שאינן חלות במישור אחד.

אכסיומה זו מקבילה ל3. כשם ש3 דורשת, שלמרחב יהיו לפחות שני ממדים, כן דורשת 8 שיהיו למרחב לפחות שלשה ממדים[1].

בין המסקנות הנובעות מאכסיומות המערכת I יש לציין במיוחד את שתי אלה:

משפט 1. לשני ישרים של אותו המישור[2] משותפת לכל היותר נקודה אחת. לשני מישורים משותף: או ישר אחד ולא שום נקודה חוץ ממנו, או לא שום נקודה. למישור ולישר שאינו חל באותו מישור, משותפת לכל היותר נקודה אחת.

משפט 2. דרך ישר ונקודה שאינה חלה באותו ישר — וכן דרך שני ישרים בעלי נקודה משותפת — עובר מישור אחד ויחיד. אפשר אפוא ל„קבוע" מישור בכל אחד משני האפנים האלה. (השוה § 1, עמ' 362.)

II. מערכת שניה: אכסיומות הסדר (1—4).

נוסף על היחסים הראשוניים א) ו־ב) — חילה — נשתמש כאן ביחס הראשוני ג) „בין": נקודה „נמצאת בין" נקודה פלונית ונקודה אלמונית. יחס זה מתכוון לשלש נקודות החלות בישר אחד, כאמור בII, 1, ומאפשר לסדר את נקודותיו של ישר. מתוך כך יוכנס בעקיפין גם מעין „סדר" לנקודות ולישרים במישור ובמרחב, כפי שיתברר להלן (משפט 7).

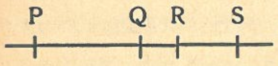
II, 1. אם הנקודה Q נמצאת בין הנקודה P והנקודה R, תהיינה P, Q, R נקודות שונות של ישר אחד, ותימצא Q גם בין R וP.

---

1. אעפ"י כן לא כדאי הדבר לבטל את האכסיומה 8; הלא היא נחוצה לשם בנין הגיאומטריה במישור, שלגביה אין צרך באכסיומות 4—8.

2. מובן שאפשר להשמיט את המלים „של אותו המישור".

בתורת־ההגיון מבחינים בין יחסים (רילַציות) בעלי שני מקומות ריקים, שלשה מקומות ריקים וכו'. „מקום ריק" מציין משתנה, שתחתיו אפשר להציב עצם מסויים. היחסים הראשוניים א) ו־ב) הם בעלי שני מקומות ריקים: x חל ב y; יש להציב למקום הריק x נקודה, למקום הריק y ישר ב־א), מישור ב־ב). יחס בעל שלשה מקומות ריקים כגון „y נמצאת בין x ובין z", שבכל מקומותיו הריקים יש להציב נקודות, יכול להיכתב באופן סמלי, ללא זיקה לשפה, למשל כ $b(x,y,z)$; לפי סימון זה מביעה הסיפא של II, 1: $b(x,y,z)$ גורר אחריו $b(z,y,x)$.



ציור 90

II, 2. לעומת כל שתי נקודות P ו Q יש לפחות נקודה אחת R של הישר PQ כך, שהנקודה Q נמצאת בין P ו R. (עיין בציור 90.)[1]

II, 3. מתוך שלש נקודות של ישר אחד נמצאת לכל היותר אחת בין שתי חברותיה.

אין צורך לדרוש, שגם לפחות אחת – ולכן, נקודה אחת ויחידה – משלש הנקודות תימצא בין חברותיה; אדרבה, טענה זו נוכיח לקמן במשפט 4. מאידך, אי־אפשר להוכיח את טענת האכסיומה II, 3 בעזרת שאר האכסיומות של המערכות I ו II; לאמור: אכסיומה זו אינה תלויה בשאר האכסיומות הללו. ההוכחה לאי־תלות זו ניתנה בסעיף הקודם. כי הלא הגיאומטריה החד־אליפטית[2] ממלאת את כל האכסיומות הנ"ל, ואף־על־פי־כן הישר הוא שם קו סופי וסגור; לכן קיים שם המשפט (כמו לגבי קו המעגל בגיאומטריה הרגילה; השוה בציור 88) האמור שמתוך שלש נקודות של ישר נמצאת כל אחת בין חברותיה.

שלש האכסיומות II, 1–3 דנות בנקודות של ישר אחד; הן אפוא אכסיומות קוויות, או אכסיומות של ממד אחד. Pasch (עמ' 163) גילה, שיש צורך גם באכסיומת־סדר בשני ממדים (במישור). אך לשם זה נחוצה הכנה בצורת הגדרה.

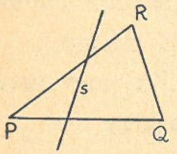
הגדרה. כל זוג של שתי נקודות P ו Q ייקרא קטע ויסומן ב $\overline{PQ}$ או גם ב $\overline{QP}$ (הואיל ולא נקבע סדר מסויים לנקודות שבזוג). אומרים שהקטע $\overline{PQ}$ חל בישר t אם P ו Q חלות ב t. הנקודות של PQ הנמצאות בין P ו Q נקראות נקודות הקטע (או „נקודות־הפנים של הקטע", „נקודות החלות בקטע"); P ו Q בעצמן נקראות קצות הקטע; לגבי כל שאר נקודותיו של הישר PQ אומרים, שהן חלות מחוץ לקטע.

1. לנקודה S שבציור 90 אין לע"ע כל חשיבות. היא הוכנסה מחמת שימושנו בציור זה להלן.

2. אין הדבר כך בגיאומטריה הדו־אליפטית, הואיל והאכסיומה I, 2 אינה מתמלאת בה: יש אשר דרך שתי נקודות עוברים כמה ישרים.

ועתה נוכל לנסח את הדרישה המכונה אכסיומה של פאש:

II, 4. תהיינה P, Q, R שלש נקודות שאינן חלות בישר אחד, ויהי s ישר החל במישור PQR ואינו עובר דרך אחת הנקודות P, Q, R. אם s עובר דרך נקודה של הקטע $\overline{PQ}$, עובר s דרך נקודה של הקטע $\overline{PR}$ או דרך נקודה של הקטע $\overline{QR}$. (עיין בציור 91.)



ציור 91

מכיון שהנקודות P, Q, R יוצרות על פי הנחתנו „משולש" $\overline{PQR}$ (השוה להלן), הרי משמעות האכסיומה היא: ישר „הנכנס" אל תוך משולש ואינו עובר דרך אחד מקדקדיו, אינו „הולך לאיבוד" בתוך המשולש אלא „יוצא" ממנו דרך אחת משאר הצלעות.

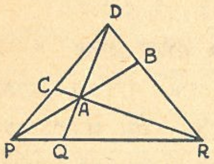
קל להוכיח כי s חותך[1] רק אחד מן הקטעים $\overline{PR}$ ו $\overline{QR}$.[2]

מן המערכות I ו II ביחד נובעים ארבעת המשפטים הבאים 3–6 הדנים בסדר הנקודות בישר; אחד מהם (משפט 4) נוכיח בגלל חשיבותו העקרונית. להדגשה מיוחדת ראוי הדבר שהוכחות המשפטים הבאים, המתיחסים לממד אחד, דורשות שימוש בשני ממדים, באשר הן מסתמכות על האכסיומה של פאש.

משפט 3 (השוה אכסיומה II, 2). כנגד כל שתי נקודות P ו R יש לפחות נקודה אחת Q של הישר PR, הנמצאת בין P ו R. (עיין בציור 90.)

משפט 4 (השוה אכסיומה II, 3). מתוך שלש נקודות של ישר אחד נמצאת לפחות אחת – ולכן לפי II, 3 אחת ויחידה – בין שתי חברותיה.

הוכחה[3]. נניח שהנקודות P, Q, R חלות בישר אחד (עיין בציור 92), ונניח ש P אינה נמצאת בין Q ו R, וגם לא R בין Q ו P. על־סמך זה ניכיח ש Q נמצאת בין P ו R.



ציור 92

תהא A נקודה שאינה חלה בישר PR; נקשר את A ל Q ונבחר – בהתאם ל II, 2 – נקודה D בישר QA, באופן ש A תימצא בין Q ו D. נראה את PA – לפי נוסח האכסיומה II, 4 – כישר s החותך את הצלע $\overline{QD}$ של המשולש $\overline{QDR}$ בנקודת־החיתוך A. לפי האכסיומה הנ"ל חותך אפוא הישר PA את הישר RD בנקודה מסויימת B שבין R ו D; שכן אין לישר PA נקודה משותפת (שניה) עם PR (או עם הקטע $\overline{QR}$), הואיל ודבר

1. ישר s „חותך" ישר t או קטע k, ר"ל: s עובר דרך נקודה של t (השוה א) בעמ' 402) או של k, בו בזמן שאינו מתלכד עם t או אין k חל ב s.

2. כבר בהנחת האכסיומה כלול שאין s עובר דרך נקודת־החיתוך בין PR ו QR.

3. ההוכחה למשפט זה, שעוד במהדורה החמישית (1922) של „יסודות הגיאומטריה" להילברט נמצא בין האכסיומות, ניתנה ע"י A. Wald (השוה גם מאמרו Axiomatik des Zwischenbegriffs in metrischen Räumen שהופיע ב *Math. Annalen*, כרך 104, 1931).

זה היה סותר את האכסיומה I, 2 בהתאם להנחתנו ש A אינה חלה ב PR. כמו כן יוצא, לפי אותו הלך־מחשבה, שהישר RA חותך את PD בנקודה C שבין P ו D.

ועתה נשתמש עוד פעמיים באכסיומת פאש: לגבי המשולש $\overline{PBD}$ והישר RC, ולגבי המשולש $\overline{PRB}$ והישר DQ. השימוש הראשון מלמדנו שהנקודה A (החלה, לפי הבנייות דלעיל, בישרים RC ו PB) נמצאת בין P ו B, ולכן מראה השימוש השני שהנקודה Q החלה בישר DA נמצאת בין P ו R; מש״ל.

משפט 5[1]. אם נתונות ארבע נקודות בישר אחד (השוה בציור 90), אפשר לסמנן ב P, Q, R, S (בסדר זה) כך שתימצא

א) הנקודה Q הן בין P ו R, הן בין P ו S,

ב) הנקודה R הן בין P ו S, הן בין Q ו S.

יש עוד אפשרות אחרת, ואחת בלבד, לסימון שיגרור אחריו את התכונות א) ו ב), והיא: S, R, Q, P. — שתי אפשרויות מתאימות, ולא יותר, קיימות אם נתון איזה מספר סופי שהוא של נקודות (תחת ארבע) בישר אחד.

אם נתונה נקודה R של ישר מסויים, אפשר לחלק על פי המשפט 5 את זוגות הנקודות של הישר (פרט ל R) לשני סוגים: הזוגות שנקודותיהם חלות „באותו העבר" של R, כגון P ו Q, ואלה שנקודותיהם חלות „בעברים שונים" של R, כגון P ו S, או Q ו S. אם מכנים את קבוצת כל הנקודות של הישר החלות באותו העבר של R, לרבות R, בשם חצי־קרן (או קרן), תחלק כל נקודה R של ישר את הישר לשני חצאי־קרניים בעלי הנקודה המשותפת היחידה R; על כל אחד מחצאי־הקרניים אומרים שהוא „חל" באותו ישר.

משפט 6. בין שתי נקודות של ישר נמצאות אינסוף נקודות של הישר.

משפט 7. כל ישר s החל במישור σ מפריד את שאר נקודותיו של σ (שאינן חלות ב s) לשני תחומים כדלקמן: כל נקודה P של התחום האחד, בצירוף איזו נקודה Q של התחום השני, קובעת קטע $\overline{PQ}$ שבו חלה נקודה אחת של s; מאידך כל שתי נקודות P_1 ו P_2 של אותו התחום קובעות קטע ששום נקודה של s אינה חלה בו. — כיוצא בזה: כל מישור σ של המרחב מפריד את כל שאר נקודות המרחב (שאינן חלות ב σ) לשני תחומים כדלקמן: כל נקודה P של התחום האחד, בצירוף איזו נקודה Q של התחום השני, קובעת קטע $\overline{PQ}$ שבו חלה נקודה אחת של σ; מאידך כל שתי נקודות P_1 ו P_2 של אותו התחום קובעות קטע ששום נקודה של σ אינה חלה בו.

משפט זה[2], במחציתו הראשונה הדנה בגיאומטריה במישור, מאפשר לנו

---

1. משפט זה הופיע במהדורה הראשונה של ספרו של הילברט כאכסיומה, והוכח ע״י E. H. Moore במאמרו ב *Transactions of the American Math. Soc.*, כרך 3 (1902). השוה גם את המאמרים הנזכרים בעמ׳ 401, ומאמריו של A. R. Schweitzer ב *American Journal of Math.*, כרכים 31 ו 35 (1909 ו 1913).

2. לגבי תפקידה של האכסיומה II, 3 בהוכחת המשפט 7, השוה נתן קֻבַּקר ב־רבעון למתימטיקה, כרך 1, עמ׳ 28 (ירושלים, תשרי תש״ז).

להגדיר כל צרכם את הביטויים: שתי נקודות של σ חלות ב„אותו העבר של הישר s" או „בעברים שונים של s". כן נוכל, על־סמך המחצית השניה, לדבר על „אותו העבר" או על „עברים שונים" של מישור מסויים במרחב. נציין במיוחד את העובדה שמשפטים ומושגים אלה על „סדר" במרחב מתקבלים ללא הסתמכות על דרישות מרחביות; כלומר, ללא אכסיומות־סדר הדנות ביותר משני ממדים.

לבסוף, כדי להגדיר את מושג ה„משולש" והכללתו, מכנים מערכת סופית של קטעים $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ בשם „קטע שבור" $\overline{P_0P_1P_2..P_n}$, וכל נקודה החלה באחד הקטעים, לרבות קצותיהם, בשם „נקודה של הקטע השבור". אם, ראשית, כל הנקודות P_k חלות במישור אחד, ושנית, הנקודות P_0 ו P_n מתלכדות, יכונה הקטע השבור בשם מצולע; הקטעים (ללא קצותיהם) נקראים: צלעות המצולע, וקצות הקטעים: קדקדי המצולע. אם $n = 3$ קוראים למצולע $\overline{P_0P_1P_2P_0}$ בשם משולש ומסמנים אותו גם ב $\overline{P_0P_1P_2}$; וכו׳. בעזרת המשפט 7 קל להוכיח שכל משולש מפריד את המישור שבו הוא חל (ביתר דיוק: את כל נקודות המישור שאינן נקודות של המשולש עצמו) לשני תחומים: לתחום־הפנים ולתחום־החוץ של המשולש. (לתחום־החוץ אפיינית היא התכונה, שיש ישר במישור הנידון החל כולו בתחום־החוץ, מה שאין כן כלפי תחום־הפנים.) כיוצא בזה לגבי איזה מצולע „פשוט" שהוא (במקום המשולש); לאמור, מצולע שאין נקודה משותפת לשתים מצלעותיו, וגם לא יחול קדקוד בפנים אחת מצלעותיו.

III. מערכת שלישית: אכסיומות החפיפה (1–5).

נשתמש כאן, נוסף על היחסים הראשוניים א)–ג), בשני היחסים הראשוניים הנותרים: אחד בין שני קטעים והשני בין שתי זוויות (עיין לקמן). לשם פשטות יכונו שניהם באותו השם: חופף, ויסתמנו באותו הסימן: $\equiv$. יש שמשתמשים במלה „שוה" במקום „חופף", אלא שלשויון (להבדיל מן הזהות שאין לה ענין כאן!) יש הוראות כה רבות במתימטיקה שאין זה רצוי להוסיף עליהן. האכסיומות III „קובעות" את מושג החפיפה, ועל סמך זה, לפי מה שלמדנו בפרק הששי, את מושג התנועה.

III, 1 (הקצאת קטעים). אם P ו Q הן שתי נקודות של הישר s, ואם P' היא נקודה של הישר s' (השוֶה מ s או מזדהה אתו), יש נקודה Q' של s' בעבר נתון של P' כך שהקטע $\overline{P'Q'}$ חופף על הקטע $\overline{PQ}$; בסימן:

$$\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}.$$

הואיל והקטע הוגדר כזוג סתם, ולא כזוג סדור, של נקודות, יוצא שהנוסחות $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, $\overline{PQ} = \overline{Q'P'}$ וכו׳ שקולות זו כנגד זו. נוח להשתמש בביטוי:

אפשר „להקצות" קטע נתון על ישר נתון (s') מנקודה נתונה (P') לעבר נתון.

III, 2. היחסים $\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}$ ו $\overline{P''Q''} \equiv \overline{PQ}$ יחד גוררים אחריהם $\overline{P''Q''} \equiv \overline{P'Q'}$; כלומר, אם שני קטעים חופפים על קטע שלישי, הריהם גם חופפים זה על זה.

בטרם נמשיך באכסיומות, עלינו להראות שיחס החפיפה הוא, ככל יחס של שויון (או „אקויוָלנטיות") במתימטיקה (עמ' 8), רֶפליכסיבי (חוזר על עצמו), סימטרי (הדדי) וטרַנסיטיבי. העובדה שכל קטע חופף על עצמו, נובעת מתוך הקצאתו על ישר שרירותי ומתוך השימוש ב־III, 2; על־סמך זה מבטיחה אכסיומה זו גם את שתי התכונות האחרונות. (כבר סמכנו למעלה על הסימטריה בהשתמשנו בביטוי „חופפים זה על זה".)

III, 3 (חיבור קטעים). יהיו $\overline{PQ}$ ו $\overline{QR}$ קטעים מחוסרי נקודות (פנימיות) משותפות, החלים שניהם בישר אחד; וכן יהיו $\overline{P'Q'}$ ו $\overline{Q'R'}$ קטעים מחוסרי נקודות משותפות באותו ישר או בישר אחר. במקרה זה היחסים

$$\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}, \quad \overline{Q'R'} \equiv \overline{QR}$$

גוררים אחריהם

$$\overline{P'R'} \equiv \overline{PR}.$$

ועתה עלינו להבטיח הקצאת זויות בהתאמה גמורה להקצאת קטעים. יש רק הבדלים בדבר חוזק הדרישות הנחוצות, הבדלים הנגררים בחלקם ע"י הסדר שבתיאורנו המקדים את הטיפול בקטעים לטיפול בזויות. כך נוכל לוותר על דרישות מעין III, 2 ו 3, בתנאי שנעמוד מראש על חד־ערכיותה של ההקצאה — שלגבי קטעים עתידים אנו להוכיחה — ועל יחס־הריפליכסיביות לגבי חפיפת זויות.

ובכן נתחיל בהגדרת הזוית!

הגדרה. במישור מסויים יהיו a ו b שני חצאי־קרניים היוצאים מאותה הנקודה O אך חלים בישרים שונים. הזוג של a ו b נקרא זוית ויסומן ב $\sphericalangle(a,b)$ או ב $\sphericalangle(b,a)$. a ו b מכונים „שוקי" הזוית, O מכונה „קדקדה". (לפי זה אין אנו נזקקים לזויות שהן, במובן הרגיל, שוות או גדולות מ 180^0.)

על סמך האכסיומות I ו II (בפרט האכסיומה של פאש) קל להפריד בין נקודות המישור ש„בפנים הזוית" לבין הנקודות ש„מחוצה לה". כל קטע המקשר שתי נקודות פנימיות חל כולו בפנים הזוית. שאר תכונות־הסדר בין זוית לבין נקודות, חצאי־קרניים, קטעים שבורים וכו' במישור הזוית נובעות מכאן ללא קושי. יחס החפיפה בין זויות נקבע בעיקרו ע"י האכסיומה

III, 4 (הקצאת זוויות). תהא $\sphericalangle(a,b)$ זוית במישור μ ויהי μ' מישור (אחר, או מזדהה עם μ), s' ישר ב μ', a' חצי־קרן החל ב s' והיוצא מנקודה O'. במקרה זה יש ב μ' חצי־קרן אחד ויחיד b' היוצא מ O' באופן ש $\sphericalangle(a',b')$ היא זוית „חופפת" על $\sphericalangle(a,b)$ (בסימן: $\sphericalangle(a',b') \equiv \sphericalangle(a,b)$), ושהנקודות הפנימיות של $\sphericalangle(a',b')$ חלות בעבר נתון מראש של s' (מבין שני עבריו). כל זוית חופפת על עצמה.

שוב נוח הדבר להשתמש בביטוי: אפשר „להקצות" באופן חד־ערכי זוית נתונה במישור נתון מחצי־קרן נתון לעבר נתון.

אכסיומת־החפיפה האחרונה, הקושרת את חפיפת הקטעים ואת חפיפת הזוויות זו בזו, היא המשפט הידוע מראשית לימודי הגיאומטריה בבתי הספר כ„משפט־החפיפה הראשון"; ביתר דיוק, האכסיומה דורשת חלק מאותו משפט. לשם נוחיות הביטוי נסמן, כרגיל, את הזווית (a,b) גם ב $\sphericalangle AOB$ או ב $\sphericalangle BOA$ אם קדקדה הוא O ואם A ו B הן נקודות החלות בשוקיים a ו b.

III, 5. (עיין בציור 94, עמ' 412.) יהיו $\overline{PQR}$ ו $\overline{P'Q'R'}$ שני משולשים שלגביהם קיימים יחסי החפיפה הבאים:

$$\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}, \quad \overline{P'R'} \equiv \overline{PR}, \quad \sphericalangle Q'P'R' \equiv \sphericalangle QPR;$$

במקרה זה קיים גם יחס החפיפה $\sphericalangle P'Q'R' \equiv \sphericalangle PQR$.

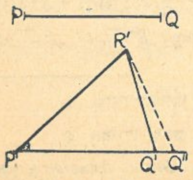
הערה: מתוך המרה בעלמא של סימוני הקדקדים יוצא מ III, 5 שקיים גם יחס החפיפה $\sphericalangle P'R'Q' \equiv \sphericalangle PRQ$.

האכסיומה III, 5 מאפשרת לנו להסיק את חד־ערכיותה של הקצאת קטעים מן התכונה המתאימה (שנדרשה ב III, 4) לגבי הקצאת זוויות, כדלקמן. נניח שהוקצה הקטע $\overline{PQ}$ (ציור 93) על חצי־קרן מסויים היוצא מ P' בשני אפנים שונים: עד Q', ועד Q''. תהי R' נקודה שאינה חלה בישר $P'Q'$. יחסי החפיפה הקיימים על־פי זה

$$\overline{P'Q''} \equiv \overline{P'Q'}, \quad \overline{P'R'} \equiv \overline{P'R'}, \quad \sphericalangle \overline{Q''P'R'} \equiv \sphericalangle \overline{Q'P'R'}$$

גוררים אחריהם לפי III, 5 את היחס

$$\sphericalangle P'R'Q'' \equiv \sphericalangle P'R'Q'$$



ציור 93

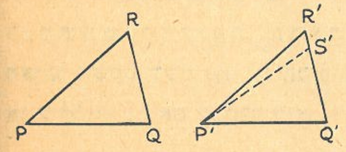
העומד בניגוד לחד־ערכיותה של הקצאת הזווית (III, 4). סתירה זו מראה שהנקודות Q' ו Q'' מתלכדות; כלומר הקצאת הקטעים לפי III, 1 היא חד־ערכית, מש"ל.

