מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה שניה: גיאומטריה (מחצית ראשונה)

עם 39 ציורים

הוצאת "מסדה" בע"מ, תל־אביב

נדפס במפעלי דפוס פלאי–פי.אי.סי. בע"מ, רמת־גן
PELI-P.E.C PRINTING WORKS LTD., RAMAT-GAN
PRINTED IN ISRAEL

תוכן הענינים

חלק חמישי: בעיות ושיטות בגיאומטריה

חלק חמישי: בעיות ושיטות בגיאומטריה.

פרק חמישי: התפתחות הגיאומטריה מימי קדם עד היום.

בחלק הראשון, השני (כרך I) והרביעי, ובמידת־מה גם בחלק השלישי, בירַרנו אמנם את הבעיות והשיטות הכלליות שבשטח הנידון, אך לא הסתפקנו בכך אלא הכנסנו את ראשנו גם לתוך „הטכניקה" המתימטית וחדרנו, דרך הגדרות והוכחות, לחומר־ממש שבאותו שטח – לפחות למבחר החומר, המוגבל ע"י היקף הספר וע"י העקרון, שלא נדרוש מן הקורא ידיעות קודמות במידה ניכרת.

לא נוכל להמשיך בדרך זו בחלק הנוכחי המוקדש לגיאומטריה. כאן פתוח התחום לרווחה ורב־גווני הוא במידה כזו, שאין כל אפשרות, בממדיו של ספר זה, לחדור חדירה ניכרת ומועילה לעצם החומר הטכני עד כדי כיבוש חלקים ניכרים של התחום [1]. נוסף על כך מחייב כאן הטיפול המעשי ברוב המקרים ידיעות, או שימוש בסמלים מתימטיים, במידה יתירה. לפיכך נסתפק בעיקר בסקירה כללית על בעיותיו העקרוניות והחשובות ביותר של התחום ועל השיטות השונות, שבעזרתן יש להשיג את המטרה. אך במקרים בודדים נכנס לבעיות מסויימות דרך בנין והוכחות ממש, ומקרים אלה לא ללמד על עצמם בלבד יצאו כי אם ללמד על הכלל כולו. כך הדבר למשל ב§4 של פרק זה, בסעיפים הראשונים של הפרק השמיני, ואף בנושאים אחדים של הפרק הששי.

יש גם גורמים היסטוריים המבדילים הבדלה עמוקה בין הגיאומטריה לבין תחומי האריתמיטיקה והאנליזה (לרבות תורת־הקבוצות), שבהם עסקנו בארבעת החלקים הקודמים. האלגברה והאנליזה בצורתן הנוכחית התפתחו באירופה המערבית והתיכונה, וההיסטוריה שלהן אינה אלא בת ארבע מאות שנה בלבד. ואילו הגיאומטריה – ראשיתה מלפני כארבעת אלפי שנים; כבר לפני אלפיים שנה ויותר הגיעה הגיאומטריה היוונית לדרגה כה גבוהה ומשוכללת עד שנראתה לדורות הבאים כשיא ומופת לכל מדע עיוני [2]. ואם בתקופת אבקלידס היה בנין הגיאומטריה אחיד „ומעוגל" למדי, הרי לאחר שני דורות בלבד, בסוף המאה השלישית לפני ספה"נ, התחיל פורץ את גבולותיו ומאז ואילך התפשט בכוונים

---

1. השוה מה שנאמר בראשית ה § 4 של פרק זה.

2. השוה שיטת Spinoza ("more geometrico"). עיין גם מה שהוא אומר על ערכה העקרוני של הגיאומטריה: "Ethica", Pars I, propos. 36, App.

שונים מאד וללא שיטה ומגמה אחידה, באופן שקשה היום ללמד חומר מפורד זה במסגרת עקבית והגיונית אחת, כפי שאפשר הדבר לגבי האריתמיטיקה והאנליזה[1]. אפילו באנציקלופידיות המיועדות למומחים ניכר הבדל זה, דבר הגורר אחריו חוסר ריכוז וחוסר עקביות בתיאור המקצועות הגיאומטריים.

לפיכך יש ערך גדול לגישה ההיסטורית בגיאומטריה. אמנם לא אוכל להסכים לדעותיהם של הטוענים, שאי אפשר להבין את המתימטיקה ללא ידיעת התפתחותה, או הדורשים שהתלמיד יגש לחומר המתימטי לפי „החוק היסודי הביוֹגיניטי", כלומר דרך אותן ההקפות, ואף השגיאות, שקרו בדברי ימי המדע. אדרבה, מנקודת־ראות שיטתית אין אולי במציאות מדע שלשם הבנת אוצרותיו יש פחות חשיבות לגישה ההיסטורית מאשר המתימטיקה; שהרי בעיותיה הן מוחלטות, אובייקטיביות, פשוטות יותר בעיקרן מבעיות שאר המדעים, ואין צורך בכל גישה אנתרוֹפוֹלוֹגית והיסטורית לשם הסברת הענין[2]. ואולם במקרה הגיאומטריה יש ויש חשיבות פדגוגית מרובה לגישה ההיסטורית, בייחוד לגבי התפתחותה הקדומה; כי בדרך זו יקל עלינו להבין בעת ובעונה אחת את שרשי האילן ואת הסתעפותו הרב־גוונית, בעוד שהמבט על ענפיו המתבדרים כצורתם היום לא היה בכחו ללמדנו, שמשורש אחד יצאו כולם.

אם בתיאור ההיסטורי שבפרק זה יופיעו פעמים אחדות מושגים שהקורא אינו בקי בהם, אל יעורר בו הדבר דאגה; במקומות מאוחרים יותר בחלק זה (השוה מפתח המונחים) ימצא, לפחות, את ביאורם העקרוני של אותם מושגים. התיאור יהיה היסטורי מיסודו בסעיפים 1 – 3 בלבד. בסעיפים 4 ו5 נדון בשתי בעיות, שנוסף על הצד ההיסטורי נודעת להן חשיבות עקרונית ושיטתית (בפרט לזו של § 5). קודם לכן, בראשית ה§4, ימצא הקורא ידיעות כלליות אחדות להתפתחות הגיאומטריה.

נסיים בהערה עקרונית: כשם שלא הגדרנו עד כאן את מהות המתימטיקה[3], כן לא נבזבז זמן בנסיונות להגדרת הגיאומטריה; נאמנה עלינו תשובתו

1. יש גם קשר מסויים לעובדה שתורת המספרים וכל מה שבנוי עליה (האנליזה בכלל מסתמכים על היחס היסודי היחיד שבין המספר n ועוקבו $n+1$ (עיין בפרקים ב׳, ד׳, ו׳, ז׳ שבכרך הראשון וב§4 של פרק ד׳ של חכרך הזה), בעוד שכבר הגיאומטריה האלמנטרית מסתמכת על כמה יחסים יסודיים (עיין בפרק השמיני של כרך זה).

2. מישהו העיר בחריפות, שהמתימטיקה ריאליסטית יותר ואידיאליסטית פחות ממדעי־הטבע, וכל שכן ממדעי־הרוח: קשה לבאר מהו פרח או אבן או כוכב, ועל אחת כמה וכמה מהי שפה או איך להעריך את יוליוס קיסר — דבר זה מצריך השערות מעמיקות על גלים, אלקטרונים וכו׳, או על תעודות היסטוריות וכדומה, ותלוי הוא במידה מכרעת במצב הנוכחי של המדעים הנידונים מזה, ובמבנה מוחנו וכח הקליטה של שכלנו מזה. ואילו מהותו של מספר ראשוני, ומשמעותם של משפטים כגון „19 הוא מספר ראשוני", או משפט פיתגורס, הן אובייקטיביות, פשוטות, ואינן תלויות בתקופה. ריח של נצחיות נודף מהם.

3. אמנם בחלק הששי (בכרך־ההשלמה) נגיע לעצם השאלה הזאת.

של אחד מגדולי הגיאומטרים של זמננו (O. Veblen) האומר: גיאומטריה, הוא הענין שהגיאומטרים עוסקים בו. והנה התיאור ההיסטורי יבוא ללמדנו במה הם עוסקים – אמנם אפס קצהו נראה וכולו לא נראה. המצב דומה במקצת, לפחות מבחינה חיצונית, למצב השאלה „מהו המרחב ותכונותיו?" בפיסיקה החדישה, העונה: לשם תשובה על כך נחוץ לחקור את החומר הנמצא במרחב, שכן הוא הוא הקובע את תכונות המרחב. בהקבלה לכך, התשובה על השאלה „מהי גיאומטריה?" דורשת הצבעה על הנושאים הגיאומטריים.

§ 1. הגיאומטריה אצל עמי המזרח, וראשית התפתחותה ביון. מדע אינדוקטיבי ודידוקטיבי.

לפי הידיעות שבידינו היו אנשי אשור ובבל (שהסתמכו באופן מכריע על עמי שומר ואכד), ובצדם המצרים, העמים הקדומים שרכשו להם ידיעות מתימטיות, ובפרט גיאומטריות. אין להתעלם מן העובדה, שהאקלים היבש שבארצות אלו והחומר היציב שעליו חקקו את תעודותיהם ביחוד עמי ארם־נהריים, יצרו תנאים מיוחדים לטובת שמירת התעודות, ואין זה מן הנמנע שגם לאומות אחרות היו ידיעות מתימטיות בתקופות קדומות. אך מאותן התקופות שבהן מדובר כאן – האלף השלישי והשני לפני ספה"נ – לא ידוע לנו מאומה מתוך תרבויות אחרות.

התגליות הראשונות שהגיעו אליהן עמי אשור, בבל ומצרים היו בשדה הלוח (אורך שנת החמה); בפרט במצרים נודעת חשיבות מיוחדת ללוח מסודר בקשר לשטפונות־היאור השנתיים. לשם תיקון לוח מוכרחים היו לעסוק בתורת התכונה (אסטרונומיה) מזה ובאריתמיטיקה מזה. גורם שני בארצות אלו, שהניע המומחים לקראת מחקרים גיאומטריים דוקא, היה ענין ההשקאה: חפירת תעלות, ציור תרשימים וכו׳. גורם שלישי – מקורו בצורך למדידת־קרקעות מחודשת לאחר השטפונות השנתיים במצרים. (לעומת זאת אין לנו ראיה לכך, שבנין הפירמידות הביא אף הוא לפתירת בעיות גיאומטריות.)

עד לפני שלשים שנה ידענו אך מעט על פרטי ידיעותיהם של העמים הללו בתקופה קדומה. הודות למחקריהם של נויגיבאויר[1] ותלמידיו נתרחבה היום ידיעתנו לאין ערוך. (הן באריתמיטיקה הן בגיאומטריה עלו, כנראה, הבבלים על המצרים.) בהצטמצמנו כאן בגיאומטריה, נציין אחדים מהישגי העמים

1. עיין: O. Neugebauer: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I: Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934.– The exact sciences in antiquity. Princeton, 1952. 191 pp.
נויגיבאויר מסר תיאור כללי לתנאי התפתחות המתימטיקה בבבל במאמרו ב־*Scientia* (מילאנו) בגליון מרס 1937. השוה גם מאמרים רבים (בייחוד של נויגיבאויר) בעתון *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* שהופיע בברלין מ 1929 ואילך.

האלה מראשית האלף השני לפני ספה"נ ואילך: חישבו את שטחי המַלבן, המשולש ישר־הזווית ושווה־השוקיים, והטרַפז; קבעו את שטח העיגול על־סמך הערך $\pi = 3$,[1] הנמצא גם בתנ"ך[2], ואף על־סמך הערך[3] $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4$ (הקרוב ל 3.16); ביצעו חישובים מספריים לגבי נפחם של תיבה, גליל מעגלי (מאונך), וכו'; גילו את משפט פיתגורס לגבי ערכים מספריים מסויימים אחדים וכן את המשפטים הקובעים שהזווית ההיקפית בחצי־עיגול היא ישרה וכי צלעותיהם של משולשים בעלי זוויות שוות בהתאמה, הן מתכונתיות.

המשפט האחרון חשוב הוא במיוחד מחמת אפייו החשבוני — אף כי אינו מכיל את מושג היחס כ„מנה". הופתענו עוד יותר ע"י התגלית החדישה, שלמצרים היתה (במאה ה 19) דוגמה מספרית של נוסחת הנפח לשכבת־פירמידה בעלת בסיס ריבועי, הנוצרת ע"י מישור מקביל לבסיס (כך שגם פני השכבה מלעיל מהווים ריבוע). תגלית זו מפליאה כל כך מפני שאי אפשר[4] להוכיחה (ואף לא את נוסחת הנפח לפירמידה שבסיסה משולש) בדרך אלמנטרית, כלומר ללא שימוש בתהליך־הגבול (אינטֶגרָציה). מובן, אפוא, שהחוקר המצרי האלמוני הגיע לתגליתו מתוך דמיון וניחוש בעלמא; והנה כח־הדמיון במתימטיקה (כמו במוסיקה) הוא הגורם המכריע — אך המתימטיקן, בניגוד לחברו בעולם הנגינה, חייב להוסיף הוכחה לקומפוסיציה שלו.

באשר להתפתחות הגיאומטריה אצל היוונים מראשית המאה הששית לפני סה"נ, שבה חיו תאליס ממיליתוס ופיתגורס מסאמוס, ועד אריסטו[5] (מת ב־322 לפה"ס), הרי אין להעמיד את הדגש על כמות החומר, שקבלוהו בחלקו הגדול — בעיקר תאליס ופיתגורס עצמם, אשר הרבו לנסוע מזרחה ודרומה — מבני מצרים ובבל. העיקר הוא „שינוי־המעשה" בו עיבדו וחידשו את החומר מן הקצה אל הקצה: המצאת השיטה הדידוקטיבית והיפוך הגיאומטריה ממדע

1. ביטוי זה מופשט הוא, כמובן, מכפי המצב באותה תקופה. רק היוונים גילו ששטח העיגול תלוי בקוטר בלבד, ורחוקה עוד הרבה יותר היתה ההכרה שהיחס בין היקף המעגל לקוטרו והיחס בין שטח־העיגול לריבוע מחוגו שוים הם.

2. מלכים א' ז', כ"ג; דבהי"ב ד', ב'. בפסוקים אלה הקושי הוא לא ב„הנחה" $3 = \pi$ שהיתה שגורה ובדרך כלל מספיקה, אלא בסיפור המעשי „וקו שלשים באמה יסוב אותו סביב". לכן יש גם תירוצים אחרים; עיין A. Loewy ב„ההד" (ירושלים), שנה י' (תרצ"ה), חוברת ח', עמ' כ"ב.

3. ערך מפתיע זה מופיע במצרים במאה השבע־עשרה לפני ספה"נ.

4. דבר זה הוכיח בראשית המאה ה 20 M. Dehn. עיין ב *Math. Annalen* כרך 55 (1902). השוה להלן § 5.

5. Thales; Pythagoras; Aristoteles.

נסיוני למדע עיוני, דידוקטיבי — אחת התגליות[1] העקרוניות והחשובות ביותר בדברי ימי המדע בכלל, ואולי החשובה שבידי היוונים.

אל יטען הקורא: אלה הם דברי־הפרזה; הרי המדובר הוא בשיטה אפיינית למדעים הדידוקטיביים בלבד, דהיינו לתורת־ההגיון ולמתימטיקה! אין הדבר כך: התגלית (אף היא של היוונים) שאפשר ונחוץ להפעיל שיטות מתימטיות בתוך מדעי הטבע, הופכת את השיטה הדידוקטיבית לאחד מעמודי התווך של המדעים האינדוקטיביים ומאפשרת את התפתחותן של תורות (תיאוריות) מדעיות במקום עובדות אינדוקטיביות בודדות. ולא עוד אלא שבמשך 300 השנים האחרונות (וביתר ייחוד: מתוך התפתחות הפיסיקה העיונית ביובל־השנים האחרון) הפכה הפעלת המתימטיקה על מדעי הטבע ראש־פינה בצמיחת המדעים האלה וכמעט אבן בוחן לדרגת התפתחותם[2] — בלי לגרוע מאומה מן העובדה, שמקורם של מדעי הטבע כולם הוא בנסיון. מבין השפות שסגל לו בן־האדם מצטיינת שפת המתימטיקה כשפה המתאימה לבטוי המבנה של הטבע (השוה גם I, 345; בצורה זו נתיחס תמיד לכרך I של ספר זה).

נבאר ביתר פירוט את המרחק שבין השיטות המתימטיות, ובפרט הגיאומטריות, של עמי המזרח ושל היוונים! מתקבל על הדעת, שיש לראות את מבנהו של חלל העולם (המרחב שבטבע) כבעיה שעלינו לגלותה ולפתרה יותר ויותר מתוך נסיונות ממושכים, בדיוק כפי שעשינו ושנעשה בחקרנו את תנועות הגופים על פני כדור הארץ (מיכניקה), את התרכבות של חמרים שונים לחומר חדש (כימיה), את מהלכי הכוכבים במסילותם (תכונה). בדרך זו גילו עמי ארם־נהריים ומצרים משפטים גיאומטריים רבים: בתחילה כלפי מקרים מסויימים (מספריים), וברבות הימים גם בצורה כללית יותר, בתורת חוקים, לפחות במקרים פשוטים אחדים. אין ספק, שלפי עומק פשוטו של דבר, מתאימה גישה זו למצב הענין: לא אנחנו יצרנו את חללו של עולם (המרחב), אלא הוא מוטל עלינו בעל כרחנו — האם כדבר „ממשי", אובייקטיבי, אם כתבנית הסתכלותם של בני־האדם, על כך מתווכחים ויתווכחו הפילוסופים — ושומה עלינו לחקור את מהות המרחב. במשך הדורות האחרונים, בייחוד החל מ Riemann, אף התעמקה

1. הכוונה היא לתגלית, שהשיטה הדידוקטיבית אפשרית היא; לפיכך קיים, מלבד המדע האינדוקטיבי, גם מדע דידוקטיבי. זהו ענין שבטעם או בהשקפה פילוסופית, אם תחת זה מעדיפים לדבר על המצאת השיטה הדידוקטיבית.

2. בדבריו הבאים של Kant יש לא רק משום קביעת עובדות בזמנו כי אם גם משום נבואה: „תורת־טבע טהורה . . . אינה אפשרית אלא בעזרת המתימטיקה; ומכיון שבכל תורת־טבע יש משום מדע אמיתי רק במידה שיש בה הכרה a priori, הרי שכל תורת־טבע תכיל מדע אמיתי רק בהיקף שבו אפשר להפעיל עליה מתימטיקה." (הקדמה ל-Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft).

הכרה זו, שכמעט נשכחה ולפחות טושטשה במשך אלפיים שנה מתוך הרושם העז שעשתה על כל הדורות הבאים תגליתם המהפכנית של היוונים, והיא: התגלית שאפשר לתאר את תכונות המרחב הגיאומטריות בדרך דידוקטיבית.

קל למעט כיום, הודות להתקדמות המתימטיקה מזה והפיסיקה מזה בדורות האחרונים, את דמותה של תגלית זו ולציין, שקיים מעבר רציף – ולא תהום – בין השקפות היוונים לקודמיהם. על אף תפקידו המכריע של הנסיון במדע האינדוקטיבי, הרי הפיסיקה החדישה היא ברובה קונסטרוקציה דידוקטיבית, ואילו הגיאומטריה של חלל העולם הממשי, עם היותה בנויה כמדע דידוקטיבי, מבוססת על גורמים נסיוניים שאינם מוצקים אחת ולתמיד כי אם נתונים לשנוי על־סמך נסיונות חדשים. הערכה זו מטשטשת את התהליך ההיסטורי ואת השפעתו על מושג המדע בכלל. ראשית, הרי מתוך תפיסת היוונים נולד מדע הגיאומטריה כמדע מתימטי טהור שכולו דידוקציה, המבוסס לפי השיטה האכסיומטית (עיין בפרק השמיני). שנית, אף כי האכסיומטיקה היוונית היתה בנויה מבחינה עקרונית לפי הקווים דלעיל ולא לפי ההשקפה החדישה, היא היא שהולידה את מושג המדע הדידוקטיבי, הואיל והאכסיומות שלה לא נתפסו אותה שעה כמסקנות נסיוניות־אינדוקטיביות אלא כדרישות הכרחיות וכהכרות מוסכמות ומובנות מאליהן (אמיתונים). וזוהי מהות התגלית היוונית: אפשר לתאר ולמצות את מבנה המרחב ע״י מספר קטן של מושגים יסודיים (מושגים ראשוניים) וע״י מספר קטן של משפטים יסודיים (אכסיומות), שבהם מופיעים המושגים הראשוניים כשהם קשורים ביניהם ע״י יחסים מסויימים (יחסים ראשוניים) – באופן שיווצר בנין הגיוני לחלוטין, שבו מוגדר כל מושג גיאומטרי מתוך המושגים והיחסים הראשוניים דרך הגדרה דידוקטיבית, ומוכח כל משפט גיאומטרי מתוך האכסיומות דרך היסקים דידוקטיביים. הניגוד לשיטה הגיאומטרית של עמי המזרח מתבטא אפוא בזה, שאצלם מתוארים המושגים הגיאומטריים, כמו המושגים האֶמפיריים של חיי יום־יום ושל המדע הנסיוני, בדרך דיסקריפטיבית, בהיותם שאובים מן ההסתכלות המתחדשת לבקרים; לכן מתחדשים לבקרים, לפי הנסיונות המתווספים והולכים, גם המשפטים המביעים את היחסים בין המושגים הללו.

בסעיף הבא נלמד לדעת את חוט השדרה של הבנין הגיאומטרי היווני, ואילו השיטה האכסיומטית החדישה בגיאומטריה, שהתפתחה מן השיטה היוונית רק לאחר יותר מאלפיים שנה, מתוארת בפרק השמיני.

לבסוף חסר כאן עוד גורם מכריע: עצם השיטה ההגיונית הדידוקטיבית, שבעזרתה נגדיר מושגים ונוכיח משפטים בבנין האכסיומטי; לשון אחר, הלוגיקה המלווה את האכסיומטיקה. בשאלה זו נגע בחלק הששי, בדברנו על יסודות המתימטיקה (בכרך־ההשלמה).

§2. תקופת־הפריחה של הגיאומטריה היוונית[1].

החל מן המאה החמישית לפני סה״נ, לאחר נצחון אנשי אתונה על הפרסים כשַגשג האמנות והמדע באתונה, יש לנו ידיעות מפורטות למדי על התפתחות הגיאומטריה ביון. על הבעיות המפורסמות של הזמן ההוא נמנות בעיות־הקוֹנסטרוקציה (עיין להלן §4). גם לאחר המפלה במלחמת הפילוֹפוֹניסוֹס לא חדל המדע מפרוֹח באתונה, והוקרת הלימודים המתימטיים – ביתר הדגשה: הוקרת השיטה הדידוקטיבית השלטת במתימטיקה – בולטת מתוך העובדה, שהיא הוכרה כמקצוע הכרחי ללימודי הפילוסופיה, בייחוד באקדמיה של אפלטון; האזהרה „לא יתקבל כאן מי שלא חונך בגיאומטריה" נקבעה בשערי האקדמיה. לבית מדרשו של אפלטון מיחסים גם את הכנסת השיטה „האנליטית", המניחה כאילו כבר נפתרה הבעיה הנדונה, על־מנת ללכת אחורנית מן הפתרון עד משפטים (או בניות) ידועים – שיטה שהגיעה לשיא הצלחתה אחרי יצירת האלגברה בראשית הזמן החדיש, בקשר להפעלת החשבון־באותיות על הגיאומטריה.

אפלטון ואריסטו לא הצטיינו בתגליות מקוריות במתימטיקה כאחדים מבני דורם, שעליהם נמנה Eudoxos, גדול המתימטיקנים בזמנו. מקוריותוֹ בלטה בכוון חדיש לגמרי, כוון שהוא אינפיניטסימלי לפי מונחינו: מצד אחד לקראת הגדלים האירציוֹנליים, מצד שני בחישוב שטחים ונפחים בעזרת אֶכסהוסטיה[2] (עיין להלן). על פי שיטה זו הצליח להוכיח למשל את נוסחת הנפח לפירמידה, שהיתה כבר ידועה ל Demokritos.

ואולם המתימטיקה היוונית הגיעה לשיא התפתחותה לא ביון עצמה. אחרי נצחונו של פיליפוס מוקדון על היוונים ואחרי חלוקת ממלכתו של אלכסנדר מוקדון, שבעקבותיה עברה מצרים לשלשלת התלמיים, מצא המדע היווני מרכז חדש, תחת אתונה, באלכסנדריה של מצרים, בירת מלכי תלמי שיסדו שם מוסיון (מעין אקדימיה) וספריה גדולה. במשך 150 שנה, מסוף המאה הרביעית עד ראשית המאה השניה לפני סה״נ, זכתה המתימטיקה, ובייחוד הגיאומטריה, באלכסנדריה ובנותיה לתקופת פריחה, שנשארה בגדר שיא כמעט במשך אלפיים שנה. רק במאה ה 17 הגיעו שוב הגיאומטרים, בעיקר בצרפת, להישגי קודמיהם מאלכסנדריה, ואף מיהרו לכבוש תחומים שהיו עוד סגורים

1. השוה: Th. L. Heath: A history of Greek mathematics. Vol. I, from Thales to Euclid; vol. II, from Aristarchus to Diophantus. 1921. 446+586 pp.
C. Mugler: Platon et la recherche mathématique de son époque. 1949. 456 pp.

Heath: Mathematics in Aristotle. 1949. 306 pp.

לגבי דברי ימי הגיאומטריה בדרך כלל השוה:

J. L. Coolidge: A history of geometrical methods. 1940. 470 pp.

2. exhaustio, מלה רומית, המורה על הפעולה לרוקן כלי ע״י שאיבה. בעברית: מִצוּי.