לא נוכל להכנס כאן לפרטי המסקנות, שאפשר להוציאן מאכסיומות החפיפה, בצירוף האכסיומות I ו II. במקרים רבים אי אפשר להתקדם לפי השיטות הנהוגות

בגיאומטריה, מפני שחסרים לנו עדיין שני מכשירי עזר שבהם משתמשים שם: אכסיומת המקבילים (עיין להלן IV), שעליה מבוסס המשפט על סכום הזוויות שבמשולש, ואכסיומות הרציפות (עיין להלן V). נרשום אחדות מן המסקנות החשובות ביותר, לפי הסדר המתאים להוכחתן. אולם הוכחות נצרף רק לשלשה מהן.

א) על־פי הנחות האכסיומה 5,III קיים גם $\overline{QR} \equiv \overline{Q'R'}$; כלומר, המשולשים „חופפים" במובן המקובל.

הוכחה: נניח שלא היה קיים $QR \equiv Q'R'$, ונקבע בחצי־הקרן $Q'R'$ את הנקודה S', באופן שקיים $\overline{Q'S'} \equiv \overline{QR}$ [1] (עיין בציור 94). לפי 5,III קיים מתוך דיון במשולשים QRP ו $Q'S'P'$: $\sphericalangle QPR \equiv \sphericalangle Q'P'S'$. לפיכך היתה הזווית $\sphericalangle QPR$ חופפת הן על $\sphericalangle Q'P'R'$ הן על $\sphericalangle Q'P'S'$, בניגוד לדרישה של חד־ערכיות שב4,III. הסתירה מראה שקיים $Q'S' \equiv Q'R'$, מש"ל.



ציור 94

ב) משפט־החפיפה „השני" (כלפי משולשים המתאימים זה לזה בצלע אחת ובשתי הזוויות שלידה).

ג) המשפט בדבר שויון הזוויות על־יד הבסיס במשולש שוה־שוקיים (בעזרת 4,III ו 5).

ד) המשפטים על חפיפות הזוויות הצמודות לזוויות חופפות, חפיפותן של זוויות קדקדיות ומציאותה של זווית ישרה (כלומר, של זווית החופפת על הזווית הצמודה).

ה) הסימטריה והטרַנסיטיביות [2] של יחס־החפיפה בין זוויות, וחיבור זוויות וחיסורן (במובן של 3,III). חלק מדברים אלה מסתמך על המשפט ו).

ו) משפט־החפיפה „השלישי" (כלפי משולשים המתאימים זה לזה בשלש צלעותיהם).

ז) סידור הקטעים וסידור הזוויות לפי גדלם, במובן של יחס סודר בעל התכונות הרגילות: בעיקר, שיחס־הסדר הוא אַסימטרי וטרַנסיטיבי, ושמשני קטעים או זוויות לא־חופפים אחד קטן מחברו.

ח) המשפט האומר, שכל שתי זוויות ישרות חופפות זו על זו. (כפי שנאמר בעמ' 161, נמצאת טענה זו אצל אבקלידס בין האכסיומות.)

הוכחה: זווית ישרה מוגדרת כזווית החופפת על הזווית הצמודה לה. תהיינה הזוויות $\alpha = \sphericalangle(a,c)$ ו $\beta = \sphericalangle(b,c)$ צמודות זו לזו, וכן α' ו β', ויהי $\alpha \equiv \beta$, $\alpha' \equiv \beta'$ (ציור 95).

1. ברור שמותר להניח ש S' נמצאת בין Q' ו R'.

2. תחילה דרש הילברט תכונה זו ע"י אכסיומה. A. Rosenthal הוכיח אותה ב 1911 (בכרך 71 של ה Math. Annalen). הוא נתן גם את צורתה הפשוטה הנוכחית לאכסיומה I, 4 (בכרך 69 של אותו כתב־עת, 1910).

כדי להוכיח את טענתנו דרך שלילה, נניח שאין α' חופפת על α. נקצה את α' מ a לאותו עבר שבו חל c; לפי הנחתנו נקבל חצי־קרן c^* השונה מ c. מספיק לדון באחד משני המקרים האפשריים: c^* משתרע לתוך α או לתוך β; המקרה השני מביא לידי שקלא וטריא דומה לגמרי לראשון.

נניח אפוא, ש c^* משתרע לתוך α כמו בציור 95. במקרה זה קיים:

$$\sphericalangle(a, c^*) < \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \beta < \sphericalangle(b, c^*).$$

לפי ז) דלעיל יוצא מכאן:

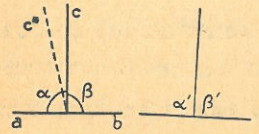
$$(1) \quad \sphericalangle(a, c^*) < \sphericalangle(b, c^*).$$

מאידך היתה הנחתנו גוררת לפי ד) את יחסי החפיפה:

$$\sphericalangle(a, c^*) \equiv \alpha', \quad \alpha' \equiv \beta', \quad \beta' \equiv \sphericalangle(b, c^*);$$

מזה נובע:

$$(2) \quad \sphericalangle(a, c^*) \equiv \sphericalangle(b, c^*).$$



ציור 95

הסתירה בין (1) ל(2) מראה, שהנחתנו כאילו הזוויות α ו α' אינן חופפות לא היתה נכונה; מש"ל.

ט) המשפט האומר: כל זווית חיצונית של משולש גדולה מכל אחת משתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה. הוכחתו של משפט יסודי זה נמצאת במילואים לחלק החמישי, מס. ל).

י) המשפט הקובע שבמשולש נמצאת מול צלע גדולה יותר גם זווית גדולה יותר.

יא) האפשרות לחצות כל קטע.

נוכל להשקיף על משפט זה משתי נקודות־מבט (הבאות כאחת). מצד אחד טוען הוא שבמערכת הנקודות שבקטע נמצא על כל פנים גם האמצע בין קצות הקטע – עובדה שאינה מובנת מאליה כל עיקר, כל עוד אין בידינו טענות של רציפות (אכסיומות V). מצד שני קובע המשפט, שפעולות ההקצאה הכלולות ב 1,III ו 4 מספיקות כדי „לבנות" את הנקודה האמצעית בין קצות הקטע הנתון.

יב) האפשרות לחצות כל זווית.

בהקדימנו קצת את המאוחר נסכם ונגיד, שבצירוף האכסיומה IV דלהלן, אך ללא V (1 ו 2), יש לאל ידינו לבצע את הבניות הגיאומטריות הבאות: לקשר שתי נקודות בקו ישר (1,I ו2) ולבנות את נקודת החיתוך של שני ישרים שאינם מקבילים (IV); להקצות קטע (1,III); להקצות זווית (4,III), כלומר למתוח ישר החותך ישר נתון בנקודה נתונה לפי זווית נתונה. מלבד חציית קטעים וזוויות אפשר, על סמך הבניות הנ"ל והאכסיומה IV, גם למתוח ישר מקביל לישר נתון דרך נקודה נתונה, ולהעלות אנך על ישר נתון בנקודה נתונה [1].

1. אפשר להוכיח (השוה בפרק השביעי של ספרו של הילברט), שלשם בניות אלו יש צורך, נוסף על סרגל, רק במכשיר המאפשר להקצות קטע מסויים אחד („קטע־היחידה"), ולא במכשיר כללי כגון מחוגה.

אפשר עתה להכליל את יחס החפיפה לציורים כלליים (מוגבלים ע״י קטעים) במישור ובמרחב ולהוכיח את משפטי החפיפה הכלליים. הדבר המפתיע הוא (השוה בעמ׳ 405), שהאכסיומות III מספיקות לגבי תורת החפיפה בשלשה ממדים, אף שהן מכוונות לשני ממדים לכל היותר.

IV. מערכת רביעית: אכסיומת המקבילים[1].

במישור α יהיו נתונים ישר s ונקודה P שאינה חלה ב s (השוה בעמ׳ 373, ששם יש סימונים שונים). אם נמתח ב α ישר u העובר דרך P והחותך את s, וכן ישר t דרך P כזה ש u יחתוך את הישרים s ו t בזוויות „מתאימות״ חופפות, נסיק בנקל מן המשפט ט) בעמ׳ 413, שאין לישרים s ו t כל נקודה משותפת. בקיצור: דרך נקודה מחוץ לישר s אפשר תמיד להעביר, במישור הקבוע ע״י שניהם, ישר שאינו חותך את s. בהתאם למה שהוסבר ב §2 נדרוש, נוסף על עובדה זו:

IV (אכסיומת המקבילים). אם ניתן ישר s ונקודה P מחוצה ל s, יש במישור הקבוע ע״י s ו P לכל היותר ישר אחד העובר דרך P ואינו חותך את s.

משמעותה, חשיבותה ואי־תלותה של אכסיומה אבקלידית זו (השוה בעמ׳ 161/2), המבטיחה מציאותו של מקביל אחד ויחיד, הובררו די צרכן ב־§§2 ו 3; יודגש, שגם IV היא אכסיומה מישורית בלבד. היא שקולה כנגד הדרישה הבאה: כל שני ישרים של מישור מסויים, שאינם חותכים ישר שלישי של אותו מישור, גם אינם חותכים זה את זה. (השוה בעמ׳ 366.)

בין המסקנות הנובעות מ IV על־סמך האכסיומות הקודמות נזכיר:

א) המשפט על חפיפת הזוויות „המתחלפות״ וה„מתאימות״ הנוצרות בחתוך ישר שני מקבילים.

ב) המשפט הקובע שסכום הזוויות שבמשולש הוא 180^0. אולם כדי להוכיח מתוך משפט זה את אכסיומת המקבילים – כלומר, כדי להוכיח ששתי הטענות הן שקולות זו כנגד זו — נחוץ לצרף את אכסיומת ארכימדס (1,V).

ג) המשפטים הידועים על המעגל; בפרט בנית מעגל בעזרת שלש נקודות שאינן חלות בישר אחד, וחפיפות הזוויות ההיקפיות שמעל לאותו המיתר.

V. מערכת חמישית: אכסיומות הרציפות (1—2).

יכול להתקבל הרושם כאילו האכסיומות I—IV בלבד מספיקות לבנית הגיאומטריה האבקלידית הרגילה. ואולם אין הדבר כך: יש צורך בדרישות נוספות בדבר רציפות המרחב. כבר בתקופה קדומה למדי הכירו

1. השוה: דבשה אמירה, גיאומטריה חלק א׳ (תל אביב תרצ״ח), פרק ח.

היוונים (השוה בעמ׳ 165) שאכסיומות מן הסוג המתואר עד כאן אינן מוציאות מגדר האפשרות את מציאותם של שני גדלים גיאומטריים – למשל, של שני קטעים – שאחד מהם גדול לאינסוף ביחס לחברו (וממילא השני קטן לאינסוף ביחס לראשון). Veronese היה הראשון שבנה לפי שיטה גיאומטרית־ממש ובצורה מפורטת, אף כי לא משוכללת, מערכת של נקודות, קטעים וכו׳ שבה מתגשמת אפשרות זו. באופן חשבוני אפשר להגשים את הרעיון ללא כל קושי מתוך סיפוח „משתנה״ x (ביתר דיוק: גודל לא־מסויים x; השוה I,246, הערה 5) למערכת המספרים הממשיים[1] (על זוגותיהם ושלישיותיהם), באופן שלא רק היחידה 1 כי אם גם כל „כפולותיה״ (כלומר, כל המספרים הטבעיים) נחשבים קטנים מ x. לפיכך, בחברנו מספר ממשי חיובי a אל עצמו כמה פעמים שנרצה, לא נגיע לעולם עד x; x הוא „גדול לאינסוף״ ביחס ל 1 או לכל מספר אחר. במערכת כזו אין המספרים יכולים לשמש מכשיר מתאים למדידה. (השוה מה שנאמר על נושא זה ב I, 169—171.)

כדי להוציא אפשרות כזו נדרוש:

V, 1 (אכסיומת ארכימידס, או אכסיומת המדידה). אם ניתנים שני קטעים אילו שהם[2] $\overline{PQ}$ ו $\overline{AB}$, חלות בישר PQ מספר סופי (n) של נקודות רצופות P_1, P_2, ..., P_n כך שקיים:

א) כל אחד מן הקטעים $\overline{PP_1}$ ו $\overline{P_{k-1}P_k}$ ($k=2$, 3, ..., n) חופף על $\overline{AB}$,

ב) הנקודה Q נמצאת בין P ו P_n. (השוה בעמ׳ 282.)

במהדורה הראשונה (1899) של ספרו על יסודות הגיאומטריה סיים בזה הילברט את שורת האכסיומות. אולם חיש מהר הכיר בצורך להוסיף אכסיומת רציפות שניה כדי להבטיח למערכת של הנקודות (ושל שאר היצירים הגיאומטריים) אותה שלימות שיש למערכת המספרים הממשיים, והמתבטאת בעקרונות של דידיקינד או של קנטור (כרך ראשון, פרק ששי). קל לציין את כוון המחשבה, המראה כי שלימות זו חסרה עדיין בבנין הגיאומטרי המובטח על־סמך האכסיומות I—IV ו V,1.

לשם זה נזכור איך יצרנו ב §3 של הפרק החמישי תבנית (מוֹדֶל) אריתמיטית לגיאומטריה. נדמה בנפשנו לרגע כאילו השתמשנו בתבנית זו במספרים רציונליים בלבד, ולא בכל המספרים הממשיים. תבנית מצומצמת כזו לא תספיק כדי לאפשר את כל היחסים ופעולות־הבניה המתבטאים באכסיומות I—III. דרך פשוטה ביותר לראות זאת ללא חשבונות היא לשים לב

1. כפי שיתברר מיד, אין צרך בכל המספרים הממשיים אלא מספיקה „הרחבה אלגברית״ ידועה של שדה המספרים הרציונליים. (הש׳ה I, 194.)

2. לנוחיות הקורא נוסיף שהכוונה היא: אפילו יהא $\overline{AB}$ קטן מ $\overline{PQ}$, וביתר הדגשה: קטן מאד בהשואה ל $\overline{PQ}$.

לכך, שיחס החפיפה שקול כנגד תנועה במרחב (עיין בפרק הששי). והנה כבר סיבובה של נקודה סביב נקודה קבועה במישור דורשת שימוש ברוחק בין הנקודות. אם אחת מהנקודות היא $(0,0)$ והשניה (x,y), דרוש לנו הרוחק

$$\sqrt{x^2+y^2} = x \cdot \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

מאידך מראה בדיקה קפדנית של האכסיומות שאין צרך בפעולות לא־רציונליות נוספות. מתוך ביצוע מפורט של הפרוגרמה שניתנה כאן יוצא אפוא: נבנה מערכת מסויימת של מספרים ממשיים — ביתר דיוק: שדה מסוים F של מספרים אלגבריים ממשיים (עמ׳ 4) — מתוך צאתנו מהמספרים הרציונליים (או אפילו מן המספר 1 בלבד) ומתוך ביצוע־ללא־הגבלה של ארבע פעולות־החשבון הרציונליות והוצאת השורש הריבועי בצורה הפרוטה $\sqrt{1+z^2}$. (הכוונה לערכו הלא־שלילי של השורש הריבועי.) אם נצא, בהתאם לכוון המסומן בסוף ה§ 3 של הפרק החמישי, מן השלישיות (a,b,c) של מספרים מתוך F כ„נקודות”, ואם נגדיר את המושגים „ישר” ו„מישור” ואת חמשת היחסים הראשוניים המופיעים באכסיומות I–III בצורה מתאימה, נקבל בנין „גיאומטרי” הממלא את כל האכסיומות I–IV ו1.V.

ואולם אין זה הבנין הגיאומטרי שאנו רגילים בו. למשל, אין בו שתי נקודות, שהרוחק ביניהן שוה ל $\sqrt[3]{2}$, או שוה להיקפו של מעגל בעל המחוג 1. משום כך הוסיף הילברט על האכסיומות הנ״ל את הדרישה הבאה, המשכללת את בנין הגיאומטריה:

V, 2 (אכסיומת השלימות). נקודותיו של קו ישר יוצרות מערכת שאי־אפשר להרחיבה הרחבה נוספת בלא לפגוע בתקפן של האכסיומות I,1–2; II,1–3; III,1; V,1.

לשון אחר: עלינו לקחת את המושג „נקודה של ישר” במובן המקיף ביותר, המאפשר לקיים עוד במשמעותן הקודמת (לגבי היחסים הראשוניים) אכסיומות אלו: אכסיומות החילה והסדר הקוויות, אכסיומת החפיפה הראשונה, אכסיומת ארכימדס. משמעותו של דבר היא, שצירופן של נקודות נוספות אל מערכת „שלימה” זו היה מביא בהכרח לידי ביטולה של (לפחות) אחת מאכסיומות אלו. הדבר המפליא הוא שיש בכלל מערכת שלימה; לשון אחר: שהאכסיומה 2V אינה מכילה סתירה בתוך עצמה. עד כמה אין הדבר מובן מאליו מראה העובדה, שהוויתור על אכסיומת ארכימדס היה מאפשר לנו להרחיב ע״י צירוף נקודות חדשות כל מערכת הממלאת את שאר האכסיומות; כלומר, היה הופך את האכסימה 2,V לבעלת סתירה.

דרך אריתמיטית לשם מילוייה של האכסיומה 2,V — ע״י החלפת השדה F בשדה כל המספרים הממשיים — תסומן במלואים לחלק החמישי, מס. לא).

אכסיומת השלימות שונה מכל שאר האכסיומות שקדמוה, ובדרך כלל מהאכסיומות הרגילות במתימטיקה, הואיל ולתוכה נכנסים לא רק העצמים והיחסים של המקצוע הנידון כי אם גם האכסיומות עצמן.

אין בכך קושי להוכיח עתה, ש„השלימות” הנדונה קיימת, אחרי מילוי כל האכסיומות, לא רק בממד אחד (כפי שנדרש ב2,V) כי אם במרחב התלת־ממדי כולו; כלומר, כלפי כל האכסיומות I עד 1,V. חשיבות יתירה נודעת לכך שנתכוון לאכסיומות כולן. אם בממד אחד יש תפקיד מכריע לגבי השלימות לאכסיומת ארכימידס, הרי בדרך כלל יש לשים לב גם לאכסיומות אחרות בקשר לבעית השלימות. באמת ראינו ב§1, שהוויתור על האכסיומה 7,I גורר אחריו בודאי אי־אפשרות למלא את דרישת השלימות (השוה בעמ׳ 405); הלא נוכל לצרף לשלשת ממדי המרחב ממדים נוספים ללא הגבלה ולהרחיב בדרך זו את בנין הגיאומטריה לאין קץ.

עד להילברט היה נהוג להשתמש באכסיומת דידיקינד (עמ׳ 415) כאכסיומה (היחידה) של הרציפות. מלבד הבדלים עקרוניים בין שתי גישות אלה, הרי ממאמר שהופיע עתה[1] מתבררת עובדה מפתעת זו: אם נדרוש רציפות בצורה שאינה מסתמכת על חפיפה — למשל לפי דידיקינד וללא אכסיומת ארכימידס — אפשר להוכיח בעזרת אכסיומות החילה (המישוריים), הסדר והרציפות, ללא אכסיומה של חפיפה, שיש במישור ישרים שאין להם נקודה משותפת (עמ׳ 414). אך הוויתור על אכסיומות החפיפה והרציפות גם יחד פותח פתח לאפשרות שכל שני ישרים נחתכים.

קיימות בעיות מעמיקות אחרות לגבי אי־תלותן של האכסיומות השונות וכן לגבי נחיצותה של אכסיומה זו או אחרת לשם בנית חלקים מסויימים מתוך הגיאומטריה או לשם הוכחת משפטים מסויימים. אחדות מבעיות אלו התעוררו בסעיפים הקודמים ובפרקים החמישי והששי. נדון בשאלות מסוג זה בהיקף רחב יותר בכרך־ההשלמה, שבו ינתן תיאור לביסוס המתימטיקה בכללה על יסודות מוצקים.

1. **C. M. Fulton**: A theorem on parallels. *Proceed. of the Amer. Math. Society*, vol. 7, pp. 1107/8. 1956.

מלואים לחלק החמישי (פרקים ז' ח').

טו) טיפוס־הסדר של הרצף הקווי. (מלואים לעמ' 304)

ראינו בעמ' 303, שהרצף הפתוח C (למשל, בין 0 ו 1) מקיים את שלשת התנאים שנוסחו שם; בפרט את התנאי 3) לגבי הקבוצה R של כל הנקודות הרציונליות בין 0 ו 1, שהיא קבוצה חלקית של C. כדי להוכיח את המשפט מעמ' 304, עלינו להראות שיש העתק דומה בין הרצף C לבין כל קבוצה סדורה D, המקיימת אף היא את שלשת התנאים שבמשפט; בפרט, את התנאי 3) לגבי קבוצה חלקית S של D.

אם נתונות קבוצות D ו S כנ"ל, הרי S היא קבוצה פתוחה (ללא איבר ראשון ואחרון), כפי שיוצא מהתנאים 1) ו 3). מלבד זה S היא גם קבוצה צפופה (עמ' 93/4); נסיק זאת מהתנאי 3) בקחתנו את שני האיברים הנדונים של D בפרט כאיברי S. הקבוצה S מקיימת אפוא את שלשת התנאים שבמשפט מעמ' 94. לפיכך יש לה טיפוס־הסדר η; כלומר, יש העתק דומה בין הקבוצה S לבין הקבוצה R של נקודות רציונליות. נחזיק בהעתק דומה מסויים (איזה שהוא) Φ בין S ל R. Φ מתאים באופן חד־חד־ערכי אותם איברי D, השייכים לקבוצה החלקית S, לנקודות ידועות של C, והן הנקודות הנמצאות ב R.

כדי להתאים את שאר איברי D לנקודות הלא־רציונליות של הרצף C, נקח איזה איבר שהוא d של D שאינו שייך ל S. נסתכל בחתך בתוך S, שמחלקתו התחתונה מכילה את כל איברי S הקודמים ל d בקבוצה הסדורה D. בנות־זוגם של אותם איברי S לפי ההעתק Φ הן נקודות מסוימות x של R. נבנה עתה את החתך ב C, שמחלקתו התחתונה מכילה: ראשית, את כל הנקודות הללו x של R, ושנית, את כל נקודות הרצף C הקודמות (ב C) לנקודות x. לפי תורת המספרים הממשיים (כרך ראשון, פרק ששי, §2) קובע החתך זה ב C באופן חד־ערכי נקודה מסויימת אירציונלית c של C, שהיא, אגב, הנקודה הראשונה במחלקה העליונה של אותו חתך. נתאים את הנקודה c לאיבר d של D; כשם ש d אינו שייך ל S, כך גם c אינו נמצא ב R.