בפני היונים, מחוסרי הטכניקה האלגברית והאנליטית. שלישיה של גדולי המתימטיקנים בכל התקופות והארצות הגיעה לגולת הכותרת של המדע המדוייק בימים ההם: אבקלידס, ארכימידס, אפולוניוס [1].

על חייו של אבקלידס אין אנו יודעים ולא כלום, פרט לעובדה שחי בסוף המאה הרביעית ושייסד בית ספר גבוה באלכסנדריה, כנראה לפי הזמנת הראשון ממלכי תלמי. בהתעלמנו משאר ספריו שאין בהם חידושים חשובים (למרות זאת שימשו ספרי־לימוד נפוצים בימי הביניים, הודות למגמתם הפדגוגית), נייחד את הדיבור על ה„אֶלמנטא" שלו (στοιχεῖα), ספר שהופיע בשפות רבות ב 1500 הוצאות בערך והנחשב לספר רב התפוצה והתרגום אחרי התנ"ך [2]. השפעתו של ספר זה היתה עצומה; דמות ההוראה בגיאומטריה ה„אלמנטרית" בבתי הספר התיכוניים עוצבה במידה מכרעת ע"י ה„אלמנטא" עד סוף המאה ה 19, ובחלקה עד ימינו; בייחוד באנגליה, ששם כונה המקצוע בשם „יוקליד" סתם.

בשורות הבאות יתואר תכנו ה ג י א ו מ ט ר י של ספר זה, שהוא התוצרת הקלסית של המתימטיקה היוונית. אך אין זו אלא טעות, שנתפשטה אמנם ברבים, לחשוב שהספר כולו גיאומטרי הוא. אדרבה, גם תכנו האריתמיטי רב־גווני הוא ועמוק, ומצויים בו אחדים מן המשפטים המפורסמים שבתורת המספרים הראשוניים (כגון הפירוק החד־ערכי לגורמים ראשוניים, ואינסופיותה של קבוצת כל המספרים הראשוניים; עיין I, 26 ו 28), וכן הביסוס הראשון למספרים האירציונליים (השוה לקמן). העובדה שהיונים נטו ל„גיאוֹמֶטריסָציה" של עובדות אריתמיטיות ואנליטיות – בניגוד למתימטיקה החדשה הנוטה לכוון ההפוך: לאריתמיטיסציה של עובדות גיאומטריות – עוררה את הרושם כאילו ה„אלמנטא" מכילים חומר גיאומטרי בלבד.

נדבר בקיצור על תכנם של שלשה־עשר „הספרים" של ה„אלמנטא" [3], ובפרט על ביסוס הפלנימטריה (ז"א הגיאומטריה במישור) בספר הראשון. באספו חלק מסויים (עיין בסוף הסעיף הזה) מן הידיעות המתימטיות של זמנו ובסדרו אותן בצורה שיטתית, התכוון אבקלידס להוכיח את המשפטים הגיאומטריים, על־פי הנחות מתאימות, ד ר ך ה י ס ק ה ג י ו נ י; מטרה זו היא הצד הנצחי

1. Eukleides, Archimedes, Apollonios. ארכימידס, שנולד בסירקוסה (סיציליה) בשנת 287, חזר אחרי תקופת שהותו באלכסנדריה לעיר מולדתו. אפולוניוס הורה באלכסנדריה ואחרי כך בפרגמון, באסיה הקטנה.

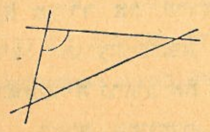
2. ההוצאה הטובה ביותר מבחינה בלשנית, המכילה את המקור היווני בצרוף תרגום רומי, היא זו של J. L. Heiberg ו־ A. Menge: ארבעת הכרכים הראשונים, שהופיעו ב 1883–1885, מכילים את האלמנטא (ספרים א' עד י"ג). הוצאה אנגלית של Th. L. Heath ב 3 כרכים הופיעה ב 1908. עיין גם: Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. ed. da F. Enriques, 3 vols, 1925—1932. בעברית יש תרגומים חלקיים, מזמנו (ומידו) של הגר"א ואילך. חיים ר ו ז נ צ ו ו י י ג מכין תרגום מדעי בעברית, בעריכת ת. מ ו צ ק י ן.

3. רגילים למנות עוד ספר ארבעה־עשר וספר חמשה־עשר; אך שניהם לא חוברו ע"י אבקלידס, וחשיבותם אינה גדולה.

שבדבר, אם אמנם יש ויש למתוח בקורת על כמה פרטים בהוצאתה לפועל – אף כי בנקודות אחדות מקשים על הבקורת הספקות בדבר הנוסח המקורי הנכון, ספקות שגם התרגומים והפירושים העתיקים (ברובם ברומית ובערבית) אינם מסלקים אותם. יש להביא בחשבון את העובדה, שהפירושים העתיקים ביותר הידועים לנו נכתבו כ 800 שנה אחרי חיבור ה„אלמנטא", וההעתקות הקדומות שהגיעו אלינו הן מתקופה מאוחרת עוד יותר.

ההנחות, המשמשות יסוד לבנין הדידוקטיבי כולו, חולקו ע"י אבקלידס לשלשה סוגים: ה ג ד ר ו ת (ὅροι), ד ר י ש ו ת (αἰτήματα), א מ י ת ו ֹנ י ם או תפיסות מוסכמות (κοιναὶ ἔννοιαι). מימי פירושו הרומי של פרוקלוס [1] ואילך רגילים לכנות את האמיתונים הללו כאכסיומות (מונח שמובנו נשתנה לחלוטין במחקרי הדורות האחרונים על יסודות המתימטיקה). הצד החלש של ההנחות הוא בהגדרות; אין הן הגדרות כל עיקר במובן ההגיוני, ובעצם מחוסרות הן כל ערך דידוקטיבי. כדוגמה לכך תנתן הגדרת הנקודה: „נקודה היא דבר שחלקו אפס" [2], והגדרת הקו: „קו הוא אורך ללא רוחב"; מעורפלת עוד יותר הגדרת הקו הישר כקו העובר בקצב שוה דרך כל נקודותיו. אך חולשת ההגדרות אינה מזיקה לבנין עצמו, הואיל ו ה מ ס ק נ ו ת א י נ ן מ ס ת מ כ ו ת ע ל ה ה ג ד ר ו ת. עלינו לראותן כתיאורים הבאים „לשבר את האוזן" ושאין להם כל תפקיד דידוקטיבי; גאוניותו של אבקלידס מתגלית גם בזה שאינו משתמש בהגדרות ראשוניות אלו.

ה ד ר י ש ו ת, שמספרן נחשב בדרך כלל לחמש או לשש, תובעות את אפשרותן של בניות (קונסטרוקציות) מסויימות. כאן יש להדגיש, שאבקלידס מתרחק באופן בולט ומחושב מכל תהליך מעשי ומכל ש י מ ו ש במדע – עד כדי כך, שאצלו אינו מופיע כל מכשיר גיאומטרי, אף לא הסרגל [3] והמחוגה. דרישת הבניה היא אפוא מופשטת ומתקרבת במקצת לתפקיד המופיע באכסיומטיקה החדישה, והוא: לשמש „הגדרה סתומה" למושגים המופיעים בדרישות. שלש הדרישות הראשונות קובעות את האפשרות א) למשוך ישר מנקודה נתונה אל נקודה שניה, ב) להאריך ללא הגבלה קטע של ישר, ג) לחוג סביב נקודה נתונה („המרכז") מעגל העובר דרך נקודה נתונה. הדרישה הרביעית, האומרת שכל הזוויות הישרות שוות זו לזו, היא מעורפלת ביותר, והמחלוקת הכפולה, מהי משמעותה (הכנסת מושג החפיפה?) ולמה היא נמנית בין הדרישות, לא הביאה להבהרתה. לעומת זאת ברורה ה ד ר י ש ה ה ח מ י ש י ת, המפורסמת בין כולן, שעליה נייחד את הדיבור ב § 2 של הפרק השמיני. היא אומרת (השוה ציור 8): כששני



ציור 8

1. Proklos. חי במאה החמשית לסה"נ.

2. σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

3. סרגל הוא מכשיר המאפשר למשוך קו ישר (לא להקצות רוחק, או למדוד)

ישרים יוצרים עם ישר שלישי באותו הצד (של הישר השלישי) זוויות פנימיות שסכומן קטן מזווית שטוחה, נחתכים שני הישרים בצד ההוא אם יאריכום במידה מספיקה. מהותה של דרישה זו מתגלית באור הנכון מתוך הוכחה (הניתנת ע״י אבקלידס אחר כך) המראה: אם הסכום הנידון שוה לזווית שטוחה, לא יחתכו שני הישרים זה את זה לעולם.

על הדרישה החמישית מסתמכת תורת המקבילים על כל מסקנותיה (לרבות, למשל, המשפט על סכום הזוויות במשולש). ואולם בשימנו לב לכך, שהיא דורשת מציאותה של נקודת חיתוך, נתפלא על היותה בודדת בכוון זה; חסרות דרישות כגון האכסיומה של Pasch (עיין ב § 4 של הפרק השמיני), או מציאותן של נקודות־חיתוך בין שני מעגלים שכל אחד מהם עובר, למשל, דרך המרכז של חברו.

יש הכוללים בין הדרישות, כששית ביניהן, את ההנחה הבאה: שני ישרים אינם כולאים „מרחב״. משמעותה של דרישה זו, שבה נעסוק ב §§ 2 ו 3 של הפרק השמיני, היא: לשני ישרים שונים משותפת לכל היותר נקודה אחת.

לעומת הדרישות, העוסקות בעובדות של ההסתכלות במרחב, מכוונים האמיתונים כנראה לעובדות פשוטות של תורת ההגיון ושל תורת הגדלים בדרך כלל – לפחות אם צודק Heiberg בהבחנתו בין דרישות ואמיתונים, שלפיה יש חמשה אמיתונים בלבד. בהתאם לכך באים הם להבטיח את תכונותיהם הפשוטות של השויון והחיבור שבאריתמטיקה גם לפעולות וליחסים מתאימים בין גדלים גיאומטריים כגון קטעים, זוויות, שטחים וכו׳. ואלו הן טענות האמיתונים:

א) מה ששוה לאותו השלישי, שוה גם זה לזה; כלומר, $a=c$ ו $b=c$ גוררים אחריהם $a=b$. (השוה I, 72.)

ב) בהוסיפנו שוה על שוה נקבל שוה; כלומר, $a=b$ ו $c=d$ גוררים $a+c=b+d$. (השוה I, 76.)

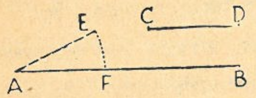
ג) הטענה המתאימה כלפי פעולת הגריעה (החיסור); כלומר, $a-c=b-d$.

ד) השלם גדול מחלקו; $a>a-b$. (השוה בחלק הרביעי, עמ׳ 12, של כרך שני זה.) ב־ג) הנחנו $a>c$, ב־ד) $a>b$.

פחות ברור האמיתון החמישי הטוען: „מה שחופף הוא שוה״. קשר זה בין יחסי החפיפה והשויון רומז לכאורה למושג התנועה; אך מבנה ה„אלמנטא״ דוקא מעורר את הרושם כאילו מתעלם המחבר במחשבה־תחילה ממושג התנועה, מחמת מוחשיותו של מושג זה. (על תפקיד התנועה בביסוס הגיאומטריה נרחיב את הדיבור להלן בפרק הששי.)

הדרך המיוחדת, המסובכת והחריפה כאחת, שבה מגיע אבקלידס מן הדרישות והאמיתונים אל המשפטים והבניות הפשוטים ביותר של הגיאומטריה, תתברר לנו כבר מן הבניה הראשונה, שלה מוקדשים לא פחות משלשה סעיפים, והיא: להקצות על קטע נתון $\overline{AB}$, מקצהו A, קטע נתון אחר $\overline{CD}$ קטן מן

הראשון. (השוה ציור 9.) השיטה המתקבלת על הדעת היא להשתמש בקנה־מידה, כגון מחוגה, או בגוף צפיד, כדי להקצות את אורך הקטע $\overline{CD}$ על ישר נתון. ואולם אף אחת מבין דרישות אבקלידס אינה מאפשרת פעולה כזו; הלא הדרישה השלישית מתכוונת רק לבנית מעגל אשר (מלבד מרכזו) נתונה אחת מנקודות היקפו. לפיכך משתמש אבקלידס בשתי בניות־עזר לפתירת התרגיל הנ״ל, והן:



ציור 9

א) בנית משולש שוה־צלעות מעל לקטע הנתון $\overline{AB}$ בעזרת הדרישה השלישית (וההנחה הסתומה על חיתוך שני מעגלים, שפורשה לעיל);

ב) הקצאת קטע השוה לקטע נתון מנקודה נתונה, אולם לאו דוקא בישר או קטע נתון. הבניה נעשית בעזרת א) והדרישה השניה והשלישית. עיין במלואים שבסוף החטיבה הזאת, מספר א).

על־סמך זה נפתור את התרגיל הנ״ל (עיין בציור 9). בהקצותנו מ A קטע AE השוה ל $\overline{CD}$ ובחוגנו סביב A מעגל דרך E החותך את $\overline{AB}$ ב F; הקטע $\overline{AF}$ יהיה הפתרון הדרוש.

ועתה ניגש אבקלידס להוכחת „המשפט הראשון על חפיפת משולשים״, המניח שהמשולשים שוים בשני זוגות־צלעות ובזוויות שבין אותן צלעות. ואולם בהוכחה זו יש ליקוי עקרוני: היא מסתמכת על הקצאת זווית שאין לה זכרון בדרישות, ומניחה שבהקצאה זו תעבור צלעו השלישית של המשולש שוב לצלע, כלומר: לקו ישר. בפרק השמיני, § 4, נראה כיצד התגברה המתימטיקה החדישה על קושי זה.

באותו מקום בפרק השמיני נפגוש סוג אחר של דרישות (אכסיומות), שאינו נמצא אצל אבקלידס כל עיקר: אכסיומות־הסדר. בדרך כלל אין ה„אלמנטא״ מבדילים, כלפי שלישִׁיַת־נקודות נתונה A, B, C על ישר מסויים, בין המקרים ש C נמצאת בין A ל B או מחוץ לקטע AB. העדר־הבדלה זה גורר אחריו את הצורך לשים לב, ברוב ההוכחות והבניות, למקרים שונים – על סמך ציורים המהווים אפוא חלק בלתי־נפרד של ההוכחה. צורך זה מביא לידי סיבוך קשה בגיאומטריה של אבקלידס ובזו הנלמדת (בדרגה הראשונה) בבתי הספר[1]. החוקר היהודי Pasch הבליט את חשיבותן של אכסיומות־הסדר משנת 1882[2], עם כי יש למצוא רמזים לדבר כבר מראשית המאה ה 19. מאידך אפשר לסלק את הסיבוך הנידון גם בדרכי החשבון, מתוך ההבחנה בין גדלים חיוביים ושליליים, הבחנה שביצועה העקבי התחיל אף הוא במאה התשע־עשרה

1. על התעלמות זו מיחסי הסדר (יחס־הביניים) מסתמכות ה„תַרמיות״ הגיאומטריות, כגון ההוכחה שכל משולש הוא שוה־שוקיים. עיין במלואים לחלק החמישי, מספר ב).

2. בספרו Vorlesungen über neuere Geometrie. (מהדורה שניה, עם נספח על התפתחותו ההיסטורית של ביסוס הגיאומטריה מאת M. Dehn, הופיעה בשנת 1926.)

בלבד [1]. (השוה ראשית ה § 3 של הפרק הששי.) לעומת זאת כל הגדלים שבגיאומטריה „האלמנטרית" הם גדלים „מוחלטים"; כלומר, חיוביים.

על הבסיס המתואר לעיל בונה אבקלידס בארבעת הספרים הראשונים של ה„אלמנטא" את יסודות הפלנימטריה: משפטים כלליים על קטעים, זוויות, שטחים וכו', ותורת היצירים הפשוטים, כגון: משולש, מקבילית, מצולע משוכלל, מעגל — בערך בצורה הנהוגה עד היום בבתי הספר. כן נכלל החשבון בגדלים גיאומטריים: תיאור המכפלה כמלבן, חיבור שני מלבנים למלבן אחד וכדומה.

הספר החמישי מעמיק־לכת ומהווה אחד משיאי המתימטיקה העתיקה — שיא שהוערך כהוגן רק בדורות האחרונים. הנושא הוא היחס ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$)[2] בין שני גדלים גיאומטריים (קטעים וכו'), המתאים למה שאנו קוראים „מספר ממשי חיובי". (השוה I, 120.) העיקר כאן הגדרת השויון בין שני יחסים $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$; זהו דבר פשוט, אם היחסים הם רציונליים (I, 72), אך הוא עמוק מאד במקרה הכללי (I, 128), דהיינו אם אין לקטעים a ו b „מידה משותפת"[3]. לשם הגדרת השויון נוקט אבקלידס, כלפי הקטעים הנתונים a ו b, מספרים טבעיים m ו n, ומשוה את הקטעים[4] $m \times a$ ו $n \times b$ מצד אחד, $m \times c$ ו $n \times d$ מצד שני, באופן שקיים:

א) $m \times a < n \times b$, או $m \times a = n \times b$, או $m \times a > n \times b$

ב) $m \times c < n \times d$, או $m \times c = n \times d$, או $m \times c > n \times d$.

היחסים $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ מוגדרים כשווים אם כנגד כל זוג־מספרים (m, n) מתקבל בשתי השורות אותו המקרה (מבין המקרים $<$, $=$, $>$). מובן שהמקרה $=$ קיים רק אם יחס־הקטעים הוא רציונלי. הקורא המשוה תורה זו לתורת החתכים של Dedekind (I, 121) ירגיש לא רק הקבלה כי אם זהות־ממש בין שני התהליכים, פרט לבגד הגיאומטרי שלבש כאן הנושא המספרי, בהסתמכו על הקטעים. אף־על־פי־כן לא הבינו את מהותו וערכו של התהליך האבקלידי כל הדורות שבאו אחריו, עד המחצית השניה של המאה ה 19; רק אחרי שגילו חוקרי אותו דור מחדש, וללא תלות באבקלידס, את המספר האירציונלי — ביתר

1. בעיקר החל מן הקואורינטות הבָּרִיצֶנטריות של A. F. Möbius (1827). כבר לפניו הצביע Carnot על האפשרות לייפות כחה של נוסחה כלפי כל מצב שבציור על ידי נתינת סימנים (מ 1803 ואילך).

2. בניגוד לכך השתמשו היוונים בשם „מספר" ($\dot{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) לגבי המספר הטבעי בלבד. כנראה מבוססים השמות „רציונלי" ו„אירציונלי" על אי־הבנה בתרגום לרומית; דומה שהכוונה המקורית של $\check{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ היתה „לא ניתן לביטוי", הואיל ויחסי־קטעים כאלה אינם נתונים לביטוי ע"י יחס בין שני מספרים שלמים. המתרגם החליף „ניתן לביטוי" ב„שכלי".

3. ביוונית $\dot{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$, ברומית (וכך היום ברוב השפות) incommensurabilis ($\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu =$ mensura $=$ מידה).

4. $\times$ אינו סימן לכפל אלא סמל הרומז, בעזרת המספר הטבעי m, לחיבור ממושך של הקטע a. למשל $(m = 3)$ $3 \times a$ הוא קיצור ל־ $a + a + a$. (השוה I, 150.)

דיוק: את האפשרות להגדרה מדויקת של המספר האירציונלי על־סמך המספר הרציונלי — נוכחו לדעת שכבר היוונים הגיעו לתגלית עמוקה זו.

בתורת־היחסים הזאת כלול הישג נוסף, שאף על ערכו עמדו רק הדורות האחרונים: האכסיומה הנקראת בטעות אכסיומת ארכימידס. אבדוכסוס שקדם לאבקלידס, ולא כל שכן לארכימידס, המציאה והכניסה לגיאומטריה[1]. אכסיומה זו מגבילה את מושג היחס בין שני קטעים a ו b למקרה שבו יש שני מספרים טבעיים m ו n, באופן שקיים $m \times a > b$ ו $n \times b > a$; בלשון אבקלידס: יש יחס רק לגדלים (קטעים) שמתוך הכפלה מתאימה יעלו זה על זה. שלילת התנאי הזה פירושה, שיש גדלים a ו b, באופן שלא רק קיים $a < b$ אלא שגם כל הקטעים

$$2 \times a,\ 3 \times a,\ \ldots,\ n \times a, \ldots$$

ישארו קטנים מ b. באופן טבעי יכונה a במקרה זה קטן לאינסוף ביחס ל b, ו b גדול לאינסוף ביחס ל a. האכסיומה הנידונה מוציאה אפוא מן הגיאומטריה (וממילא גם מן האריתמיטיקה) גדלים קטנים (או גדולים) לאינסוף. בפרק השמיני (§ 4) נבין את חשיבות האכסיומה הזאת בביסוסה החדיש של הגיאומטריה מצד אחד ואת התוצאות הנובעות מוויתור אפשרי על אכסיומה זו מצד שני.

המשך הספר החמישי מבסס את תורת המַתכּוֹנוֹת (הפרוֹפּוֹרציות; אבקלידס מכנה אותן „אנאלוגיות"), המזדהות לפי מה שנאמר לעיל עם החשבון במספרים ממשיים בדרך כלל. על בסיס זה בונה הספר הששי את תורת היצירים (המשולשים וכו') הדומים. הספרים 7 עד 9 מביאים (בלבוש גיאומטרי) חומר אריתמיטי מתורת המספרים השלמים והרציונליים, ובתוכו כמה משפטים מתורת־המספרים שצויינו בפרק השלישי של הכרך הראשון; אף האלגוֹריתמוס הנקרא על שמו של אבקלידס נמצא כאן. גם חומר הספר העשירי נראה בעינינו כאריתמיטי: הוא מכיל מיוּן גיאומטרי מסובך במקצת של גדלים גיאומטריים אירציונליים בתפיסת הזמן ההוא, דהיינו של גדלים שיש לבנותם מתוך גדלים רציונליים ע"י הוצאה ממושכת של שרשים ריבועיים. (על מעלתם הגיאומטרית של גדלים כאלה נייחד את הדיבור ב § 4.) המושג הכללי של המספר האירציונלי נמצא אצל היוונים רק לגבי „יחסים" ולא לגבי גדלים ממש.

בסוף ה„אלמנטא" יש עוד שני ספרים גיאומטריים במלוא מובן המלה:

1. יש סברה, שהספר החמישי כולו חובר ע"י Eudoxos. הדעה המקובלת היא שהאלמנטא בכללם לא חוברו כחטיבה אחת אלא צורפו ע"י אבקלידס מתוך כמה חיבורים בודדים קודמים, פחות מושלמים. על כל פנים עלינו לראות את אבדוכסוס, שחי בראשית המאה הרביעית לפה"ס, כמחולל תורה משוכללת של הרֶצֶף, תורה שלרמתה הגיעה המתימטיקה החדישה רק במחצית השניה של המאה ה 19 בתורות האריתמיטיות של המספרים הממשיים.

הספר ה 11, המכיל את התחלות הסטיריאומטריה (תורת הגופים במרחב בעל שלשה ממדים), והספר ה13, המביא את תורת חמשת הגופים (הפיאונים) המשוכללים ואת בנייתם בעזרת סרגל ומחוגה. לשם זה מסתמך התיאור מצד אחד על הספר העשירי, ומצד שני על תהליכי־גבול מסוג הוכחות־אכסהוסטיה (עמ׳ 159) כגון מיצוי שטח העיגול ע״י מצולעים מקיפים ומוקפים, וכן חשבון נפחם של הפיראמידה וגופים אחרים. תהליכי גבול אלה מתוארים בפירוט בספר ה12.

יצויין בסופה של סקירה זו, שה„אלמנטא" לא שימשו בזמנם כספר־לימוד מתימטי, וכל־שכן שלא היו מיועדים להוראת הגיאומטריה לנוער. הטלת הדגש על המבנה ההגיוני בתהליכים הגיאומטריים והרחקתם השיטתית של ההסתכלות, של מכשירי־בניה וכו׳, מצד אחד, וסידור החומר לפי עקרונות הגיוניים ולא גיאומטריים, מצד שני (כגון ההפרדה הקיצונית בין גיאומטרית המישור לזו של המרחב, וכיוצא בזה), מעידים על כך, שהמטרה היתה ביצוע בנין דידוקטיבי־עיוני לשם אימון השכל, כהכנה לקראת הוראת הפילוסופיה כנהוג בבית מדרשם של אפלטון ותלמידיו. (בזמן ההוא לא היה נהוג בהוראת הגיאומטריה ניתוח המפריד בין ההנחה, הטענה, ההוכחה וה„קביעה" כפי שהוא מופיע ב„אלמנטא" — ואחרי כך בשיא חדש אצל ג א ו ס — אלא טיפול יותר פסיכולוגי המתחשב בהתהוות הרעיון ועיבודו לקראת התיאור השיטתי.) אפייו זה של הספר מסביר גם את ב ח י ר ת ה ח ו מ ר ב„אלמנטא". אף לפי הידיעות המתימטיות בדורו של אבקלידס אין לראות את ספרו אלא כתיאור החומר „האלמנטרי". חתָכי־החרוט[1] ועקומים אחרים, שהיו ידועים בזמנו ושעליהם כתב אבקלידס עצמו ספר (שאבד), אינם נכללים בו — לא מפני שעצם העובדות המתימטיות עמוקות מאלה שב„אלמנטא" אלא הואיל ובאותם הנושאים „הגבוהים" עדיין לא הצליחו להגיע לכלל ביסוס ושיטה בעלי הרמה העיונית הנכספת.

אצל א ר כ י מ י ד ס, הממציא הגדול הן במתימטיקה העיונית הן בשימושיה (וכן בפיסיקה הנסיונית), מוצאים אנו אוירה שונה. הוא התענין אף בשאלות החשבון המספרי. אפייני הוא הדבר לגבי הבדלי הגישה בינו לבין ה„אלמנטא", שאצל אבקלידס מגיעה תורת המעגל לשיאה במשפט האומר ששטחי עיגולים מתיחסים כריבועי מחוגיהם, בו בזמן שארכימידס מתאמץ לחשב את הקבוע של מתכונת זו, דהיינו את המספר π.[2] רבים מכתביו הלכו לאיבוד; מבין החומר

1. בעיקר אֶליפסה, פראבולה, הִפֶּרבולה.

2. במאמרו על מדידת המעגל, שנשמר רק בחלקו, נמצא אי־השויון $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.
אך Heron מספר על ספר אחר, שהלך לאיבוד, ושבו קובע ארכימידס $\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$.
כיצד הצליח בהוצאת השרשים הריבועיים הנחוצים לשם קביעה מפליאה זו (המדוייקת עד הסיפרה החמישית בשבר עשרוני), לא הוברר כל צרכו, אף כי מחקרים רבים הוקדשו לשאלה זו.

שנשאר לפליטה חשובים ביותר הספרים „על הכדור והגליל" ו־„על הקונואיד והספירואיד", שבהם נמצאות קביעת שטח־פניו ונפחו של הכדור ושטחה של האליפסה, וכן תורת משטחי־הסיבוב לרבות נפחם. (הלוליין הנקרא על שמו, וכן תרבוע הפראבולה[1], מתוארים במאמרים מיוחדים.) בכתבים אלה מוכיח ארכימידס את המשפטים הנחוצים לו מן „הגיאומטריה האינפיניטיסימלית" בעזרת מִצוּי דוגמת אבדוכסוס; אך בספריו על מיכניקה יוצר הוא שיטה משלו, שהוא עצמו לא ראה אותה כמדוייקת בהחלט, שיטה חמתלכדת למעשה עם סכימה (אינטיגרַציה). בעזרתה הצליח לקבוע את נקודות־הכובד, הנפחים ושטחי הפנים לגופים רבים. כאבן הפינה לשיטתו ירה במפורש את אכסיומת אבדוכסוס (עיין לעיל). ללא ספק היה ארכימידס „חדיש" במלוא מובן המלה, בניגוד לאבקלידס ולבאים אחריו. אמנם מתוך שלא היה לו המשך לא השפיע במישרין על התפתחות המתימטיקה החדישה במאה ה 17.

א פ ו ל ו נ י ו ס לא היה רב־צדדי כארכימידס, אבל בתחום עבודתו הגיע אף הוא להצלחה מעולה, ועלינו לראותו כשני במעלה לארכימידס. הוא פיתח את תורת חתָכי־החרוט[2] בשלימות מפתעת ובסידור שיטתי; לולא תורתו זו, לא היו בידי קֶ פ ל ר (שחי 1800 שנה אחריו) האמצעים לקביעת חוקיו היסודיים (כמסקנה מחומר נסיוני על מסילות כוכבי־הלֶכת). ספרי אפולוניוס כוללים, אם נדבר בלשון חדישה, את התכונות ההרמוניות של הקוטב והקָטבי, את יצירתם הפרוייקטיבית של העקומים מתוך שתי אלומות־ישרים, ואפילו בעיות של ערך־קיצון לנורמָל המגיעות כמעט עד המושג של מֶרכז־העיקום. אפולוניוס משתמש כמכשיר־מחקר, בצאתו מן הצירים והקדקוד, בשיטות המקדימות את הגיאומטריה האנליטית. לתרגיל הנקרא על שמו של אפולוניוס (לצייר מעגל המשיק לשלשה מעגלים נתונים) הוקדש מחקר בפני עצמו, שלא הגיע לידינו.

אחרי אפולוניוס לא שב עוד המחקר המתימטי לאיתנו עד תקופת־פריחתו החדשה במאה ה17. ראויים לציון חוקרים אחדים, בייחוד היפרכוס, הירון, דיופנטוס[3]; אך אין להם מגע לגיאומטריה העיונית: היפארכוס עשה צעדים לקראת המצאת הטריגונומטריה בעבור חשבונות אסטרונומיים; התענינותו של

1. כפי שהתברר ממכתב של ארכימידס אל Eratosthenes, שהתגלה רק בראשית המאה ה 20, השתמש א. בסיכומו של טור אינסופי כדי למצוא את המסקנה, שהוכיחה אחר כך בדרך הרגילה ע״י אֶכסהוסטיה.

2. השמות אליפסה, פראבולה, היפרבולה נוצרו ע״י אפולוניוס. כן היה הוא הראשון שראה את שני קווי ההיפרבולה כיחידה.

3. Hipparchos, Heron, Diophantos. — ספרו האסטרונומי המפורסם של Ptolemaios מסתמך בעיקר על קודמיו. בראש וראשונה על היפארכוס. הוא משתמש בתחליפים לטריגונומטריה הספירית (שטרם הומצאה).

הירון היתה מרוכזת במיכניקה; דיופנטוס כוון את מחקריו, בצורה חדישה ממש, לתחומי האלגברה ותורת־המספרים.

הרומאים היו עקרים ברוב תחומי המדע, ובמתימטיקה בפרט; הם שכרו להם מלומדים מיון או מארצות המזרח לשם מלוי תפקידים מעשיים.

לא נוכל ליחד את הדבור כאן על הגיאומטריה של הערבים, לרבות היהודים היושבים בקרבם, במשך מאות השנים של ימי הביניים; אלמלא הם ששמרו על גחלת אוצרותיהם של היוונים, לרבות פיתוח המדע היווני בכמה כוונים חשובים (שבתוכם יש לציין את הטריגונומטריה [1]), לא היו מקום־אחיזה ואפשרות־המשך למדע האירופי בתקופת הריניסאנס.

§ 3. השיטה הסינתֶטית והשיטה האנליטית בגיאומטריה. גיאומטריה אנליטית „טהורה"[2].

נקדים הערה הדנה במונחים. למלים „סינתיטי" ו„אנליטי" אין כאן המשמעות, שיש למונחים סינתיזה ואנליזה [3] בפילוסופיה בכלל, ובתורת ההוכחה המתימטית בפרט. בחירת המונחים היא שרירותית למדי וצמחה על רקע היסטורי; בעיקר השפיע השם „אנליזה", ככינוי הרגיל לתורת המספרים הממשיים והמרוכבים ולתורת הפונקציות, על בחירת השמות הנ"ל. מאידך יש למצוא בספרים אחדים, במקום הכינוי „גיאומטריה סינתיטית", את השמות „גיאומטריה פרויֶקטיבית" ואף „גיאומטריה חדישה". מובן שהשם האחרון היה מתאים רק לתקופה מסויימת, שעברה מזמן. ואילו המונח הראשון ישמש לנו לשם הבחנה בין תחומים ידועים של הגיאומטריה, השונים ב„חומר" שלהם (עיין בפרק הבא), בעוד שכאן מדובר על הבדל בשיטה, שבעזרתה אפשר להוציא לאור אותו חומר.

קודם כל יצויין הקו המבדיל בין הגיאומטריה „האלמנטרית" – דוגמת זו של אבקלידס ושל הלימוד (הראשון) בבתי הספר התיכוניים – מזה, לבין הגיאומטריה הסינתיטית והאנליטית במשותף מזה. אמנם יש נימוקים מספיקים, בראשם „נימוקי־פשטות", לכך, שאבקלידס מבכר את הקו הישר ואת המעגל על פני כל שאר הקווים. אך נימוקים אלה מקריים הם ואינם נתונים להכללה. גדולה מזו: אם רצוננו לחקור קווים פחות „פשוטים", כגון חתכי־חרוט או העָלֶה של

1. במידה רבה יש לראות את הרלב"ג (לוי בן גרשון) כיוצר הטריגונומטריה המישורית (בניגוד לספירית, שקדמה לה). דומה שהוא היה גדול המתימטיקנים היהודים עד המאה ה 19 (עד Eisenstein ו Jacobi והבאים אחריהם). השוה א"ה פ ר נ ק ל: המחקר המתימטי והאסטרונומי אצל היהודים (תל־אביב 1947).

2. הקורא ימצא בפרק הששי ביאורים נוספים לכמה נושאים, בייחוד מן הגיאומטריה הסינתיטית, שבהם אנו נוגעים בסעיף זה. — על החלק האחרון של סעיף זה, שהוא קשה במקצת, יוכל הקורא המתחיל לדלג בקריאה הראשונה.

3. המלים הן יווניות, ולפי מובנן המקורי σύνθεσις ר"ל צירוף, איחוד; ἀνάλυσις ר"ל התרה, הפרדה, ניתוח.

קרטיסיוס [1] או הקונואידים והלוליינים שנחקרו ע"י ארכימידס, הרי עלינו לפתח שיטות בפני עצמן שאין להן כל קשר עקרוני לשיטות שבהן נחקר, למשל, המעגל. שיטת „קווי־העזר" היוצאים לא ללמד על עצמם אלא על גורמים אחרים שבציור הנדון, מסבכת את הדיון כבר בנושאים פשוטים ודורשת דמיון וחריפות בכל מקרה מחדש. בעברנו לנושאים עמוקים יותר נתקלים אנו מתוך שיטה זו בסיבוכים שקשה לשאתם. לפיכך רצוי טיפול כללי ביצירים גיאומטריים לפי שיטה אחידה, וכל טיפול כזה מותנה בהסתמכות על תפיסה והגדרה אחידה ליצירים; לאמור: על בנית היצירים השונים מתוך אלמנטים (יצירים „פשוטים ביותר") בדרך אחידה. הגדרת האלמנטים בעצם שרירותית היא, ורק פשטות המסקנה תוכל להצדיק למפרע את הבחירה; מטעמי נוחיות והרגל בלבד נבחר להלן, בדרך כלל, באותו אלמנט, שאולי במובן פסיכולוגי קרוב הוא לנו ביותר (אף כי במובן הגיוני נראה הוא רחוק ומסובך מאלמנטים אחרים), והוא הנקודה [2]. שומה עלינו אפוא להגדיר ולבנות את היצירים הגיאומטריים כולם מתוך יחסי קשר בין נקודות. היצירים מופיעים כקבוצות הקבועות ע"י חוקי סידור בין נקודות [3].

כאן יש, לפחות, שני מיני גישה, בצירוף כמה דרכי מעבר ביניהם: נוכל לקבוע את מקומותיהן של הנקודות הנדונות מתוך תהליכי־בניה גיאומטריים הקובעים מקומה של כל נקודה במישור או במרחב, או ע"י מספרים ופעולות אריתמיטיות ביניהם. במקרה הראשון לפנינו הגיאומטריה הסינתיטית או הטהורה, במקרה השני הגיאומטריה האנליטית. גישה זו לענין מציינת את הקרבה הפנימית בין שני הכוונים יותר מאשר את ההבדל ביניהם; ההבדל מיוסד על גורמי שיטה וישמש לנו להלן נושא לדיון. על כל פנים אין ההבדל תלוי בבחירת הנקודה דוקא כאלמנט המחקר והוא נשאר בתקפו ובאפיין לאחר בחירת אלמנט אחר.

שיטותיה של הגיאומטריה הסינתיטית תופענה לפנינו בפרק הבא בכמה מקומות. כבר נגענו בשיטה האנליטית בכרך הראשון (ו, 116, 151, 163, ובייחוד 231); באופן עקרוני יותר נדון בה בסוף הסעיף הזה. נקדים לכך תיאור קצר להתפתחות שתי השיטות; מטעמים היסטוריים נפתח בשיטה האנליטית.

הגיאומטריה האנליטית ראתה את אור העולם במאה ה 17, וממציאיה (ללא תלות ביניהם) הם המתימטיקנים הצרפתיים המפורסמים פרמה

1. Folium Cartesii. משוואתו בשעורים „קרטיסיים" היא: $x^3 + y^3 = 3axy$.

2. על אלמנטים אחרים, כגון הישר או המישור, ידובר ב§1 לפרק הששי. אך באמת אפשר להמיר את הנקודה ביצירים מסוג לגמרי אחר; למשל במעגלים במישור. או בכדורים איברי „אלומה".

3. נסיון חשוב במובן עקרוני לביסוס הגיאומטריה האלמנטרית („האבקלידית") על שיטה זו נעשה ע"י Pasch ב 1882 בספרו הנ"ל (עמ' 163). מתוך גישה כזו בטל ברוב המקרים הצורך להבדיל בהוכחות בין מקרים שונים.

ודיקרט[1]; השני מציין, כידוע, את ראשיתה לא רק של הגיאומטריה החדישה כי אם גם של הפילוסופיה החדישה. שניהם[2] הושפעו במידה מכרעת ע״י הגיאומטריה היוונית, בפרט ע״י אפולוניוס, היפארכוס ותלמי; מאידך לא הגיעו לפי טבע הענינים, זמנו של מקצוע שיטתי זה לפני המאה ה־17, בהיותו סמוך על שולחנה של הטכניקה החשבונית באריתמיטיקה, מעשה Vieta וחבריו. הקו העקרוני הכפול המבדיל ביניהם לבין קודמיהם העתיקים הוא: ראשית, העברת ה„ציר״[3] לקו ישר שרירותי של המישור ובחירת נקודה שרירותית בציר כ„מוצא״ או נקודת־ראשית, שממנה, לשני עבריה, קובעים את ה„פסוק״ כמספר ממשי, חיובי או שלילי. שנית, הגישה המפשיטה את השעורים אופי של גדלים והמלבישה אותם איצטלה של המספר הטהור, הנקבע ביחסות ליחידת־האורך שנבחרה[4].

בדרך כלל – כלומר, ללא הפלייה לגבי מספר ממדיו של המרחב ובחירת האלמנט — יש לומר: שעורים (קואורדינטות) הם מספרים הקובעים את מצבו של אלמנט־המרחב הנידון. נכון אמנם שקביעה זו עצמה דורשת בניה יסודית, וגורם „סינתיטי״ זה הוא הוא המציין את אפייה של מערכת השעורים הנדונה; אך ממנו ואילך מתקדמת הגיאומטריה האנליטית דרך חשבון. כל יציר גיאומטרי יוגדר ע״י משוואה אפיינית (או מערכת־משוואות או אי־שויונות) בין שעורי האלמנטים; למשל: עקום במישור ע״י משוואה בין הפסוק x והפוסק y של נקודות העקום. המשוואה מייצגת תכונה אפיינית ליציר הנדון; לאמור: חוק המגדיר את הקו, המשטח וכו׳. (השוה הדוגמות ב I, 232—241 ו־251—254.) בקיצור: הגיאומטריה האנליטית מתארת את היחסים החוקיים הקיימים בין האלמנטים של יציר גיאומטרי בעזרת משוואות בין משתנים מספריים.

אמנם ספרו של פרמה עולה על זה של חברו בבנינו, שהוא שיטתי ומובן ביתר קלות, ואף נכללות בו משוואות הקו הישר, חתכי־החרוט, המישור והכדור,

---

1. R. Descartes; P. de Fermat (בצורתו הרומית של שמו: Cartesius). מאמרו המכריע של פרמה Ad locos planos et solidos isagoge היה ידוע למתימטיקני פריז מ־1637 בערך (ונכתב כמה שנים לפני כן), אך הופיע בדפוס רק ב־1679, זמן רב אחרי מותו — אחד הסימנים לענוותנותו היתירה. ספרו של דיקרט La Géométrie הופיע ב־1637 בליידן כאחד הנספחים ל־Discours de la Méthode, המוערך בדרך כלל כביכורת הפילוסופיה החדישה. (תרגום „הגיאומטריה״ לאנגלית ע״י D. E. Smith ו M. L. Latham הופיע ב־1925.)

2. באופן מעשי, אך לא עקרוני, התקרב עוד יותר למושג השעורים N. Oresme, על מנת לתאר תכונות־גידול של גדלים משתנים.

3. המדובר בציר אחד בלבד, ציר ה x (הפסוק), ואין בזה חסרון מבחינה עקרונית.

4. בהבהרתו של ענין עקרוני זה (השעורים כמספרים טהורים) עולה תיאורו של דיקרט על זה של פרמה, המסתמך בעיקר על גדלים בעלי מספר מסויים של ממדים.

שאינן נמצאות אצל דיקרט. אולם למעשה התפתח המקצוע החדש יותר מתוך חיבורו של דיקרט; מלבד הפירסום בדפוס גרם לכך השימוש במספרים טהורים, שביטל את הצורך בהומוגיניותן של המשוואות המבטאות שויון בין ארכים או שטחים וכו׳ – צורך שהיה מובן מאליו בעיני היוונים והערבים ושבו עוד החזיק פרמה.[1] התפתחות השיטה החדשה במשך המאה ה 17 היתה אטית. ההכללה אל המרחב בן שלשה ממדים גרמה קושי לדורות הללו ובוצעה מתוך צעדי היסוס בלבד. פקפוק מסוג אחר נגרם ע״י העקומים ה„מיכניים״ (כלומר: הטרנסצנדנטיים) שמשוואותיהם אינן נתונות לתיאור אלגברי; אמנם לייבניץ דרש את הכללתם, אך המשוואות ניתנו בצורתן הדיפרנציאלית בלבד (כלומר, חוק המשיק; השוה I, 270). בדרך כלל – פרט, למשל, למאמר מפורסם של ניוטון – היה לגיאומטריה האנליטית, עד סוף השליש הראשון של המאה ה 19 בערך, אופי של שיטת־חשבון פורמלית, המשמשת בעיקר אמצעי לאמת (לאמור, להוכיח „אחרי מעשה״) מסקנות שהושגו בדרך ההסתכלות.

מ Möbius (עיין לעיל עמ׳ 164) ו Plücker, שהתחילו להעניק סימנים (+ ו —) לגדלי הגיאומטריה באופן עקרוני והכניסו את השעורים „ההומוגיניים״, החלה תחיית השיטה והתפתחותה בדרך עצמאית ורעננה; חוקר מעולה ורב־צדדי כ Cayley לקח חלק פעיל בדרגתה הראשונה של התפתחות זו. לעלייה הזאת גרמו דרכי סימון מקצרות הנוחות לשימוש אנליטי (לרבות חשבון הוקטורים) מצד אחד, והפעלת שיטות אנליטיות חדשות מצד שני: תורות הדיטרמיננטים, השמורות, החבורות, ובזמן האחרון גם השדות (I, פרק חמישי), וכן שיטת האלמנטים הדמיוניים (§ 4 לפרק הששי). השיחרור ממערכת־שעורים צפידה והמעבר לשעורים „טבעיים״ התלויים בעצם מהותה של הבעיה הגיאומטרית הנדונה עזרו גם הם. מבחינה שונה לגמרי השפיע השימוש בחשבון האינפיניטיסימלי. הוא נכנס אמנם לתוך הגיאומטריה מיד בסוף המאה ה 17, אך גילה את כל תקפו וגבורתו בפתרון הבעיות הגיאומטריות רק במאה ה 19; הרי תנאי להפעלתו הוא ביטוי אנליטי לבעיה הגיאומטרית הנדונה.

(אף־על־פי שבפרק הששי ובראשית הפרק השביעי נדון במושג השמורות (האינוריאנטות) ותפקידן בגיאומטריה ביתר פרוט[2], נרמוז כבר כאן על חשיבותן בהתחרות בין השיטה האנליטית והשיטה הסינתיטית – ומותר אולי להוסיף: על חלקן בנצחונה של הגיאומטריה האנליטית. ליקויה הבולט של השיטה

---

1. המונח „שעורים קרטיסיים״ לגבי שעורים ישרי זווית אינו היסטורי כל עיקר. פרמה ודיקרט השתמשו בעיקר בשעורים משופעי־זווית, כפי שהם מופיעים מתוך טבע הענינים, למשל אצל חתכי־החרוט (כוונים „צמודים״).

2. במובן גיאומטרי נשתמש כאן במושג השמורה לפי תפיסה שונה קצת מזו שבפרק הבא: שם מדובר בשמורות לגבי העברות, ואילו כאן לגבי בחירתה של מערכת השעורים. אמנם מבחינה אלגברית אין הבדל בין שתי תפיסות אלו.

האנליטית הלא הוא תלותן של המשוואות, הקובעות את היצירים הגיאומטריים, במערכת השעורים. משוואת האליפסה, למשל, לפי מערכת צירים ישרת־זווית (רק במערכות כאלה נעסוק כאן) המתלכדת עם צירי האליפסה, היא המשוואה הפשוטה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad \text{(I)}$$

אך ע״י שינוי של מערכת הצירים תקבל אותה האליפסה משוואה בעלת הצורה

$$px^2+2qxy+ry^2+2sx+2ty+k=0, \qquad \text{(II)}$$

שבה יכולים כל המקדמים להיות שונים מ 0. ואל יהא דבר זה קל בעינינו! שכן בבצענו חשבונות בביטויים מורכבים ממקדמי המשוואה, שיש להם משמעות גיאומטרית, נעבור בהיסח הדעת לביטויים אחרים התלויים לא ביציר הגיאומטרי הנדון (האליפסה) כי אם במערכת השעורים השרירותית, שאין לה אולי כל קשר לאליפסה. אגב, עובדה זו סללה את הדרך להצלחתו של חשבון הוֶקטורים בפיסיקה; שהרי הוקטורים אינם תלויים במערכת שעורים.

לדורנו, דור המלחמות, ידוע היטב שהצרה וסכנת התבוסה היא המחוללת את כלי־הזיין המעולים הסוללים דרך לנצחון. הישגי הגיאומטריה הסינתטית (עיין להלן), שיצאה מנקודת־התורפה הנ״ל של השיטה האנליטית ודחפה את האנליזה למצב של התגוננות, יצרה במחנה היריב את ה„טאנק" של גיאומטרית המאה ה 19: את השמורה. לגבי אגפה השמאלי של המשוואה הכללית (II) של האליפסה, למשל, מתברר בנקל כי

$$i_1=p+r, \qquad i_2=p\cdot r-q^2$$

הם שמורות, כלומר בטויים מורכבים ממקדמי המשוואה התלויים ביציר הגיאומטרי (האליפסה הנדונה) בלבד ולא במערכת־השעורים. מתוך (I) נקבל

$$i_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \qquad i_2=\frac{1}{a^2b^2}.$$

וכאן a ו b הם חצאי־הצירים של האליפסה, דהיינו גדלים בעלי משמעות גיאומטרית. אין כמובן i_1 ו i_2 השמורות היחידות של האליפסה; למשל ודאי שגם a ו b הן שמורות. אך מבחינת תורת־השמורות הכללית יש לשמורות i_1 ו i_2 יתרון מיוחד[1].)

1. מי שזוכר עוד מה שלמד באלגברה, למשל בפרק השמיני (והתשיעי) של הכרך הראשון, יבין את הניסוח הבא ליתרון הנדון, ניסוח שלא יקשה להוכיחו: הזוג (i_1, i_2) הוא מערכת „שלימה" של שמורות האליפסה, ז״א יש לה תכונה מצויינת זו: כל שמורה שהיא פונקציה רציונלית שלימה של מקדמי משוואת־האליפסה — כלומר, של p, q, r, s, t, k — היא גם פונקציה רציונלית שלימה של i_1 ו i_2. מציאותה ובנייתה של „מערכת־שמורות שלימה" במובן זה במקרה הכללי (לאמור: לגבי כל היצירים, ולגבי כל ההעברות הפרוייקטיביות ולא האָקוויפורמיות

בעונה אחת עם התחלות הגיאומטריה האנליטית נתבססה השיטה, שכינינוה כאן בשם גיאומטריה סינתיטית, בידי דיזארג[1], אף הוא צרפתי. בצאתו מתורת הפֶּרספֶּקטיבה באמנות־הציור, הפעיל את ההטלה המרכזית — המבטלת את הצורך להפלות בין ישרים נחתכים ומקבילים; עיין בפרק הבא — על יצירים גיאומטריים ובפרט על חתכי־החרוט, וביסס בדרך זו בבת אחת הן את השיטה הסינתיטית הן את הבעיות הממשיות של הגיאומטריה הפרוייקטיבית (ההיטלית). הוא מצא בין בני דורו כמה תומכים ואף הולכים בדרכיו, שהגדול ביניהם הוא פסקל[2]. אך גורלו היה שונה תכלית שוני מזה של ממציאי הגיאומטריה האנליטית; דיזארג, ספרו ושיטתו נשכחו לחלוטין, והספר נתגלה שוב רק כעבור מאתיים שנה, דור אחרי המצאתה השניה של השיטה. בסוף המאה ה 18 הפך מונז׳[3] את הידיעות המפוזרות והפרוטות שהיו לקודמיו בבעיות הפרספקטיבה למקצוע מקיף ומסודר, הגיאומטריה התיאורית. על־כמך מחקרים אלה מצא פונסלה[4], בהיותו שבוי ברוסיה (הגיע שמה כקצין בצבאו של נפוליון ב 1812), עוז ומעוף בנפשו לכתוב את ספרו על תכונותיהם הפרוייקטיביות של הציורים (הופיע רק ב 1822), המשמש יסוד לגיאומטריה הפרוייקטיבית מזה ולשיטה הסינתיטית מזה. בהשתמשו תמיד בהטלה המרכזית הגיע באופן אוטומטי להבחנה בין התכונות המֶטריות והפרוייקטיביות (עיין בפרק

בלבד; עיין בפרק הששי, § 1) היא הבעיה היסודית של תורת השמורות. היא נפתרה רק בסוף המאה ה־19 ע״י הילברט.