ההתאמה שבנינוה בין כל איברי D לנקודות מסויימות של הרצף C מרחיקה לכת: היא מתאימה באופן חד־חד־ערכי את כל איברי D לכל איברי C. כדי להוכיח זאת, יש לבצע את ההתאמה בכוון הפוך, תוך יציאה מן הרצף C; כאן יש להסתמך על התנאי 2), המבטיח – יחד עם הצפיפות, הנובעת מ 3) – שכל חתך ב D קובע איבר אחד ויחיד של D. (מחלקתו התחתונה של החתך הנידון מכילה, יחד עם איברים ידועים של S, את כל איברי D הקודמים ב D לאותם

איברי S.) הקורא יבצע בנקל את בנית ההתאמה בכוון ההפוך ויוכיח, שההעתק המבוצע הוא גם העתק דומה בין D ל C; בכך ישלים את הוכחת המשפט שלפנינו.

טז) בניה גיאומטרית לעקום העובר דרך כל נקודותיו של ריבוע (עקום־פיאָנוֹ). (מלואים לעמ' 307)

בנייתו של הילברט (עמ' 307) תנתן לקמן בתיאורו הנוח של L. Bieberbach. העקום שנבנהו כאן מהווה גם המחשה גיאומטרית לפונקציה שהיא רציפה בכל מקום של ריוח מסויים ואינה גזירה בשום מקום של הריוח. (בניה אנליטית לפונקציה כזו ניתנה ב I,349.) נסתפק בסקירה למהלך המחשבה, שתאפשר לקורא המתקדם להשלים את הפרטים החסרים. נתאר את העקום המבוקש במישור השעורים x,y בעזרת „תיאור־מיצד" (פָּרָאמֶטרי):

$$x=f(t), \qquad y=g(t);$$

כלומר, בצורה המתאימה לכל ערך t מתוך הריוח הסגור מ 0 עד 1 באופן חד־ערכי את שעורי הנקודה המתאימה (x,y) של העקום בעזרת פונקציות f ו g. בפרט תהיינה הפונקציות f ו g בעלות התכונה, שגם ערכי x ו y יעברו על הריוח מ 0 עד 1; לאמור: כל הנקודות (x,y) נמצאות בריבוע־היחידה.

ב I, 126 למדנו להגדיר את המספר הממשי כסידרת־רווחים, באופן שכל ריוח נכלל בתוך הריוח הקודם לו, ושאורך הרווחים הולך ומתקרב ל 0. בביטוי הסתכלותי אומרים: המספר הממשי מתואר כנקודה „הפנימית" של נירתוק־רווחים. התברר שם, שבפרט התיאור כשבר עשרוני עשוי להיתפס כנירתוק מסוג כזה (I, 136/7), ושעובדה זו אינה תלויה בכך, שהמספר 10 דוקא (שבר עשרוני) נבחר כמספר היסודי (I,141).

כשם שהנקודות בקו ישר (הניתנות לתיאור ע"י מספרים ממשיים) מופיעות בדרך זו כנירתוקי־רווחים, כך תופענה הנקודות במישור (המתוארות ע"י זוגות־מספרים) כנירתוקי־ריבועים (או מלבנים); הדבר מובן מאליו על פי תפיסת הגיאומטריה האנליטית.

ועתה נחלק את הריוח מ 0 עד 1 לתשעה חלקים שוים ונסמנם – למשל לפי הסדר משמאל לימין – ב 1, 2, ..., 9. כן נחלק כל אחד מן הרווחים החלקיים הללו לתשעה חלקים שוים, בסמננו גם חלקים אלה מן „הסדר השני" במספרים מ 1 עד 9. נמשיך כך ללא קץ. אורך הרווחים שבחילוק הראשון הוא $\frac{1}{9}$, ובחילוק ה־n־י $\left(\frac{1}{9}\right)^n$. כל נקודה של הריוח מצויינת בשלימות ע"י סידרה שאיבריה הם מספרי כל הרווחים החלקיים, בעלי הסדרים 1, 2, ..., שבתוכם נמצאת הנקודה; אך לא כנגד כל נקודה יש רק תיאור אחד כזה. עובדות אלו מובנות הן מאליהן למי שזוכר את תיאור המספרים

הממשיים כשברים עשרוניים; עליו רק להחליף שברים אלה בשברים תשעוניים (בעלי המספר היסודי 9).[1]

כמו כן נחלק את ריבוע־היחידה לתשעה ריבועים חלקיים (בעלי צלע שארכה $\frac{1}{3}$); נסדרם ונסמנם שוב ע״י המספרים 1 עד 9, אך בתנאי ששני ריבועים בעלי מספרים רצופים יהיו גובלים זה עם זה לאורך צלע משותפת; למשל כמו בציור 96. נמשיך ונחלק כל ריבוע חלקי לתשעה ריבועים שוים כנ״ל, בעלי צלעות שארכן $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; סידורם וסימונם יבוצע כבצעד הקודם, ומתוך דאגה נוספת לכך שהריבוע החלקי (מן הסדר 2) האחרון של הריבוע k מן הסדר 1, יהיה גובל כנ״ל עם הריבוע החלקי הראשון של הריבוע $k+1$ מן הסדר 1. בצעד ה־n־י יתן תהליך זה ריבועים, שאורך צלעותיהם הוא $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. אם נראה, כמו נקודות הריוח, גם כל נקודה של ריבוע־היחידה כנירתוק לגבי סידרה של ריבועים חלקיים (בעלי הסדרים 1, 2, ...), יוצא שגם כאן אפשר לציין בשלימות כל נקודה של הריבוע ע״י סידרת מספרים המותאמים לריבועים החלקיים של נירתוק ידוע.

3	4	9
2	5	8
1	6	7

ציור 96

ההתאמה המבוקשת של נקודות הריבוע לנקודות הריוח תבוצע עתה לפי כלל פשוט זה: לנקודה מסויימת של הריוח, הנתונה כנ״ל ע״י סידרה של מספרים מתוך המערכת (1,2,...,9), תותאם נקודת הריבוע המצויינת ע״י אותה הסידרה של מספרים.

כלל זה מגדיר התאמה חד־ערכית. אמנם יש נקודות בריוח שאפשר להגדירן בשני אופנים שונים ע״י סידרה כנ״ל, כפי שמלמד המשפט ב I, 141;[2] הנקודות הנדונות הן הנקודות שהן עצמן משמשות נקודות־חילוק במשך תהליך־החילוק. אולם קל לראות, שכנגד שתי הגדרות שונות כאלה נקבל בריבוע שתי הגדרות המציינות אף הן אותה הנקודה בריבוע. כדי לבאר את הדבר, מספיק לתת דוגמה פרוטה היוצאת ללמד על הכלל כולו.

אותה הנקודה של הריוח מסומנת ע״י שתי הסדרות

$$(2, 4, 6, 9, 9, 9, \ldots), \quad (2, 4, 7, 1, 1, 1, \ldots).$$

1. יש הבדל חיצוני ומחוסר־ערך בכך שאצל השברים התשעוניים עוברות הספרות על המערכת (0,1,...,8), ואילו כאן עומדת במקומה המערכת (1,2,...,9).

2. לגבי השברים העשרוניים מסומן, למשל, אותו המספר ע״י 0.247 וע״י 0.246999...; וכן מתאים לכל שבר עשרוני סופי, פרט ל 0, שבר עשרוני בעל המחזור $\bar{9}$ המציין אף הוא אותו מספר. כאן עומדות במקום השברים „הסופיים" הסדרות בעלות המחזור $\bar{1}$, במקום השברים בעלי המחזור $\bar{9}$ שוב (אך מטעם אחר) הסדרות בעלות המחזור $\bar{9}$.

הבה ניצור לגבי כל אחת משתי סדרות אלה את הנקודות המותאמות בריבוע! כנגד ההתחלה 2, 4 עלינו לבצע אותו החילוק בשני המקרים. אחר כך יתנו 6 ו 7 ריבועים חלקיים שונים אך שכנים. מכאן ואילך נקבל אחרי 6 תמיד, לגבי כל סדר, את הריבוע החלקי האחרון, אחרי 7 תמיד את הריבוע החלקי הראשון; כלומר, לפי כלל החילוק נקבל תמיד שני ריבועים חלקיים הגובלים זה עם זה. לכן מתלכדות הנקודות המוגדרות ע״י שתי הסדרות. כיוצא בזה לגבי כל שתי סדרות שונות הקובעות אותה הנקודה בריוח.

לעומת זאת אין ההתאמה שלפנינו חד־חד־ערכית. לשון אחר: לא לכל נקודה בריבוע מותאמת נקודה יחידה של הריוח. הדבר נובע מן ההבדל הגיאומטרי בין נקודות־החילוק בריוח ובריבוע. שכן כל נקודה בריבוע, המופיעה בתהליך פעם כנקודת־חילוק (ואינה נמצאת בצלעות הריבוע המקורי), הרי היא הנקודה „הפנימית" לארבעה נירתוקים שונים; אך ארבעת אלה אינם יכולים להיות מותאמים לאותה הנקודה בריוח, מפני ששם כל נקודת־חילוק משותפת היא לשני נירתוקים בלבד. בהתאם לכך x וy הן פונקציות חד־ערכיות של המיצד t, אבל אין t פונקציה חד־ערכית של הזוג (x, y).

לבסוף נוכיח, ש$f(t)$ ו$g(t)$ הן פונקציות רציפות. די לבצע את ההוכחה לגבי $f(t)$; הדרך לגבי $g(t)$ היא אנלוגית.

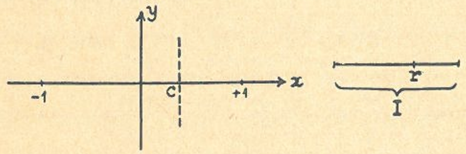
בקחתנו שני רווחים חלקיים סמוכים, מבין אלה המתקבלים בצעד ה־n־י של חילוק הריוח, ובצרפנו אותם יחד, נקבל ריוח R שארכו $\frac{2}{9^n}$. נקודות הריבוע המותאמות לנקודות שבריוח R שייכות לשני ריבועים חלקיים מן הצעד ה־n־י הגובלים זה עם זה. ההפרש בין הפסוקים x של שתי נקודות באותם שני ריבועים אינו יכול אפוא להיות גדול מ$\frac{2}{3^n}$; לאמור: אם יסמנו t_0 ו$t_0 + h$ שני מקומות בתוך[1] R, קיים היחס $|f(t_0 + h) - f(t_0)| < \frac{2}{3^n}$. מכיון שאפשר להקטין את ערכו של $\frac{2}{3^n}$ ככל הרצוי ע״י הגדלת n במידה מספיקה, מציין אי־השויון האחרון את העובדה שערכיו של $x = f(t)$, המותאמים לשתי נקודות t של ריוח־היחידה, קרובים זה לזה בכל מידה רצויה, אם שתי הנקודות t הן קרובות במידה מספיקה; כלומר, $x(t)$ היא פונקציה רציפה (I, 298). בכך נשלמה ההוכחה.

קל לראות, שהפונקציות $f(t)$ ו$g(t)$ אינן גזירות לפי t בשום ריוח חלקי של ערכי t. קשה יותר להוכיח שאין להם נגזרת אפילו בשום מקום, כפי שצויין לעיל. הואיל ואין הדבר נוגע לנושא שלפנינו, נוותר על ההוכחות. (השוה ב I, 350.)

1. די אם אחד המקומות נמצא בפנים R; במקרה זה רשאי השני להיות קצהו האחד של R. רק אין להרשות ששניהם יהיו שני קצותיו של R; אחרת היה מתחלף הסימן $<$ בסימן $=$.

יז) הוכחת המשפט: ריבוע אינו הומיומורפי לקטע.
(מלואים לעמ' 308)

נוכיח את המשפט בדרך־השלילה. נניח אפוא את קיומה של פונקציה $f(x,y)$, שהיא מוגדרת בריבוע הסגור $1 \geq \frac{x}{y} \geq -1$ ורציפה[1] ב x ו y, שתיצור העתק (התאמה חד־חד־ערכית) בין הריבוע ההוא לבין ריוח סגור מסויים I[2]. (השוה בציור 97.)



ציור 97

בקחתנו y קבוע ושוה ל 0, נקבל פונקציה רציפה של משתנה אחד $f(x,0) = g(x)$. נסמן $g(-1) = a$, $g(1) = b$; לפי ההנחה על קיום העתק, הרי $a \neq b$. כעבור x על כל הערכים מ (-1) עד 1, תקבל הפונקציה $g(x)$ את כל הערכים בין a ל b, בהתאם למשפט 1 ב I,299. לפיכך, על סמך תכונת ההעתק; לא תקבל $f(x,y)$ כנגד ערכי y השונים מ 0 שום ערך מתוך הריוח (a, b).

המשך ההוכחה מבוצע לפי רעיון פשוט זה: יהי $x = c$ מקום שבו מקבלת $g(x)$ ערך מסויים $g(c) = f(c, 0)$ הנמצא בין a ל b. הואיל ו $f(x,y)$ היא פונקציה רציפה, יתקבלו כערכי $f(c,y)$ ערכים קרובים ל $g(c)$ (ולכן ערכים הנמצאים גם הם בין a ל b), אם y שונה הוא מ 0 אך קרוב ל 0. והנה דבר זה סותר את המסקנה (המפוזרת) שבסוף הקטע הקודם.

נבאר רעיון זה ביתר פירוט! נניח ש c הוא ערך (על־פי ההנחה אפילו אפשר לומר: הערך) בין -1 ל 1, שלגביו קיים $g(c) = \frac{a+b}{2}$. במקרה זה תהיה $h(y) = f(c,y)$ פונקציה רציפה של y המקבלת במקום $y = 0$ את הערך $h(0) = g(c) = \frac{a+b}{2}$. מחמת רציפותה של $h(y)$ נשארים אפוא ערכי הפונקציה $h(y)$ בתוך הריוח מ a עד b, כל עוד ישאר y קרוב ל 0 במידה מספיקה אף כי

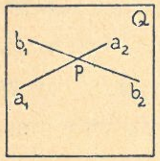
1. למען אלה הבקיאים במושג הרציפות אפשר להוסיף ולדייק: מספיק שהפונקציה f תהיה רציפה בכל אחד מן המשתנים אם השני נשאר קבוע, ואין צרך לדרוש שתהיה פונקציה רציפה של שני גורמיה כאחד.

2. כפי שיתברר ממהלך ההוכחה, נוכל לקחת כל ריוח המקיף את הריוח הסגור בין a ו b אם $a = f(-1,0)$ ו $b = f(1,0)$.

שונה מ 0. ברם דבר זה סותר את הטענה המפוזרת דלעיל, שעל־פיה מקבלת $f(x.y)$ ערכים בין a ל b רק אם $y = 0$.

הסתירה מראה, שאין העתק הומיומורפי בין הריבוע והריוח, מש"ל.

נצרף להוכחה זו קווים עיקריים של הוכחה גיאומטרית טהורה! נניח שוב את קיומו של העתק רציף Φ בין נקודותיו של ריבוע Q לבין נקודותיו של ריוח I. בתוך הריבוע (השוה בציור 98) נמתח שני קטעים $\overline{a_1a_2}$ ו $\overline{b_1b_2}$ הנחתכים בנקודה p בפנים הריבוע. מתוך רציפותו (הדו־צדדית) של ההעתק Φ יוצא, שתמונותיהם של הקטעים $\overline{a_1p}$ ו $\overline{a_2p}$ הן קטעים ב I, כלומר רווחים חלקיים של I בעלי נקודה משותפת אחת ויחידה r, שהיא בת־זוגה של p. התמונות הנ"ל הן אפוא רווחים חלקיים של I הנפגשים בנקודה r שבפנים I, ואין להם נקודה משותפת אחרת. מאידך נגיע לאותה המסקנה בצאתנו מן הקטעים $\overline{b_1p}$ ו $\overline{b_2p}$ (תחת $\overline{a_1p}$ ו $\overline{a_2p}$); גם תמונותיהם הן שני רווחים חלקיים של I הנפגשים בנקודה אחת – וביתר דיוק: באותה הנקודה r, שהרי היא תמונת הנקודה p של Q. בכך הגענו לסתירה המבוקשת. כי על כן, על־סמך חד־חד־ערכיותו של ההעתק, יש לכל זוג מבין תמונות הקטעים $\overline{a_1p}$, $\overline{a_2p}$, $\overline{b_1p}$, $\overline{b_2p}$ רק הנקודה המשותפת היחידה r, שהיא תמונתה של p – ואילו לפי המסקנה שהגענו אליה היו לשנים מן הזוגות האלה אינסוף נקודות משותפות: סביבה (חד־צדדית) של r בקטע I.



ציור 98

ההוכחה אינה תלויה, כמובן, בכך שלקחנו כתחום הדו־ממדי ריבוע דוקא; גם מלבן, עיגול וכו' היו ממלאים את התפקיד, ועל פי הגדרות ושיטות עדינות יותר אפשר לקחת תחומים כלליים יותר. מאידך ניתנת ההוכחה שלפנינו גם להכללה בנוגע לממד; אילו לקחנו תחת הריבוע Q תחום בעל שלשה (ואף יותר) ממדים, לא היה צורך לשנות מאומה בשיטת ההוכחה – בתנאי ש I ישאר ריוח חד־ממדי.

יח) בעית הצבעים במרחב. (מלואים לעמ' 313)

הכללתה הטבעית של בעית הצבעים לשלשה ממדים מעוררת את השאלה: אם גוף (ז"א תחום תלת־ממדי) מפולג למערכת גופים חלקיים, כמה צבעים נחוצים לשם צביעת הגופים, בתנאי שצבעים שונים ניתנים לגופים בעלי תחום־מגע דו־ממדי משותף? רק גופים כאלה נחשבים כאן כ„שכנים", ולא גופים בעלי קו־מגע משותף או נקודות משותפות בלבד.

כבר פרידריק גותרי (עיין בעמ' 311) הכיר לדעת, שאין חסם למספר המבוקש. טיצה[1] נתן דוגמה כה פשוטה שאפשר להביאה בקיצור, ואפילו אין צורך בציור לשם כך.

1. A. Tietze: *Monatshefte f. Math. u. Physik*, vol. 16 (1905), p. 211.

נצא משכבה של n קורות (נסרים) המונחות במישור אחד, אשה על־יד אחותה, והמסומנות ב $1, 2, \ldots, n$; תהי, למשל, כל קורה מכוונת בקו צפון־דרום וכל אחת תהא בעלת אותו החתך הריבועי. מעל שכבה זו נניח שכבה שניה שוה, שקורותיה מסומנות ב $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}$, אך הן מכוונות בקו מזרח־מערב. לפי זה משיקה (נוגעת) כל קורה k של השכבה הראשונה לכל קורה $\bar{l}$ של השכבה השניה בשטח־מגע ריבועי. נקשור עתה קשר של קבע (למשל במסמרים) את הקורות 1 ו $\bar{1}$ בשטח המגע ביניהן, והן תחשבנה מעתה כגוף אחד; וכן לגבי הקורות 2 ו $\bar{2}, \ldots, n$ ו $\bar{n}$. נסמן את הגופים החדשים ב־$1^*, 2^*, \ldots, n^*$. לפי האמור לעיל משיק כל גוף k^* לכל גוף אחר l^* בשני שטחי מגע (לפחות), שהם שטחי המגע בין k ל $\bar{l}$ ובין l ל $\bar{k}$.

מערכת הגופים הזאת מכילה אפוא n גופים, ולכל אחד מהם יש תחום־מגע משותף עם כל אחר. מכיון שנוכל לקחת n גדול כרצוננו, הראינו שמספר הגופים ה„שכנים" במרחב עולה מעל לכל מספר; מש"ל.

באשר למרחבים בעלי יותר משלשה ממדים, הרי ברור שגם בהם קיימת אותה אי־חסימות.

יט) מספר הנקודות בעלות סדר אי־זוגי בבעית הגשרים. „אילני" קיילי. (מלואים לעמ' 315)

בעית הגשרים יוצאת, אם נתעלם מהתהוותה ההיסטורית, מתצורה שרירותית של קווים או „שבילים" במישור או במרחב, בעלת התכונה שמכל מקום באחד השבילים אפשר להגיע לכל מקום אחר דרך השבילים. בשם „נקודות" קראנו לאותם מקומות, שמהם אפשר להתקדם ביותר (או פחות) משני הכוונים הנתונים מאליהם בכל מקום (פנימי) של שביל מסויים; דהיינו, למקומות „משלבת" ולמקומות „קצה". קראנו למספר השבילים היוצאים מנקודה מסויימת בשם „סדר הנקודה"; הסדר גדול אפוא מ 2, פרט לנקודות הקצה שיש להן הסדר 1. תצורה שאין בה נקודות־קצה כל עיקר, מכונה בשם „תצורה סגורה".

אם נדייק ונציין בשם „שביל" קו מכל נקודה שהיא אל אחת משכנותיה בלבד, יהיה קל לקשור בנוסחה את מספר הנקודות והשבילים שבתצורה. לשם זה יסמן n_1 את מספרן של נקודות־הקצה, n_3 את מספר הנקודות בעלות הסדר 3, n_4 את מספר הנקודות בעלות הסדר 4 וכו', ויהא l הסדר הגבוה ביותר המופיע בתצורה. מנקודה בעלת הסדר k יוצאים k שבילים, אך כל שביל מופיע בחשבון זה פעמיים אצל שני קצותיו; לכן, אם p הוא מספר הנקודות ו q מספר השבילים שבתצורה, קיימים היחסים:

$$q = \frac{1}{2}\,(n_1 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + ln_l), \quad p = n_1 + n_3 + n_4 + \ldots + n_l.$$

הואיל ו q הוא על כל פנים מספר טבעי, קובע השויון השמאלי — כפי

שיוצא ע"י סילוק המחוברים המתיחסים אל נקודות בעלות סדר זוגי וסילוק הסכום $2n_3 + 4n_5 + \cdots$ — שהסכום $n_1 + n_3 + n_5 + \cdots$ הוא מספר זוגי. לאמור: מספר הנקודות בעלות סדר אי־זוגי הוא זוגי, מש"ל. (בתצורה סגורה קיים $n_1 = 0$.)

אפשר לתרגם הוכחה זו גם לשפה גיאומטרית טהורה. לשם כך נוח לדמות כאילו מלכתחילה היו השבילים נפרדים זה מזה, באופן שלכל אחד יש שתי נקודות־קצה. בחברנו את השבילים לתצורה שלפנינו, תבוטלנה נקודות־קצה ותווצרנה נקודות בעלות הסדרים 3, 4 וכו'. מכאן יגיע הקורא למסקנה דלעיל ללא קושי ניכר.