1. G. Desargues. ספרו על הפֶּרספֶּקטיבה הופיע ב־1636, ונספח לספר זה מכיל את המשפט על משולשים המוסר את שמו של דיזארג לכל הדורות הבאים. חשוב עוד יותר הספר Brouillon Project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan („תכנית זמנית לחקירת הקורות, בהיפגש חרוט ומישור"; הופיע ב־1639). ספר זה, עוד יותר מחבריו, נפסל בעיני בני דורו — ומתוך כך בוטל עד כדי שכחה גמורה במשך מאתיים שנה — מחמת שלשה ליקויים: ראשית, המינוח היה חדש לגמרי ומוזר למדי, בהשתמשו בשמות מן הבוטניקה; שנית, החיבור לא פורסם כספר אלא בצורת דפים בודדים (מודפסים באותיות קטנטנות) שדיזארג חילקם בין ידידיו, כפי שמחלקים כתבי־סתר; שלישית, ביטול ההפלייה בין ישרים נחתכים ומקבילים היה בניגוד גמור לדעות „הקלסיות" של הגיאומטריה היוונית ושימש אבן־נגף להשקפה הפרוייקטיבית בכלל. רק בשנת 1845 נזדמן במקרה ל M. Chasles טופס של ה Brouillon, ואלמלא מקרה זה לא היינו יודעים את עומק תפיסתו הגיאומטרית של דיזארג. — השוה את הספר L'oeuvre mathématique de G. Desargues. (Edited by R. Taton.) Paris, 1951, ואת המאמר, המכיל גם צלומים מספרי דיזארג William M. Ivins, Jr.: A note on Girard Desargues. *Scripta Mathem.*, vol. 9 (1943).

2. Blaise Pascal. הוא הצטיין במתימטיקה עוד בהיותו נער. במדע הכללי יצא לו שם עולמי כפילוסוף של הדת.

3. G. Monge. גם מחקריו של L. N. M. Carnot הכשירו את הקרקע לשיטותיו של פונסלה.

4. V. Poncelet. שם הספר הוא: Traité des propriétés projectives des figures.

הששי), וחשיבותו של היחס הכפול[1] בלטה חיש מהר. עם זה הכניס פונסלה גם את היצירים האינסופיים (שכבר דיזארג שם להם לב) והעניק להם שוויון זכויות עם היצירים הסופיים; הרעיון הנועז של הנקודות המעגליות הדמיוניות (פרק ששי, § 4) איפשר לו להתגבר גם על בעיות מסובכות, הן במישור הן במרחב. לבסוף הביאה אותו תורת הקוטביות לעקרון הדואליות[2] (פרק ששי, § 1) שבו מיהרו להשתמש בני דורו. בהתאם לעקרון זה מופיעים אצל פונסלה ותלמידיו, מלבד הנקודה, אלמנטים אחרים בבנית היצירים הגיאומטריים: במישור, הקו הישר; במרחב, המישור.

יסודותיהם של מחקרים אלה לא היו מוצקים ביותר, ובחלק ניכר היו אנליטיים — עם כל חיבתו של פונסלה לשיטה הסינתיטית דוקא. ריכוז השיטה הסינתיטית, אך עם זה צמצום קנאי וחד־צדדי, הושגו בדור הבא ע״י Steiner ו Chasles.

הדרגה האחרונה של המלחמה בין ה„סינתיזה" וה„אנליזה" התחילה באמצע המאה ה 19. von Staudt וחבריו הצליחו אמנם לבסס את היחס הכפול — שהוא אבן הפינה לבנין הגיאומטריה הסינתיטית, ושהגדירוהו עד אותה שעה בעזרת ארכי־קטעים, כלומר בעזרת מידה או מספר — על גורמים פרוייקטיביים ולהתיר בדרך זו את הקשר בין הגיאומטריה „הטהורה" לבין האנליזה. אך בעת ובעונה אחת עם הצלחתו זו הראה פון סטאודט בעל כרחו, שטיהור זה גורר אחריו צמצום, המונע למעשה התקדמות פוריה בפיתוח הגיאומטריה. מאז פסקה המלחמה ההיא, ובמקומה באה מזיגה המשתמשת בכל המקורות היעילים לשם שכלול הבנין הגיאומטרי, ללא מצוות־עשה ולא־תעשה דוגמטיות בדבר שיטות ודרכי־בנין מותרות ואסורות.[3]

בסעיף זה נגענו בכמה נושאים מן הגיאומטריה הסינתיטית, בייחוד בתחום הפרוייקטיבי, שעליהם נייחד את הדיבור בפרק הבא. הקורא שלא מצא את ידיו ואת רגליו בחלק זה של התיאור ההיסטורי, יתנחם בהחלטה לקרוא אותו שנית אחרי עברו על הפרק הששי. לעומת זאת לא יהיו לנו צורך והזדמנות בפרקים הבאים לעסוק עוד בגיאומטריה האנליטית. ראשית, הרי אין זו גיאומטריה

1. Ch. J. Brianchon הבליט מושג זה ב 1817. את משפטו המפורסם השיג בעזרת הקו „הקוטבי".

2. ביתר בהירות נוסח עקרון זה ע״י J. D. Gergonne החל מ 1825.

3. הספר הגיאומטרי המקיף אולי מכל ספר אחר בזמננו, H. F. Baker: Principles of geometry; 6 vols., 1922—1933 משתמש בשני כרכיו הראשונים, ובחלק משאר הכרכים, בשיטה הסינתיטית בעיקר. (הכרך הרביעי מוקדש לגיאומטריה בארבעה ממדים ויותר; השוה להלן בפרק השמיני.)

„טבעית", אף כי מועילה ביותר[1]. שנית, רוב הקוראים למדו בודאי בבית הספר את התחלות הגיאומטריה האנליטית עד כדי קבלת מושג־מה מן העקומים בעלי הסדר 2 במישור (חתכי־החרוט), ובודדים גם מן השטחים בעלי הסדר 2 במרחב — נושא חשוב מכמה בחינות, אך לא בעל ערך יסודי לחלוטין. מלבד זה כבר ניתנו בכרך הראשון של ספר זה המושגים המעשיים הראשונים על הגיאומטריה האנליטית במישור.[2]

אולם ויתור זה על תיאור מפורט מכריחנו, גם בהתחשב בצורך שיורגש בפרק השמיני, לסיים סעיף זה לפחות בתיאור עקרוני לגיאומטריה האנליטית.

מבחינה הגיונית היינו צריכים לכנות בשם גיאומטרית־שעורים את המקצוע הפותח בקביעת ה„אלמנטים" הגיאומטריים ע״י מספרים, והמוכיח על־סמך קביעה זו את משפטי הגיאומטריה במישור ובמרחב. האידיאל של גישה זו יהיה לבנות את המספרים הללו מתוך היחסים שבגיאומטריה עצמה, בצורה נוחה לשימוש, תחת קחתם מן האריתמיטיקה כתוצרת מושלמת. זוהי דרכה של הגיאומטריה הפרוייקטיבית מימי von Staudt ואילך; היא מוותרת על הנחות הרציפות (מידה, גיאומטריה מטרית) ובונה את המספרים הדרושים לה מתוך אכסיומות הקשר והסדר (פרק שמיני), בצירוף החפיפה המובילה לידי משפטו של פסקל (השוה בפרק הששי, § 3). לעומת זאת יתאים השם גיאומטריה אנליטית לגישה המתעלמת מן המציאות הגיאומטרית ההסתכלותית כדי לבנות גיאומטריה מופשטת לגמרי בעזרת מספרי האנליזה. השיטה הרגילה בגיאומטריה האנליטית היא מעין פשרה בין שתי הקודמות: עם קחתה את המספרים מתחום האנליזה, אינה מסתמכת עליהם בלבד אלא מעבירה ומפעילה אותם במרחב הגיאומטרי. ככלי זיין להעברה זו משמשות לה בעיקר אכסיומות הרציפות (פרק שמיני, § 4).

אך הקורא לא יצא ידי חובתו „האנליטית", הן במובן עקרוני הן כלפי השימוש בתוך ביסוסה האכסיומטי של הגיאומטריה, עד שיערוך גם טיול בתחום הגיאומטריה האנליטית במובנה המלא הנ״ל. לפיכך ינתן כאן תיאור קצר, מתוך

1. אכן רוב המקצועות הגיאומטריים, וכן עיקר השימוש בגיאומטריה בתוך הפיסיקה, מיוסדים הם על הגיאומטריה האנליטית.

2. מבין ספרי הלימוד שמספרם עצום (בשפות רבות), נציין כאן אחדים מהחדישים באנגלית:

R. D. Douglass & S. D. Zeldin: Analytic geometry. 1950. 216 pp.
W. H. McCrea: Analytical geometry of three dimensions. 2nd ed., 1947. 152 pp.
A. Robson: An introduction to analytical geometry. 2 vols. 1940 & 1947.
D. M. Y. Sommerville: Analytical conics. 1949.
— — Analytical geometry of three dimensions. 1951.

רמיזת הוכחות בלבד, לגיאומטריה זו (במרחב האבקלידי התלת־ממדי), הבנוי רק על ידיעת המספרים הממשיים. לא נניח כל ידיעות מן הגיאומטריה האנליטית הרגילה; אדרבה, הקורא שיש לו ידיעות כאלה מתבקש לשכחן עד גמרו את הסעיף!

הגדרה: כל שלישיה סדורה (a, b, c) של מספרים ממשיים[1] a, b, c תיקרא נקודה. השויון בין נקודות יוגדר ע״י הכלל: $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ אם, ורק אם, קיימים השוויונות בין מספרים $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

קבוצת כל הנקודות (x, y, z) המקיימות את המשוואה

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

כנגד מספרים קבועים נתונים A, B, C, D שמהם אין מתאפסים A, B, C כאחד, תיקרא בשם מישור; לכן, בהתאם להגדרת השויון בין קבוצות, שוה המישור (1) למישור $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ אם, ורק אם, יש מספר $k \neq 0$ באופן שקיים

$$A_1 = kA, B_1 = kB, C_1 = kC, D_1 = kD.$$

כל נקודה (x, y, z), שהיא איבר של הקבוצה הנ״ל, נקראת „נקודה של המישור״; אומרים גם „המישור עובר דרך הנקודה״ או „הנקודה חלה במישור״; וכן להלן לגבי ישר.

קבוצת כל הנקודות המשותפות לשני מישורים שונים — אם יש נקודות כאלו[2] — נקראת (קו) ישר, וביתר דיוק: ישר של כל אחד המישורים ההם.

יוצא מכאן, שכל ישר שייך לאינסוף מישורים שונים, ולא לשנים בלבד. כדי להוכיח זאת נניח שהישר s הוגדר ע״י שני המישורים השונים[3]

$$(2) \qquad \begin{aligned} F_1(x, y, z) &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ F_2(x, y, z) &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

תהא (x_0, y_0, z_0) איזו נקודה שהיא של הישר s. מקיומם של שני היחסים

1. מעתה נשמיט את התאר „ממשי״ כמובן מאליו.

2. קל לראות שנקודות כאלו נעדרות אם, ורק אם, קיימים (לפי הסימון שב (2)) לגבי מספר k מסויים היחסים:

$$A_2 = kA_1,\ B_2 = kB_1,\ C_2 = kC_1,\ D_2 \neq kD_1.$$

3. הסימון $F(x, y, z)$ לגבי פונקציה (כאן פונקציה ליניארית) של שלשת הגורמים x, y, z ידוע מן הכרך הראשון (I, 237). לשם קיצור נשמיט פעמים את הגורמים ונסתפק בסימן הפונקציה F. למשל, $\varkappa \cdot F_1 + \lambda \cdot F_2$ מסמן את הפונקציה

$$(\varkappa \cdot A_1 + \lambda \cdot A_2)\,x + (\varkappa \cdot B_1 + \lambda \cdot B_2)\,y + (\varkappa \cdot C_1 + \lambda \cdot C_2)\,z + (\varkappa \cdot D_1 + \lambda \cdot D_2).$$

הסימן $\equiv$ (סימן הזהות) מורה על כך שיש כאן סימון נוסף בעלמא; אין לו כל קשר עם סימן הקונגרואֶנטיות ב I, 38.

$F_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ ו $F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$ יוצא מיד, שלעומת כל שני מספרים $\varkappa$ ו λ קיים גם היחס

$$(3) \qquad \varkappa \cdot F_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot F_2(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

כלומר, (x_0, y_0, z_0) היא גם נקודה של המישור $\varkappa \cdot F_1 + \lambda \cdot F_2 = 0$.[1] ברור, שהמשוואה (3) מייצגת אינסוף מישורים שונים בהשתנות $\varkappa$ ו λ; לפיכך שייך הישר s לאינסוף מישורים. גדולה מזו: אפשר לקבוע $\varkappa$ ו λ כך שהמישור (3) יעבור דרך נקודה נתונה (a, b, c); כי התנאי $\varkappa \cdot F_1(a, b, c) + \lambda \cdot F_2(a, b, c) = 0$ יתן, אם η מסמן איזה מספר שהוא השונה מ 0 („גורם מתכונת״):

$$\varkappa = -\eta \cdot F_2(a, b, c), \quad \lambda = \eta \cdot F_1(a, b, c).$$

$\varkappa$ ו λ אינם מתאפסים יחד אלא אם כן (a, b, c) חלה בשני המישורים (2) גם יחד (כלומר, הנקודה (a, b, c) חלה בישר s).

קל להסיק מכך שלעומת כל ישר וכל נקודה שאינה חלה באותו ישר, יש מישור יחיד (3) המכיל את הישר והנקודה.

חשבון מסובך במקצת, שיובא במלואים לחלק החמישי, מספר ג), מראה: 1) שמשוואת הישר (2) „תוכל להיכתב״[2] גם בצורת המתכונת „המוארכת״

$$(4) \qquad (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = a : b : c,$$

שבה מסמן (x_0, y_0, z_0) איזו נקודה שהיא של הישר, ו־a, b, c הם מספרים שאינם מתאפסים כולם; 2) שדרך שתי נקודות נתונות שונות P_0 ו P_1 עובר ישר אחד ויחיד, אשר יסומן ב P_0P_1. נוכיח כאן, שכל שלש נקודות, שאינן חלות בקו ישר אחד, קובעות מישור אחד שבו חלות שלשתן.

קודם כל נוכל להעביר את משוואת המישור (1), ע״י חילוק באחד המקדמים, לצורה שבה ישוה אחד המקדמים ל־1 וישארו אפוא שלשה קבועים „עיקריים״ בלבד. למשל, אם $D \neq 0$, נקבל את הצורה: $A'x + B'y + C'z + 1 = 0$. והנה, כידוע מהתחלות האלגברה (שלש משוואות ליניאריות עם שלשה נעלמים, שהם כאן A', B', C'), נוכל „בדרך כלל״ למצוא ערכים לשלשת הנעלמים הללו באופן חד־ערכי כך, שהמישור (1) יעבור דרך שלש נקודות נתונות (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). לשם כך עלינו לפתור לפי A', B', C' את מערכת המשוואות הליניאריות

$$(5) \qquad F(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad F(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad F(x_3, y_3, z_3) = 0,$$

1. יש להוציא, כמובן, את המקרה $\varkappa = \lambda = 0$. בכל מקרה אחר מתאר $\varkappa \cdot F_1 + \lambda \cdot F_2 = 0$ באמת מישור; קל להסיק זאת מן ההנחה, ש $F_1 = 0$ ו $F_2 = 0$ מתארים מישורים שונים בעלי ישר משותף.

2. הכוונה היא: כל הנקודות (x, y, z) החלות באותו ישר, ורק הנקודות ההן, ממלאות את המשוואה (4).

אם נסמן את הביטוי $A'x + B'y + C'z + 1$ ב $F(x, y, z)$. ההגבלה „בדרך כלל" רוצה לומר: אי אפשר לקבוע את ערכי הנעלמים רק במקרה מיוחד: במקרה שבו האגף השמאלי של אחת משלש המשוואות (5), לפי מבנה מקדמיה, הוא תרכובת של האגפים השמאליים בשתי המשוואות האחרות — באופן שלמעשה לפנינו רק שתי משוואות לקביעת שלשת הנעלמים. החשבון המובא במלואים לחלק החמישי, מספר ג), מראה, שמקרה זה יחול אם, ורק אם, תתקיים המתכונת

$$(x_3-x_1):(y_3-y_1):(z_3-z_1)=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1). \quad (6)$$

אבל לפי (4) קובעת מתכונת זו, שהן הנקודה (x_2, y_2, z_2) הן הנקודה (x_3, y_3, z_3) חלות בקו ישר העובר דרך הנקודה (x_1, y_1, z_1); לשון אחר: שלש נקודות אלו חלות בישר אחד. הוכחנו אפוא את המשפט שבסוף הקטע הקודם.

אין קושי בדבר להוכיח כמה משפטים אחרים מהסוג הנ"ל; למשל, שישר ששתים מנקודותיו חלות במישור נתון, חל „כולו" (כלומר, לכל נקודותיו) באותו מישור; שלשני מישורים בעלי נקודה משותפת יש עוד נקודה משותפת (לפחות); שקיימות ארבע נקודות שאינן חלות במישור אחד.

חשוב מכל זה הוא, שחסר ב„גיאומטריה" שלנו עוד מושג עקרוני, והוא מושג־הביניים, או מושג הסדר (השוה לעיל עמ' 163, ולכל התיאור הבא השוה התיאור — שהוא גיאומטרי ולא אנליטי — ב § 4 של הפרק השמיני).

כדי להכניס מושג זה, נצא מן הישר (2) שלגביו קיים:

$$B_1 = C_1 = D_1 = A_2 = C_2 = D_2 = 0,\ A_1 \neq 0,\ B_2 \neq 0;$$

לאמור, מן הישר שנוכל לכתבו, אחרי חילוק ב A_1 וב B_2, בצורה:

$$x = 0, \quad y = 0[1].$$

כל נקודותיו של ישר זה הן אפוא בעלות הצורה $(0, 0, z)$, שבה עובר z על המספרים הממשיים. לכן נוכל להגדיר את יחס „הסדר" בין נקודותיו של ישר זה בהתאם לסדר המספרים הממשיים z לפי גדלם. הוא הדין לגבי הישר $[y=0, z=0]$ שלנקודותיו יש הצורה $(x, 0, 0)$, ולגבי הישר $[z=0, x=0]$ שלנקודותיו יש הצורה $(0, y, 0)$. אך אין באמת צורך להגדיר את שלשת יחסי־הסדר האלה לחוד; נוכל להתאים, בהתאמה חד־חד־ערכית, את נקודותיו של כל אחד משלשת הישרים „המצויינים" הנ"ל לנקודותיו של אחד מחבריו, בהסתמכנו על הערכים למשתנה הממשי היחיד (z או x או y). מתוך זה נקבל העתקים „דומים" (עמ' 83).

לפיכך נוכל לסמוך, לשם קביעת סדר באיזה ישר שהוא, על העתק דומה בין אותו ישר לבין אחד הישרים המצויינים הללו, ואמנם יתברר, שזוהי כוונת השיטה שבה נגדיר עתה את הסדר בדרך כלל. בהתאם למה שנאמר לעיל לגבי המשוואה

---

1. בגיאומטריה האנליטית הרגילה, שאסור לנו כאן להסתמך עליה, נקרא ישר זה „ציר ה z" (במרחב) — בהקבלה לכך שבגיאומטריה האנליטית שבמישור נקרא הישר $y = 0$ „ציר ה x" (השוה I, 232—235). — בהתאם לזה נקרא הישר $[y = 0, z = 0]$ „ציר ה x", והישר $[z = 0, x = 0]$ „ציר ה y".

(6), נוכל לכתוב את התנאי לכך, שנקודה „משתנה" $P_3=(x_3, y_3, z_3)$ חלה בישר העובר דרך שתי הנקודות ה„קבועות" השונות $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ ו־$P_2=(x_2, y_2, z_2)$, בכל אחת מן הצורות[1]

$$(x_3-x_1):(y_3-y_1):(z_3-z_1)=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$
$$(x_3-x_2):(y_3-y_2):(z_3-z_2)=(x_1-x_2):(y_1-y_2):(z_1-z_2).$$

לערכן המשותף של המנות[2]

$$\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \quad (7)$$

נקרא בשם ה„מיצד" (הפראמיטר) של הנקודה המשתנה P_3 בישר P_1P_2, ונסמנו ב μ. לפי זה אפשר לייצג את כל הנקודות $P_3=(x_3, y_3, z_3)$ של הישר P_1P_2, פרט לנקודה P_2, בצורה

$$x_3=\frac{x_1-\mu x_2}{1-\mu},\quad y_3=\frac{y_1-\mu y_2}{1-\mu},\quad z_3=\frac{z_1-\mu z_2}{1-\mu}. \quad (8)$$

μ יכול לקבל על־פי (7) כל ערך ממשי, פרט לערך 1 (הואיל והנקודות הקבועות שונות). מאידך, לכשיעבור μ על כל הערכים הממשיים פרט ל 1, תחסר לנו הנקודה $(x_3=x_2, y_3=y_2, z_3=z_2)$, כלומר יחסר המקרה של התלכדות P_3 עם P_2; את החסר הזה נמלא, או בהפכנו במקרה זה את המנות ב (7) (החלפת המונה במכנה), או בהרשותנו למיצד μ לקבל, כלפי מקרה זה, את הערך הסמלי ∞ („אינסוף"). — התלכדותה של P_3 עם P_1 מתאימה ל $\mu=0$.

ועתה נוכל להגדיר את יחס־הסדר בין הנקודה P_3 לבין הנקודות P_1 ו P_2 כדלקמן. אם μ שלילי הוא, יוצא לפי (7), כי מבין זוגות ההפרשים

$$x_3-x_1,\ x_3-x_2;\quad y_3-y_1,\ y_3-y_2;\quad z_3-z_1,\ z_3-z_2$$

אחד ההפרשים שבזוג הוא חיובי וחברו — שלילי; וחילופו, לאמור: אם בכל זוג שונים סימני ההפרשים, הרי μ שלילי. במקרה זה נגדיר: הנקודה P_3 נמצאת בין הנקודות P_1 ו P_2. בשאר המקרים יהיה μ חיובי וההפרשים שבכל זוג הם בעלי אותו הסימן. המקרה שאחד ההפרשים בכל זוג מתאפס (כלומר, μ שוה ל 0 או ל ∞) אינו דורש טיפול מיוחד, שהרי במקרה זה מתלכדת P_3 עם P_1 או עם P_2.

ההגדרה הנ"ל ליחס־הביניים מתאימה (במובן של העתק דומה) למצב השורר בשלשת הישרים המצויינים שיצאנו מהם. שהרי אם μ שלילי, נמצאת הנקודה $(0, 0, z_3)$ בין הנקודות $(0, 0, z_1)$ ו $(0, 0, z_2)$ בישר המצויין $[x=0, y=0]$, הואיל ומבין ההפרשים z_3-z_1 ו z_3-z_2 אחד הוא חיובי והשני שלילי; לשון אחר,

---

1. להפיכת הסימן באגף הימני של המשוואה השניה אין כל משמעות מיוחדת; הפיכה זו טבעית היא, שהרי המשוואה השניה מייחסת את P_1 ו P_3 ל P_2, כמו שמייחסת הראשונה את P_2 ו P_3 ל P_1.

2. מטעמים טכניים מופיע בעמ' 179—181 Z ישר במקום קורסיבי.

הואיל וקיים אחד היחסים בין מספרים $z_2 < z_3 < z_1$ ו $z_1 < z_3 < z_2$, יחס מתאים קיים במקרה זה ($\mu < 0$) בין שלש הנקודות $(x_3, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$ ו $(x_2, 0, 0)$, ובין שלש הנקודות $(0, y_3, 0)$, $(0, y_1, 0)$ ו $(0, y_2, 0)$.

אחרי כל האמור יהיה טבעי להגדיר: קבוצת כל הנקודות P_3 שבין P_1 ו P_2 נקראת הקטע (או הריוח) $\overline{P_1P_2}$ או $\overline{P_2P_1}$; P_1 וP_2 נקראות קצות הקטע. שאר הנקודות שבישר הקבוע ע״י P_1 וP_2 יוצרות את „הארכת" הקטע $\overline{P_1P_2}$; כלפיהן (היינו כלפי $\mu > 0$) אומרים: הנקודה נמצאת בישר „מעֵבר לקטע $\overline{P_1P_2}$". הישר P_1P_2 מכיל אפוא, מלבד קצות הקטע, את נקודות הקטע ואת נקודות הארכתו.

מאידך, אם P_1, P_2, P_3 אינן חלות בישר אחד, נכנה את השלישיה $P_1P_2P_3$ בשם „משולש" ואת הקטעים $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$ בשם „צלעות המשולש"[1].

לא יקשה להגדיר יחסי סדר בין נקודות המישור הנקבע ע״י P_1, P_2, P_3 לבין ישר באותו מישור. למשל, אפשר להבדיל בין נקודות המישור $Ax + By + Cz + D = 0$ הנמצאות בצדדים „שונים" של ישר (במישור), המתואר ע״י משוואה נוספת $F(x, y, z) \equiv \bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C}z + \bar{D} = 0$. לשם זה יש להבחין בין הנקודות שלגביהן $F > 0$ לבין אלה שלגביהן $F < 0$. החשוב בין משפטי הסדר במישור אומר: לכל ישר שאינו עובר דרך אחת הנקודות P_1, P_2, P_3, יש או שתי נקודות משותפות או לא שום נקודה משותפת עם צלעות המשולש $P_1P_2P_3$[2]. נתקל במשפט זה בפרק השמיני, § 4, כאכסיומה II, 4 (אכסיומה של Pasch).

1. לפי זה הנקודות P_1, P_2, P_3 עצמן אינן שייכות לצלעות.