אפשר לייצג את מספר השבילים גם בצורה אחרת. שכן, אם יסומן הסדר של הנקודה m $(m = 1, 2, \ldots, p)$ ב s_m, קיים היחס:

$$q = \frac{1}{2}\,(s_1 + s_2 + \ldots + s_p).$$

נוסיף בקיצור, ללא פירוט שלם, את הרעיונות הבאים, שמקורם אצל קיילי[1] ושפותחו הלאה ע"י Sylvester ואחרים. (הם גם קשורים לנושא שבמספר כ) של המלואים.)

אפשר שסילוקו של שביל מסויים בתצורה יפריד את התצורה, באופן שלא תהיה עוד אפשרות להגיע מכל מקום שהוא בתצורה אל כל מקום אחר דרך השבילים; נקרא לשביל כזה בשם „גשר" של התצורה. סילוקו של גשר מפריד אפוא את התצורה לשתי תצורות נפרדות.

הבה נבחר ב„נקודה" שרירותית של התצורה! מבין השבילים היוצאים ממנה נסלק מספר גדול ככל האפשר, בתנאי שהתצורה לא תופרד. (אם שום גשר אינו יוצא מן הנקודה, נסלק אפוא את כל השבילים פרט לאחד.) נעבור דרך השביל(ים) הנותר(ים) אל כל נקודה שכינה ונחזור על תהליך הסילוק; וכן הלאה. אחרי מספר סופי של צעדי סילוק נקבל תחת התצורה המקורית תצורה שאמנם עודנה קשירה, באופן שאפשר לעבור מכל נקודה לכל נקודה אחרת, אך אינה מאפשרת סיבוב סגור המוביל בחזרה אל נקודת המוצא; כל סילוק נוסף יגרום להפרדת התצורה לשתים. תצורה כזו נקראת אילן. לא יקשה להווכח, שבמקרה זה יש תמיד $p-1$ שבילים בין p הנקודות שבתצורה. לפיכך המספר μ של השבילים שסולקו שוה ל $(q - p + 1)$. אף־על־פי שבדרך־כלל יש כמה אפנים שונים לצמצום תצורה נתונה עד היותה לאילן, מקבלים

1. מ 1857 ואילך; השוה למשל מאמריו של Cayley ב *Philos. Magaz.*, כרכים 13, 18, 47 (1857 – 1874), וב *American Journal of Mathem.*, כרך 4 (1881). המטרה המקורית היתה המחשה גיאומטרית לסידרה של תהליכי־גזירה; קיילי ואחרים נתנו גם שימושים לגבי נוסחות של תרכובות כימיות. כמו כן יש שימושים בתורת הזרם החשמלי. — השם tree (אילן) הוכנס ע"י קיילי.

תמיד אותו מספר $\mu = q - p + 1$ של שבילים מסולקים; וחילופו: אם מסלקים $q - p + 1$ שבילים ללא הפרדת התצורה לשתים, יווצר תמיד „אילן”.

נסיים בהערה זו: שביליה של תצורה סגורה, הן במישור הן במשטח עקום, מחלקים את תחום התצורה כולה (במישור או במשטח) למספר תחומים „אטומיים” שאינם מפולגים עוד ע״י שבילי התצורה. מתוך תהליך הסילוק המתואר בקטע הקודם, מצטמצם מספרם זה של התחומים האטומיים; ביתר דיוק: סילוקו של שביל אחד מקטין תמיד את מספר התחומים האטומיים ב 1. הואיל ויצירת „אילן” משמעותה: שלא נותר עוד כל תחום סגור, יוצא שמראש היו בתצורה הנתונה בדיוק $q - p + 1$ תחומים אטומיים. לאמור:

תצורה סגורה בת p נקודות ו q שבילים מכילה $q - p + 1$ תחומים סגורים, המוגבלים ע״י שבילי התצורה ואינם מתפלגים לתחומים חלקיים.

כ) הוכחתו של משפט הפיאונים של אוילר בעזרת תורת־האילנות. (מלואים לעמ׳ 323)

נוכל לקחת כתצורה המופיעה במשפט דלעיל כל פיאון של אוילר, בראותנו את קדקדיו כנקודות התצורה, את מקצועותיו כשביליה ואת פיאותיו כתחומים „האטומיים” הסגורים. אמנם גם כאן, כבעמ׳ 322, עלינו להוציא אחת מן הפיאות, כדי שנקבל – דרך עיוות טופולוגי – תצורה סגורה כנ״ל.

לפיכך, אם יסמנו Q, M, P את מספריהם של קדקדי הפיאון, של מקצועותיו ושל פיאותיו, יהא עלינו להכניס במשפט הקודם Q במקום p ו M במקום q; מאידך, מספר התחומים האטומיים הוא $P - 1$. המשפט הקודם מביע אפוא

$$P - 1 = M - Q + 1, \quad Q + P = M + 2,$$

והרי זהו משפטו של אוילר.

כא) דוגמה של פיאון חד־צדדי ומחוסר נפח. (מלואים לעמ׳ 332)

נצא מן התמְניון $ABCDEF$ (ציור 58 בעמ׳ 325) ונבחר מבין שמונת פיאותיו, שכולן משולשים, ארבע שאינן שכנות, דהיינו שאין להן מקצוע משותף, בעוד שהן נפגשות בקדקדים משותפים; למשל: EBC, CFD, ABF, AED. נוסיף לארבע פיאות אלו את שלש „הפיאות האֲלכסוֹניות” $ABCD$, $EBFD$, $AECF$. ע״י כך נוצר שבעוֹן (ז״א פיאון בן שבע פיאות) בעל אותם המקצועות כמו התמניון המקורי; שכן בכל מקצוע של התמניון נפגשות שתי פיאות שכנות של השבעון, המהוות בכל מקרה פיאה־מַמש של התמניון ופיאה אלכסונית של התמניון.

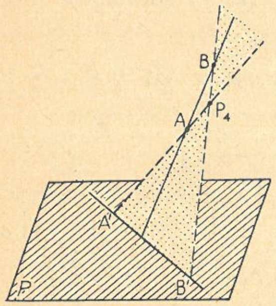
עד כאן נראה הדבר פשוט. אולם יש לציין – וזה מפתיע במקצת – שאין לתפוס את קרנזולי התמניון AC, BD, EF כמקצועות של השבעון; שהרי

בשבעון אין הפיאות האלכסוניות הנ״ל שכנות זו לזו. אין זאת אלא שהקרנזולים הללו הם קווים, שלארכם חודר השבעון אל עצמו. קל לראות מתוך המבחן העיוני שרמזנו לו בהערה בעמ׳ 328, שהשבעון הוא משטח חד־צדדי. בקיצור אפשר לציין את המבחן כך: אחרי שנקבעה באחת הפיאות באופן שרירותי מגמת ההקפה להיקף המצולע המגביל, יש לקבוע מכאן והלאה את המגמה בכל פיאה כך, שעוברים על מקצוע מסויים בשתי הפיאות, הנפגשות באותו מקצוע, לפי כוונים נגדיים זה לזה. בכל פיאון דו־צדדי אפשר לבצע קביעת מגמות בדרך זו, ועל פיו מוגדר נפח הפיאון. אולם אין הדבר אפשרי לגבי השבעון שלפנינו. אחרי קביעה שרירותית למגמת הפיאה AED, למשל, נקבע מגמות בשביל שכנותיה $EDFB$, ECB, $ABCD$ לפי הכלל דלעיל; אך בעשותנו זאת מתברר, שיש לעבור על המקצוע DA בשתי הפיאות השכנות AED ו$ABCD$ לפי אותו הכוון ולא לפי כוונים נגדיים. לפנינו אפוא משטח סגור חד־צדדי בצורת פיאון (שבעון) החודר אל עצמו ושאין לו נפח כל עִיקר.

פיאון זה תואר לראשונה ע״י C. Reinhardt[1] בשנת 1885. אכן כבר Möbius יצא במחקריו הראשונים על משטחים חד־צדדיים מן הפיאונים דוקא, בגלותו שהאפשרות של קביעת מגמה מסויימת באופן רציף בכל פיאות הפיאון תלויה בדבר, אם יש לו שני צדדים שונים.

כב) הוכחת קְויוּתו של המרחב התלת־ממדי R_3. (מלואים לעמ׳ 345)

לשם הוכחת המשפט 2 נסמן ב A וB שתי נקודות שונות במרחב $R_3 = [P, p_4]$; P מסמן כאן מרחב דו־ממדי (מישור), ו p_4 נקודה מחוץ ל P. כדי להראות שכל נקודות הישר AB חלות בR_3, נעמיד את הבעיה המרחבית על בעיות מישוריות ונסמוך פעמיים על דרישת קוויותו של המישור.



ציור 99

נטיל אפוא ממרכז־ההטלה p_4, בעזרת הישרים p_4A ו p_4B, את הנקודות A וB למישור P (עיין בציור 99)[2]; נסמן את ההיטלים (העקבות) ב A' ו B'. הישר $A'B'$ נמצא כולו במישור P על־פי קוויותו של המישור. ועתה נשים לב למישור $M = [A', B', p_4]$ הקבוע

1. Verhandl. der K. Sächsischen Gesellschaft der Wiss., Math.—Phys. Kl., vol. 37.

2. מובן שהישרים p_4A ו p_4B חותכים „בדרך־כלל” את המישור P; שהרי זהו מה שמביע את השתייכותן של הנקודות A ו B ל R_3, לפי בנית המרחב R_3. במקרה „היוצא מן הכלל”, שבו מקביל אחד הישרים לP, עלינו להשתמש בנקודה לא־אמיתית, דהיינו למשוך מקביל. גם במקרה זה יש לבצע את ההוכחה בצורה אנלוגית.

ע״י הישר $A'B'$ והנקודה p_4. אני טוען: הנקודות הנתונות A וB חלות במישור M של R_3.

ראשית, מישור זה שייך ל R_3; שהרי נקודותיו חלות בישרים המקשרים את p_4 לנקודות הישר $A'B'$, שהן נקודות של P. שנית, A חלה בישר p_4A', וכן B בישר p_4B'; לפיכך מכיל המישור M את הנקודות A וB.

יוצא־אפוא שלמישור M ולישר AB משותפות הנקודות A וB. לכן, בהתאם לקוויותו של המישור, חלות במישור הנ״ל כל נקודותיו של הישר AB; ומכיון שהמישור הנ״ל חל ב R_3, חלות כל נקודות הישר AB ב R_3; מש״ל.

כג) הוכחת קויותו של המרחב הארבע־ממדי R_4. (מלואים לעמ׳ 350)

קל להמחיש את ההוכחה הבאה למשפט 7, מכיון שאפשר לבצע גם אותה במישור; ואכן מהמרחב R_3 דרוש לנו ישר אחד בלבד. נכוון את ההוכחה בהקבלה להוכחה הקודמת, בשינויים קלים למדי. נוכל להשתמש כאן אף בציור 99 דלעיל, אלא שנמיר את הנקודה p_4 ב p_5.

לשם הוכחת המשפט 7 נסמן ב A וB שתי נקודות שונות במרחב $R_4 = [R_3, p_5]$. כדי להראות שכל נקודות הישר AB חלות ב R_4, נטיל ממרכז־ההטלה p_5, בעזרת הישרים p_5A וp_5B, את הנקודות A וB למרחב R_3. בטוי זה מוזר הוא, לכאורה. אך לאמיתו של דבר אינו רחוק מהטלת נקודות ממרכז ידוע אל מישור, כפי שעשינו זאת בהוכחה הקודמת; שהרי השתייכותן של A וB לR_4 – משמעותה לפי הגדרת המרחב R_4: לכל אחד מהישרים p_5A וp_5B יש נקודה משותפת עם R_3. (כמובן, נקודה אחת בלבד, בהתאם למשפט 5 בעמ׳ 349.) נקודות־חיתוך אלו של p_5A ושל p_5B עם R_3 הן „היטלי״ (או עקבות) הנקודות A וB ב R_3; נסמנן ב A' וB'[1]. המשך ההוכחה מבוצע מתוך ההנחה, שA' וB' הן נקודות אמיתיות; אם לאו, תימשך ההוכחה בצורה דומה.

הישר $A'B'$, המקשר שתי נקודות של R_3, חל כולו ב R_3 מחמת קוויותו של מרחב זה. לכן המישור $[A', B', p_5]$, הקבוע ע״י הישר $A'B'$ והנקודה p_5 שמחוצה לו, חל כולו ב R_4, באשר כל נקודות המישור חלות בישרים המקשרים את p_5 לנקודות של R_3 (דהיינו, של הישר $A'B'$). והנה במישור הנ״ל חלות גם הנקודות A וB, מחמת הימצאן בישרים p_5A' וp_5B'; לכן חל הישר AB כולו באותו מישור, על־סמך קוויותו של המישור. הישר AB חל אפוא במישור ידוע של R_4, מש״ל.

1. כאן, כבהוכחה הקודמת, יש להביא בחשבון גם את האפשרות שהנקודות A' ו B' מזדהות ולכן אינן קובעות ישר. ברם מקרה זה פשוט הוא ביותר. הלא פרושו שהנקודות p_5, A, B, A' $(=B')$ חלות בישר אחד; והרי נקודותיו של ישר זה, המקשר p_5 עם הנקודה A' של R_3, שייכות ל R_4 על פי עצם הגדרתו של מרחב זה.

כד) המרחב התלת־ממדי של R_4, המאונך לישר מסויים באחת מנקודות הישר. (מלואים לעמ׳ 356)

נקדים סקירה על הוכחת משפט ידוע מן הסטיריאומטריה (השוה עמ׳ 355). אם s הוא ישר של R_3 וp נקודה של s, נצא מאנך שרירותי n לs בנקודה p. זהו אמנם האנך היחיד לs בp, שהוא חל במישור הנקבע ע״י הישרים הנחתכים s וn. אך יש מישורים אחרים העוברים דרך s, ובכל אחד מהם יש אנך (יחיד) לs בp. אם n' אנך שני כזה, קובעים n וn' יחד מישור העובר דרך p. מוכיחים ביסודות הסטיריאומטריה: א) כל ישר העובר במישור זה דרך p, מאונך הוא לs; ב) כל אנך לs בp חל באותו מישור, הנקרא משום כך „המישור המאונך לs בנקודה p״.

התהליך להוכחת המשפט 9 בR_4 אנלוגי לגמרי וכאן יצויינו קוויה העיקריים בלבד. נניח שוב שנתונים ישר s של R_4 ונקודה p של s. נעביר מרחב תלת־ממדי R_3 „דרך s״; כלומר כך שR_3 מכיל את s. אין זה המרחב התלת־ממדי היחיד העובר דרך s; שהרי יש נקודות q של R_4 שאינן חלות בR_3 הנ״ל, והמישור דרך s ונקודה q כנ״ל, יחד עם נקודה מחוץ למישור זה, קובעים מרחב תלת־ממדי R_3' דרך s השונה מR_3. כך מתקבלים אינסוף מרחבים תלת־ממדיים שונים דרך s, כמו שיש בR_3 אינסוף מישורים דרך ישר נתון. לפי הנוסחה של עמ׳ 361 (עיין בדוגמה 4, עמ׳ 362) נחתכים כל שני מרחבים כאלה, R_3 וR_3', במישור מסויים, העובר כמובן דרך s.

נבנה בR_3 את המישור π דרך p המאונך לs (עיין לעיל), וכן בR_3' את המישור π' דרך p המאונך לs. אמנם שני המישורים האלה שונים הם, אך אינם מישורים „כלליים״ של R_4 (הנחתכים בנקודה אחת בלבד); קל לראות שהם נחתכים בישר החל במישור המשותף למרחבים R_3 וR'_3.

והנה שני מישורים הנחתכים בישר (כדין מישורים של מרחבנו־אנו) קובעים יחד מרחב בעל שלשה (ולא ארבעה!) ממדים. נסמן ב$R_3^{(s)}$ את המרחב הקבוע ע״י שני המישורים הנ״ל. לא יקשה להוכיח, שמרחב זה תלוי לא בבחירתם השרירותית של R_3 וR_3', כי אם בישר s ובנקודה p בלבד. לשון אחר: אם נקח מרחב תלת־ממדי שלישי R_3'' דרך s ונקבע בו את המישור המאונך לs בp, יימצא גם מישור זה ב$R_3^{(s)}$. לכן s מאונך הוא לכל ישר של $R_3^{(s)}$ העובר דרך p (ולכל מישור של $R_3^{(s)}$ דרך p). מאידך חל כל ישר של R_4, המאונך לs בנקודה p, במרחב $R_3^{(s)}$, כפי שמוכיחים באנלוגיה גמורה לטענה המתאימה בסטיריאומטריה. המרחב $R_3^{(s)}$ מכונה אפוא בצדק „המרחב התלת־ממדי המאונך לs בנקודה p״.

כה) סתירת ההשערה של „הזווית הקהה" על־סמך אכסיומת ארכימידס. (הוכחת המשפט 2 בעמ' 369)

בישר אחד (ציור 100) יוקצו n **קטעים שוים** $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, …, $\overline{P_nP_{n+1}}$ בעלי האורך a; בציור 100 לקחנו $n=3$. מעל לקטעים אלה יצויירו משולשים חופפים $P_1Q_1P_2$, $P_2Q_2P_3$, …, $P_nQ_nP_{n+1}$; לשם כך נקבע את הזוויות

$$\sphericalangle P_2P_1Q_1 = \sphericalangle P_3P_2Q_2 = \ldots = \sphericalangle P_{n+1}P_nQ_n = \gamma,$$

וכן נקבע את הצלעות

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} = \ldots = \overline{P_nQ_n} = b.$$

(γ ו b שרירותיים הם.) חפיפת המשולשים הנ"ל גוררת אחריה את השויון בין זוויות:

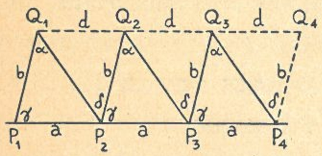
$$\sphericalangle P_1Q_1P_2 = \sphericalangle P_2Q_2P_3 = \ldots = \sphericalangle P_nQ_nP_{n+1} = \alpha.$$

לבסוף נצייר את הקטעים $\overline{Q_1Q_2}$, …, $\overline{Q_{n-1}Q_n}$, אך כמובן לא נניח שהם חלים בישר אחד (השוה ג) בעמ' 366).

והנה לפי בניתנו חופפים זה על זה גם המשולשים

$$Q_1P_2Q_2, \ \ldots, \ Q_{n-1}P_nQ_n;$$

שהרי שוות זו לזו הצלעות $\overline{Q_1P_2}$, …, $\overline{Q_{n-1}P_n}$, וכן הצלעות $\overline{Q_2P_2}$, …, $\overline{Q_nP_n}$; כמו כן שוות הזוויות המסומנות ב δ בציור 100, בהוותן את ההפרש בין הזווית השטוחה אצל P_2, …, P_n ובין סכומן של שתי זוויות השוות בהתאמה ($\sphericalangle P_1P_2Q_1 + \gamma$ וכו'). לאמור:



ציור 100

$$\sphericalangle Q_1P_2Q_2 = \ldots = \sphericalangle Q_{n-1}P_nQ_n = \delta.$$

מחמת חפיפת המשולשים שוות גם הצלעות $\overline{Q_1Q} = \ldots = \overline{Q_{n-1}Q_n} = d$. נשלים את הציור ע"י הוספת משולש אחרון $Q_nP_{n+1}Q_{n+1}$ החופף על קודמיו.

הטענה שעלינו להוכיחה, היא: $\alpha \leq \delta$. כי הלא שתי הזוויות אצל P_1 ו P_2 במשולש $P_1P_2Q_1$ מצטרפות, יחד עם δ, לסכום 180^0, כפי שמראה הזווית השטוחה אצל P_2; לכן $\alpha \leq \delta$ ר"ל: סכום הזוויות במשולש ההוא שוה או קטן מ 180^0. כדי להוכיח את טענתנו, נניח $\alpha > \delta$, ונגזור סתירה מהנחה זו.

ראשית, ללא תלות באכסיומת־המקבילים קיים המשפט הבא (השוה בעמ' 413): בשני משולשים בעלי זוג צלעות שוות בהתאמה נמצאת מול הגדולה בזוויות שבין אותן הצלעות גם צלע גדולה יותר. במשולשים $P_1Q_1P_2$ ו $Q_2P_2Q_1$ יש שויון בין זוג־צלעות: $\overline{P_1Q_1} = \overline{Q_2P_2}$, $\overline{Q_1P_2} = \overline{P_2Q_1}$, והזוויות בין צלעות אלו הן בראשון α, בשני δ. לכן יוצא מההנחה $\alpha > \delta$ שקיים $\overline{P_1P_2} > \overline{Q_1Q_2}$, כלומר $a > d$. שנית, שוב ללא תלות באותה אכסיומה, צלע אחת במשולש קטנה היא מסכום צלעותיו הנותרות, וכן בכל מצולע שהוא. לפיכך קיים:

$$\overline{P_1P_{n+1}} = n \cdot a < 2b + n \cdot d.$$

האגף הימני באי־שויון זה מציין את אורך הקו השבור $\overline{P_1Q_1Q_2 \cdots Q_{n+1}P_{n+1}}$.

והנה אי־השויון האחרון, שנוכל לכתבו (בגלל $a > d$) גם בצורה $n \cdot (a-d) < 2b$, סותר את אכסיומת ארכימידס. שהרי הוא אומר: אם נקצה את הקטע $a-d$ כמה פעמים שנרצה, תמיד ישאר הסכום למטה מן הקטע הקבוע $2b$. הסתירה מראה שאין מקום להנחתנו $\alpha > \delta$. קיים אפוא $\alpha \leq \delta$, מש"ל.

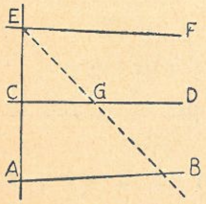
נעיר שתי הערות להוכחה זו (השוה גם מאמרו של Dehn הנזכר בעמ' 369).

א) מתוך עיון שטחי יכול להתקבל הרושם כאילו אפשר להפוך את כוון ההוכחה, ז"א לסתור גם את ההנחה $\alpha > \delta$, כפי שסתרנו כאן $\alpha > \delta$. לו היה הדבר אפשרי, היתה בידינו הוכחה לאכסיומת המקבילים. אולם אין הדבר כך; שכן אין אנו יודעים אם הנקודות $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n+1}$ חלות כולן בישר אחד; ואכן אינן חלות בישר אחד אם $\alpha < \delta$.