2. מהלך ההוכחה הוא כדלקמן: מלבד הנקודות P_1 ו P_2, הקובעות כלעיל ישר P_1P_2, נכנים נקודה שלישית $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ שאינה חלה בישר P_1P_2 וקובעת אפוא, יחד עם ישר זה, מישור מסויים. במישור זה נקח איזה ישר s, שיוגדר, בהתאם ל(2) בעמ׳ 176, ע״י מישור נוסף שמשוואתו תהא:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{I}$$

בקחתנו את כל הנקודות של P_1P_2 בצורה (8) דלעיל, נקבל את הנקודה המשותפת (אם ישנה) ל P_1P_2 ול s כנגד אותו ערך μ הממלא את המשוואה הליניארית הנובעת מתוך הכנסת הערכים (8) לתוך (I): חשבון קל מראה ששורש המשוואה הוא:

$$\mu = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

בבצענו אותה הפעולה לגבי (I) על הישרים $P_2\bar{P}$ ו $\bar{P}P_1$, שלעומתם נסמן את המיצד בנוסחאות (8) ב ν וב ϱ נקבל לגבי הנקודה המשותפת עם s את ערכי המיצדים

$$\nu = \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} + D}, \qquad \varrho = \frac{A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}.$$

באשר למושגי החפיפה, נגדיר את „ארכו" של הקטע $\overline{P_1P_2}$, אם $P_2 \neq P_1$, כמספר החיובי (עיין עמ׳ 179 למעלה)

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$ [1]

מסובכת יותר תהיה הכנסת הזוויות ומידתן; יש להשתמש בהגדרה אנליטית טהורה לפונקציות הטריגונומטריות, למשל ל cos (השוה I, 300)[2]. אך על־סמך הגדרות מתאימות אפשר להוכיח את משפטי החפיפה הידועים לגבי משולשים. (השוה בפרק השמיני, §4, מערכת־אכסיומות III.)

הגענו בדרך זו ליסודות הגיאומטריה האלמנטרית כולם, פרט לדרישה החמישית של אבקלידס (עמ׳ 161/2). כדי להראות שגם היא מתמלאת, מספיק (השוה בפרק השמיני, §2) להוכיח את המשפט: אם נתונים ישר s ונקודה Q, שאינה חלה ב s, הרי יש במישור σ הקבוע ע״י שניהם רק ישר אחד דרך Q שאין לו נקודה משותפת עם s. לפי השיטה הנהוגה עד כאן נתאר את הנקודות של s בצורה (8) ואת הישר המבוקש ע״י הוספת מישור על המישור σ לפי (2), ונוכיח שבמקרה זה נקבע הישר המבוקש במובן יחיד באופן שלא תהיה לו נקודה משותפת עם s; הישר ייקרא אפוא, בה״א הידיעה, המקביל ל s דרך Q. אולם הואיל וכל המחשבה מוגבלת למישור, נוח יותר לבצע את ההוכחה במישור בלבד, לאמור: להגדיר מראש את הנקודה כזוג סדור של מספרים, את הישר s כקבוצת הנקודות (x, y) הממלאות משוואה בעלת הצורה $Ax + By + C = 0$, ולהוציא בדרך זו את המסקנה שיש לבעיתנו פתרון (אחד ו)יחיד: המקביל[3].

המשכנו בדרך זו את תיאורנו לגיאומטריה־אנליטית־ממש – הסומכת על מספרים וחשבונות בלבד, בהתעלמה מן ההסתכלות וממושג המרחב בכלל –

שלשת היחסים האלה מצטרפים לשוויון

$$\mu \cdot \nu \cdot \varrho = 1$$

המביע כי שלשה ערכים אלה, או שכולם חיוביים או ששנים מהם שליליים; כלומר, או שאין ל s שום נקודה משותפת עם צלעות המשולש $P_1P_2\bar{P}$, או שיש ל s נקודות משותפות עם שתים מן הצלעות, מש״ל. — מלבד זה מבטא השוויון שלפנינו בצורה חשבונית משפט ידוע על משולשים המכונה „משפט של Menelaus".

1. הקורא יתכוון לקרנזול של תיבה (או במישור, לקרנזול של מלבן), על־פי משפט פיתגורס. — אם $P_1 = P_2$, יוגדר אורך הקטע כ 0.

2. „הזווית" φ בין שני קטעים בעלי הארכים d_1 וd_2, „המקשרים" את הנקודה (x_0, y_0, z_0) לנקודות (x_1, y_1, z_1) ו(x_2, y_2, z_2), יכולה להיקבע על־סמך הנוסחה

$$d_1 d_2 \cos\varphi = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) + (z_1 - z_0)(z_2 - z_0)$$

בצירוף ההגבלה $0 \leq \varphi < \pi$.

3. לשם כך נייצג את s ע״י המשוואה דלעיל, את מערכת כל הישרים העוברים דרך הנקודה $Q = (x_1, y_1)$ בצורה, המתאימה ל(4), $a : b$. $(x - x_1) : (y - y_1) = a : b$. הדרישה של נקודה משותפת בין שני הישרים מביאה, כפי שמראה חשבון קל, לשברים בעלי המכנה $Aa + Bb$. יש אפוא תמיד נקודה משותפת, פרט למקרה $a : b = -(B : A)$, שבו מתאפס המכנה הנ״ל; כלומר, ישר אחד בלבד דרך Q הוא מקביל ל s.

המשכנוהו עד לדרגה שממנה ואילך אין קושי להוכיח בדרך הרגילה, בעזרת הגדרות מתאימות, את כל משפטי הגיאומטריה האבקלידית במרחב התלת־ממדי. (ביאור וחיזוק לטענה זו נמצאים בפרק השמיני, § 4.) לפי זה מופיע כל משפט גיאומטרי בצורה אנליטית טהורה. אולם אין להפוך יחס זה. לא כל משפט אנליטי מבטא טענה מן הגיאומטריה הנ"ל, אף לא אחרי הוספת הגדרות מתאימות. מסתבר אפוא מנקודת־ראות הגיאומטריה האנליטית הטהורה שלפנינו דוקא, שיש להעלות על הפרק את השאלה: מהו אפיים המיוחד של אותם המשפטים האנליטיים, שאפשר לפרשם כמשפטים מן הגיאומטריה (האנליטית) האבקלידית במרחב של שלשה (או פחות, או יותר) ממדים? לתשובה על שאלה מעמיקה זו נמצא רמזים לפחות בפרק הבא, כאשר תופענה לפנינו הגיאומטריות השונות כמצויינות ע"י מבחנים מתורת החבורות והשמורות: גיאומטריה כתורת „שמורות של חבורות".

נסיים בהערה עקרונית מסוג אחר. במשך ההגדרות וההוכחות הקודמות לא השתמשנו בעובדה, שהמספרים המגדירים את הנקודות, ועל־פיהן את המישורים והישרים, הם אילו מספרים ממשיים שהם. אמנם לא היו מספיקים המספרים הרציונליים בלבד, שהרי הוצאנו גם שרשים ריבועיים. ואולם אם נגביל את ה„שעורים" למספרים הנמצאים באותו שדה של מספרים אלגבריים ממשיים (I, 111 ו־195), המתקבל מתוך שדה המספרים הרציונליים (I, 113) ע"י הוצאה ממושכת של שרשים ריבועיים חיוביים ממספרים חיוביים, יהיה תוקף לכל מה שנאמר לעיל ולכל המסקנות; ולכן לכל הגיאומטריה האלמנטרית[1]. עובדה זו היא בעלת חשיבות עקרונית בקשר לבעיה שתופיע בפרק השמיני (סוף ה 4§). אם בכל זאת מכניסים בדרך־כלל לתחום השעורים את המספרים הממשיים כולם, הרי תלוי הדבר, מלבד הנוחיות המדומה[2] שבכך, בשאיפה שאינה „אלמנטרית", והיא: להבטיח רציפות לקבוצת הנקודות הנקראת קו ישר, ולכן גם למישור ולמרחב. (השוה כרך I, פרק ששי, ולהלן פרק שביעי, § 1, ופרק שמיני, 4§.)

§ 4. בנייות בעזרת סרגל ומחוגה. הוכחות של אי־אפשרות.

עקבנו בסעיף הקודם אחרי ההתעוררות הענקית בהתפתחות הגיאומטריה של תחילת המאה ה־17, לאחר 1800 שנה של קפאון יחסי, שהפסיקוהו ניצוצות בודדים בתחומים מוגבלים בלבד. עברו כמעט מאתיים שנים נוספות, שבהן הצטמצמה התפתחות הגיאומטריה בשני כוונים: הרחבת בנינה של הגיאומטריה

---

1. השוה ספרו של הילברט על יסודות הגיאומטריה, § 9. (אפשר להגביל את הוצאת השרשים לביטויים בעלי הצורה $\sqrt{1+a^2}$.)

2. אמנם „נוח" לנו, מתוך הרגל מתמיד, לטפל במספרים הממשיים במובנם הכללי. אפס כי לאמיתו של דבר שדה המספרים הממשיים הוא מושג עמוק ומסובך, בעוד שהשדה של מספרים אלגבריים המוגדר לעיל פשוט הוא ממנו לאין ערוך. בפרט הוא בר־מנייה (השוה לעיל בפרק הראשון).

האנליטית במסגרת שהתוו לה דיקרט ופרמה, וניצולם (החלקי) של כלי־הזיין האדירים שנוצרו ע"י החשבון האינפיניטיסימלי לטובת הגיאומטריה (האנליטית).

במאה ה 19 נעשו צעדים נוספים, חדישים ונועזים כאחד, בהתפתחות הגיאומטריה, שאחד מהם כבר צויין ברפרוף בסעיף הקודם: הוספת תחומי־גיאומטריה חדשים, בראשם הגיאומטריה הפרוייקטיבית, בעזרת השיטות הסינתיטית והאנליטית גם יחד, ואיחוד התחומים השונים לבנין חד־סגנוני בעזרת המכשיר של חבורת־העברות (עיין בפרק ששי). יצירת מקצוע גיאומטרי חדש, כללי מכל קודמיו ורחוק לחלוטין מכל השקפה מֶטרית (מידתית), היא גיאומטרית־המצב או הטופולוגיה (פרק שביעי). שבירת המסגרת האכסיומטית של אבקלידס ופיתוחן של גיאומטריות לא־אבקלידיות, לא־ארכימידיות, בעלות ארבעה ממדים וכו' שכם אחד עם הבהרת תפקידן של האכסיומות השונות בעיצוב פני הגיאומטריה האבקלידית עצמה, תתאורנה בפרק השמיני.

אמנם בתוך תכנית זו לא נוכל למצות את התפתחות הבנין הגיאומטרי לארכו ולרחבו. החל מחקירת העקומים (התכי־החרוט) והמשטחים בעלי הסדר 2 לכל פרטיהם ודקדוקיהם, בדקו הגיאומטרים של המאה ה 18 וה 19 באופן שיטתי את העקומים במישור ואת המשטחים והעקומים במרחב, הן לגבי תכונותיהם הכלליות הן בתארם המון דוגמות ופרטים לפי חשיבותם העיונית או השימושית (בגיאומטריה הדיפרנציאלית).[1] מקום בראש תורת העקומים (במישור ובמרחב) והמשטחים תפסו העקומים והמשטחים האלגבריים המוגדרים ע"י משוואות אלגבריות בין השעורים. כבר דיקרט ציין את ההבדל בין היצירים האלגבריים האלה לבין שאר היצירים, הנקראים היום טרַנסצֶנדֶנטיים[2] והמכונים אצלו „מיכניים"; ממנו מַתחילה תורת היצירים האלגבריים, ששיא מסויים בהתפתחותה הושג במאה ה 19, ושקבלו הדיפה חדשה בדור האחרון בקשר להתפתחות האלגברה.[3]

---

1. השוה, למשל: L. P. Eisenhart: An introduction to differential geometry. 1940. 410 pp.
D. J. Struik: Lectures on classical differential geometry. 1950. 221 pp.
W. Blaschke: Einführung in die Differentialgeometrie. 1950. 146 pp.

2. השוה את ההבחנה בין מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים (עמ' 4) ובין פונקציות אלגבריות וטרנסצנדנטיות (I, 250). — איפיון גיאומטרי טהור של העקומים האלגבריים ניתן בזמן האחרון ע"י ת. מוצקין וא. רובינסון.

3. נציין מבין הספרות החדשה לגיאומטריה אלגברית:
W. V. D. Hodge and D. Pedoe: Methods of algebraic geometry. 3 vols. 1947 — 1953.
J. G. Semple and L. Roth: Introduction to algebraic geometry. 1949. 462 pp.
W. G. Welchman: Introduction to algebraic geometry. 1950. 351 pp.
O. Zariski: Algebraic surfaces. 1935. 198 pp.
L. Godeaux: Géométrie algébrique. 2 vols. 1948/9. 236+210 pp.

ההתקדמות בטכניקה הגיאומטרית (כגון תורת הוֶקטורים והטֶנסורים [1]) מצד אחד והעמקת תהליכיה של הגיאומטריה הדיפֶרנציאלית והאינטֶגרלית [2] מצד שני, הגבירו את כחן של השיטות הגיאומטריות באופן בלתי צפוי וסיגלו אותן — בצירוף שיטות אלגבריות — לשרת את הפיסיקה החדישה, שרות שבלעדיו לא היתה יכולה הפיסיקה להתפתח כפי צרכיה היא.

אך כל הענינים האלה אינם ניתנים לתיאור במסגרתו של ספר זה. נתאר כאן, בסעיף זה וב §5, שני נושאים בלבד מבין הפרוטים יותר, לא רק מחמת אפיים „האלמנטרי" כביכול, המרשה לראות קצותיהם לפחות מתוך טכניקה מועטת, אלא בעיקר מפני הימנותם על הבעיות „הקלסיות" שהעסיקו את המתימטיקנים זה אלפיים שנה ויותר, עד שקבלו פתרון סופי בדורות האחרונים בלבד.

המתימטיקה היונית השאירה אחריה ארבע בעיות קלסיות שעליהן לא הצליחה להתגבר, על אף כל מאמציה. שלש מהן הן בעיות־בניה „אלמנטריות", כלומר של בניה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד[3], ואלו הן:

א) הכפלתה (פי־שניים) של קוביה נתונה,

ב) חילוק כל זווית שהיא לשלשה חלקים שוים,

ג) תרבוע העיגול.

לבעיה הרביעית יש אופי אחר; היא מכוונת להוכחת הדרישה החמישית של אבקלידס בעזרת שאר הדרישות והאמיתונים. אפשר להוסיף על הנ"ל בעיה פחות מפורסמת של בניה אלמנטרית, שגם בה טרחו היוונים לשוא, והיא: לבנות את המְשֻבע (מצולע בעל 7 צלעות) המשוכלל (השוה I, 197—202).

כל הבעיות האלה נפתרו, אחרי עבור אלפיים שנה ויותר, במאה ה19, וכולן במובן שלילי; לאמור: הושגה הוכחה שלימה לכך שאין הן ניתנות לפתירה כל עיקר. זוהי תעודת־כבוד מזהירה לכשרונות היוונים, שלא השאירו ללא פתרון בעיות מסוג זה הניתנות לפתירה. טבעי הדבר שלא השיגו את ההוכחות לאי־האפשרות הנ"ל, כי השיטות הנחוצות לכך נמצאות מעֵבר למגמות היוונים בגיאומטריה בכלל.

על הבעיה הרביעית נייחד את הדבור בפרק השמיני, §§2—4. בסעיף זה

1. השוה, למשל: H. Lass: Vector and tensor analysis. 1950. 347 pp.
D. E. Rutherford: Vector methods. 1948. 143 pp.
F. Ollendorf: Die Welt der Vektoren. 1950. 470 pp.

2. זהו תחום חדיש לגמרי, ומוקדם לנבא על עתידו. השוה החוברות W. Blaschke: Vorlesungen über Integralgeometrie שהופיעו מ 1935 ואילך.

3. כבר בתקופה קדומה הכירו היוונים לדעת, שבעזרת עקומים אחרים, מסובכים מן הישר והמעגל, אפשר לפתור את כל הבעיות הללו (עיין להלן). לגבי הבעיות בכללן השוה את אוסף המאמרים: Hobson—Hudson—Singh: Squaring the circle. New York, 1953.

ידובר בשאר הבעיות; יצויין מראש שהבעיה ג) שונה מחברותיה בהיותה עמוקה מהן לאין ערוך. (הלא גם בשפת יום־יום אנו רגילים לכנות „קשה כתרבוע העיגול" ענין העולה על כוחותינו לחלוטין!)

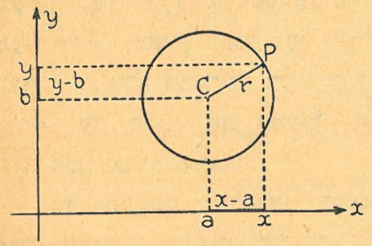
הבעיות א) וב), וכן בעית המשובע המשוכלל, נחלקות לשתי דרגות: I. תרגום הבעיה הגיאומטרית לשפת האלגברה; II. פתירת הבעיה האלגברית. לחלק הראשון יש אופי חיובי, בהעמידו את השאלה: מהו אפיין של הבעיות שאפשר לפתרן בדרך „אלמנטרית"? לכן משותף גרעינו של חלק זה לכל הבעיות האלה, ולרבות כמותן; הלא הוא המשפט הבא [1] (השוה I, 199):

אפשרות־בניה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד שקולה כנגד פתירות אלגברית בעזרת משוואות בנות המעלות 1 ו2 (ליניאריות וריבועיות) בלבד. ביתר דיוק: בניה מסויימת יכולה להעשות בעזרת סרגל ומחוגה אם, ורק אם, המספרים הקובעים את הגדלים הגיאומטריים המבוקשים יכולים להיגזר ממספרי הגדלים הנתונים ע"י מספר סופי של פעולות רציונליות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק) והוצאת שרשים ריבועיים.

הוכחה: אם הבניה אפשרית, הרי הישרים והמעגלים שהבניה משתמשת בהם נמתחים בעזרת נקודות, שהן נתונות מלכתחילה או התקבלו כחיתוך של שני ישרים, או של ישר ומעגל, או של שני מעגלים.

הישרים יכולים להכתב בצורה האנליטית $y=cx+d$ (לרבות $x=d$; השוה I, 232). לכן מתקבלים שעורי נקודת־החיתוך בין שני ישרים — בלשון האלגברה: שרשי מערכת של שתי משוואות ליניאריות — מתוך המקדמים באופן רציונלי.

מה שנוגע למעגל, נזכור קודם כל, כי משוואת המעגל בעל המחוג r ששעורי מרכזו הם $x=a$ ו $y=b$, היא $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$. באמת, אם P, בעלת השעורים x וy, היא איזו נקודה שהיא של המעגל (ציור 10), נותן משפט פיתגורס $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, וקל להווכח שהדבר קיים ללא תלות במצב המיוחד שבציור.



ציור 10

והנה מערכת המשוואות

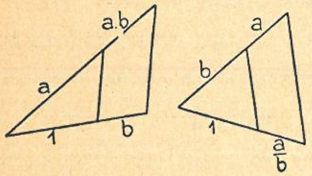
$$y=cx+d,\quad (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \qquad (1)$$

1. השוה למשפט זה (ולכל הבעיה) מאמרים שונים, בפרט מאמרו של Castelnuovo, שבספר „בעיות הנוגעות לגיאומטריה האלמנטרית" ל F. Enriques. (המקור האיטלקי הופיע ב־1900, ותורגם לאנגלית, לצרפתית ולגרמנית.)

ששרשיה הממשיים x, y ימציאו את נקודות־החיתוך (אם ישנן) בין הישר והמעגל, מביאה לידי משוואה ריבועית לנעלם x, אחרי חילוץ הנעלם השני y; כדי לקבוע את ערכי x יש אפוא צורך, נוסף על פעולות רציונליות, בהוצאת שורש ריבועי אחד. על־פי ערכי x אלו נקבל את ערכי y המתאימים מתוך המשוואה הראשונה (1), דהיינו בדרך רציונלית.

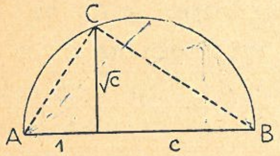
לבסוף, אם נתון מלבד המעגל דלעיל מעגל שני $(x-\bar{a})^2+(y-\bar{b})^2-\bar{r}^2=0$, יביא חיסורה של אחת המשוואות האלה מאחותה לידי משוואה ליניארית; כלומר, לידי משוואה של ישר. קל לראות, שישר זה הוא המיתר המשותף לשני המעגלים — אם יש בכלל נקודות משותפות לשניהם[1]. בדרך זה הועמד מקרה זה על הקודם: החיתוך בין מעגל וישר. כך הוכחנו את מחצית המשפט (רק אם).

כדי להוכיח את המחצית האחרת (אם המספרים וכו'), נצא מביטוי אריתמיטי המכיל את ערכי הגדלים הגיאומטריים הנתונים („גדלי־המוצא") בתרכובת רציונלית בצירוף שרשים ריבועיים. עלינו להוכיח שהביטוי יוכל להיבנות מגדלי המוצא בעזרת סרגל ומחוגה. ראשית, את בנית סכומם או הפרשם של שני קטעים אין צורך לבאר.



ציור 11

שנית, בנייתן של המכפלה $a \cdot b$ ושל המנה $\frac{a}{b}$ נובעת מיד, לפי תורת הדמיון הגיאומטרי, מן הציורים 11 המשתמשים במקבילים. שלישית, כדי להוציא שורש ריבועי ממספר חיובי c (מידת־קטע), נחוג חצי־מעגל בעל הקוטר $\overline{AB}=1+c$, כפי שנעשה בציור 12; ממשפט פשוט על המעגל יוצא[2] שאורך האנך מעל הקוטר, שהועלה בנקודה המפרידה בין הקטעים 1 ו c, עד חתכו את המעגל, שוה ל $\sqrt{c}$. בכך נגמרה ההוכחה.



ציור 12

מן המשפט שלפנינו נמצאנו למדים, שהגבלת היוונים לשימוש בסרגל ובמחוגה כמכשירים „האלמנטריים" אינה שרירותית כל עיקר; שכן מתאימים הם לשתי המעלות הנמוכות של משוואה אלגברית. מאידך לא יצאה בת־קול המכרזת, שהמעלות 1 ו 2 דוקא הן כשרות ואלמנטריות ולא, למשל, המעלה 3.

1. במקרה שהמעגלים משיקים זה לזה, הרי המשיק המשותף הוא הישר הנדון. המקרה, שבו אין נקודות משותפות כל עיקר, אינו מענייננו בקשר לבעיה שלפנינו; השוה פרק ששי, § 4.

2. על הקורא לזכור, שהזווית ACB היא ישרה. לכן דומים הם המשולשים ישרי־הזוויות הקטנים שבציור. אם נסמן את אורך האנך ב u, קיים אפוא $1:u=u:c$.

משפטנו מראה מהו טיב הדרגה הראשונה שהוזכרה לעיל בקשר לבעיות הבניה. עלינו לבטא את הבעיות השונות בצורה אלגברית כמשוואות ששרשיהן נותנים את הפתרון המבוקש. נעשה זאת בכל אחד מן המקרים המצויינים לעיל!

קל ביותר הדבר לגבי הכפלת הקוביה (הבעיה מדילוס[1]), כלומר לגבי השאלה הבאה: נתונה קוביה בעלת מקצוע (צלע) מסויים, למשל בעלת המקצוע 1, ולכן גם בעלת הנפח $1^3=1$; מבוקש המקצוע x של הקוביה שנפחה הוא פי שנים, ז"א שוה ל 2. מתקבלת המשוואה $x^3=2$, שנכתבנה בצורה

$$x^3-2=0. \tag{2}$$

שנית, בדבר חילוק הזווית לשלושה חלקים שוים יש להדגיש, שהמדובר הוא באיזו זווית שהיא; שהרי זוויות כגון 135^0, 90^0, 45^0 קל לחלק ב 3 בעזרת סרגל ומחוגה. נצא מן הזהות הטריגונומטרית

$$\cos\varphi=(\cos\frac{\varphi}{3})^3-3\cos\frac{\varphi}{3}\,(\sin\frac{\varphi}{3})^2$$

שקל להוכיחה, מתוך „משפטי־החיבור"[2] (השוה I, 155), או מתוך משפטו של Moivre (I, 161) ע"י הפרדה בין החלק הממשי והדמיוני. בשימנו $x=2\cos\frac{\varphi}{3}$ ובהסתמכנו על משפט פיתגורס בצורה $(\sin\frac{\varphi}{3})^2=1-(\cos\frac{\varphi}{3})^2$, נקבל

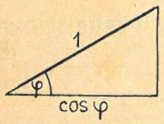
$$2\cos\varphi=\frac{x^3}{4}-3x(1-\frac{x^2}{4})=x^3-3x,$$

$$x^3-3x-2\cos\varphi=0. \tag{3}$$

אם נקח, למשל, $\varphi=120^0$, נקבל את המשוואה ל $x=2\cos 40^0$:

$$x^3-3x+1=0. \tag{3'}$$

במשוואה זו תלויה, דרך אגב, בנית המצולע המשוכלל בעל תשע צלעות. אפשר להכיר זאת מן היחס $9\cdot 40^0=360^0$, או גם בדרך אלגברית מתוך המשוואה $x^9-1=0$ (השוה להלן).



ציור 13

אם נתונה הזווית φ, קל לבנות (בעזרת זווית ישרה) קטע שארכו $\cos\varphi$, כפי שמבאר הציור 13; וחילופו: בהשיגנו $x=2\cos\frac{\varphi}{3}$ נשיג גם את הזווית המבוקשת $\frac{\varphi}{3}$. לפיכך תלויה בעיתנו בפתירת המשוואה (3) שמקדמיה ידועות.

1. מקור הבעיה הוא כביכול אימרה של ה„בת־קול" מ Delos.

2. המשפטים הם (עיין שם):

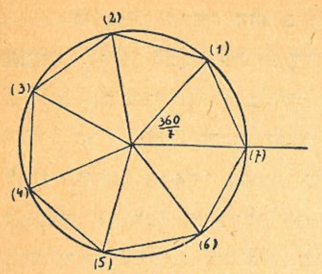
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

לכן לגבי $\beta=\alpha$:

$$\cos 2\alpha=(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2,\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

אם נציב בנוסחה הראשונה $\alpha=2\psi$, $\beta=\psi$, מתקבל אפוא ערכו של $\cos\varphi$ בצורה $(\psi=\frac{\varphi}{3})$:

$$[(\cos\psi)^2-(\sin\psi)^2]\cos\psi-2\sin\psi\cos\psi\sin\psi=(\cos\psi)^3-3\cos\psi(\sin\psi)^2.$$



ציור 14

שלישית, בדבר המשובע המשוכלל נסתמך על מה שנאמר בכרך הראשון (עמ' 197—202) על חילוק המעגל בדרך כלל, ונזכיר בפרט שבנין המצולע המשוכלל בעל n צלעות וחילוק קו־המעגל ל n חלקים שוים, הן בעיה אחת. (השוה הציור 14.) כאמור ב I, 199—200, חילוק המעגל ל n חלקים שוים תלוי בפתירת המשוואה

$$x^n - 1 \equiv (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1) = 0.$$

כנגד $n = 7$ מכרעת אפוא המשוואה

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

שנוכל לכתבה, אחרי חילוק ב x^3, בצורה

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) + 1 = 0.$$

אם נשים $x + \frac{1}{x} = y$, ולכן $y^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$,

תעבור המשוואה האחרונה לצורה

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \qquad (4)$$

משרשיה נגיע אל שרשיה x של המשוואה הנתונה בעזרת המשוואה הריבועית ל x: $x^2 - xy + 1 = 0$, ז"א בעזרת בניה אלמנטרית[1].

עד כאן המדובר במשובע המשוכלל. מה שנוגע למצולע המשוכלל בעל n צלעות כנגד איזה n שהוא, הרי ב־ I, 200—202, הובאו המשפטים הנוגעים לענין, הן בכוון האלגברה הן לגבי בניה גיאומטרית. מכיון שאפשר לחצות כל זווית בעזרת סרגל ומחוגה, די לבדוק את המספרים האי־זוגיים n. כאמור שם, המקרה המענין ביותר[2] הוא זה של מספר ראשוני n, שלגביו הוכיח ג א ו ס:

1. מתוך מה שנאמר בכרך הראשון על שרשי המשוואה של חילוק המעגל ועל החשבון הגיאומטרי במספרים מרוכבים (I, 197/8), קל לקבוע את שרשי המשוואה (4) בצורה טריגונומטרית. (השוה בציור 14.) אחד משרשי המשוואה המקורית ($x^7 = 1$) הריהו $x_1 = \cos\omega + i\sin\omega$, אם $\omega = \frac{2\pi}{7}\left(=\frac{360^0}{7}\right)$, וששת השרשים האחרים יכולים להיכתב בצורה x_1^2, x_1^3, $\frac{1}{x_1^3}$, $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_1}$, $x_1^0 = 1$. קל להסיק מכאן, שאחד משרשי (4) הוא $x_1 + \frac{1}{x_1} = 2\cos\omega$, וכי שני האחרים שוים ל $2\cos(2\omega) = -2\sin\frac{\omega}{4}$ ול $2\cos(3\omega) = -2\cos\frac{\omega}{2}$. ($2\sin\frac{\omega}{4}$ הוא הצלע של המצולע המשוכלל בעל 14 צלעות בתוך מעגל־היחידה.) אך לגבי הבעיה שלפנינו, שהיא הבניה האלמנטרית, אין ערך לפתירה הטריגונומטרית.

2. המסקנות לשאר המקרים, שגאוס בטאן ללא הוכחה, תוארו והוכחו בדרך אלמנטרית (כלומר, בלא להזדקק ל„תורת Galois"), למשל, בחוברת

הבניה בעזרת סרגל ומחוגה (לאמור: העמדת הבעיה האלגברית על משוואות בנות המעלות 1 ו 2) אפשרית אם, ורק אם, המספר הראשוני n הוא בעל הצורה $2^m + 1$. אנו יודעים עד היום רק חמשה מספרים ראשוניים מסוג זה (מלבד $n = 2$) ואלה הם:

$$2^1 + 1 = 3, \quad 2^2 + 1 = 5, \quad 2^4 + 1 = 17, \quad 2^8 + 1 = 257, \quad 2^{16} + 1 = 65537.$$

שני המקרים הראשונים ידועים מבית הספר (השני נפתר בעזרת „חיתוך הזהב").

באשר למצולע המשוכלל בעל 17 צלע[1] צויינה הדרך האלגברית לפתירת המשוואה $x^{17} = 1$ (בעזרת משוואות בנות המעלות 1 ו 2 בלבד) ב־I, 224. בניה גיאומטרית למצולע זה בעזרת סרגל ומחוגה ניתנת במלואים לחלק החמישי, מספר ד).

עם סיום הדרגה I שצויינה בעמ' 185, נפנה עכשיו לדרגה II, לאמור: לפתירת הבעיות במובן אלגברי, בשים לב למשפט דלעיל על בניות אלמנטריות. נדחה את הבעיה ג) של תרבוע העיגול לסוף הסעיף.

אנחנו נשענים כאן על מושג כללי המבואר בכרך הראשון, בפרק השמיני המוקדש לאלגברה, והוא: ה ת פ ר ק ו ת ו של פולינום בתוך שדה מסויים, כאן בשדה המספרים הרציונליים[2] (I, 193). שלשת הפולינומים בעלי המעלה 3, המופיעים באגפיהן השמאליים של המשוואות (2), (3), (4) דלעיל, אינם נתונים לפירוק בשדה המספרים הרציונליים. (אמנם לגבי (3) הכוונה היא „בדרך כלל"[3], כלומר כנגד א י ז ו זווית φ שהיא; בפרט, למשל, למקרה של המשוואה (3').) ההוכחה לאי־התפרקותם ניתנת במילואים לחלק החמישי, מספר ה).

והנה רעיונות אלגבריים פשוטים למדי, שלא נוכל לפרטם כאן, מובילים למסקנה: אם a הוא מספר שאפשר לבנותו מתוך מספרים רציונליים בעזרת פעולות רציונליות והוצאת שרשים ריבועיים — לשון אחר (לפי המשפט בעמ' 185): אם a הוא קטע שאפשר לבנותו מתוך קטעים רציונליים[4] בעזרת סרגל

F. Klein: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (1895), שתורגמה גם לאנגלית, לצרפתית ולאיטלקית.

1. כשהקימו מצבה לגאוס בגיטינגן, עיר פעולתו, קבעו לבסיס המצבה צורה של מצולע משוכלל בעל 17 צלע.

2. במקרה של המשוואה (3) יש לקחת שדה רחב יותר, אלא אם כן $\cos\varphi$ גם הוא מספר רציונלי, כבדוגמה (3').

3. אפשר לחלק זוויות מ ס ו י י מ ו ת, כגון הזווית הישרה, לשלשה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה. ואמנם, הואיל והקוסינוס של הזווית הישרה שוה ל 0, נקבל במקרה זה במקום (3) את המשוואה

$$x^3 - 3x \equiv x(x^2 - 3) = 0,$$

שאגפה השמאלי הוא פ ר י ק.

4. על סמך המשפט מעמ' 185 (השוה תהליך־הבניה ב I, 115/6) מספיק קטע אחד שרירותי, הנקרא י ח י ד ה, בצירוף פעולות־הבניה הרציונליות.

ומחוגה – תהיה מעלת המשוואה האלגברית הנמוכה ביותר[1] בעלת מקדמים רציונליים, אשר $x=a$ הוא אחד משרשיה, חזקה של 2. הסתמכנו בניסוחה של מסקנה זו[2] על העובדה, שהמשוואה „הנמוכה" הנ"ל קבועה באופן חד־ערכי, פרט לגורם קבוע. פתירת המשוואה

$$x^{16}+x^{15}+x^{14}+\dots+x^2+x+1=0$$

ב־I, 224 (השוה להלן במלואים לחלק החמישי, מספר ד)) מבהירה במידת־מה את הרעיונות המשמשים בסיס למסקנה דלעיל.

אולם אין להפוך את המסקנה: לא כל משוואה אי־פריקה בעלת המעלה 2^n נתונה לפתירה אלגברית בעזרת שורה של משוואות ליניאריות וריבועיות. הלא כבר המשוואה הכללית בעלת המעלה 4 נתונה היא לפתירה רק בעזרת הוצאת שרשים מעוקבים (עיין I, 222), והמשוואות הכלליות בנות המעלות 8, 16, וכו' אינן נתונות לפתירה אלגברית כל עיקר (I, 190). רק במקרה של חילוק המעגל מספיק התנאי ההכרחי הנ"ל, כפי שיוצא ממסקנתו של גאוס.

אם נצרף לאי־התפרקותן של המשוואות (2), (3), (4) את המסקנה דלעיל, מתברר שללא שימוש בשיטות האלגברה הגבוהה, כגון תורת Galois (I, 190), השגנו את מטרתנו, והיא: להוכיח שאי אפשר לפתור בעזרת סרגל ומחוגה בלבד את שלש הבעיות הקלסיות של הכפלת הקוביה, של חילוק הזווית לשלשה חלקים שוים, ושל בנית המשובע המשוכלל. שהרי מעלת שלש המשוואות הנ"ל היא 3, ולא חזקה של 2.

מובן שהפתירה תהיה אפשרית בו ברגע שיורשה השימוש במכשירים אחרים. כבר Hippocrates היוני העמיד, במאה החמישית לפני סה"נ, את הכיפול פי n של הקוביה על הכנסת שני „מתכונתיים ממוצעים". שכן אם a הוא המקצוע של הקוביה הנתונה ו x מקצוע הקוביה המבוקשת (בת הנפח na^3), ואם יושם $na=b$, $ab^2=y^3$, נקבל, על־סמך $x=\sqrt[3]{a^2b}$ ו $y=\sqrt[3]{ab^2}$, את „המתכונת הממושכת"

$$a:x=x:y=y:b,$$

שלפיה נקראים x ו y „שני ממוצעים גיאומטריים" בין a ל b. אך בעיקר השתמשו היוונים באמצעים גיאומטריים, דהיינו בעקומים נוספים (מלבד המעגל), כדי לפתור את בעיות־הבניה למיניהן. Menaichmos, מתלמידיו של אבדוכסוס, פתר את הכפלת הקוביה בעזרת הפראבולות $x^2=ay$ ו $y^2=2ax$, וכן בעזרת הראשונה ביניהן בצירוף ההיפרבולה $xy=2a^2$; כאן מסמן a את מקצוע הקוביה

1. כלומר, בעלת המעלה הקטנה ביותר. — אפשר לומר תחת המלים דלעיל: מעלה של משוואה אלגברית אי־פריקה, אשר $x=a$ הוא אחד משרשיה.

2. הכללה יפה של משפט זה הוכיח A. Loewy בדרך פשוטה מאד: עיין *Jahresbericht der Deutschen Mathem.—Vereinigung*, כרך 30, 1921.

הנתונה[1]. כך יש להתאים למשוואות אלגבריות של כל מעלה ומעלה – במקרים שלפנינו של המעלה 3 – עקומים ידועים, ולכן גם מכשירים ידועים שבעזרתם אפשר לפתור את הבניה הדרושה.

אולם היוונים השתמשו לא רק בעקומים מישוריים אלגבריים, המתבטאים (לפי תיאורם בגיאומטריה האנליטית) ע"י משוואה $f(x,y)=0$ בין השעורים, בהיות $f(x,y)$ פולינום ממעלה מסויימת, אלא גם בעקומים טרנסצנדנטיים. כבר במאה החמישית לפני סה"נ המציא היפיאס[2] עקום טרנסצנדנטי, ואף כי מטרתו היתה חילוק הזווית בשלש, השתמשו בו חיש מהר לשם תרבוע העיגול, בעיה שלגביה לא הועילו העקומים האלגבריים למיניהם.

בחקירת הבעיה הזאת, שמנינוה בעמ' 184 כשלישית בין הבעיות הקלסיות, יש להבחין בין שלש תקופות[3].

התקופה הראשונה נמשכת מן הזמנים הקדומים ועד אמצע המאה ה17 לסה"נ. כבר בראשית גשתם לבעיות גיאומטריות במובן מדעי גילו החוקרים שהיקפו של מעגל מתכונתי למחוגו (או לקוטרו), ואחר כך מצאו ששטח העיגול שוה למכפלה של היקף המעגל בחצי המחוג[4]. על חישובו המקורב של קבוע־המתכונת, שאנו מסמנים אותו ב π (I, 181), דובר כבר בעמ' 156; בזמן העתיק התקדמו החוקרים, בעיקר בעזרת שטחי מצולעים משוכללים מקיפים ומוקפים (כנהוג עוד היום בלמודי בית־הספר), מהערך הפרימיטיבי $\pi=3$ למסקנת־השיא של ארכימידס (עמ' 166), שהסתמך על מצולע משוכלל בעל $3\cdot 2^5=96$ צלע; הוא הגיע לדיוק הסוטה פחות מחמישית־אחוז מן הערך האמיתי. בתקופות מאוחרות יותר שופר הדיוק עוד הלאה, הן אצל עמי המזרח (הודו, סין) הן במערב, ששם הגיע Huygens עד המקום התשיעי אחרי הפסיק בפיתוח העשרוני, בעזרת המצולע (המוקף) בעל 60 צלע בלבד.

בתקופה השניה, החל מראשית החשבון האינפיניטסימלי, השתמשו בשיטות החדשות כלפי הבעיה שלפנינו, בעיקר לשם פיתוחו של π ושל פונקציות פשוטות

1. הזוג הראשון נותן $\frac{x^4}{a^2}=2ax$, הזוג השני $\frac{x^3}{a}=2a^2$.

2. Hippias. בדרך כלל נקרא העקום על שמו של Dinostratos, אחד מתלמידי אפלטון, שחקר אותו לכל פרטיו והפעילו לשם תרבוע העיגול. לכן כינו היוונים את העקום בשם τετραγωνίζουσα (מרבעת).

3. מתוך הספרות רחבת־הידים על נושא זה נציין:
D. E. Smith: The history and transcendence of π. 30 pp. (הופיע באוסף שהוצא לאור ב 1911 ע"י J. W. A. Young בשם: Monographs on topics of modern mathematics)
G. Hessenberg: Transzendenz von e und π. 1912. 106 pp.

4. הקורא זוכר מבית־הספר, שהיקף המעגל בעל המחוג r שוה ל $2r\pi$, ושטח העיגול ל $r^2\pi$. ואמנם קיים $2r\pi\cdot\frac{r}{2}=r^2\pi$.

של π לטורים אינסופיים, למכפלות אינסופיות, וגם לשברים משולבים. הנוסחה המפורסמת של ל י י ב נ י ץ:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

מסתמכת על פיתוח הפונקציה $\arctan x$ אל טור־החזקות $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$.[1] ברם טור זה ל $\frac{\pi}{4}$ מתכנס באיטיות כזו (לאמור: דורש, לשם השגת דיוק מספיק, מספר כה גדול של איברים) שלא יצלח למטרה מעשית. אך קל לעבור לטורים המתכנסים ביתר מהירות, וכך הגיעו בתיאורו של π כשבר עשרוני ליותר ממאה מקומות עוד במאה ה 18, ואחר כך לאלף מקום ויותר. לדברים אלה אין כל ערך מדעי או מעשי; שלשים מקום בפיתוח העשרוני מספיקים כדי לתת את כל היקפו של העולם הנתון לתצפיותינו מתוך דיוק העולה על תצפית מקומית בעזרת המיקרוֹסקוֹפּ המדוייק ביותר. מאידך אין בידינו חוקים אריתמיטיים כלליים להמשך הפיתוח; לשון אחר: אין חוקיות גלויה לעין בסידרת הספרות שבפיתוח, אף כי איברי הסידרה קבועים מראש על פי חוק מוגדר היטב. משום כך יוכל לשמש פיתוחו של π לשם הדגמה של בעיות מתימטיות־פילוסופיות שאינן נתונות להכרעה בזמן הזה (השוה בחלק הששי).

בתקופה השלישית, הפותחת במחקרו של J. H. Lambert משנת 1766, חדלה הבעיה של חישוב π מהיות בעיה מרכזית. החוקרים פנו לבדיקת הקשר (האלגברי או לא־אלגברי) הקיים בין π לבין מספרים שלמים או רציונליים. (השוה גם I, 181.) בכוון זה יש לציין את הקשר בין e ו π, שגילהו L. Euler עוד בסוף התקופה הקודמת, בקבעו את היחס המפורסם $1 + e^{\pi i} = 0$, ש ס מ י ת מכנהו בשם „יחס בין חמשת המספרים המענינים ביותר שבמתימטיקה". מאמרו של למברט על „תרבוע העיגול ויישור המעגל" מכיל בעיקר את ההוכחה ש π הוא א י ר צ י ו נ ל י, וכן את המשפט היסודי: אם x הוא רציונלי ושונה מ 0, הרי e^x הוא אירציונלי. על כך הוסיף A. M. Legendre ב 1794 את הוכחת האירציוֹנליוּת של π^2, בנחשו כי π א י נ ו א ל ג ב ר י כ ל ע י ק ר אלא טרנסצנדנטי; כלומר: אינו שורש לשום משוואה אלגברית בעלת מקדמים שלמים (עיין בעמ׳ 4).

ואולם עבר כיובל שנים עד שהראה J. Liouville ש י ש ב כ ל ל ב מ צ י א ו ת מספרים טרנסצנדנטיים, וחלפו שלשים שנה נוספות עד שהוכיח Ch. Hermite ב 1873 כי e הוא טרנסצנדנטי. F. Lindemann הגיע למטרה הסופית ב 1882, בהוכיחו משפט שבעיקרו אפשר לבטאו כך:

„תבנית מעריכית"[2] בעלת הצורה

$$C_1 e^{a_1} + C_2 e^{a_2} + \ldots + C_n e^{a_n},$$

1. השוה פיתוחי־פונקציות דומים ב I, 300.

2. השם מבוסס על הכינוי „פונקצית המעריך" ל e^x (I, 289).

שבה מסמנים המעריכים a_k מספרים אלגבריים שונים וגם המקדמים C_k הם כולם אלגבריים, אינה מתאפסת אלא במקרה הטריביאלי שכל המקדמים C_k מתאפסים.

מתוך משפט זה נובע מיד, כי π הוא ט ר נ ס צ נ ד נ ט י: אילו היה π אלגברי, כי אז היתה אלגברית (על־פי משפט פשוט של האלגברה) גם המכפלה של π במספר האלגברי $i = \sqrt{-1}$ (היחידה הדמיונית; עיין I, 158); i הוא אלגברי בהיותו שורש למשוואה הריבועית $x^2 + 1 = 0$. ברם הרי קיים $e^0 + e^{\pi i} = 0$, כאמור לעיל; לכן π אינו אלגברי.

הוכחת משפטו של לינדימן, וכן הוכחת משפטו של אֶרמיט שהיא קלה במקצת מן הראשונה, אינן פשוטות כל עיקר, אף־על־פי שהושגה התקדמות עצומה החל מן ההוכחות המקוריות, בהן מופיעים סכָמים (אינטֶגרלים) מסובכים ולא־צפויים כאילו נפלו מן השמים, ועד צורותיהן החדישות „הטבעיות" של ההוכחה. אלה דורשות, מלבד אמצעים אריתמיטיים (מתורת־המספרים ומן האלגברה), אוצר מוגבל בלבד מן האנליזה: מתורת הטורים האינסופיים ומיסודות החשבון האינפיניטסימלי. אף על הדבר האחרון אפשר לוותר, ברם מתוך סיבוך מלאכותי המאריך את החשבונות. (עיין בספרים שצויינו בעמ׳ 191.) ל ה י ל ב ר ט יש זכות מכרעת בהעברת ההוכחה לשטח פשוט וטבעי. אולם גם בבגדה החדיש חורגת ההוכחה בהחלט מתחומו של ספר זה.

ממשפטו של לינדימן נסיק מסקנה, שהיא כללית מן הטרַנסצֶנדֶנטיוּת של π בלבד. בשימנו בתבנית המעריכית דלעיל $n = 2$ ו $a_1 = 0$, ולכן $a_2 \neq 0$, נקבל את התבנית $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{a_2}$, שממנה נובע אחרי חילוק ב C_2: ב ת ו ך ש ו י ו ן ב ע ל ה צ ו ר ה $e^a = C$ $(a \neq 0)$ ל א י ו כ ל ו a ו C ל ה י ו ת ש נ י ה ם א ל ג ב ר י י ם. כנגד $a = 1$ מכילה מסקנה זו את הטרנסצנדנטיות של e, כנגד $C = -1$ (מפני $e^{\pi i} = -1$) את הטרנסצנדנטיות של πi, ולכן של π.

אך מסקנתנו כללית היא יותר, שכן קובעת היא, ש פ ו נ ק צ י ת ה מ ע ר י ך e^x מ ק ב ל ת ר ק ע ר כ י ם ט ר נ ס צ נ ד נ ט י י ם כ נ ג ד כ ל ע ר כ י x ה א ל ג ב ר י י ם, פרט למקרה $x = 0$ (שבו באמת $e^x = 1$); ומאידך, ש ה ל ו ג ר י ת מ ו ס ה ט ב ע י ש ל כ ל מ ס פ ר א ל ג ב ר י ה ש ו נ ה מ 1 ה ו א ט ר נ ס צ נ ד נ ט י (השוה משפטו של ג ל פ ו נ ד המרחיק לכת מזה: עיין I, 182).

נוכל לתת למסקנה זו „המחשה גיאומטרית" כביכול, המפליאה קצת: אם נציין במישור את כל הנקודות בעלות שעורים אלגבריים x ו y, נמלא את המישור נקודות בצפיפות אינסופית העוברת על כל הסתכלות (השוה עמ׳ 18/9). אך העקום $y = e^x$, שמהלכו מופיע ב I, 250 (ציור 24), משתרע במישור מבלי עבור אף אחת מן הנקודות ההן, פרט לנקודה היחידה $x = 0$, $y = 1$.

כפי שראינו, הקו המבדיל בין בעיות־הבניה „הפשוטות", כגון הכפלת הקוביה, חילוק הזווית, חילוק המעגל מזה, ובין תרבוע העיגול מזה, עקרוני הוא

באופן מעמיק: הללו תלויות בפתירת משוואות אלגבריות (ברובן בנות המעלה 3) ובבנייות הגיאומטריות המתאימות, ואילו כאן לפנינו בעיה טרַנסצֶנדֶנטית, שמקומה מֵעֵבר לאלגברה. לפיכך לא היה מספיק הדבר לביצוע תפקידנו אילו השתמשנו, נוסף על הסרגל והמחוגה, בכל המכשירים המיכניים המאפשרים את פתירתן של משוואות אלגבריות בנות המעלות השונות 3, 4, ... בדרך גיאומטרית. בנית ריבוע השוה לעיגול בעל קוטר נתון, מצריכה מכשירים מסוג אחר, המתאימים לעקומים טרנסצנדנטיים.

נסיים בהערה כללית לגבי הנושא שלפנינו, הנוגעת לאפייה הפילוסופי של המתימטיקה ושיש לה גם ערך חינוכי כללי. כל ידיעתנו על הטבע היא יחסית, ואף לדעת אלה הסבורים כי הולכת היא ומתקרבת „לאמת המוחלטת", הרי לעולם לא תשיג אותה. משום כך אין במדעי הטבע מסקנות עניניות סופיות, ומי אשר נשאו לבו לחלוק על אחת המסקנות המקובלות, הרשות בידו לעשות כך, אם יביא ראיות נסיוניות או עיוניות חדשות מספיקות. באמת עדים אנו — בשני הדורות האחרונים יותר מבכל תקופה קודמת — למהפכות במדעי הטבע ההורסות את מה שהיה מקובל עד כאן, אף כי לגבי תורות מבוססות בראיות חותכות ורב־גווניות (כגון המיכניקה של ניוטן) אין בידי המהפכה (למשל: תורת היחסות) אלא להכניס סטיית־מה או תוספת־מה לתורה המקובלת. אך שונה הדבר לחלוטין במתימטיקה: ההוכחות של אי־אפשרות לבניות גיאומטריות מסויימות, שעליהן דובר בסעיף זה, מוחלטות הן וסופיות. כל „הממציאים" השונים, מנער ועד זקן, באומות העולם ובעם ישראל בארצו, המבזבזים את כוחותיהם בבעיות אלו והטוענים חדשים לבקרים, שמצאו להן פתרון, הם לא רק שוגים אלא משתגעים, ולא יראו ברכה במאמציהם לעולם[1]. אם יש באמת בכח המתימטיקה (והלוגיקה) דוקא לתת וודאות סופית שאינה ניתנת לערעור, ובמה תלוי הדבר עד כמה שנכון הוא, זהו אחד הענינים שיעסיקו אותנו בחלק הששי (בכרך־ההשלמה).

§ 5. על המושגים אורך, שטח, נפח (תכולה)[2].

נושאו של סעיף זה הוא ענין שמרבים לעסוק בו בבית הספר; שם מגיעים גם לפתרון־כביכול בהיקף ידוע. אך הענין קשה ועמוק בהרבה ממה שהוא נראה.

1. אין כאן, כמובן, הכוונה לנסיונות של פתירה מקורבת לבעיות כאלה. בכלל יש לשקול את ההבדל בין פתרונים עיוניים, כגון אלה שדובר עליהם בסעיף זה, ובין בניה מעשית. (אמנם אפשר לבצע גם את הבניות בעזרת סרגל ומחוגה רק בדיוק יחסי, המותנה בדיוק המכשירים ובהגבלת יכלתו של בן האדם.)