ב) ההוכחה בנויה על ההנחה כי **לקו ישר אין אורך מסויים סופי** – הנחה היוצאת אמנם משאר האכסיומות פרט לאכסיומת המקבילים, אך אינה מתמלאת בגיאומטריה האליפטית. באמת, אילו היה ארכו של הישר P_1P_2 סופי, כי אז היה חשש שמא, כדי להגדיל את $n \cdot (a-d)$ למעלה מ $2b$, עלינו לבחור ב n כה גדול, שבישר P_1P_2 אין מקום לקטע בעל האורך $n \cdot a$.

כו) הוכחה לטרַנסיטיביותו של יחס ההקבלה בין ישרים בגיאומטריה „המוחלטת". (מלואים לעמ' 376).

יהא הישר CD מקביל ל AB, ו EF מקביל ל CD; בסימון הרגיל: $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$. הטענה העומדת להוכחה היא: $AB \parallel EF$. בלכתנו בדרך שכבר הותוותה ע"י גאוס, נבחין בין שני מקרים לגבי מצבם ההדדי של שלשת הישרים.

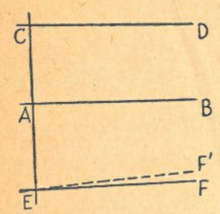


ציור 101

ראשית, נניח ש CD **עובר בין הישרים** EF ו AB כמו בציור 101. נמשוך דרך E איזה ישר שהוא בתחום הזווית FEA; ישר זה יחתוך את CD בנקודה ידועה G, מכיון שקיים $EF \parallel CD$ (עיין בהגדרה בעמ' 374). כמו כן יחתוך הישר EG – בהמשכו מעבר ל G והלאה – את AB, מכיון שקיים $AB \parallel CD$.

כללו של דבר: כל ישר בתחום הזווית FEA חותך את AB. מאידך לא יחתוך EF בעצמו את AB, הואיל ולשם כך היה EF

צריך לחתוך את CD (המקביל לAB), וזה מן הנמנע בגלל היחס $CD \parallel EF$. לכן, לפי הגדרת ההקבלה: $AB \parallel EF$, מש"ל.

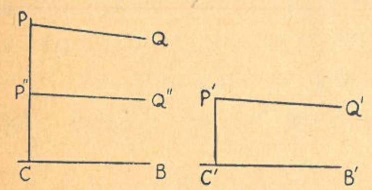


ציור 102

שנית, נניח שCD נמצא מעבר אחד לAB וEF גם יחד, כמו בציור 102. במקרה זה נשתמש בסימטריה של יחס־ההקבלה (חלק ראשון של המשפט 6, עמ' 376; גם חלק זה הוכח ע"י גאוס). על־פיה אפשר לנסח את ההנחה הראשונה גם בצורה: $AB \parallel CD$. נעמיד את המקרה הזה על הקודם, בהעבירנו דרך E את המקביל EF' לAB. לפי זה קיים: $AB \parallel EF'$, $CD \parallel AB$, וAB נמצא בין EF' וCD. לכן קיים לפי ההוכחה הקודמת: $CD \parallel EF'$. אילו היה EF' שונה מEF, היה זה סותר את הנחתנו $CD \parallel EF$. לכן מתלכד EF' עם EF; ז"א (עיין לעיל) $AB \parallel EF$, מש"ל.

כז) זווית־ההקבלה כפונקציה יורדת של הרוחק בגיאומטריה ההיפרבולית. (הוכחת המשפט 7 בעמ' 377)

קל מאד להוכיח, בעזרת משפט־החפיפה הראשון למשולשים, שזווית־ההקבלה QPC (עיין בציור 103) היא פונקציה חד־ערכית של הרוחק $\overline{PC}$; לאמור: שכנגד אנכים שווים נוצרות גם זוויות־הקבלה שוות. יהיו אפוא (CB, PQ) ו$(C'B', P'Q')$ זוגות של מקבילים, PCB ו$P'C'B'$ זוויות ישרות (הלא בזווית־הקבלה מדובר!); נוכל להניח שקיים $\overline{P'C'} < \overline{PC}$. עלינו להוכיח: $\sphericalangle QPC < \sphericalangle Q'P'C'$.



ציור 103

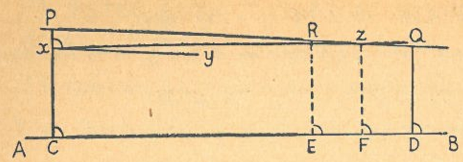
נקצה על הישר CP מC את הקטע $C'P'$, באופן שיהיה $\overline{C'P'} = \overline{CP''}$; המקביל אל CB דרך P'' יהא $P''Q''$. מחד־ערכיותה של זווית־ההקבלה נובע השויון $\sphericalangle Q'P'C' = \sphericalangle Q''P''C$, והמשפט 6 בעמ' 376 מבטיח, כי $P''Q''$ מקביל גם לPQ. מכיון שאנו דנים בגיאומטריה ההיפרבולית, קיים (עמ' 377) אי־השויון:

$$\sphericalangle QPP'' + \sphericalangle PP''Q'' < 180^0.$$

ברם הזווית $PP''C$ היא שטוחה; לכן קיים: $\sphericalangle QPP'' < \sphericalangle Q''P''C$, והנה זוהי טענתנו על־סמך השויון $\sphericalangle Q'P'C' = \sphericalangle Q''P''C$.

כח) התקרבותם האַסימפטוטית של שני מקבילים בגיאומטריה ההיפרבולית. (הוכחת המשפט 10, עמ' 378)

יהא הישר PQ מקביל לAB; בהתאם לסימוננו הרגיל מציין הכוון מP אל Q את כוון ההקבלה (עיין בציור 104 שבו הסימן ◟ מציין



ציור 104

זוויות ישרות). נוריד מהנקודות (השרירותיות) P וQ את האנכים PC וQD אל AB. עלינו להוכיח: 1) $\overline{QD} < \overline{PC}$; 2) בהתקדמנו בישר PQ (בכוון זה) במידה מספיקה, יקטן הרוחק בין שני המקבילים למטה מכל מספר חיובי נתון d. נסתפק בעיקרי ההוכחה בלבד.

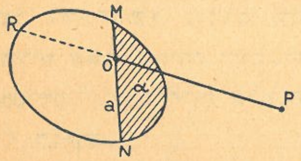
1) יהא E האמצע בין C לD (אמנם בניגוד לציור); נעלה בE אנך על AB עד חתכו את PQ בנקודה ידועה R. הזווית QRE, שהיא „זווית־הקבלה", קטנה היא מזווית ישרה, וכל־שכן קטנה מן הזווית הצמודה לה PRE. השוואת המרובעים $ERPC$ ו$ERQD$ מראה אפוא על נקלה, שקיים $\overline{QD} < \overline{PC}$.

2) נקצה בישר CP מן הנקודה C בכוון לP קטע $\overline{CX}$[1] השוה לd; מותר להניח שX נמצאת בין C וP. נעביר דרך X מקביל XY לAB (ולכן גם לPQ). זווית־ההקבלה YXC קטנה היא מזווית ישרה; לכן האנך על PC, שיועלה בנקודה X (בתחום הזווית PXY), מוכרח לחתוך את PQ בנקודה מסויימת Z לפי הגדרת המקביל. לאחרונה נוריד מZ את האנך ZF על AB.

והנה קיים אי־השויון $\sphericalangle FZQ > \sphericalangle FZX$[2]; שהרי FZQ היא זווית־ההקבלה לרוחק $\overline{FZ}$, ואילו לישרים ZX וFC יש אנך משותף (XC), כך שאינם לא מקבילים ולא נחתכים (עמ' 377). לכן, בהקצותנו[3] את המרובע $ZFCX$, בעל שלש זוויות ישרות, מעברו השני של ZF, תחתוך הצלע שממול ZF את הישר $PQ = ZQ$ בנקודה, הקרובה לישר AB יותר מכפי הרוחק $\overline{XC}$. לאמור: הרוחק בין המקבילים AB וPQ ילך ויקטן עד שיקטן מd; מש"ל.

כט) הקצאת קטע בתבנית לגיאומטריה ההיפרבולית. (מלואים לעמ' 397)

כדי להוכיח את המשפט, שבצורתו ניסחנו (עיין שם) את האכסיומה III, 1 של הילברט (עמ' 409) בתבנית הנדונה, נצא ממשפט־עזר כללי הרבה יותר[4] (עיין בציור 105 שבו מופיעה אחת האליפסות וכו'):



ציור 105

תהיינה e וe' אליפסות במישורים (שונים או שווים) של המרחב האבקלידי הרגיל. נמשוך מאיזו נקודה בפנים כל אליפסה, O וO',

1. מתוך טעות מופיעות בציור האותיות x, y, z, תחת X, Y, Z.
2. מובן שהנקודה Z תוכל לחול גם מעבר לQ והלאה; במקרה זה נסמן את הזווית, המכונה כאן $\sphericalangle FZQ$, בעזרת נקודה במקביל PQ הנמצאת מעבר לZ והלאה.
3. הקצאה זו לא צויינה בציור כדי שלא לסבכו יתר על המידה.
4. הקורא המתקשה בהוכחה יתפוס את e וe' כמעגלים, ואף כאותו המעגל.

חצי־קרן; חלקיהם של חצאי־הקרניים שבפנים האליפסות יסומנו ב $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{a}'$. $\mathfrak{a}$ יחד עם המשכו אחורנית (מעבר ל O) מחלק את תחום הפנים של $\mathfrak{e}$ לשני חלקים נפרדים, שאחד (שרירותי) מהם יסומן ב α; כן יסומן ב α' אחד החלקים בפנים $\mathfrak{e}'$ הקבועים ע״י $\mathfrak{a}'$ והמשכו. על פי הנחות אלו יש העברה פרוייקטיבית אחת ויחידה T בין שני המישורים, המתאימה את $\mathfrak{e}'$ ל $\mathfrak{e}$, את $\mathfrak{a}'$ ל $\mathfrak{a}$, ואת α' ל α.

נתאר את הוכחת המשפט הזה בקוויה העקרוניים, בהסתמכנו על יסודות הגיאומטריה הפרוייקטיבית ועל מושגי ה„קוטב" וה„קוטבי" מתורת חֲתכי־החרוט. קודם כל נוכיח, שיש בכלל העברה T בעלת התכונות הדרושות. תהא N נקודת־החיתוך בין חצי־הקרן $\mathfrak{a}$ והאליפסה $\mathfrak{e}$, ו M נקודת־החיתוך השניה של הישר NO עם $\mathfrak{e}$; בהקבלה לכך תוגדרנה הנקודות N' ו M' של $\mathfrak{e}'$. לבסוף יסמן P את הקוטב של MN ביחס ל $\mathfrak{e}$; דהיינו במקרה שלפנינו: את נקודת־החיתוך בין המשיקים ל $\mathfrak{e}$[1] בנקודות־המגע M ו N. כן יסמן P' את הקוטב של $M'N'$ ביחס ל $\mathfrak{e}'$. הישר OP, השונה על כל פנים מ MN, חותך את $\mathfrak{e}$ בשתי נקודות, שאחת מהן חלה בשפת התחום הנתון α (המקווקוו בציור); היא תסומן ב S (חסר בציור), ואחותה ב R. כמו כן תסומן, מתוך נקודות־החיתוך בין הישר $O'P'$ ו $\mathfrak{e}'$, הנקודה שבתחום α' ב S', והשניה ב R'. (לא תמיד יהיה הסדר בין הנקודות P, S, O, R בישר OP מתאים לסדר שבין הנקודות P', S', O', R' בישר $O'P'$.[2])

עתה נסמוך על משפט ידוע מן הגיאומטריה הפרוייקטיבית האומר: אם נתונות בשני מישורים, או גם במישור אחד, שתי רביעיות של נקודות (בסדר מסויים) כך, שאף פעם לא תחולינה שלש נקודות של רביעיה אחת בישר אחד, הרי יש העברה פרוייקטיבית יחידה המעבירה אחת הרביעיות אל חברתה, בסדר הנתון של הנקודות בכל רביעיה. לפי זה יש העברה פרוייקטיבית יחידה T בין המישורים שלפנינו, המעבירה את הנקודות M, N, P, S לנקודות M', N', P', S'. הואיל וכל העברה פרוייקטיבית היא קוליניארית (עמ' 255, 297), מועתק הישר MN לישר $M'N'$, וכן הישר PS ל $P'S'$; לפיכך מותאמת לנקודת־החיתוך O הנקודה O'. מכיון שכל העברה פרוייקטיבית שומרת על סדרו של עקום (עמ' 257) באופן כללי (ולא רק כשסדר זה הוא 1, פירוט שאליו מתיחס השם „קוליניארי"), מעתיקה T את האליפסה $\mathfrak{e}$ לחתך־חרוט מסויים $\mathfrak{e}''$, שבו חלות שלש הנקודות M', N', S'. נוכיח כי $\mathfrak{e}''$ הוא האליפסה $\mathfrak{e}'$ דוקא.

על־סמך משפט אֶלמנטרי שומרת T, כהעברה פרוייקטיבית, על היחס בין הקוטבי והקוטב שלו; כלומר P' הוא הקוטב של $M'N'$ ביחס לעקום $\mathfrak{e}''$.

1. אם משיקים אלו הם מקבילים, יהיה הקוטב נקודה לא־אמיתית.

2. אין סתירה בין ההעתק הפרוייקטיבי הנוצר להלן לבין טענתו של משפט־העזר, שהרי הנקודות P ו P' חלות מחוץ לעקומים $\mathfrak{e}$ ו $\mathfrak{e}'$.

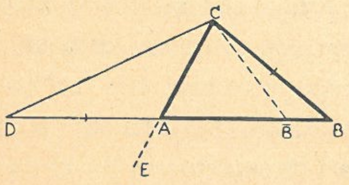
לפיכך, ובהתאם למשפט־העזר שבעמ׳ 396, מהווים $P'M'$ ו $P'N'$ משיקים ל $\mathfrak{e}''$ בנקודות־המגע M' ו N', והוא הדין, לפי הגדרת P' כקוטב ל $M'N'$ (עיין לעיל), לגבי האליפסה $\mathfrak{e}'$. לכן שקולות שלש הנקודות M', N', S' המשותפות ל $\mathfrak{e}'$ ול $\mathfrak{e}''$, יחד עם המשיקים הללו, כנגד חמש נקודות משותפות, מאחר שכל נקודת־מגע נחשבת כנקודה כפולה. והרי שני חתכי־חרוט אילו־שהם, בעלי חמש נקודות משותפות, מתלכדים. קיים אפוא $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}''$. בהתאם למשפט־העזר שבעמ׳ 396 ולהגדרת הנקודות S ו S' מתאימה אפוא ההעברה T את $\mathfrak{a}'$ ל $\mathfrak{a}$ ואת α' ל α; לאמור: ל T יש כל התכונות המפורטות במשפט־העזר דלעיל.

נשאר עוד להוכיח ש T היא ההעברה היחידה מן הסוג הנדון. הדבר מובן כמעט מאליו, הואיל וכל העברה בעלת התכונות הדרושות מעבירה, לפי היחס בין הקוטבי והקוטב, את הנקודות M, N, P, S ל M', N', P', S' בסדר זה. כאמור לעיל, יש העברה פרוייקטיבית אחת בלבד מסוג זה, ולכן הוכח משפט־העזר בשלימותו.

על־סמך משפט־העזר מתְאַמֵת מיד המשפט שבעמ׳ 397. לשם כך נזהה כל אחת האליפסות $\mathfrak{e}$ ו $\mathfrak{e}'$ עם המעגל C שהוכנס לשם יצירת תבנית אבקלידית לגיאומטריה ההיפרבולית (עמ׳ 395). ובכן אם $\overline{AB}$ הוא קטע היפרבולי (ז״א אם A ו B הן נקודות שונות בפנים C), ואם A' היא נקודה היפרבולית, שממנה יוצאת הקרן ההיפרבולית r', הרי יש לפי משפט־העזר העברה חופפת־H (ז״א העברה פרוייקטיבית המעתיקה את C לעצמו ונקודה פנימית לנקודה פנימית), המעתיקה את A ל A' ואת הקרן מ A בכוון B לקרן r'. לכן נמצאת ב r' גם הנקודה B' המותאמת ל B, ולפי ההגדרה בעמ׳ 396 נקראים הקטעים $\overline{AB}$ ו $\overline{A'B'}$ חופפים־H; מש״ל.

ל) הוכחה שזווית חיצונית של משולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה. (הוכחת המשפט ט) בעמ׳ 413)

תהא CAD זווית חיצונית של המשולש ABC. בציור 106 קבענו את הנקודה D בישר BA באופן ש $\overline{\mathrm{AD}} \equiv \overline{\mathrm{CB}}$.[1] כדי להוכיח ש $\sphericalangle \mathrm{CAD}$ גדולה מ $\sphericalangle \mathrm{ACB}$ נראה, ראשית, שהזוויות CAD ו ACB אינן חופפות.



ציור 106

ואמנם אילו היו חופפות, היתה האכסיומה 5,III (על סמך $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{CA}}$) נותנת: $\sphericalangle \mathrm{CAB} \equiv \sphericalangle \mathrm{ACD}$. ברם מכאן נובע, על־פי המשפטים ד) ו־ה) בעמ׳ 412 וההנחה $\sphericalangle \mathrm{ACB} \equiv \sphericalangle \mathrm{CAD}$, ש $\sphericalangle \mathrm{ACD}$ חופפת על הזווית הצמודה ל $\sphericalangle \mathrm{ACB}$.

1. הקו המסורג $\mathrm{C\bar{B}}$ מתיחס לחלקה השני של ההוכחה.

לשון אחר: הנחתנו היתה גוררת אחריה, לפי 4,III, את המסקנה שהנקודה D תחול בישר CB, בניגוד לאכסיומה 2,I (הואיל ו D חלה בישר AB).

שנית, עלינו להראות שגם היחס $\sphericalangle ACB < \sphericalangle CAD$ אינו אפשרי. ואכן, אילו קיים יחס זה, הרי בהקצותנו את הזווית החיצונית CAD ב C מ CA לאותו עבר שבו נמצאת B, היינו מקבלים שוק שניה הנמשכת לפנים הזווית ACB. שוק זו תחתוך אפוא את הישר AB בנקודה מסויימת $\bar{B}$ שבין A ל B, ובמשולש $A\bar{B}C$ היתה הזווית החיצונית CAD חופפת על הזווית הפנימית $AC\bar{B}$ – בניגוד למה שהוכח בחלקה הראשון של הוכחתנו.

לפיכך נשארה רק האפשרות $\sphericalangle ACB > \sphericalangle CAD$, מש"ל.

מתוך עצם הוכחתנו יוצא, שהזווית החיצונית BAE – שהיא זווית קדקדית ל $\sphericalangle CAD$ – גדולה מהזווית הפנימית ABC. לכן נקבל, על־פי המשפטים ד) ו־ ז) בעמ' 412, גם את היחס $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAD$, ובכך הוכח המשפט ט) במלואו.

לא) אכסיומת־השלימות של הילבֶרט. (מלואים לעמ' 417)

בספרו של הילברט (עיין בעמ' 401) אין תיאור מפורש לתפקיד שיש לאכסיומת השלימות, והוא: ראשית להבטיח פתרון חד־ערכי לבעית ההרחבה המכסימלית של מערכת הנקודות בקו ישר (וע"י זה של מערכת הנקודות, הישרים והמישורים במרחב; השוה בעמ' 417); שנית, להבטיח שפתרון זה יתלכד עם הפתרון הניתן בביסוסים אחרים של הגיאומטריה ע"י האכסיומות של דידקינד או קנטור, או עם הפתרון „האריתמיטי" המתבטא בהתאמת הנקודות למספרים הממשיים בכללן. בלי להיכנס לפרטים, נצייר כאן מהלך־מחשבה המביא לידי שתי מטרות אלו. לשם כך נסתמך מצד אחד על תורת המספרים הממשיים כפי שתוארה ב§3 של הפרק הששי בכרך הראשון של ספר זה, מצד שני על המושגים הפשוטים ביותר של תורת השדות (105,I–115 ו193–196)[1].

בקו ישר מסויים המכונה „הציר" – הוא הישר המשמש נושא לאכסיומת השלימות בעמ' 416 – נבחר בנקודה שרירותית O כ„נקודת האפס" ובחצי־קרן שרירותי היוצא מ O (מתוך שתי האפשרויות לבחירה כזו). מלבד זה נבחר בקטע שרירותי מסויים („קטע היחידה"; יש לקחת כאן „קטע" במובן הרגיל בגיאומטריה). בהקצותנו קטע זה מ O על חצי־הקרן הנ"ל על־סמך האכסיומה 1,III (עמ' 409), נקבל נקודה מסויימת הנקראת „נקודת־היחידה". בהסתמכנו על מה שהוסבר ב 115,I–117 בדבר „קו־המספרים", ובהקצותנו מ O בשני חצאי־הקרניים של הציר היוצאים מ O את הקטעים, שמציאותם מובטחת ע"י

1. דיון מפורט בנושא זה מנקודת־מבט האריתמיטיקה נמצא בספר A. Loewy: Lehrbuch der Algebra, I, pp. 180 — 191 (1915).

האכסיומות I–IV והאכסיומה 1,V, נקבל – כקצות הקטעים – מערכת N של נקודות שביניהן נמצאות כל הנקודות הרציונליות של הציר, ומלבדן עוד הנקודות המתאימות לאיבריו של שדה מסויים של מספרים אלגבריים (ממשיים), כפי שהוסבר בעמ' 416. בפרט חלות הנקודות „החיוביות" בחצי־הקרן האחד (שבו חלה נקודת־היחידה), והנקודות „השליליות" בחצי־הקרן השני. מטרתנו היא להראות, שצירופה של אכסיומת השלימות 2,V מכריחה אותנו להוסיף על נקודותיה של המערכת N נקודות בהיקף כזה, שתימצאנה בציר בדיוק הנקודות המהוות בנות־זוגם של כל המספרים הממשיים – לא פחות ולא יותר.

ראשית, אין קושי בהגדרת פעולות־חשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) בין הנקודות של N: החיבור והחיסור מסתמכים בצורה, המובנת על נקלה, על חיבור הקטעים (אכסיומה 3,III), ואילו הכפל והחילוק בין קטעים מתבססים על „הדמיון הגיאומטרי" הידוע מהגיאומטריה האלמנטרית, מתוך משיכת מקבילים לצלע אחת של משולש על־סמך האכסיומה IV (השוה ציור 11 בעמ' 186). נעבור מהכפל בקטעים לכפל בנקודות, בשימנו לב גם להגדרת הכפל בין מספרים לא־חיוביים, הבאה לשמור על קיום החוק הדיסטריבוטיבי (I, 80 ו108). לגבי הפעולות המוגדרות כך מהווה המערכת N שדה.