2. רובו של סעיף זה, פרט ראשיתו ולסופו (החל מעמ' 209), קשה הוא במקצת ומכוון רק לקורא שהוא מנוסה.

תפקידנו כאן יוכל להיות רק להצביע על חלק מן הקשיים שבדבר ולציין את כוון הפתרונים — עד כמה שיש בכלל פתרונים; ברוב המקרים נוותר על ההוכחות בגלל ארכן ועמקן.[1]

הנושא מסתעף לחלקים־חלקים לפי שתי מגמות: מצד אחד לפי מספר הממדים (1, 2, 3; כלומר בקו ישר, במישור, במרחב)[2], מצד שני לפי שולי התחום: אם שפתו מורכבת מישרים או ממישורים בלבד, או גם מעקומים (קוים עקומים, או משטחים). ההבדלה הראשונה חשובה מן השניה במובן עקרוני. נתחיל בשני ממדים, דהיינו במישור; מקרה זה פשוט בהרבה מן המרחב, ובכל זאת אינו פשוט עד כדי טישטוש הקשיים העקריים.

מה שאפשר לומר על שטחו של מלבן, משולש, עיגול וכו' — והרבה מזה נודע כבר בתקופת־התרבות הקדומה של המין האנושי, בעקבותם של צרכים מעשיים — הרי זה מבוסס על עובדה טָפּוֹלוגית שהיא עמוקה למדי, עם היותה לכאורה מובנת מאליה, והיא: שהיקפו של מלבן, משולש, מעגל מפריד את המישור כולו לשני תחומים חלקיים נפרדים, שהם „תחומו הפנימי" של היציר הנדון ו„תחום־החוץ" שלו (השוה בפרקים השביעי והשמיני). בחקרנו את השטח מתכוונים אנו לתחום הפנימי, המצויין בתכונות ידועות (עיין שם). בדרגה קדומה וטרום־מדעית „מודדים" את שטחי התחומים על־פי גורמים חיצוניים ומעשיים בלבד, כגון היקף העבודה הנחוצה לעיבודו החקלאי של התחום. ארוכה הדרך מכאן עד להגדרה מדעית למושג השטח, ורק לפני כיובל שנים הובאו מחקרים אלה לידי סיום יחסי. להלן נצטמצם בתחומים במישור המוגבלים ע"י קטעים ישרים[3].

במבוא זה לדרך המחשבה המתימטית כבר הודגש כמה פעמים ש„הגדרה" אין משמעותה קביעת עובדה או הבאת ראיה כי אם הכנסת מושג (ומונח) באופן, שהוא להלכה שרירותי ולמעשה מועיל. הדבר האחרון יכול להתברר רק אחרי מעשה, מתוך

1. כספרים מעמיקים (וקשים) על הנושא נצטט:

P. R. Halmos: Measure theory. New York, 1950. 304 pp.
M. E. Munroe: Measure and integration. Cambridge Mass., 1953. 350 pp.
T. Radó: Length and area. New York, 1948. 572 pp.
K. Mayrhofer: Inhalt und Mass. Wien, 1953. 269 pp.

סקירה חדישה על הבעיות ניתנת במאמר:

H. Federer: Measure and area. *Bulletin of the Amer. Mathem. Society*, vol. 58 (1952), p. 306–378.

2. ביצירים בעלי יותר משלשה ממדים נדון בפרק השמיני, § 1. — „תכולה" הוא מונח המשותף לכל מספר ממדים.

3. התיאור מכאן עד עמ' 198 מופשט למדי. הקורא שיקשה עליו לתפסו כהוגן, לא יפסיד אם יעבוד על העמודים האלה באופן שטחי וימשיך לקרוא בתשומת לב החל מעמ' 199.

ההיסקים הבנויים על ההגדרה. לפיכך מלכתחילה בני־חורין אנו להגדיר את שטחו של תחום כשרירות־לבנו. ברם ברור מראש, שאין כל תועלת בהגדרה אלא אם כן נַתנה את שני התנאים הבאים:

I. לשני תחומים חופפים[1] יש שטח שוה.

II. לתחום, הנכלל בתוך תחום שני כחלקו־ממש („חלק אמיתי"[2]), יש שטח קטן משטחו של התחום השני.

הערה: הואיל וכל חלק של חלק מתחום נתון אף הוא חלק של התחום, יש ליחַס „קטן" שהוכנס כאן התכונה הטרַנסיטיבית. לאמור: אם השטח a_1 קטן מן השטח a_2, ו a_2 קטן מן השטח a_3, קטן גם a_1 מ a_3; וזאת גם אם בתוך התנאי עומד פעם אחת „שוה" במקום „קטן".

אולם תנאים אלה אינם מספיקים להשוות בדרך כלל שטחי תחומים, אף אם פשוטים הם ביותר; הלא II דורש, שתחום אחד יכלל את משנהו, ולכן אפילו שני מלבנים או שני משולשים אינם ניתנים להשוואת שטחיהם על־פי I ו II בלבד. גם הפרדת התחום לתחומים חלקיים לא תעלה ארוכה שלימה לליקוי זה. כדי למלא חסרון זה הכניס הילברט[3] מושג פשוט („שויון־השלמה"), הנמצא— ביודעים או בלא־יודעים – ביסודו של כל טיפול גיאומטרי בנושא שלפנינו, ובכל זאת מרחיק לכת הוא בתוצאותיו. בהצטמצמנו במצולעים סגורים „פשוטים" במישור (ז"א שהיקף המצולע אינו חודר וחותך את עצמו), ננסח את המושג כך:

הגדרה: שני מצולעים נקראים שווי־הפרדה[4], אם אפשר להפריד כל אחד מהם למספר סופי של משולשים, באופן שלכל משולש מתוך ההפרדה האחת מתאים, באופן חד־חד־ערכי, משולש חופף מתוך ההפרדה השניה. (לכן ישוה מספר המשולשים בשתי ההפרדות.) לשני מצולעים p_1 ו p_2 יותאם אותו השטח (הם נקראים שווי־שטח) אם אפשר להוסיף על כל אחד מהם מספר מצולעים, שהם שווי־הפרדה אחד־לאחד, באופן שהסכומים[5] יהיו גם הם שווי־הפרדה. (קוראים למצולעים p_1 ו p_2 גם בשם „שווי־השלמה".)[6]

1. למושג זה, הידוע לקורא מראשית לימודיו בגיאומטריה, ינתן ביסוס מעמיק יותר בפרק הששי.

2. מושג זה יש צרך להבין לא באופן מילולי כי אם בהתאם למספר הממדים (כאן 2).

3. בספרו על יסודות הגיאומטריה (השוה פרק שמיני, § 4), § 18. שם ימצא הקורא תיאור מפורט ומעמיק יותר של הרמזים הניתנים כאן.

4. חשיבותו העקרונית של מושג זה הודגשה בראשונה ע"י W. Bolyai.

5. יש להבין „חיבור" זה כפשוטו: באופן ששני מצולעים „מחוברים" נוצרים מתוך „סכומם" ע"י קו שבור בפנים הסכום, שאינו חודר לעצמו. — על־סמך חיבור זה מסתבר שאפשר להתנות במקום II את התנאי 'II: שטח הסכום שוה לסכום שטחיהם של המחוברים.

6. לגבי המושג של שויון־השלמה במרחב בעל n ממדים, עיין במאמרו של H. Hadwiger ב־*Math. Zeitschrift*, כרך 55, עמ' 292—298 (1952).

לפיכך, אם מצולעים הם שווי־הפרדה, הרי ודאי שהם שווי־שטח.

מן ההגדרה יוצא מיד, שחיבורם של מצולעים שווי־הפרדה נותן שוב מצולעים שווי־הפרדה; וכן אין קושי להסיק, שהיחסים של „שויון־הפרדה" ושל „שויון־שטח" הם לא רק סימטריים אלא גם טרנסיטיביים[1]. לשון אחר: שני מצולעים שהם שווי־הפרדה (שווי־שטח) למצולע שלישי, הם שווי־הפרדה (שווי־שטח) זה לזה. אך אין הדבר מובן כל עיקר, שאפשר להפוך את הטענה הראשונה ולקבוע: ההנחה שמן המצולעים p_1 ו p_2 יתקבלו, ע"י הוספת מצולעים שווי־הפרדה q_1 ו q_2, מצולעים שווי־הפרדה $s_1=p_1+q_1$ ו $s_2=p_2+q_2$, גוררת אחריה שגם p_1 ו p_2 הם שווי־הפרדה.

בטרם נפנה לשאלה זו נציין, שקל להוכיח, בעיקר בדרך הנהוגה בראשית הלימודים בגיאומטריה, את המשפטים הבאים: שתי מקביליות בעלות בסיס שוה וגובה שוה הן שוות־שטח; כל משולש הוא שוה־הפרדה (וכל־שכן שוה־שטח) למקבילית ידועה בעלת אותו הבסיס ומחצית הגובה; שני משולשים בעלי בסיס שוה וגובה שוה הם שווי־שטח; וכן משפטו של פיתגורס[2].

ועתה מתעוררת שאלה עקרונית. אפשר לגשת להיפוך הנ"ל, דהיינו לשויון־ההפרדה בין מצולעים שווי־שטח, באחת משתי דרכים אלו: או מתוך דרישה אכסיומטית מיוחדת המתאימה לכל מצולע מספר הנקרא מידת־השטח והממלא תנאים רצויים, כגון I ו II ('II) דלעיל, או מתוך ביסוס אכסיומטי כולל לגיאומטריה, המבטיח התאמת גדלים גיאומטריים (קטעים) לכל המספרים הממשיים. (השוה I, 119; וכן בכרך זה, בפרק השמיני.)[3] הדעה המקובלת עד סוף המאה ה 19 היתה שיש צורך ללכת באחד הדרכים האלה, או בדרך דומה. מאידך ברור, שעל כל פנים הדרך השניה אינה רצויה; הלא התברר בסעיף הקודם, שבצאתנו מגודל גיאומטרי נתון (המשמש יחידת־המידה) ובבצענו ללא כל הגבלה את תהליכי הבניה האפשריים בעזרת הסרגל והמחוגה, נגיע רק לגדלים מותאמים לאיבריו של שדה ידוע, המתקבל משדה המספרים

1. ההוכחה כלפי „שוה־הפרדה" נעשית מתוך צירוף שתי ההפרדות הקושרות את המצולע השני עם הראשון והשלישי; כלומר, מתוך הכנסת קווי־ההפרדה משני הסוגים גם יחד לתוך המצולע השני, ולפיכך גם לתוך שני המצולעים האחרים.

2. אפשר להוכיחו כפי שהראה P. Epstein, אף במובן של שויון־הפרדה. עיין למשל בחוברת של W. Lietzmann על משפט פיתגורס (הוצאה עברית ע"י ב. אמירה, תרפ"ז), ציור י"ד.

3. אבקלידס הולך בדרך שלישית: הוא מוכיח, כמשפט 39 בספר הראשון של ה„אלמנטא", את המשפט הבא: לשני משולשים שווי־שטח בעלי בסיס שוה יש גם גובה שוה — משפט שהוא היפוך המשפט שהובא לעיל בסוף הקטע הקודם. אך הוכחתו מסתמכת על העקרון „השלם גדול מחלקו" (השוה עמ' 162), המכניס הנחה אכסיומטית חדשה. הילברט הראה באמת שאי אפשר להוכיח את ההיפוך הנ"ל בלעדי העקרון על השלם וחלקו. (עיין בנספח השני ל„יסודות הגיאומטריה" להילברט.)

הרציונליים בעזרת הוצאת שרשים ריבועיים בלבד! והנה המרחק מכאן למערכת כל הקטעים, כלומר של כל המספרים הממשיים, עצום הוא — בין אם נשים לב להיקף בלבד (עָצמות שונות, השוה בעמ׳ 182) בין אם נכנס לתכונות עדינות יותר כמו קשר, רציפות וכו׳. לכן תהיה טבעית לחלוטין הדרישה להוכיח את העובדות הפשוטות בדבר שטחי מצולעים ללא שימוש בעקרונות גיאומטריים הדורשים רציפות (בישר, במישור וכו׳) — אם אפשר להוכיחן בלעדי זה. בפרק השמיני, § 4, נראה איך אפשר לנסח את עקרונות הרציפות בגיאומטריה. ברם כאן נוכל להסתפק באחד מן העקרונות הללו, והוא אכסיומת ארכימידס שכבר דנו בה בעמ׳ 165.

באמת קל להוכיח את המשפטים הנ״ל, וע״י כך את ההתלכדות בין שויון־ההפרדה ושויון־השטח, אם מוסיפים על עקרונות הגיאומטריה „האלמנטריים״ את אכסיומת ארכימידס. לשם כך מספיק, למשל, להוכיח בעזרת אכסיומה זו שכל שתי מקביליות בעלות בסיסים שווים וגבהים שווים הן שוות־הפרדה. ההוכחה לכך נמצאת במלואים לחלק החמישי, מספר ו). מכאן נובע מיד, שכל שני משולשים בעלי בסיסים שווים וגבהים שווים הם שווי־הפרדה.

אולם גם אם הולכים בדרך הטבעית יותר של ויתור על אכסיומה מרחיקת־לכת כזו של ארכימידס, אפשר לבסס את התורה כראוי, כאשר גילה הילברט בראשונה. לשם כך מספיק להתאים, דרך הגדרה, לכל מצולע A גודל גיאומטרי, או מספר, כ„מידת־שטחו״ $f(A)$, באופן שמתמלאים התנאים דלעיל (I ו II׳): במקרה זה יהיו שני מצולעים שווי־שטח, במובן ההגדרה דלעיל, גם בעלי אותה מידת־השטח. בפרט קל להוכיח[1] בדרך זו, ללא שימוש באכסיומת ארכימידס, את אכסיומת אבקלידס שהשלם גדול מחלקו, למשל בצורת המשפט הבא: אם מחלקים מצולע A לאיזה מספר סופי שהוא של מצולעים חלקיים ומשמיטים אחד מהם, גדולה מירת־השטח של A מסכום מידות־שטחיהם של המצולעים החלקיים הנותרים.

עד סוף המאה ה 19 קבלו המתימטיקנים את המשפט ההוא של אבקלידס או כעקרון שאינו טעון הוכחה, או שהוכיחוהו בהסתמכם על אכסיומת ארכימידס. בתקופת המצאתה של תורת־הקבוצות, שבה התברר שלא תמיד השלם גדול מחלקו (השוה עמ׳ 12), בלט יותר הצורך להוכיח את המשפט שלפנינו.

מן המשפט יוצא מיד, ששלשת היחסים $f(A) < f(C)$, $f(A) = f(C)$, $f(A) > f(C)$ סותרים זה את זה.

1. אם נחסר מן המצולע $A+B$ את חלקו B, שגם הוא מצולע בעל התכונה $f(B) > 0$, יגרור היחס $f(A+B) = f(A) + f(B)$ אחריו את אי־השויון $f(A) < f(A+B)$. מכאן יש להסיק, שכל אחד משלשת היחסים $A \gtreqless C$ בין תחומי המצולעים A ו C גורר אחריו את המתאים מתוך היחסים בין מידות־שטח $f(A) \gtreqless f(C)$.

לבסוף, באשר ל„מידת־השטח״ הנידונה, אפשר להגדירה בדרך גיאומטרית או בדרך אנליטית. לפי השיטה הראשונה יש לקחת כנגד מלבן את מכפלת שתי הצלעות, או כנגד משולש את מחצית המכפלה של צלע אחת בגובה הניצב עליה[1]. לפי הגיאומטריה האנליטית יש להגדיר את מידת־שטחו של המשולש, שלקדקדיו יש השעורים הַקרטיסיים (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), כמספר

$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)\right],$$

מספר שאינו תלוי במערכת הצירים (אחרת לא יתמלא התנאי I!) והמקיים גם את שאר התנאים. לא ניכנס לביצוע הרעיונות לפרטיהם. העיקר הוא, בניגוד לתיאור הבעיה בלימודי בית־הספר הרגילים: ראשית, שאין מניחים את מציאותה של מידת־השטח כמובנת מאליה אלא מוכיחים אותה דרך בניה; שנית, שאין מניחים אלא מוכיחים שמידת־שטחו של מצולע שוה לסכום מידות־שטחיהם של משולשים שלהם מופרד המצולע, תהא דרך ההפרדה (ז״א בחירת המשולשים) אשר תהיה.

כאן המקום לנגוע ברעיון שהוא חשוב במידה שוה בגיאומטריה הסינתיטית כמו באנליטית; לשם פשטות וקיצור נשתמש בשיטה האנליטית לפי שעורים קרטיסיים. הכוונה לחשיבות הסימן (הכוון, מגמת־הסיבוב), ובפרט לתפיסת המושגים אורך, שטח, נפח כגדלים „יחסיים״, כלומר: לא מוחלטים כי אם בעלי סימן (חיובי או שלילי). דבר זה הודגש באופן עקרוני ושיטתי ע״י מיביוס בשנת 1827; עיין לעיל עמ׳ 171.

נגדיר את אורך הקטע, המוגבל ע״י שתי נקודות 1 ו 2 בציר ה x בעלות השעורים x_1 ו x_2, כ $(1, 2) = x_1 - x_2$. הקורא היודע את הגדרת הקוֹצב (דיטרמינַנט), לפחות של 3, 2 או 4 טורים, יבין במקרה שלפנינו את הכתיב, הבא כהכנה להמשך:

$$(1, 2) = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

כמו כן (עיין לעיל) שטחו של משולש, שקדקדיו הם הנקודות 1, 2, 3 בעלות השעורים x_k, y_k במישור $(k = 1, 2, 3)$, הוא (עיין לעיל)

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)\right] = \frac{1}{1 \cdot 2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. יש להבין כאן את המלה „מכפלה״ לא כמכפלת־מספרים גרידא אלא מתוך חשבון מתאים (חיבור וכפל) בקטעים; השוה את החשבון בוֶקטורים ב I, 145 — 150. הגורם $\frac{1}{2}$ במידת־שטחו של המשולש נובע אך ורק מן הרצון להתאים לריבוע בעל הצלע q כמידת־שטחו את q^2. הגדרה זו לשטח המשולש מוצדקת ע״י המשפט, שהמכפלה הנדונה אינה תלויה בכך איזו מן הצלעות לקחנו.

היציר המתאים במרחב בן שלשה ממדים הוא הארבעון (עיין לקמן) הקבוע ע״י ארבעה קדקדים 1, 2, 3, 4 שאינם חלים במישור אחד.[1] אם יסמנו x_k, y_k, z_k את שעורי ארבעת הקדקדים במרחב, יש להגדיר את נפח הארבעון כמספר

$$(1,2,3,4)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

והנה כל הנוסחות האלה ממציאות לנו אורך, שטח ונפח לא כגדלים מוחלטים (חיוביים או 0) אלא כבעלי סימן – חיובי או שלילי (או 0 במקרים מיוחדים) – התלוי בסדר בו מופיעות הנקודות. (במקרה של אורך יש להבדיל בין $x_1 - x_2$ ל $x_2 - x_1$). תחת ביטול הסימן מתוך משפט קדום, הסתכלותי כביכול, נשאל להיפך: מהי משמעותו הגיאומטרית של הסימן המתקבל מתוך הנוסחה?

נתינת כוון ומגמה למערכת־השעורים היא בהכרח שרירותית. נקבל עלינו את הנוהג שלפיו: א) ציר ה x „מכוון” משמאל ימינה, לפי המעבר משעורים שליליים לחיוביים (I, 115); ב) במישור מכוון ציר ה x ימינה, ציר ה y למעלה, כך שהראשון יועבר אל השני מתוך סיבוב בזוית ישרה לפי „המגמה החיובית” (I, 147 ו 231); במרחב מוסיפים לצירי x ו y הנ״ל ציר z המכוון לְפנים (אל מול פני המסתכל), באופן שבעיני המסתכל מן החלק החיובי של ציר ה z יועבר ציר ה x לציר ה y ע״י הסיבוב הנ״ל בזוית ישרה.[2]

לפי הסכם זה נוכל להמחיש את הגדרת המושגים אורך, שטח, נפח דלעיל כך: האורך $(1,2) = x_1 - x_2$ חיובי הוא אם הכוון החיובי מוביל מ 2 אל 1, ושלילי במקרה ההפוך. שטח המשולש $(1,2,3)$ חיובי הוא אם המגמה, המובילה בהיקף המשולש מ 1 דרך 2 ל 3, היא המגמה החיובית (הפוכה למגמת המחוג בשעון), ושלילי במקרה ההפוך. נפח הארבעון $(1,2,3,4)$ חיובי הוא אם נראה, בהשקיפנו מן הקדקוד 1 על פני המישור הנקבע ע״י שאר הקדקדים, את הנקודות 2, 3, 4 (בסדר זה) סדורות לפי המגמה החיובית; שלילי במקרה ההפוך. קל להוכיח טענות אלו, כשיוצאים ממצב נוח ביותר (לגבי צירי השעורים) של

1. אין זה תנאי לנוסחת־הנפח הבאה; הנפח יתאפס מעצמו אם הקדקדים חלים במישור אחד. כן הדבר לגבי משולש שקדקדיו חלים בישר אחד, ולגבי קטע שקצותיו מתלכדים.

2. מערכת־שעורים כזו נקראת „ימנית” הואיל והיא מתאימה (בסדר x, y, z) לכוון שלש האצבעות הראשונות שביד הימנית — בניגוד למצב אותן אצבעות שביד השמאלית.

הקדקדים – למשל במקרה הארבעון כך, ש 1, 2, 3 יחולו בשלשת הצירים ברוחק 1 מן המוצא וש 4 יהיה המוצא עצמו. די לאשר את הטענה כלפי מקרה נוח זה ולעבור לשאר המקרים דרך עיוות רציפה (השוה ראשית הפרק השביעי).

כאן לפנינו גם דוגמה למה שנאמר בעמ׳ 163: מכניסים בגיאומטריה „החדשה” (הן האנליטית הן הסינתיטית) גדלים יחסיים (חיוביים ושליליים), ומבטלים ע״י כך את הצורך, השכיח כל כך בגיאומטריה „האלמנטרית”, להבדיל בהוכחות (ואף במשפטים) בין מקרים שונים הנוגעים למצבם היחסי של העצמים הגיאומטריים; צורך שהוא לא רק מטריד כי אם פעמים מטיל בספק את כלליות ההוכחה. דוגמה פשוטה ליתרון זה תנתן בפרק הבא בקשר ל„יחס הכפול” בין ארבע נקודות בקו ישר.

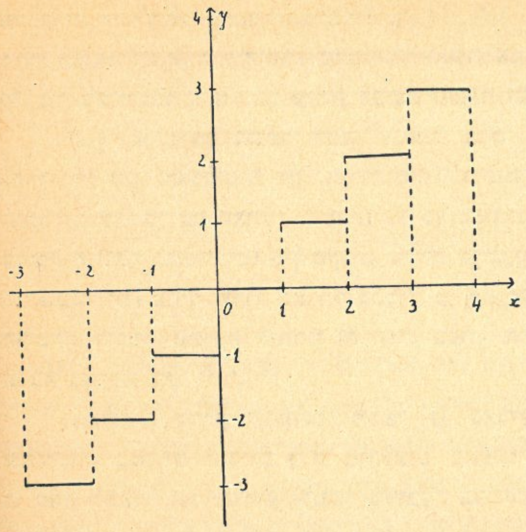
במלואים לחלק החמישי, מספר ז), נצביע על דוגמה אחרת, והיא: שהשימוש בגדלים יחסיים ולא מוחלטים מאפשר לנו לשמור על משמעות הנוסחה לשטחו של מצולע (למשל מרובע), בהתאם לנוסחה דלעיל למשולש, אף במקרה ששתי צלעות חודרות זו לתוך זו. כך נקבל במישור נוסחה שכחה יפה כלפי כל מצולע; ואולם לא במרחב כלפי כל פיאון: יש פיאונים (חד־צדדיים) שאין ליחֵס להם נפח בשום אופן (עיין שם במלואים).

לפי השיטות דלעיל, בפרט לפי שיטתו של הילברט, נפתרת בעית־השטח לגבי תחומים דו־ממדיים המוגבלים ע״י קוים ישרים. כשיתבטל תנאי זה לשפת התחום, תעמוד קודם כל השאלה: תחום בעל שני ממדים מהו? כלומר, השאלה למהות הממד. שאלה קשה זו תעמוד לפנינו בפרק השביעי. באשר לתחומים „פשוטים” שכלפיהם אין קושי במובן זה (עיין שם), נוכל לעבור ממושג השטח המוגדר לעיל אל המושג המוכלל הדרוש בעזרת תהליכי־גבול; לאמור: בהשתמשנו בחשבון האינפיניטסימלי. (I, 272–276.) האינטֶגרל (הסֶכם) פותר שאלה זו, ובמקומו באים גם תחליפי אינטגרל כאלה שבעזרתם קובעים בבית־הספר את שטחו של עיגול.

אך גם כאן מתעוררות בעיוה חדשות ומענינות שעליהן נצביע בקיצור; בעיות שהביאו במשך 50 השנים האחרונות להתפתחות ענקית של תורת המידה ושל תורת האינטגרל. כבר ב I, 308 ו 351, דובר על כך, שגם פונקציה לא־רציפה יכולה להיות סכימה (בעלת אינטגרל)[1]; למשל הפונקציה $f(x)=[x]$ המתאימה לכל ערך ממשי לא־שלם של x את המספר השלם הקטן מ x ושכן לו, ואת x עצמו אם x שלם (עיין בציור 15, עמ׳ 202). במקרה כזה קל להבין מקור מציאותו של האינטגרל; הלא אפשר להקיף כל אחת מן הנקודות השלמות $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1. מדובר, כמובן, ב„אינטגרל אמיתי”; כלומר, מניחים שהפונקציה היא חסומה, ושריוח־הסכימה סופי הוא.