הסדר הנקבע בין הקטעים (ז) בעמ' 412) גורר אחריו סדר מתאים בין הנקודות של N. קל לראות, שיחס סודר זה, המסומן להלן ב $<$, ממלא לא רק את שלש תכונותיו היסודיות של כל סדר קווי (עמ' 81) ואת אכסיומת ארכימידס, כי אם גם שתי תכונות נוספות המכונות „חוקי המונוטוניה", ושיש לבטאן בשפת החשבון כך: א) $a<b$ גורר אחריו $a+c<b+c$; ב) $a>0$ ו $b>0$ יחד גוררים אחריהם $a\cdot b>0$. (השוה בעמ' 88 של הוצאת תשי"ד של הכרך הראשון.)

לפי הגדרות אלו התאמנו לנקודות של N באופן חד־חד־ערכי ואיסומורפי (114,I) את כל איבריו של שדה מסויים F של מספרים ממשיים; F מכיל, כמובן, בפרט את כל המספרים הרציונליים. על פי סידור המספרים לפי גדלם מתמלאות ב F גם שש תכונות־הסדר שצויינו לעיל, ביניהן התכונה „הארכימידית". לפי סדר זה יש להתאמה הנ"ל גם תכונת „הדמיון" (עמ' 83); לשון אחר: תכונת האיסומורפיה לגבי יחסי הסדר שהוגדרו בין הנקודות של N מזה ומספרים ממשיים מסויימים מזה.

ועתה, על־פי השיטות שפותחו בפרק הששי של הכרך הראשון ועל־פי תכונותיו של יחס־הסדר, אין קושי בהוכחתו של משפט אריתמיטי זה:

יהי G איזה שדה־מספרים שהוא המקיף את שדה המספרים הרציונליים כשדה חלקי ושאיבריו ממלאים את שש תכונות־הסדר הנ"ל, בתנאי שתכונות הסדר הקיימות בשדה המספרים

הרציונליים (ואפילו בשדה F דלעיל) – כגון $0 < 1$ – תשארנה בתקפן ב G. אם האיבר g של G אינו מספר רציונלי – כל שכן אם g אינו איבר של F – יש כנגד g זוג (לא דוקא זוג אחד בלבד[1]) של סדרות של מספרים רציונליים (g_n) ו $(\bar{g}_n)$ בעלות ארבע התכונות המפורטות ב I, 126—127, ובאופן שלגבי כל $n = 1, 2, 3, \ldots$ קיים[2] $g_n < g < \bar{g}_n$. לשון אחר (עיין שם): g הוא מספר ממשי, ו G הוא שדה חלקי של שדה כל המספרים הממשיים.

על־סמך משפט יסודי זה, שנודע לו חשיבות רבה לביסוסה האכסיומטי של האריתמיטיקה, נוכל עתה להגדיר נקודות נוספות על אלו שהובטחו לעיל ע״י האכסיומות I—V,1, כדלקמן: יהא $((\bar{p}_n), (p_n))$ זוג של סדרות של נקודות רציונליות בציר, באופן שארבע התכונות המפורטות ב I, 126—127, תתמלאנה לגבי סדר הנקודות בציר כפי שהוגדר לעיל. (בשפת האנליזה הרגילה, שברשותה נמצאים כל המספרים הממשיים, זאת אומרת: תהיינה (p_n) ו $(\bar{p}_n)$ סדרות – בעלות תכונות ידועות – המתכנסות שתיהן לגבול אחד.) אפשר שבין הנקודות של המערכת N יש נקודה p – ואם כן, נקודה אחת ויחידה – באופן שיתמלאו כל יחסי הסדר $p_n < p < \bar{p}_n$. אם אין נקודה כזו ב N, תוגדר „נקודה" p ע״י עצם היחסים הללו; היא קבועה, במובן הסדר בציר, ע״י אי־שויונות אלה, ובמובן פעולות־החשבון (כלומר, כאיבר של שדה מתאים) ע״י פעולות־החשבון בין המספרים הממשיים המתוארים בצורה $\binom{p_n}{\bar{p}_n}$, בהתאם ל §3 של הפרק הששי בכרך הראשון. יש להגדיר את השויון בין הנקודות החדשות לפי ההגדרה I ב I,128; קל לראות, שלעומת זוג נתון של סדרות כנ״ל יש נקודה חדשה אחת בלבד – אך לא חילוף הדבר.

הבה נראה את כל הנקודות האפשריות מסוג זה, נוסף על הנקודות של N, כנקודות החלות בציר! אין קושי עקרוני בהוכחה, שהמערכת המורחבת של נקודות ממלאת גם היא את כל האכסיומות הקוויות מבין I—III, וגם את V,1. ואולם מערכת זו ממלאת אף את אכסיומת־השלימות V,2.

באמת, אי אפשר לספח למערכת זו נקודה נוספת, שכן כל נקודה נוספת q היתה עומדת, על פי האכסיומות, ביחסים של סדר ושל „פעולות־חשבון" לנקודותיו הרציונליות של הציר, שיתבטאו בצורה גיאומטרית מתוך אנלוגיה גמורה למה שנאמר לעיל במשפט היסודי. לפיכך היינו מקבלים

1. לשם הבנתן המלאה של האפשרויות השונות יש להתחשב בהגדרת השויון שניתנה ב I, 128.

2. כאן, וכן להלן, מופיע הסימן $<$ במקום $\leq$, הואיל ו g הוא מספר אירציונלי, בעוד שהמספרים g_n ו $\bar{g}_n$ רציונליים הם.

שתי סדרות של יחסי סדר בעלי הצורה $p_n < q < \bar{p}_n$, מה שהיה גורם לכך, שהנקודה q תשוה לנקודה שכבר צירפנוה למערכת ע״י הגדרתנו דלעיל (אם לא נכללה מראש במערכת N שלפני ההרחבה). מתוך היחסים הכלולים באכסיומות מתברר מיד, שהרחבה זו אל „מערכת שלימה" אפשרית באופן אחד בלבד – אם נבין „נקודה" על־פי הגדרת השויון בין נקודות. (באמת נותנים יחסי הסדר שהוגדרו מקום לכך שנקודה מסויימת תיקבע ע״י סדרות שונות – אפילו ע״י אינסוף סדרות שונות – מסוג זה, כשם שקיימת אפשרות כזו כלפי המספרים הממשיים ביחס לזוגות של סדרות של מספרים רציונליים.)

לאחרונה מתברר בדרך זו, שתפקידה של אכסיומת השלימות אינו שונה במובן מתימטי מתפקידה של דרישת־הרציפות הרגילה, אף כי במובן הגיוני היא מעור אחר לחלוטין. ואמנם מצאנו, שתכנה המתימטי של אכסיומת השלימות – על סמך אכסיומת ארכימידיס הקודמת לה בהכרח – אינו אלא זה (השוה I, 119—135): אם ניתנות שתי סדרות של נקודות (p_n) ו $(\bar{p}_n)$ בקו ישר כך שאחת מהן עולה והשניה יורדת, ושכל נקודותיה של הסידרה העולה נמצאות „משמאל" לנקודות הסידרה היורדת אך „מתקרבות" אליהן – הרי אין בקו הישר ליקוי (חור) בין שתי הסדרות אלא נקודה (אחת ויחידה) המפרידה ביניהן[1].

1. ראינו בעמ׳ 303 שדרישה זו של „העדר ליקויים" בקו הישר, פירושה רציפות. בניסוח דלעיל, או בניסוח דומה, נקראת הדרישה בשם אכסיומה של קנטור, ובניסוח אנלוגי לפי שפת החתכים (I, 121—125): אכסיומה של דידקינד.

מפתח המונחים והסימנים

המספרים מציינים את העמוד בכרך השני. השוה מה שנאמר בכרך הראשון, עמ' 354.

הערה: על הספרים שציינו ב1,365 יש להוסיף (מבין רבים שהופיעו מזמן המהדורה הראשונה של הכרך הראשון) במיוחד:
R. Courant and H. Robbins: What is mathematics? 3rd printing, 1946.

אגף (של משוואה) side, côté, Seite
אורדינטה, עיין פוסק
אורך 209 length
אורתוגונלי 222 orthogonal
אחרון 81 last
אחרי 81 after (succeeding)
אי־אפשרות (הוכחות של־) impossibility (proofs) 31, 184, 194
אי־תלות (של אכסיומות) independence
איבר (ר' איברים) 5 element (member), élément, Element (Glied)
אידיאלי (עצם) 226 ideal
אילן 425 tree
אינבולוציה 272 involution
אינדוקטיבי 157 inductive
אינדוקציה 39 induction
— שלימה 110, 112 mathematical induction, induction complète
— על־סופית transfinite induction
110—114, 149—151
אינטגרל, עיין סכם
אינסוף (בהחלט) infinite (actual)
3, 27, 165
אינסוף בכח 3, 227/8, 250
אינפיניטסימלי 159 infinitesimal
איקוסאדרון icosahedron, icosaèdre
324/5
אכסיומה, axiom, axiomatic method
שיטה אכסיומטית 77, 158—165, 399
אכסיומת ארכימדס (אבדוקסוס) 165,
415, 430
— הבחירה (הכפל) 71, 75, 123/4 a. of choice (multiplicative a.), axiome du choix, Auswahlaxiom
— המקבילים 342, 398, 414
— השלימות 416, 436/9 a. of completeness
— פאש 162, 407
אלגברה מופשטת 339
אלגברי (מספר) 19 algebraic
— (עקום, משטח) 183, 191
אלומה 169 pencil, Büschel
אליפסה 167, 172 ellipse
אליפסואיד 207 ellipsoid
אלכסון (קרנזול) 18, 30/1 diagonal
אלף 115 aleph
אמיתון 158, 161 axiom
אמת 171 to verify
אמות 215 verification
אנך 372 perpendicular, Lot

אנליזה analysis
אסוציאטיבי (קיבוצי) associative
47, 133, 230
אסימטרי 42 asymmetric
אסימפטוטה 258, 378 asymptote
אפקי 219 horizontal
אקויולנטי 7 equivalent
ארבע־קו (שלם) 290 quadrilateral, Vierseit
ארבעון 200, tetrahedron, tetraèdre
213, 324/5
ארלנגן (פרוגרמה של־) 225, 232 Erlangen (program)

בודד isolated
בין 81; 402, 405 between
בניה 161 construction
— בעזרת סרגל ומחוגה 185
בנייתי 74 constructive
הבעיה מדילוס 187
בעית הגשרים 314, 424
— הצבעים 309—313, 332, 336, 423/4
— הרצף (המוכללת) 43, 65/6, 117/8, 125 continuum problem (generalized)

גבול 111, 214 limit
גדול מ־ 42, 102, 162
גובה 197 height
גובל 309 adjacent, angrenzend
גוף solid, Körper
גופים משוכללים 324/5
גורם 8, 53 argument; factor
— מתכונתי 254 proportionality factor
גורר implies, involves
גזיר 68 differentiable, derivable, differenzierbar
גיאוגרפיה 298, 391
גיאודטי 223; 394 geodesic
גיאומטריה 153—155, 260, geometry
383—385
— אבקלידית 375/6 Euclidean g.
— אלגברית 183
— אליפטית (רימנית) 385 elliptic g.
— אלמנטרית 168
— אנליטית 167—171, analytic g.
175—182, 356
— אפינית 222, 234—241 affine g.
— אקויפורמית 222
— דו־אליפטית 388, 390
— דיפרנציאלית (ואינטגרלית) 183/4, 232 differential (integral) g.
— היפרבולית 375/6, hyperbolic g.
378, 395
— חד־אליפטית 393
— לא־אבקלידית 259 non-Euclidean g.
— לא־ארכימידית 282 non-Archimedean g.
— מוחלטת (פאנגיאומטריה) 372 absolute g.
— מטרית 223 metric g.
— סינתיטית 168/9 synthetic g.
— פרוייקטיבית 222, projective g.
242—266
— תאורית 173, 241/2 descriptive g.
גליל 156 cylinder
גרעון (של משולש) 381 defect

דדוקציה, דידוקטיבי 157 deduction
דואלי(ות) 55, 229, 256 dual(ity)
דומה 83; 222 similar
דיאגרמה diagram
דיופנטית (משואה) indeterminate, diophantisch
דיסטריבוטיבי (פילוגי) 47 distributive

דמיון 83; 222 — similarity, Ähnlichkeit
דמיוני 267 — imaginary
דרגה — rank (degree)
דרגת־קשר 320, 335
דרישה 161 — postulate

הגדרה 37, 161, 195, 228 — definition
(תורת־) ההגיון — logic
הוכחה־דרך־שלילה 47, 101, 151 — indirect proof
הומוגני 237, 291 — homogeneous
הומיומורפי 298 — homoeomorphic
הזזה (מקבילה) 230 — translation
הֵטֵל, הֲטָלָה (במקבילים) 218 (הטלה היא הפעולה, הטל — תוצאת ההטלה) — (parallel) projection
הטלה מרכזית 220 — central p.
הֲטָלִיוּת 255,239 — projectivity(collineation)
היסק — inference, conclusion, Schluss
היקף 207 — perimeter, Umfang
הכללה — generalization
הכפלת הקוביה 184/7 — duplication of the cube
המחשה 250 — realization
הָמֵר 243 — to permute
הֶמשך 275 — prolongation
הנדסה, עיין גיאומטריה
הנחה — assumption, hypothesis
הָסֵב — to turn, drehen
הסתברות 23, 208 — probability, Wahrscheinlichkeit
העברה (העתקה) 223 (עיין גם העתק) — transformation
— אפינית, אֶקויפורמית, פרוייקטיבית 223, 253, 255
— קווית (ליניארית) 237, 253, 255

העברת שעורים 235/6
העלאה לחזקה 61, 112 — exponentiation (involution)
הֶעְתֵק 8 (הפעולה: העתקה; עיין: העברה) — mapping (representation)
— דומה 83; 222 — similar m.
— זהותי 20 — identical m.
— טופולוגי 298
— סטריאוגרפי 252, 298, 311, 392
— קונפורמי (שומר־זווית) 298 — conformal m.
הֶעְתִיק — to map
הפוך 59 — reciprocal
הָפְכִּי 86 — inverse
הִפֶּרבולה 167, 219 — hyperbola
הִפֶּרבולואיד 216
הפרטה — specialization
הפרש 12, 204 — difference
הצבה 231, 240 — substitution
הצגה 244 — representation
הצטברות 74 — accumulation
הקצה 162/3 — to lay off, porter, abtragen
הרבֵּץ, הרבצה 328 — to rotate (flap),rotation
הרכבה 64 — insertion, Belegung
הרמוני 245 — harmonic
השוואה (השתוות) של קבוצות ועָצמות 45, 87, 107, 115, 124/5 — comparability
— — קבוצות סדורות היטב ומספרים סודרים 106
השערת הרצף (המוכללת) 43, 125/6 — (generalized) continuum hypothesis
— לוֹבַּצֶ'בסקי 376
— רימן 385
השתקפות 214 — reflexion, Spiegelung
התאמה חד(־חד)־ערכית — univalent (one-to-one) correspondence

התלכד — to coïncide, zusammenfallen
הַתָּקָה, עיין הזזה
וֶקטור (חץ) 184, 234 — vector

זַהה — to identify
זֶהוּת 243 — identity
זהותי — identical
זוג 82 — pair (couple)
— סדור 81 — ordered p.
(אי־)זוגי 115 — even (odd)
זוית 410 — angle
— היקפית 156 — peripheric a.
— הקבלה 374 — a. of parallelism
— שטוחה 162 — straight a., angle allongé
זקוף — vertical
זָר 11, 280 — exclusive (disjointed), prime to

חֲבורה 230 — group
— (אפינית, פרוייקטיבית) 238, 255
— זהותית 232 — identical g.
חַדה (זוית) — acute, aiguë, spitz
חוג (פועל) — to describe, schlagen
חודר — penetrates, durchdringt
חוסר־סתירה 370 — consistency (non-contradiction)
חוֹפף 162, 402, 409 — congruent
חוֹצָה (זוית) 274 — bisector, Halbierende
חוקים פורמליים 47
חוֹתֵך 227 — intersects, coupe, schneidet; transversal (secant)
חֶזקה 61, 112, 143/4 — power, puissance, Potenz
חיבור, עיין סכום
חיבורי 207 — additive

חילה (הפועל: חול) 224/5, 408—402 — incidence
חילוק הזוית 184, 187 — partition of the angle
— המעגל 188 — cyclotomy
— הקטע 235
חסור, חלוק (של מספרים סודרים) 114/5 — subtraction, division
חַלֵּץ 267 — to eliminate
חלקה — piece, Stück
חָסוּם 203; 320 — bounded, borné, beschränkt
חֶסֶם — bound
חפיפת משולשים 411/2 — congruence of triangles
חצה 234/5 — to bisect, halbieren
חרוט (מעגלי) 257 — (circular) cone, (Kreis-) Kegel
חִתוך, חֲתָך 302 — section, coupure, Schnitt
חתָכי־חרוט 166/7, 239, 258—256, 265/6 — conics
— — סוררים 258

טַבעת 327, 331, 333 — torus (anchor ring)
טופולוגיה 195, 297, 299 — topology
— קומבינטורית 309
טור 70, 211 — series, Reihe
טיפוס־סדר (סופי, על־סופי) 86/7 — order-type
טֶנסור 184, 234 — tensor
טריביאלי (ברור מאליו) — trivial
טריכוטומיה 45, 106 — trichotomy
טריגונומטריה 167'8 — trigonometry
טרַנסיטיבי (יחס) 9 — transitive
טרַנסצֶנדֶנטי (מספר) 32 — transcendental

— (עקום, משטח) 171, 183, 191
טרפז 156 trapezium (trapezoid)
יחס (סודר) 81, 102, 164; 220; 406 ratio, relation (of order)
— כפול 174, 221, 242—248, 256 cross ratio, rapport anharmonique, Doppelverhältnis
יחסות 232 relativity
יישור rectification
יצג 48 to represent
יציב 236 fixed
יציר figure, Gebilde
ישר (קו) 176, 238, 250, 340, 385/9, 393, 401 straight line, droite, Gerade
ישרה (זוית) 220, 412 right
יתר hypotenuse

כדור 167, 389 sphere, Kugel
כדי מנייה 15 denumerably many
כוון 227 direction
כופל 92 multiplier, Multiplikator
כלל 81 rule, Regel
כפה 272 cap, Kalotte
כפול־קשר 320
כפול (נקודה) double
כפול 235 multiplication
כפל, עיין מכפלה

לא־אמתי 226—230, 250—252, 357 improper
לוגיקה (תורת־הגיון; עיין גם: פילוסופיה) 6, 24, 37/9, 70/2, 158, 160/1, 228, 339
לוגריתמוס 262 logarithm
ליניארי (קוי) 237 linear
לולין 17, 167 spiral
לפני 80 before (preceding)

מאונך 224, 355/6, 429 perpendicular (orthogonal), senkrecht
— בהחלט 356/7
— למחצה 358
מבחן (תנאי הכרחי ומספיק) criterion
מגמה (של סיבוב) 200, 247 sense of rotation
מגע (נקודת־) 267 contact
מדה 201—218; 415 measure, mesure, Mass
מדת־שטח 197, 199
מדזוית protractor, rapporteur, Winkelmesser
מוגבל bounded, limité, begrenzt
מונה 37 (17) cardinal (numerator)
מוסיקה 245/6
מופשט abstract
מוצא 170 origin
מוקד focus, Brennpunkt
מורכב compound, zusammengesetzt
מושלם 287, 303 perfect
מחבר term, Summand
מחגה 184 compasses, Zirkel
מחוג (חצי־קוטר) 156 radius
מחולל 257/8 generator, Erzeugende
מחזור(י) period(ic)
מחמש (כוכבי) 284, 315 (stellate) pentagon
— תאים 351, 353
מחלק divisor
מחלקת־מספרים (סודרים) 116, 118 number-class
מטריצה 291 matrix
מין (של משטח) 332—335 genus, genre, Geschlecht
מישור 249, 342, 401 plane, Ebene
— פרוייקטיבי 330/1, 393
מיתר chord, corde, Sehne

מכון 374 directed, orienté, gerichtet
מכיל 5 contains, contient, enthält
מכנה 17 denominator, Nenner
מכפלה (של מספרים מונים) 52, 53 product
— של טיפוסים וסודרים 92, 93, 143/4
— חיצונה (קבוצת־צירוף) 53 Cartesian p.
— פנימית 11
מלבן 202, 367 rectangle, Rechteck
מלכסן 221 inclined, schräg
ממד 57, 305—308, 405 dimension
מנה 220 quotient
מנוח terminology
מנסרה 214 prism
מסורג 247 dashed (line), pointillé, gestrichelt
מסילה path, chemin, Weg
מספר 164 number
— אירציונלי 164 irrational n.
— אלגברי 4 algebraic n.
— גבולי 111 limit-n.
— טבעי 2 natural n. (= positive integer)
— טרנסצנדנטי 4, 33 transcendental n.
— מונה (קרדינלי) 37—40 cardinal n.
— ממשי 4, 164/5 real n.
— סודר 102, 110/1 (מהסוג הראשון, השני) ordinal n.
— סופי 38, 102, 119—121 finite n.
— על־סופי (אינסופי) 38, 102 transfinite n.
— פותח 116 initial n.
מסתכמת (פונקציה) 202 integrand
מעגל 85, 389 circle, Kreis
מעוין rhombus, losange
מעלה degree, Grad
מעקב 190 cubic
מערבל 337 Wirbel

מעריך 61 exponent (index)
מפה גיאוגרפית 297
מצד 179 parameter
מצוי 159, 167 exhaustion
מצומצם (שבר) 17/8 reduced
מצטלב 345, 360 skew, oblique, windschief
מציאות(י) 74 existence(-tial)
מצלע 188, 409 polygon
מצרני, מצרן (סמוך) 309/10 bordering, contigu, anliegend
מקביל 162, 234—9, 345/7, 374 parallel
— למחצה 358
מקבילון 213 parallelepiped
מקבילית 164 parallelogram
מקדם 172 coefficient
מקיף 266 circumscribed
מקף 10; 265 included; inscribed
מקצוע 321 edge (side), Kante
מרבה multiple, vielfach
מרבע 221 quadrangle, Viereck
מרחב 155, 157/8, 233 space, Raum
— ארבע־ממדי 347/8, 363 fourdimensional s.
— דו־ממדי 341
— חד־ממדי 340/1
— טופולוגי 338/9
— מטרי 338
— עקום 342, 358, 392 curved s., gekrümmter R.
— קבוע ע"י מרחבים נתונים 360/1
— קווי 342, 358 linear s.
— רב־ממדי 67
— תלת־ממדי 336, 344, 363
מרכב 267 complex
מרכז (־הטלה) 220, 258 center, Mittelpunkt

component מרכיב
heptagone משבע 184, 188
equation, Gleichung משואה 170
משואות ליניאריות 177/8, 291
equator (קו־) משוה 298
regular (perfect), regelmässig (vollkommen) משוכלל 188
to draw, mener, ziehen משוך, מתוח 282
meet (intersection), Durchschnitt משותף (בין קבוצות) 11
משחקים 314, 326
surface, Fläche משטח 183
— מהסדר השני 257
bilateral, unilateral s. — דו־צדדי, חד־צדדי 327—332
tangent משיק 171
Q.E.D. (quod erat demonstrandum) מש״ל = מה שרצינו להוכיח
knot, noeud, Knoten משלבת 337
complementary משלים
triangle, Dreieck משלש 409
theorem (proposition) משפט
— אוילר (על פיאון) 321
— בריאנשון 264/5
— דיזארג 173, 261—263
equivalence theorem — האקויולנטיות 46
— העקום של ז׳ורדן 317
well-ordering theorem — הסידור הטוב 122
— מואבר 187
— פסקל 264/5
— קנטור 44
— of the excluded middle, t. du tiers exclu (tertium non datur) — של השלישי הנמנע 74
oblique, schief משפע

משקל־נקודות (של מרחב) 346, 360
hexagon משֻשה 265
variable (dependent, independent) משתנה (תלוי, בלתי־תלוי) 8
corresponds ; relates מתאים 7
vanishes מתאפס 54 (=שוה ל 0)
divisible, teilbar מתחלק
proportion(al) מתכונת(י) 156, 165, 277, 294
convergent מתכנס 70
(ir)reducible (לא־) מתפרק 189

opposite (antipodal) נגדי 388/9
derivative, Ableitung נגזרת
formula נוסחה
multiplicand נכפל 92
recursion נסיגה 149
indefinite integral נסכמת
movable, beweglich נע
unknown נעלם 237
volume נפח 200, 213—217
side, Kathete נצב
point נקודה 176, 228, 363, 402, 416, 438
imaginary p. — דמיונית 174
fixed p. — יציבה 337/8
נקודות־מעגל דמיוניות 268
lattice points, points de grillage, Gitterpunkte נקודות־סריג 17
origin נקודת־ראשית (מוצא) 170, 249, 251

rotation סבוב 217/8
neighborhood, voisinage, Umgebung סביבה 338
closed, fermé, (ab)geschlossen סגור 203, 287, 303, 327, 424
succession, Reihenfolge סדירה 243

order סדר 81, 102, 163 ; 239, 405
lexicographic o. — לכסיקוגרפי 143
sequence, Folge סדרה 11, 15
type, Art סוג 110/1
ordinal סודר (מספר) 102
scale סולם 220
symmetric(al) סימטרי (יחס) 9
sign סימן (±) 199/200
sum סכום 11, 48, 50, 88, 90
— מסודר 88 ; 90
— הזוויות במשולש 162, 368, 380, 387, 414
to integrate, integration סכום, סכימה 167
integrable סכים 69, 205
definite integral סכם 201—207
adjunction ספוח 260
figure (digit), chiffre ספרה
to draw dash line, stricheln סרג
ruler, règle, Lineal סרגל 161, 184, 220
strip, Blatt סרט (של מביוס) 328, 331
lattice, grillage, Gitter סריג 17
implicit סתום
סתירות (אנטינומיות) 108, 118, 128

circle Kreisfläche עגול 208
excess עודף (של משולש) 388
deformation עוות (פועל: עות) 236, 299
succeeding עוקב 38, 81
hypersphere על־כדור 359
על־מקביל 377
sheet, Blatt עלה (של קרטיסיוס) 168/9
column עמוד
power, puissance, Mächtigkeit עצמה 38
עצמת הרצף 39, 117
factorial, Fakultät עצרת
foot, pied עקב 214

torsion עקול 328, 332
curvature, Krümmung עקום 394
curve(d) עקום (קו) 170, 183
— מהסדר השני, עיין חתכי־חרוט
— מחוסר משיק 307, 419
Peano curve — של פיאנו 306/7, 419—421
principle of permanence עקרון היציבות 48
multiplicative principle — הכפל (הבחירה) 71, 123/4, 206
generalized m. p. — — המוכלל 75
עקרונות־יצירה (למספרים סודרים) 111
absolute value (modulus) ערך מוחלט
— valued ־ערכי
decimal עשרוני

פאה, עיין פיאה
(arbitrary) function פונקציה (רצונית) 8, 34
differentiable f. — גזירה 307
normal f. — נורמלית 113
integrable f. — סכימה 69
constant f. — קבועה 34
(dis)continuous f. — (אי־)רציפה 68, 140, 201, 307, 422
exponential f. פונקצית־המעריך (e^x) 193
ordinate פוסק 170
flat (flattening), platt (Abplattung) פחוס (פחיסה) 389
side, face, Seitenfläche פיאה (תאר: פאתי) 213, 321
polyhedron פיאון 166, 213, 321
regular p. — משוכלל 323—326
unilateral (one-sided) p. — חד־צדדי 201, 284/5, 426

	פילוסופיה (עיין גם לוגיקה) 5, 77—79, 156—159, 194, 263, 301, 365, 371/2
solid angle, körperliche Ecke	פינה 214
	פיסיקה 155—159, 172, 184, 232/3, 241, 245, 297, 300, 313/4, 337/9, 363/5, 372, 382/5, 425
decomposition	פירוד (דרך חיבור) 280
specialization	פירוט
decomposition	פירוק (דרך כפל)
pyramid	פירמידה 156
surface, Oberfläche	פָּנים 207, 327
abscissa	פסוק 170
parabola	פָּרַבּוֹלה 167, 219
paraboloid	פרבולוֹאיד 234
particular	פָּרוּט
projective	פרוֹיֶקטיבי 222
reducible	פריק 189
perspective	פֶּרְסְפֶּקְטיבי 222; 242
	פשוט־קשר 320
simplex	פַּשטוֹן 347, 351
open	פתוּח 93, 203, 327
expansion, développement, Entwicklung	פִּתוּח
side	צד (עבר) 327/8
index	ציון 38
figure; painting	ציור 163; 242
axis	ציר 170, 172, 178, 258; 288
side, côté	צֶלַע 188, 409
plait, Zopf	צַמה 337
conjugate	צמוד 171
adjacent angle, Nebenwinkel	זָוית צמודה 412
to reduce	צִמְצֵם
dense, dicht	צפוף 8, 93, 209

	צפוף בתוכו 287
combination	צֵרוּף
constant	קבוע 34
set (aggregate), ensemble, Menge	קבוצה 5
infinite (transfinite) s.	— אינסופית (על־סופית) 12, 13, 76
de-numerable (countable) s., e. dénombrable, abzählbare M.	— בת־מניה (ניתנת להמנוֹת) 15 (113)
subset, Teilmenge	— חלקית 9
proper subset	— — ממש 10
meet (sum-set), Vereinigungsmenge	— כוללת 11
abstract set	— מופשטת 5, 95
enumerated set	— מנוייה 15
	— של נקודות 95
ordered s.	קבוצה סדורה 81
partly o. s.	— — באופן חלקי 87
well-ordered s.	— — היטב 97
finite s.	— סופית (פִּיניטית) 12, 13, 76, 119—121
null-set	קבוצת האפס 11
power-set	— הַחֲזקה 44, 64
insertion-set, Belegungsmenge	— הַהַרכבה 64
vertex, sommet, Ecke	קדקוד 200, 409, 410
obtuse, stumpf	קהה (זוית) 2·9
line	קו
	— המספרים 4
	— ז׳ורדן (סגור) 317
co-ordinate	קוֹאורדינטה (שעור) 170
barycentric c.	— בָּרִיצֶנטרית 164
cube	קוביה 67, 325

precedes	קודם 80
pole	קוטב 167
polar	קָטבי 167
diameter, Durchmesser	קוטר 207/8; 288
linear	קוי 237, 342, 404
collineation	קוליניאריות (היטליות) 297
commutative	קוֹמוטטיבי (חילופי) 47
determinant	קוֹצֵב 237/8, 240
to hatch, hacher, schraffieren	קִוְקֵו 275
	קטן מ— 42, 46, 102
segment, Strecke	קטע 180, 209, 406
extremum (-al)	קיצון
convex	קמור 214
scale, échelle, Masstab	קנה־מִדה 219
concave	קעור
extremity, Ende	קָצֶה, קְצָה 209, 378
ray, Halbstrahl	קרן (או חצי־קרן) 220, 408
diagonal	קרנָזוֹל (אלכסון) 235
connected, zusammenhängend	קָשיר 319
to join, verbinden	קָשֵר
connexion, Zusammenhang	קֶשר (פָּשוט־, כפול־ וכו׳) 320, 335
arc, Bogen	קשת
	— של ז׳ורדן 317
section, segment, Abschnitt	ראש 99
	ראשון 81
prime	ראשוני (מספר) 20
primitive	— (מושג, יחס) 399—402
origin	ראשית (הצירים) 170
multiply connected	רב־קשר 320
quadrant	רָביע
quadruple	רביעיה 245
interval	רוח (ריוח) (סגור, פתוח) 203
distance	רוֹחק 219, 259, 363/4
multiplicity	ריבוי

square, carré, Quadrat	ריבוע
	ריבועי (קו, משוואה) 239
initial, Anfangsstück	רישה 99
(ir)reflexive	(אי־)רֶפלֶקסיבי (חוזר על עצמו) 8, 102
arbitrary, willkürlich	רצוני (שרירותי)
rational	רציוֹנלי (מספר, נקודה) 17/18
continuous, stetig	רָציף 68, 302
continuum	רֶצֶף 28, 32
linear c.	— קווי 94, 301—305, 418
remainder, reste	שארית 12, 113
fraction (rational number)	שבר (רגיל) 17
decimal	— עשרוני 28, 285
	— דואלי, שלשוני 36, 210/1
field, corps, Körper	שדה
equilateral	שוה־צלעות 162
	שוה־הפרדה, ־השלמה, ־שטח (נפח) 196, 213, 381
isosceles	שוה־שוקיים 274
(in)equality	(אי־)שויון 162, 163, 235
	שויון בין טיפוסי־סדר 86
	— — מונים (עָצמות) 37
	— — קבוצות 6
	— — — סדורות 82
	— — שטחים 196
boundary, Rand	שוליים (שפה) 195
	שונה, עיין שויון
arm, côté, Schenkel	שוֹק 410
(square) root	שורש (ריבועי)
straight, gestreckt	שטוחה (זוית)
area	שטח 195—208, 240, 381
maximum	שיא
diagonal method	שיטת־אלכסון 18, 31, 35
layer, couche, Schicht	שכבה 215
negative	שלילי

שלישיה		triple
שמורה	171/2, 231, 260	invariant
שעור	170, 249	co-ordinate
מערכת־שעורים (ימנית, שמאלית)	200	
שעורים הומוגיניים	249—252	homogeneous c.
שפה, עיין שוליים		
שֵפֶל		minimum
שרירותי (רצוני)		arbitrary
שֵשון	324	hexahedron
תָא	351	cell
תָאום	355	symmetrical
תאון	353	poly-cell
תאון־מידה	354	
תאורי	173	descriptive, darstellend
תבנית		model (form : באלגברה)
תג '	219	dash, sign, Strich
תהליך		process
תחום (סגור)	318, 320	(closed) domain, Gebiet
תיבה	156	rectangular parallelepiped
תכולה	202, 353/4	content, étendue, Inhalt
(אי־)תלות	370	(in)dependence
תלַת־מְמדי		tri-dimensional
תמורה	243	permutation
תמָניון	324/5	octahedron
תנועה	162, 223, 236	motion, Bewegung
תצורה	299	configuration
תָקין		normal
תַרבוע העיגול	184, 191	squaring the circle
תְריסרון	324/5	dodecahedron
תַרשים(־יסוד)	218	design(plan),(Grund-)Riss

סימנים

$=$, $\neq$, עיין שויון	
ε	5
$\{\ \}$	7, 203
$(\ )$	11, 77, 203
$\subset$, $\subseteq$	9, 10
$\equiv$	176, 409, 411
$>$, $<$	42, 102, 162
$\leq$	42
$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Z}$	80, 81
$+$	11, 48, 50, 88, 90
$-$	12, 110, 114, 118
$\cdot$	11, 52, 53, 92
$\times$	52, 53; 164
$\sim$	7
$\cong$	83
$\measuredangle$	410
$\bar{S}$ (קרי S-גג)	86
$\bar{\bar{S}}$ (קרי S-גַגיים)	86
$(S\|T)$	64
$\bar{\sigma}$	86
σ^*	86
$'$ (קרי: תָג; למשל a': a-תג)	9
lim	111
$Z(\aleph_\nu)$	116
0	11, 37, 82, 86
$\aleph_0$, $\aleph_n$	38, 115/6
$\aleph$	39
e	191
i	267
η	94, 145
λ	304
π	156, 166, 191
ω	86
ω_ν	116
$\mathfrak{f}$	39
∞	179, 244
PQ (ישר)	177
$\overline{PQ}$ (קטע)	180
sin	247

הא"ב היווני: $A\ \alpha\ B\ \beta\ \Gamma\ \gamma\ \Delta\ \delta\ E\ \varepsilon\ Z\ \zeta\ H\ \eta\ \Theta\ \vartheta\ I\ \iota\ K\ \varkappa\ \Lambda\ \lambda\ M\ \mu$
$N\ \nu\ O\ o\ \Pi\ \pi\ P\ \varrho\ \Sigma\ \sigma\ T\ \tau\ Y\ \upsilon\ \Phi\ \varphi\ X\ \chi.\ \Psi\ \psi\ \Omega\ \omega$

מפתח השמות

(השוה I, 365)

הגר"א (הגאון ר' אליהו, הגאון מוילנה) (1720—1797) 160.

הרלב"ג (לוי בן גרשון) (1288?—1344?) 168.

ד. מאוחד (קלינגהופר) (1904—1943) 39, 383. עיין בביוגרפיה שבספר העברי המצוטט שם.

קבקר (היום: אליוסף), נתן, 408. גומר האוניברסיטה העברית, מורה בת"א.

רוזנצווייג, חיים, 160. מת' ישראלי.

E. A. Abbot (1838—1926) 351.

N. H. Abel (1802—1829) (עיין בכרך א') 31, 335.

W. Ahrens (1872—1927) 326. מת' וסופר גרמני

J. W. Alexander 309. מת' אמריקני חשוב

P. Alexandroff (1896—) 300. מת' רוסי חשוב

B. Amira (1896—) 197. פרופ'—חבר באוניברסיטה העברית

D. Amira 414. מת' ישראלית מוכשרת, היתה מורה תיכונית

Apollonios (c. 265—170 לפנה"ס) (עיין בכרך א') 160, 167, 170.

Archimedes (287—212 לפנה"ס) (עיין בכרך א') 160, 165—169, 191, 198, 213—216, 282, 294, 369, 397, 415—417, 430—439.

Aristoteles (אריסטו) (384—322 לפנה"ס) (עיין בכרך א') 6. 27, 74, 156, 159.

E. Artin (1898—) 337. מת' גרמני חשוב, עבר עם קום היטלר לארה"ב

H. F. Baker (1866—1956) 174, 401. מת' בריטי

R. Baldus (1885—1945) 371. מת' גרמני

S. Banach (1892—1945) 207, 217. חוקר פולני מעולה בעיקר בטופולוגיה ובת"-הקבוצות

P. Barbarin (1855—?) 371. מת' צרפתי

G. Battaglini (1826—1894) 372. מת' איטלקי

E. T. Bell (1883—) 339. מת' בריטי, עבר לארה"ב

E. Beltrami (1835—1900) 372, 383. מת' איטלקי

F. Bernstein (1878—) 119, 131. מת' גרמני ממוצא יהודי, עבר עם קום היטלר לארה"ב

E. Bertini (1846—?) 351. מת' איטלקי

L. Bieberbach (1886—) 419. מת' גרמני חשוב שהתנגד ב 1933 למת' יהודים מטעמי גזע

Garrett Birkhoff 87. מת' אמריקני

G. D. Birkhoff (1884—1944). מת' אמריקני מעולה, אביו של הקודם

W. Blaschke (1885—) 183/4, 351. מת' גרמני, נאצי

P. du Bois-Reymond (1831—1889) 22. מת' גרמני

Johann Bolyai (1802—1860) 366, 369, 371. מת' הונגרי מוכשר מאד, אחד מממציאי הגיאומטריה הלא־אבקלידית

Wolfgang Bolyai (1775—1856) 196, 366, 369. מת' הונגרי, אביו של הקודם, היה ידידו של גאוס

B. Bolzano (1781—1848) (עיין בכרך א') 24, 74, 308.

R. Bonola (1874—1911) 371. מת' איטלקי

G. Boole (1815—1864) 24, 231. מת' ופילוסוף בריטי

E. Borel (1871—) 131, 203—207. מת' ומדינאי צרפתי חשוב

G. L. Bouligand (1889—) 308. מת' צרפתי

N. Bourbaki 300. (שם דמיוני לקבוצת חוקרים צרפתיים מעולים)

C. J. Brianchon (1785—1864) 174, 261—6. מת' צרפתי חשוב

L. E. J. Brouwer (1881—) 300, 308, 318, 337. מת' הולנדי, טופולוג מעולה

M. Brückner (1860—?) 322. מת' גרמני

G. L. L. Buffon (1707—1788) 337. חוקר מפורסם בביולוגיה ובתורת ההסתברות

C. Burali-Forti (1861—1931). מת' איטלקי

J. C. Burkill. מת' בריטי

G. Cantor (1845—1918) (עיין בכרך א') 5, 6, 19, 22—24, 27, 29, 31, 33/4, 38—41, 43/4, 47/8, 57, 62, 68, 73, 80, 97, 109, 111, 114, 123—131, 144/5, 202, 212, 300, 306, 415, 439.

C. Carathéodory (1873—1950) 96, 203. מת' יווני מעולה, חי בעקר בגרמניה

R. Carnap (1891—) (עיין בכרך א'), 39.

L. N. M. Carnot (1753—1823) 164, 173, 242. חוקר צרפתי חשוב בגיאומטריה, מדינאי נודע

Carroll, Lewis [C. L. Dodgson] (1823—1898) 6. מת' (ותיאולוג) בריטי, מחבר הספר *Alice in Wonderland* וכו'

H. S. Carslaw (1870—1954) 371. מת' בריטי

E. Cartan (1869—1951) 371. מת' צרפתי מעולה

E. Cassirer (1874—1945) 39. פילוסוף יהודי חשוב בגרמניה, גורש ע"י היטלר, יצא מהאסכולה הניאו־קנטית של הרמן כהן

G. Castelnuovo (1865—1952) 185. גיאומטר יהודי איטלקי חשוב

A. L. Cauchy (1789—1857) (עיין בכרך א') 18, 31, 299.

B. Cavalieri (1591?—1647) 216. מת' איטלקי, מתלמידי גליליאו ומסוללי הדרך לחשבון האינפיניטסמלי

A. Cayley (1821–1895) (עיין בכרך א׳) 171, 225, 232, 259, 260, 311/2, 321, 323, 370, 425.

M. Chasles (1793–1880) 173/4. מת׳ צרפתי חשוב

E. W. Chittenden (1885–) 338. מת׳ אמריקני

C. Chojnacki (חנני) 312. מת׳ יהודי מפולין, דוקטור האוניברסיטה העברית, פרופ׳–חבר בטכניון בחיפה

S. Cohn-Vossen (1902–) 300. מת׳ יהודי מגרמניה, גורש ע״י היטלר

J. L. Coolidge (1873–1954) 159, 371. מת׳ אמריקני

H. S. M. Coxeter 225, 322, 371. מת׳ קנדי

A. Cronheim 264. מת׳ יהודי–אמריקני

R. Dedekind (1831–1916) (עיין בכרך א׳) 24, 112, 121/2, 124, 132, 164, 302/3, 306/7, 397, 415/7, 439. השוה אזכרתו של Landau ב *Göttinger Nachrichten* משנת 1917

M. Dehn (1878–1952) 156, 163, 213, 321, 369, 401, 431. מת׳ גרמני ממוצא יהודי, גורש ע״י היטלר

Demokritos (460?–370? לפה"ס) 159. פילוסוף (ומתימטיקן) יווני מעולה

G. Desargues (1593–1661) (עיין בכרך א׳) 173, 261–3, 272, 294.

R. Descartes [Cartesius] (1596–1650) (עיין בכרך א׳) 27, 169–171, 183, 321.

L. E. Dickson (1874–1954) (עיין בכרך א׳) 278.

D(e)inostratos (אמצע המאה ה 4 לפה"ס) 191. מת׳ יווני, מתלמידיו של אפלטון

Diophantos (סוף המאה השלישית לספירה) 167/8. מת׳ יווני חשוב

R. D. Douglass 175. מת׳ אמריקני

H. Driesch (1867–?) 372. ביולוג ופילוסוף גרמני

W. Dubislav (1895–1937) 39. פילוסוף גרמני

W. von Dyck (1856–1934) 328. מת׳ גרמני

A. S. Eddington (1882–1944) 351, 383/4. פיסיקן, אסטרונום ופילוסוף בריטי מעולה

S. Eilenberg 300. מת׳ יהודי מפולין, היום בארה"ב, טופולוג מצויין

A. Einstein (1879–1955) (עיין בכרך א׳) 232, 384.

L. P. Eisenhart (1876–) 183, 371. מת׳ אמריקני חשוב

F. G. M. Eisenstein (1823–1852) (עיין בכרך א׳) 168.

G. Eneström (1852–1923) 48. מת׳ שוודי, היסטוריון של המת׳

F. Engel (1861–1941) 365/6, 368. מת׳ גרמני

F. Enriques (1871–1946) (עיין בכרך א׳) 160, 185.

P. Epstein (1871–1939) 197. מת׳ יהודי–גרמני

Eratosthenes (276–195? לפה"ס) 167. ספרן וגיאוגרף יווני באלכסנדריה

A. Errera (1886–) 312. מת׳ יהודי–בלגי

Eudoxos (c. 410– c. 356 לפה"ס) (עיין בכרך א׳) 159, 165, 167.

Eukleides [Euclid] (c. 320 לפה"ס) (עיין גם בכרך א׳) 160–167, 181–184, 197/8, 213/4, 227, 261, 274, 323, 342, 365–399.

L. Euler (1707–1783) (עיין בכרך א׳) 192, 222, 299, 311/2, 314, 321–324, 426.

K. Fan 300, 309. מת׳ צרפתי–אמריקני

J. Farvard 308. מת׳ צרפתי.

T. E. Faulkner 225. מת׳ בריטי.

H. Federer 195 מת׳ אמריקני.

M. Fekete (1886–1957) 208. מת׳ יהודי חשוב מהונגריה, היה פרופסור באוניברסיטה העברית

P. de Fermat (1601–1665) (עיין בכרך א׳) 31, 169–171, 183

H. G. Forder 234, 401. מת׳ בריטי (בניו־זילנד)

A. R. Forsyth (1858–1942) 351. מת׳ בריטי

A. Fraenkel (1891–) (עיין בכרך א׳) 29, 41, 65, 123/4, 168, 285, 383.

P. Franklin 312. מת׳ יהודי־אמריקני

M. Fréchet (1878–) 300, 309, 338. מת׳ צרפתי מעולה

G. Frege (1848–1925) (עיין בכרך א׳) 24, 40.

C. M. Fulton 417. מת׳ אמריקני

G. Galileio (1564–1642) (עיין בכרך א׳) 12.

E. Galois (1811–1832) (עיין בכרך א׳, וגם באנציקלופידיה העברית כרך י׳) 119, 188, 190.

C F. Gauss (1777–1855) (עיין בכרך א׳, וגם באנציקלופידיה העברית, כרך י׳) 3, 27, 188, 213, 252, 280, 299, 300, 314, 337, 369, 371, 381, 394, 432.

A. Gelfond (עיין בכרך א׳) 193.

J. D. Gergonne (1771–1859) 174, 229. מיסד ה *Annales des mathématiques pures et appliquées*.

L. Godeaux (1887–) 183, 225. מת׳ בלגי.

K. Gödel (1906–) 44, 125, 263, 399. חוקר אוסטרי מעולה ביסודות המת׳, מגדולי דורנו, עבר בשנות ה 30 לארה"ב

R. L. Goodstein 401. מת׳ ופילוסוף אמריקני

P. A. Gordan (1837–1912) (עיין בכרך א׳) 231.

H. G. Grassmann (1809–1877) 350. מת׳ גרמני מעולה (גם חוקר בבלשנות השוואתית); גאוניותו במת׳ לא הוכרה ע״י בני דורו

L. M. Graves 95. מת׳ אמריקני
Francis Guthrie 311. מת׳ בריטי—דרום־אפריקני
Frederick B. Guthrie (1861—?) 311, 423. כימאי בריטי (אוסטרלי)
H. Hadwiger 196. מת׳ גרמני
G. Haenzel (1898—1944) 111. מת׳ גרמני
H. Hahn (1879—1934) 96, 307. מת׳ אוסטרי חשוב ממוצא יהודי
P. R. Halmos 195. מת׳ אמריקני חשוב
G. B. Halsted (1853—?) 366, 401. מת׳ אמריקני
W. R. Hamilton (1805—1865) (עיין בכרך א׳) 326.
G. H. Hardy (1877—1947) (עיין בכרך א׳) 22.
F. Hartogs (1874—1943) 124. מת׳ גרמני ממוצא יהודי
F. Hausdorff (1868—1942) 41, 65, 95, 113, 119, 144, 206—208, 217, 338. מת׳ יהודי—גרמני מעולה, התאבד לרגל רדיפות המשטר הנאצי
T. L. Heath (1861—1940) 159, 160. פקיד ממשלתי בריטי, חוקר חשוב במת׳ עתיקה
P. J. Heawood (1861—?) 312.
E. R. Hedrick (1876—) 234. מת׳ אמריקני
L. Heffter (1862—?) 310, 335. מת׳ גרמני
I. L. Heiberg (1854—1928) (עיין בכרך א׳) 160, 162.
H. von Helmholtz (1821—1894) (עיין בכרך א׳) 372.
C. Hermite (1822—1901) (עיין בכרך א׳) 192.
Heron (בערך 100 לפה״ס) 166—168, 216. חוקר יווני במת׳ שמושית
G. Hessenberg (1874—1925) (עיין בכרך א׳) 118, 191, 263.
D. Hilbert (1862—1943) (עיין בכרך א׳) 43, 73, 119, 173, 182, 193, 196—198, 213, 263, 282, 294, 300, 307, 314, 369, 377/8, 382, 397—417, 419, 436.
Hipparchos (במאה השניה לפה״ס) 167, 170, 298. מת׳ ואסטרונום יווני, מחולל הטריגונומטריה הספירית.
Hippias (סוף המאה ה 5 לפה״ס) 191. מראשוני הגיאומטרים היווניים
Hippokrates (סוף המאה ה 5 לפה״ס) 190. מת׳ יווני חשוב
P. de la Hire (1640—1718) 289. מת׳ צרפתי
E. W. Hobson (1856—1933) 184, 204. מת׳ בריטי
W. V. D. Hodge 183. מת׳ בריטי חשוב
T. F. Holgate 253. מת׳ בריטי
R. I. Holzberg (Ezion) 371. פדגוג ישראלי
H. Hopf (1894—) 300. מת׳ חשוב ממוצא יהודי, חי בגרמניה ואחר כך בשוייץ
G. E. Hudson 184. מת׳ אמריקני

D. Hume (1711—1776) 36. פילוסוף בריטי מפורסם
E. V. Huntington (1874—1952) 303. מת׳ אמריקני
W. Hurewicz (1904—1956) 308. מת׳ יהודי—פולני, עבר לארה״ב
C. Huygens (1629—1695) 191. מת׳ ופיסיקן הולנדי מעולה, ממחוללי החשבון האינפיניטסימלי
W. M. Ivins, Jr. 173. היסטוריון אמריקני
C. G. J. Jacobi (1804—1851) (עיין בכרך א׳) 168.
R. L. Jeffery 204. מת׳ קנדי
C. Jordan (1838—1922) 202—207, 307, 317—9. מת׳ צרפתי מעולה
P. E. B. Jourdain (1879—1919) 6, 41, 118, 123. מת׳ בריטי
B. Kagan 213. מת׳ יהודי—רוסי
E. Kamke (1890—) 41, 204. מת׳ גרמני
I. Kant (1724—1804) (עיין בכרך א׳) 157, 314, 365, 371.
J. Kepler (1571—1630) (עיין בכרך א׳) 167, 383.
R. Kirchhoff (1824—1887) 314. פיסיקן גרמני מעולה
F. Klein (1849—1925) (עיין בכרך א׳) 189, 225, 231, 234, 328—336, 370/1, 378.
K. Knopp (1882—) (עיין בכרך א׳) 307, 318.
H. von Koch (1870—1924) 318. מת׳ שוודי
J. König (1849—1913) 65. מת׳ הונגרי חשוב ממוצא יהודי
L. Kronecker (1823—1891) (עיין בכרך א׳) 27, 299, 305.
C. Kuratowski (1896—) 300, 307. מת׳ פולני מצוין
J. H. Lambert (1728—1777) (עיין בכרך א׳) 192, 368/9.
L. Langel 401. מת׳ צרפתי
H. Lass 184. מת׳ בריטי
M. L. Latham 170.
H. Lebesgue (1875—1941) 95, 122, 203—208, 307. מת׳ צרפתי מעולה
S. Lefschetz (1884—) 300. מת׳ יהודי—רוסי מעולה, היה מנהל המחלקה למת׳ באוניברסיטת פרינסטון עד צאתו לפנסיה
A. M. Legendre (1752—1833) (עיין בכרך א׳) 192, 368/9, 382.
G. W. Leibniz (1646—1716) (עיין בכרך א׳) 24, 39, 171, 192, 299, 326, 340.
Leonardo da Vinci (1452—1519) 242. מגדולי הציירים, וחוקר מדעי רב־צדדי
B. Levi (1875—) 72. מת׳ יהודי—איטלקי חשוב, עבר לארגנטינה לרגל האנטישמיות הפשיסטית
F. W. Levi (1888—) 263. מת׳ גרמני־יהודי, גורש ע״י היטלר ועבר להודו
T. Levi-Civita (1873—1941) 351. מת׳ יהודי—איטלקי מעולה
C. I. Lewis 24. פילוסוף אמריקני חשוב

(M.) S. Lie (1842–1899) (עיין בכרך א׳) 231, 297.
H. Liebmann (1874–1939) 371. מת׳ גרמני ממוצא יהודי
W. Lietzmann (1880–) 197. מת׳ ופדגוג גרמני
C. L. F. Lindemann (1852–1939) (עיין בכרך א׳) 192/3.
J. Liouville (1809–1882) (עיין בכרך א׳) 192.
J. B. Listing (1808–1882) 300, 328. מת׳ גרמני מקורי
J. E. Littlewood (1885–) (עיין בכרך א׳) 41.
N. I. Lobachevski (1792–1856) 366–382. מת׳ רוסי מעולה, המציא את יסודות הגיאומטריה הלא־אבקלידית (ההיפרבולית)
J. Locke (1632–1704) 27. פילוסוף בריטי, מחולל דרכים חדשות
A. Loewy (1873–1935) (עיין בכרך א׳) 156, 190, 436.
J. Lüroth (1844–1910) 307/8. מת׳ גרמני
N. Lusin 125. מת׳ רוסי חשוב
W. H. McCrea 175. מת׳ בריטי
E. J. McShane 204. מת׳ אמריקני
A. MacLeod 371, 401.
D. B. Mair 350.
H. P. Manning (1859–?) 350. מת׳ אמריקני
J. C. Maxwell (1831–1879) 321. פיסיקן בריטי מעולה
K. M. Mayrhofer (1899–) 195. מת׳ אוסטרי
Menaichmos (אמצע המאה ה 4 לפה״ס) 190. גיאומטר יווני, מתלמידי אבדוקסוס
Menelaos (Menelaus) (סוף המאה הראשונה) 181. אסטרונום יווני, חי באלכסנדריה.
A. Menge 160.
K. Menger 308. מת׳ אוסטרי חשוב (ממוצא יהודי), עבר בשנות ה 30 לארה״ב
E. Meyerson (1859–1933) 39, 233. פילוסוף יהודי—צרפתי
J. S. Mill (1806–1873) 371/2. פילוסוף וכלכלן בריטי מעולה
H. Minkowski (1864–1909) (עיין בכרך א׳) 208.
A. F. Möbius (1790–1868) 164, 171, 255, 284/5, 300, 311, 328, 427. מת׳ גרמני חשוב
A. de Moivre (1667–1754) (עיין בכרך א׳) 187.
G. Monge (1746–1818) 173. מת׳ צרפתי חשוב
E. H. Moore (1862–1932) (עיין בכרך א׳) 307, 408.
R. L. Moore 95, 307, 401. מת׳ אמריקני חשוב
A. de Morgan (1806–1878) 311. מת׳ ולוגיקן בריטי חשוב
A. P. Morse 218. מת׳ אמריקני
A. Mostowski 123. מת׳ פולני מעולה

T. Motzkin (1908–) 160, 183. מת׳ יהודי, היה מרצה באוניברסיטה העברית, עתה בארה״ב
C. Mugler 159. חוקר צרפתי
M. E. Munroe 195. מת׳ אמריקני.
Zeev Nehari 298. מת׳ יהודי חשוב, עבר מישראל לארה״ב
O. Neugebauer (1889–) 155. מת׳ אוסטרי—גרמני, עבר בשנות ה 30 לארה״ב, חוקר בתולדות המת׳
J. von Neumann (1903–1957) 112, 218. מת׳ הונגרי—יהודי מעולה ורב־צדדי, מגדולי דורנו. עבר בשנות ה 30 לארה״ב
M. H. A. Newman 300. מת׳ בריטי
I. Newton (1642–1727) (עיין בכרך א׳) 171, 383.
J. G. P. Nicod (1893–1924). 39 לוגיקן צרפתי חשוב
G. Nöbeling 308. מת׳ אוסטרי
C. A. Noble 234. מת׳ אמריקני
F. Ollendorf (1900–) 184. מת׳ (שימושי) ישראלי חשוב, פרופ׳ בטכניון בחיפה
N. Oresme (1323?–1382) 170. תיאולוג ומת׳ צרפתי
W. F. Osgood (1864–1943). מת׳ אמריקני חשוב
A. Ostrowski (1893–) 229. מת׳ יהודי—רוסי חשוב, פרופ׳ באונ׳ של בזל
Pappos (ca. 300) 242, 247, 261, 263. מת׳ יווני באלכסנדריה
B. Pascal (1623–1662) (עיין בכרך א׳) 173/5, 261–6, 293/4.
M. Pasch (1843–1929) 162/3, 169, 180, 376, 401, 406/7. מת׳ יהודי—גרמני, ממחוללי האכסיומטיקה
E. M. Patterson 300.
G. Peano (1858–1932) (עיין בכרך א׳) 24, 72, 202–204, 306/7, 419.
D. Pedoe 183. מת׳ בריטי, פרופ׳ בסודאן
C. S. Peirce (1839–1914) (עיין בכרך א׳) 24.
Platon (אפלטון) (c. 429–c. 348 לפנה״ס) (עיין בכרך א׳) 159, 324.
A. Plessner (1900–) 204. מת׳ יהודי פולני—רוסי.
J. Plücker (1801–1868) 171, 229, 297. מת׳ גרמני, מגדולי הגיאומטרים של המאה ה 19.
J. C. Poggendorff (1796–1877) 314. פיסיקן גרמני.
J. V. Poncelet (1788–1867) 173/4, 229, 242, 269. מת׳ צרפתי מעולה
H. Poincaré (1854–1913) (עיין בכרך א׳) 11, 29, 119, 227, 300, 305, 308, 321, 338, 371.
L. S. Pontryagin 300. מת׳ רוסי
E. J. F. Primrose 401. מת׳ בריטי

Proklos (Proclus) (412—485) 161. מת׳ יווני מאוחר

Ptolemaios (תַּלמי) (אמצע המאה השניה) 167, 170. האסטרונום המפורסם, ממחוללי הטריגונומטריה

Pythagoras (ca. 550 לפנה״ס) (עיין בכרך א׳) 154, 156, 185, 197, 236, 245, 316.

H. Rademacher (1892—) 321. מת׳ גרמני חשוב, עבר בשנות ה 30 לארה״ב

T. Rado (1895—) 195. מת׳ הונגרי, עבר לארה״ב

K. Reidemeister (1893—) 264, 337. מת׳ גרמני חשוב

C. Reinhardt (1855—?) 427. מת׳ גרמני.

N. Remond (סוף המאה ה 17) 326.

G. Ricci (—Curbastro) (1853—1925) 351. מת׳ איטלקי חשוב

B. Riemann (1826—1866) (עיין בכרך א׳) 69, 157, 203—207, 232/3, 298—300, 335, 365, 372, 382—387, 391, 393.

A. Robinson (1918—) 183. פרופסור באוניברסיטה העברית (מקודם פרופסור בטורונטו של קנדה)

G. de B. Robinson 264, 401. מת׳ בקנדה.

A. Robson 175. מת׳ בריטי

W. W. Rogosinski (1894—) 204. מת׳ יהודי—גרמני, פרופ׳ באנגליה.

A. Rosenthal (1887—) 412. מת׳ יהודי—גרמני, פרופ׳ בארה״ב

L. Roth 183. מת׳ בריטי

O. Rozet 225. מת׳ בלגי

P. Ruffini (1765—1822) (עיין בכרך א׳) 31.

B. Russell (1872—) 5, 24, 39/40, 71, 399. עיין בכרך א׳ וברשימה של א״ה פרנקל ב„דבר" (ת״א) מכ״ח באייר תשי״ב

D. E. Rutherford (1906—) 184. מת׳ בריטי

G. Saccheri, S. J. (1667—1733) 366—369, 382, 395. תיאולוג איטלקי, בעל זכות גדולה לקראת הגיאומטריה הלא־אבקלידית

S. Saks 204. מת׳ פולני

G. Salmon (1819—1904) 260. מת׳ בריטי

G. Sansone (1888—) 96 מת׳ איטלקי

L. Schlesinger (1864—1933) 204. מת׳ הונגרי ממוצא יהודי, עבר ב 1911 לגרמניה

E. Schmidt (1876—). מת׳ גרמני

A. Schoenflies (1853—1928) 306, 318. מת׳ יהודי—גרמני

H. Scholz (1884—1956) 24, 39. פילוסוף גרמני, מטובי החוקרים בלוגיקה מתימטית

P. H. Schoute (1846—1913) 353. מת׳ הולנדי.

J. A. Schouten (1883—) 351. מת׳ הולנדי חשוב

E. Schröder (1841—1902) 24, 79. מת׳ גרמני, חוקר חשוב בלוגיקה מת׳

F. K. Schweikart (1780—1857) 369. משפטן גרמני בעל זכויות בגיאומטריה הלא־אבקלידית

A. R. Schweitzer (1878—) 408. מת׳ אמריקני

H. Schweitzer 39. לוגיקן גרמני

C. Segre (1863—1924) 351. מת׳ יהודי - איטלקי חשוב

H. Seifert 300. מת׳ גרמני

J. G. Semple 183. מת׳ בריטי

W. Sierpiński (1882—) 41, 43, 126, 300, 307. מת׳ פולני חשוב ופורה

D. E. Smith (1860-1944) (עיין בכרך א׳) 170, 191/2, 331.

H. J. S. Smith (1826—1883) 212. מת׳ בריטי חשוב

D. M. Y. Sommerville (1879—1934) 175, 351, 371. מת׳ בריטי (בניו־זילאנד)

E. Sperner (1905—) 308. מת׳ גרמני

E. Spinoza (1632—1677) 27, 153. פילוסוף יהודי־הולנדי מפורסם

B. Stäckel (1862—1919) 365/6, 368. מת׳ גרמני

K. C. G. von Staudt (1798—1867) (עיין בכרך א׳) 174/5, 225, 258, 269, 272.

N. Steenrod 300. מת׳ אמריקני

J. Steiner (1796—1863) 174. גיאומטר שויצרי חשוב, היה פרופ׳ בברלין

E. Steinitz (1871—1928) 23, 114, 321, 328. מת׳ גרמני—יהודי מעולה. מחולל העיקרי של האלגברה המופשטת

O. Stolz (1842—1905) 269. מת׳ אוסטרי

M. H. Stone 339. מת׳ אמריקני חשוב

D. J. Struik (1894—) 183, 253. מת׳ הולנדי, פרופ׳ בארה״ב

J. J. Sylvester (1814—1897) 231/2, 260, 425. מת׳ יהודי—בריטי מעולה

P. G. Tait (1831—1901) 313, 337. פיסיקן בריטי חשוב

A. Tarski 76, 119, 217. מת׳ פולני מעולה ממוצא יהודי, עבר בשנות ה 30 לארה״ב

R. Taton 173. מת׳ צרפתי

F. A. Taurinus (1794—1874) 369. מת׳ גרמני בעל מסקנות מקוריות בגיאומטריה הלא־אבקלידית

Thales (624?—548? לפה״ס) 156. מת׳ יווני (ממילטוס) מהתקופה הקדומה, שלפי המסורת ביטא בראשונה כמה משפטים גיאומטריים בצורה עיונית

T. Y. Thomas 232. מת׳ אמריקני

W. Threlfall (1888—) 300. מת׳ גרמני

A. Tietze (1880—) 423. מת׳ אוסטרי־גרמני

E. J. Townsend 204, 401. מת׳ אמריקני

W. T. Tutte 313. מת׳ קנדי

P. Urysohn (1898–1924) 308. מת׳ רוסי חשוב

C. de la Vallée Poussin (1866–) 95. מת׳ בלגי חשוב

O. Veblen (1880–) 155, 225, 232, 300, 401. מת׳ אמריקני חשוב (יצא בפומבי נגד התעללות הנאצים במת׳ יהודים)

G. Veronese (1854–1917) (עיין בכרך א׳) 350, 415.

G. Verriest 371.

F. Vieta (Viète) (1540–1603) 170. משפטן צרפתי, ממחוללי האלגברה במובן החדיש

G. Vitali (1875–1932) 96, 203. מת׳ איטלקי חשוב

H. de Vries (1867–1950) 351. מת׳ הולנדי (לא יהודי) שבילה את שנותיו האחרונות בבנימינה (ישראל)

A. Wald (1902–1950) 407. מת׳ יהודי מהונגריה, עבר ב 1939 לארה״ב. סלל דרכים חדשות בסטטיסטיקה מתימטית. נהרג באסון אוירי בהודו

J. Wallis (1616–1703) 366. מת׳ אנגלי חשוב מתקופת המצאתו של החשבון האינפיניטסימלי

H. Wallman 308. מת׳ שוויצי

W. C. Welchman 183. מת׳ בריטי

C. T. W. Weierstrass (1815–1897) (עיין בכרך א׳) 74.

R. Weitzenböck (1885–) 351. מת׳ אוסטרי, אחר כך בהולנד, היה נאצי פעיל

H. Weyl (1885–1955) (עיין בכרך א׳) 24, 39, 339, 354, 382/3.

A. N. Whitehead (1861–1947) (עיין בכרך א׳) 253.

J. H. C. Whitehead 232. מת׳ בריטי

J. M. Whittaker 132 מת׳ בריטי

E. Wolfe 371.

F. S. Woods (1864–?) 371. מת׳ אמריקני

J. W. A. Young (1877–1932) 191, 225, 253, 401. מת׳ אמריקני

W. H. Young (1863–1942) 203, 208. מת׳ בריטי חשוב

O. Zariski (1899–) 183. מת׳ יהודי–פולני חשוב, עבר בשנות ה20 לאיטליה, ואחר־כך לארה״ב

S. D. Zeldin 175. מת׳ אמריקני

E. Zermelo (1871–1956) 24, 41, 65, 71, 122/3. מת׳ גרמני חשוב

סוף דבר

מטעמים שאינם תלויים במחבר או במדפיס נתאחרה בארבע שנים הופעת החטיבה השלישית (האחרונה) הזאת של הכרך השני ל„מבוא למתימטיקה". כתב־היד של כרך זה נמסר למו״ל לפני 12 שנה ורבים היו הקשיים החיצוניים בדרך להשלמתו. אודה בייחוד לבעל דפוס „הספר", מר ל. פינברג, ולפועל הראשי מר ח. ורקר ולחבריו על המסירות בה ביצעו את המלאכה הקשה והביאוה לגמר מוצלח. כן אודה לתלמידי (מכבר) מר ח. מרדיקס על ביצוע כל 106 הציורים שבכרך השני, ולחברי ד״ר מ. משלר שקרא את ההגהות לחטיבה השלישית ונתן לי עצה יעילה. לגבי כל שאר הענינים אַפנה את הקורא אל ההקדמה לכרך השני הנמצאת בראש החטיבה הראשונה.

העובדה שנער מוכשר בן 11 (מאחד הקיבוצים בנגב) שאינו שומע שפה לועזית קרא את שני הכרכים של הספר „מבוא למתימטיקה", פרט לחטיבה אחרונה זו, והראה הבנה מעמיקה לתכנם, מלמדת שני דברים: ראשית שאפשר להבין את הספר ללא ידיעות קודמות מעֵבר לחומר הנלמד בבית הספר, ושנית שכתיבת ספר כזה בעברית לא היתה לשוא. אציין בתודה שדעה זו הובעה לי ע״י ד״ר יהודה אבן־שמואל כבר לפני עשרים שנה.

תמוז תשי״ז

אה״פ