שבתוך ריוח־הסכימה (בציר ה x) בריוח כה צר ($n-\delta$ עד $n+\delta$), שסכום רחביהם של k רווחים כאלה (k מספר טבעי), השוה ל $2k\delta$, יקטן כרצוננו. והנה לפי זה יקטן כרצוננו גם סכום שטחיהם של המלבנים המתרוממים מעל הרווחים הללו, הואיל וגבהו של כל מלבן אינו עולה על חסם קבוע. על כן אין הבדל בדבר אם לגבי הנקודה n עצמה נרים את המלבן עד לגובה $n-1$ או עד לגובה n או עד איזה גובה ממוצע (עיין בציור), בבנותנו את המלבנים המביאים לידי האינטגרל (ו, 274 ו 351); שינויים אלה אינם מעלים ואינם מורידים, בין לגבי מ צ י א ו ת האינטגרל בין לגבי ע ר כ ו המספרי.



ציור 15

בדוגמה זו המצב פשוט מאד, אך מתעוררת השאלה: ע ד ה י כ ן יוכל להסתבך ולהצטבר מצב „פתולוגי" כזה; כלומר, כמה רבים וצפופים יורשו להיות המקומות בתוך ריוח־הסכימה, שאצלם הפונקציה המסתכמת היא (חסומה אך) לא־רציפה — מבלי לשלול את עצם קיומו של האינטגרל? מובן ששאלה זו נוגעת למקרה של א י נ ס ו ף מקומות־הפרעה בתוך הריוח; אם מספרם סופי בלבד, אין מה לחשוש. ענין זה היה בין מחוללי תורת־הקבוצות (עיין עמ' 22), ובאותה תקופה ממש בה מיינו ק נ ט ו ר וחבריו את קבוצות־הנקודות הקוויות השונות, שהן קבוצות חלקיות לריוח מסויים — נגיד, לריוח בציר ה x — וצעדו (מ 1884 ואילך) צעדים ראשונים לקראת הכנסת מושג התכולה, בו בזמן הגדירו מצד שני פיאנו וז'ורדאן[1] את ה ת כ ו ל ה (אורך, מידה) לקבוצות כאלו, באופן שיתמלאו שלשת התנאים הבאים (באם יש לקבוצות הנדונות תכולה בכלל):

א) התכולה היא מספר חיובי או 0;

ב) תכולת ק ב ו צ ה ח ל ק י ת של הקבוצה K היא קטנה מתכולת K, או שוה לה;

1. G. Peano; C. Jordan. הגדרת האחרון היא משנת 1892 ושונה רק בניסוחה מהגדרת פיאנו שהופיעה ב 1887.

ג) כנגד שתי קבוצות ז ר ו ת תשוה תכולת סכומן (הקבוצה הכוללת; עמ' 11) לסכום התכולות של כל אחת מן הקבוצות.

כדי שמושג התכולה לא יהיה טריביאלי, מתוך היות ל כ ל קבוצה התכולה 0, יש להוסיף: לריוח הסגור מ 0 עד 1 ($0 \leq x \leq 1$) יש התכולה 1. קל להסיק מכאן, שלריוח הסגור[1] $\{a, b\}$, ואף הפתוח (a, b), יש התכולה $b-a$ אם $a<b$.

תורת התכולה אינה מצטמצמת בקבוצות קוויות, כלומר בקבוצות־נקודות בממד אחד. אפשר להעבירה למישור, וכן למרחב בעל שלשה ממדים או יותר. אם נגביל את התכולה של קבוצות במישור לאותן הקבוצות המיוחדות בלבד המופיעות בתורת האינטגרלים — שבה דנים, יחד עם נקודה מסויימת x_0 בציר ה x, ב„אורדינטה" המתאימה בשלמותה, כלומר בקבוצת כל הנקודות שמעל (או מתחת) ל x_0 עד ל„עקום" הנדון $y=f(x)$[2]; עיין ב ו, 272 — נקבל בדיוק את מושג ה א י נ ט ג ר ל הרגיל; ביתר דיוק: האינטגרל של Riemann (ו, 275).

לא לכל קבוצת־נקודות (קווית) חסומה[3] יש לפי זה תכולה, ואין גם לצפות לכך, בשים לב לכלליותו הלא־מרוסנת של המושג „איזו קבוצת־נקודות שהיא". למשל אין תכולה לקבוצה R של כל הנקודות הרציונליות, או לקבוצה I של כל הנקודות האירציונליות, בין 0 ל 1 — כשם שאין אינטגרל לפי ר י מ ן, למשל, לפונקציה $f(x)$ המוגדרת כך: $f(x)=1$ אם x רציונלי, $f(x)=2$ אם x אירציונלי. ואולם הגדרתם של פיאנו וז'ורדאן אינה מתאימה תכולה אפילו לקבוצות קוויות פשוטות באופן יחסי. (השוה במלואים לחלק החמישי, מספר ח.) עובדה זו הביאה את Borel ב 1898 לידי הגדרה כוללת יותר למושג התכולה, והמושג החדש הוכלל הכללה נוספת חשובה ע"י לֶבֶּג[4] בעבודת־הדוקטור שלו (1902). רגילים לדבר במקרה של הכללות אלו על „ מ י ד ה " במקום „תכולה". מ י ד ת ל ב י ג והמושגים המקבילים לאינטגרל ולפונקציות (הנתונות לסכימה במובן זה), נמנים על מושגיה החשובים ביותר של המתימטיקה החדישה בכלל; אף כי לא נוכל להגדירם כאן

1. עיין ו, 243, הגדרה III.

2. ביתר דיוק (אם $f(x_0)$ הוא לא־שלילי): כל הנקודות (x_0, y) המקיימות את היחס $0 \leq y \leq f(x_0)$.

3. כלומר, הנמצאת בין שתי נקודות קבועות, ואינה משתרעת אפוא ימינה או שמאלה לאין קץ (השוה I, 274 ו 284). הגבלה זו נחוצה היא כדי שלא להגיע לתכולה גדולה לאינסוף; למשל, כנגד הקו כולו. — התוספת „קווית" באה אך לשם רבותא.

4. H. Lebesgue. שנתים אחריו, אך ללא תלות בו, הגיעו G. Vitali ו W. H. Young לאותו המושג. מעבר ללביג צעד עוד C. Carathéodory מ 1914 ואילך והגיע במובן מסויים עד עצם קצה־הכלליות. גם חוקרים אחרים פיתחו מושגי מידה ואינטגרל שונים. — לביג נתן סקירה כללית, שקל להבינה, על מושג המידה והתפתחותו במאמר Sur la mesure des grandeurs. *L'Enseignement Mathématique*, כרכים 31—33 (1932—1934), וכן במאמר קצר ב־*Revue de Métaphysique et de Morale*, כרך 34 (1927).

נציין את תכונותיהם העיקריות ונבליט בדרך זו את גודל ההיקף והכלליות שקבלו בזמננו מושגי האורך והשטח, הנראים כה פשוטים לתלמידי בית הספר[1].

בכלל התכונות, שטבעי לדרשן ממושג (התכולה או) המידה, יש קודם כל שתי תכונות פשוטות:

I שהמידה תהיה חיובית או 0, ובפרט שמידת קטע־היחידה (או הריבוע או הקוביה בעלי הצלע 1) תשוה ל 1;

II שלשתי קבוצות חופפות[2] תהיה מידה שוה.

על תכונות אלו הוסיפו פיאנו וז׳ורדאן את הדרישה שהמידה (התכולה) לקבוצת־נקודות, שהיא הסכום של שתי קבוצות זרות – או, על־סמך זה, של מספר סופי של קבוצות זרות –, תהיה סכום מידותיתם של המחוברים (השוה לעיל). אך במתימטיקה, ובפרט באנליזה, מופיע בדרך כלל לא מספר סופי כי אם סידרה של עצמים (במקרה זה: של קבוצות), ולכן רצוי לדרוש כי המשותף (עמ׳ 11) של סידרת קבוצות בעלות־מידה יהיה גם הוא בעל מידה, וכן הסכום (הקבוצה הכוללת) אם הסכום הוא קבוצה חסומה[3]; וכי במקרה הפרוט, שבו כל שתי קבוצות שבסידרה הן זרות, מידת הסכום תשוה לסכום מידותיהם של המחוברים. דרישה זו מתמלאת ע״י המידה של בורל, וזוהי מעלתה בניגוד לתכולה של פיאנו־ז׳ורדאן, שאינה ממלאת את הדרישה אלא כלפי מספר סופי של גורמים ומחוברים. לביג הכליל את מידת בורל בתתו לה היקף רחב יותר

1. עיין בספרים שצויינו בעמ׳ 95/6, ומלבדם, למשל, בספרים הבאים:

J. C. Burkill: The Lebesgue integral. 1951. 87 pp. (ספר אלמנטרי).

E. W. Hobson: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I (3rd ed.) 1927, vol II (2nd ed.) 1926.

R. L. Jeffery: Theory of functions of a real variable. 1951.

E. J. McShane: Integration. 1944.

W. W. Rogosinski: Volume and integral. 1952. 160 pp.

E. J. Townsend: Functions of real variables. 1928. 405 pp.

S. Saks: Théorie de l' intégrale. 1933. 292 pp. (English ed., 1937.)

E. Kamke: Das Lebesguesche Integral. 1925. 153 pp.

L. Schlesinger & A. Plessner: Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. 1926. 229 pp.

2. יש להבין כאן את המונח „חופף" במובן הגיאומטריה האלמנטרית; השוה בפרק הבא. יש לומר בקיצור: קבוצות נקראות חופפות אם אפשר להעביר אחת לשניה ע״י תנועה מתאימה. (יש להכניס אל מסגרת הקבוצות החופפות גם קבוצות „סימטריות" זו לזו, מתוך הוספת פעולת ההשתקפות על פעולת התנועה.)

3. ההפרש $A-B$ בין שתי קבוצות מתיחס לשתי קבוצות בלבד, ולכן ההפרש הוא הן בעל תכולה הן בעל מידה, אם יש אותה התכונה ל A ול B.

ובשמרו, כמובן, על קיום הדרישה דלעיל. לשם קיצור נדון להלן על־פי רוב במידת לביג. – נציין עוד שכל קבוצה חלקית של קבוצה בעלת המידה 0 אף היא בעלת מידה, ומידתה היא כמובן 0.

בדיוק כבמקרה התכולה, כן אפשר להגדיר אינטגרל כנגד מידת לביג, דהיינו כמידתה (בשני ממדים) של קבוצת אורדינטות לגבי פונקציה חסומה $f(x)$ בתחום־הגדרה סופי[1]. ע״י כך נקבל מושג־אינטגרל, שהוא מקיף מזה של רימן, והנקרא אינטגרל של לביג. לכל פונקציה בעלת אינטגרל (פונקציה „סכימה") לפי רימן יש גם אינטגרל לפי לביג, ובמקרה זה שווים ערכי האינטגרלים; אך אין להפוך משפט זה. הדרישה החדשה דלעיל גורמת לכך, שפונקצית־הגבול (אם ישנה) של סידרת פונקציות, שכולן סכימות, תהיה סכימה גם היא[2].

לקבוצה המכילה נקודה אחת בלבד יש, כמובן, הן התכולה הן המידה 0, ולכן קיים אותו הדבר לגבי כל קבוצת־נקודות סופית. אולם רק לגבי המידה אפשר להרחיב את הדבר לכל קבוצה (חסומה) בת־מנייה; הלא את נקודותיה נוכל לסדר כסידרת נקודות, ולכן נוכל לתאר את הקבוצה כסכום של סידרת קבוצות בעלות המידה 0 כל אחת. בגלל זה יש לקבוצת כל הנקודות הרציונליות בין a ל b, שאינה בת תכולה, המידה 0, וכן – בעברנו אל המישור – לקבוצת כל הנקודות במלבן ששני שעוריהן x ו y הם מספרים רציונליים. מאידך מידת הקבוצה של אותן נקודות במלבן, ששעוריהן הם מספרים אירציונליים, שוה לשטח המלבן כולו, בעוד שאין לה תכולה. אף הפונקציה $f(x)$ שהגדרנוה בעמ׳ 203 (שוה ל 1 כנגד x רציונלי, ל 2 כנגד x אירציונלי) סכימה היא לפי לביג; ערך האינטגרל שלה מ a עד b הוא $2(b-a)$.

נעורר עוד את השאלה העקרונית, אם יש קבוצות־נקודות שאין להן מידה כל עיקר.

ננסח את בעית־המידה הכללית – במרחב של איזה מספר שהוא של ממדים, כלומר לגבי הקבוצות של נקודות בקו ישר, או במישור, או במרחב בן שלשה ממדים או יותר – בצורה כללית זו: האפשר להתאים לכל קבוצת־נקודות חסומה A של המרחב הנידון מספר לא־שלילי $m(A)$, באופן שיתמלאו התנאים הבאים:

א) שני התנאים הפשוטים I ו II דלעיל. (ל„קוביית־היחידה" יש המידה 1, לקבוצות חופפות יש מידה שוה.)

1. יש צורך בכמה צעדי־ביניים שעליהם נוותר כאן.

2. אמנם בתורת הסכימה של רימן (כבזו של לביג), אם $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$, ואם $f(x)$ וכל הפונקציות $f_k(x)$ הן סכימות, שוה האינטגרל של $f(x)$ לגבול האינטגרלים של $f_k(x)$. אולם, בניגוד לתורת לביג, אצל רימן אין סכימותן של כל ה $f_k(x)$ גוררת אחריה את סכימותו של הגבול $f(x)$.

ב) $m(A+B)=m(A)+m(B)$, אם A ו B זרות; כלומר, מידת הסכום של שתי קבוצות זרות שוה לסכום מידותיהם של המחוברים.

ג) $m(A_1+A_2+\ldots+A_k+\ldots)=m(A_1)+m(A_2)+\ldots+m(A_k)+\ldots$, אם (A_k) היא סידרה של קבוצות זרות לחלוטין אשר סכומן קבוצה חסומה; כלומר, התנאי ב) מתמלא לא רק כלפי שני מחוברים אלא אף כלפי $\aleph_0$ מחוברים.

והנה מתברר, כפי שהראה האוסדורף[1], שאין פתרון כל עיקר לבעית־מידה זו. לפיכך לא תוכל שום הכללה נוספת למידת־לביג להמציא פתרון כולל לגבי כל קבוצה שהיא. כה מסובך הוא אפוא ענין השטח, הנראה למתחילים פשוט כל כך! לשון אחר, אם נצא מן הצד השני: כה רב־גוניות הן קבוצות־הנקודות הכלליות וכה שונות הן מן הדוגמות הפשוטות הרגילות, כגון קטע, מלבן או משולש, תיבה או ארבעון. ההוכחה לאי־הפתירות יכולה להנתן בממד אחד, כלומר באופן שמתברר כי אפילו [2] לגבי קבוצות־הנקודות הקוויות אין פתרון לבעיה. לא נוכל לתאר כאן את ההוכחה; רעיונה המרכזי פשוט למדי: מפרדים את היקפו של מעגל ל $\aleph_0$ קבוצות־נקודות זרות החופפות זו על זו, ומשתמשים באכסיומת הבחירה (עמ' 71).

עד כאן דובר על איזה מושג־מידה שהוא הממלא את התנאים דלעיל. גם אם נפרט ונתכוון, למשל, למידה לפי לביג, מבוססות כל ההוכחות למציאות של קבוצות שאין להן מידה על עקרון־הבחירה. לפיכך אין להוכחות אלו אופי בנייתי.

מאידך „שכיחות" מאד, במובן כמותי, הקבוצות מחוסרות־המידה לפי לביג (וכל שכן לפי בּוֹרל וכו'). כדי לברר את הענין, נזכור שכל קבוצת־נקודות היא קבוצה חלקית של הרֶצף (בעל העָצמה א); לכן (עמ' 44 ו 67) הקבוצה, שאיבריה הם כל הקבוצות של נקודות, אֶקוִיוָלנטית היא לקבוצת־החזקה של הרצף, ויש לה העצמה $\mathfrak{f}=\aleph_2$. ברם לקבוצת כל הקבוצות בעלות מידה לפי בורל יש „רק" עצמת הרצף, בעוד שיש $\mathfrak{f}$ קבוצות – ז"א „כמעט כל" הקבוצות של נקודות – המחוסרות מידה זו. אין הדבר כך כלפי המידה של לביג (ואפילו של ז'ורדאן); כאן יש $\mathfrak{f}$ קבוצות בעלות מידה, מסקנה הנובעת מיד מן הדוגמה דלהלן (עמ' 211) לקבוצה C בעלת העצמה א והמידה 0 לפי לביג (וכן לפי קנטור), אם נשים

1. עיין בספרו הקלסי (הראשון) הנזכר בעמ' 41, עמ' 401.

2. „אפילו" זה מוצדק הוא: לאמור: אם אין פתרון ב n ממדים, ודאי שאין פתרון ביותר מ n ממדים. שכן נניח שיש פתרון ב $n+1$ ממדים. תהי B_n קבוצת־נקודות במרחב n-ממדי. נרים מעל ל B_n „גליל ישר־זווית" בעל הגובה 1, בהעלותנו בכל נקודה של B_n אנך בעל האורך 1 לתוך הממד ה $(n+1)$. במקרה זה יש להגדיר את מידת (שטח) הקבוצה B_n כמידת (נפח) הגליל בעל $n+1$ ממדים, שלפי הנחתנו יש לו מידה. בכך הוגדרה המידה ב n ממדים. (הקורא יסביר לעצמו את הדבר בקחתו $n=1$ או $n=2$.)

לב למשפט האומר שכל קבוצה חלקית של קבוצת־נקודות, בעלת המידה 0 לפי לביג, אף היא בעלת המידה 0, ולכן בעלת מידה בכלל[1]. מכאן מתברר עד כמה רחב הוא היקף המושג „בעל מידה לפי לביג" (או לפי ז'ורדאן) – רחב לאין שעור מהיקף המושג המתאים לפי בּוֹרל. אולם גם תחום הקבוצות שאינן ניתנות למדידה במובן זה אינו נופל מן הקודם. לאמור: אף הן נמצאות במספר $\mathfrak{f}$, והוא הדין לגבי הקבוצות שאין להן מידה כל עיקר, בהתאם להוכחת האוסדורף.

לעומת מסקנה שלילית זו לבעית־המידה על־סמך הדרישות א) עד ג) הוכיח באנאך[2], כי בה בשעה שנוותר על הדרישה ג) יש פתרון שלם לבעיה במישור (מרחב דו־ממדי), ולא כל־שכן בממד אחד, בקו. לאמור: יש פונקציה $m(x)$ המתאימה לכל קבוצת־נקודות חסומה S במישור מספר $m(S)$ ולקבוצות חופפות אותו המספר, באופן שקיים $m(S)=1$ אם S היא קבוצת כל הנקודות שבריבוע־היחידה, וגם $m(A+B)=m(A)+m(B)$ אם A ו B הן קבוצות זרות. יתר על כן: אם יושם לב בפרט ל„קבוצות של אוֹרדינטות", כלומר לאותן הקבוצות המגדירות את האינטגרל בחשבון האינטגרלי, מתלכדת $m(S)$ עם ערך האינטגרל הרגיל (של רימן) בכל מקרה שבו קיים אינטגרל זה. לעומת זאת אין בדרך־כלל התלכדות כזו עם האינטגרל לפי לביג כשקיים אינטגרל זה ולא האינטגרל של רימן. עובדה זו קשורה קשר אמיץ בכך, שפונקצית־המידה $m(x)$ של באנאך אינה מקיימת את התנאי ג), ז"א שאינה „חיבורית" (אדיטיבית) כלפי סידרה אינסופית של מחוברים[3]; לכן גם לא יהיה בדרך כלל האינטגרל של $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ שוה לגבול ערכי האינטגרלים של הפונקציות $f_n(x)$.

להלן נראה, שההגבלה לשני ממדים לכל היותר נחוצה כאן ואינה מקרית.

בכל התיאור שלפנינו עסקנו ב„תכולה" או ב„מידה" לקבוצת־נקודות במישור (וביתר כלליות: במרחב בעל n ממדים) כהכללה למושג השטח (במקרה הכללי: לנפח ב n ממדים). אולם כבר הגיאומטריה האלמנטרית אינה מצטמצמת בבעיה זו. במישור מופיע, מלבד שטחו של עיגול, גם קטרו, וכן היקפו שהוא ארכו של עקום, לאמור: של יציר בעל ממד אחד. בשלשה ממדים דנים, מלבד בנפחו של כדור או אליפסוֹאיד, גם בשטח פניו. הבעיה המתאימה כלפי קבוצת־נקודות כללית תהיה: מידה של יציר בעל m ממדים בתוך מרחב בעל n ממדים, אם $m\leq n$; בפרט חשוב המקרה $m=1$ שבו מדובר על מידה (תכולה) קווית במישור או במרחב הרגיל $(n=3)$. ב 1900 התחיל

1. שהרי לקבוצת כל קבוצותיה החלקיות של C יש העצמה $\mathfrak{f}=\aleph_2$.

2. St. Banach עיין *Fundamenta Mathematicae*, כרך 4 (1923), עמ' 7 – 33.

3. דבר זה מובן מאליו על־פי מסקנתו השלילית של האוסדורף הנזכרת לעיל.

מינקובסקי [1] לטפל בשאלות מסוג זה, וב 1918 הגיע האוסדורף לקצה ידוע בהכללת המושגים. לכוון אחד באותה פרשה נוטה המושג של ה ק ו ט ר ה ע ל־ס ו פ י לקבוצת־נקודות (אינסופית חסומה וסגורה) במישור, שהכניסו פקטה [2] מ 1923 ואילך; הכוונה כאן לתהליך־גבול ידוע לגבי צלעות המצולעים שקדקדיהם חלים בנקודות הקבוצה הנתונה.

לבסוף נצביע על ה ק ש ר ב י ן ת ו ר ת־ה מ י ד ה ל ב י ן ת ו ר ת־ה ה ס תַּ ב ר ו ת (האומדנה). יהי R מלבן, דהיינו קבוצת כל הנקודות שבפנים המלבן ובשפתו (בצלעותיו); מידת המלבן $m(R)$, כלומר שטחו, שוה למכפלת שתי צלעותיו. אם S היא איזו קבוצה חלקית של R שיש לה מידה $m(S)$ במובן מסויים, למשל לפי לביג, הרי מתקבל על הדעת לראות את המנה $p(S)=\frac{m(S)}{m(R)}$ כמידת ההסתברות (האומדנה) לכך שאיזו נקודה שהיא של המלבן שייכת לקבוצה S. פירוש זה אינו משתנה אם, ראשית, נתכוון לממד אחד או לשלשה ממדים ויותר תחת שני ממדים ואם, שנית, נקח כמוּצָא קבוצה אחרת תחת מלבן, כגון ריבוע, משולש, עיגול, או גם יציר מסובך יותר. מכיון שעל־פי דרישותינו מידת קבוצה אינה קטנה ממידתה של קבוצה חלקית, קיים $m(S)\leq m(R)$, ולכן

$$0\leq p(S)\leq 1.$$

זה מתאים להסכם המקובל, שכל הסתברות שוה ל 0 לכל הפחות („אי־אפשרות"), ול 1 לכל היותר („ודאות"). הסתברות זו $p(S)$ ממלאת עוד אחד מחוקיה היסודיים של תורת־ההסתברות: אם S_1 ו S_2 הן קבוצות זרות, שוה ההסתברות, שאיזו נקודה שייכת ל S_1 או ל S_2, ל $p(S_1)+p(S_2)$ [3]. אמנם צריך להבין מושגים אלו מתוך הסתייגות ידועה; הלא ההסתברות שנקודה x הנמצאת בקטע מסויים, למשל בין 0 ל 1, תהיה רציונלית, היא 0 לפי ההגדרה דלעיל, אף על פי ש א י ן ז ה ב ל ת י־א פ ש ר י ש x הוא רציונלי. כמו כן ההסתברות שנקודה במלבן תהיה בעלת שתי קוֹאורדינטות אירציונליות, היא 1, אף־על־פי שאין כאן וודאות. פירוש הדבר הוא, שקבוצות בעלות המידה 0 אינן נחשבות כמאומה לפי ההגדרה הנ"ל. דוגמה מענינת למחשבה זו תנתן להלן.

עד כאן טיפלנו בעיקר במושג ה ש ט ח, כלומר בבעית התכולה ב ש נ י

---

1. H. Minkowski. עיין *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, כרך 9. השוה גם את הכללתו של W. H. Young ב *Proceedings of the London Math. Society*, סידרה שניה, כרך 3 (1905).
2. M. Fekete. עיין *Mathem. Zeitschrift*, כרך 17 (1923) וכרך 32 (1930).
3. לא יקשה לקורא להבין כי ההסתברות, שנקודה שייכת ל S_1 ול S_2 גם יחד, אינה בדרך כלל $p(S_1)\cdot p(S_2)$, אלא המכפלה של $p(S_1)$ בהסתברות שנקודה של S_1 שייכת ל S_2.

מ מ ד י ם, אף כי פעמים הכנסנו גם את התכולה בממד אחד (בקו ישר), בעיקר בשים־לב לגורם x המופיע בסכימת הפונקציה $f(x)$. נסקור בקצרה גם את מצב הענינים בממד אחד ובשלשה ממדים, כלומר את מושגי ה א ו ר ך ו ה נ פ ח.

המצב הוא לכאורה פשוט למדי בקו (ישר או עקום). לפנינו נמצאים קטעים (רווחים) (a, b), שיש להגדיר את מידתם כאורך הקטע $|b-a|$, בין אם הקטע יוקח עם קצותיו (ריוח סגור) בין בלעדיהם (ריוח פתוח). מאידך, לקבוצה המכילה נקודה אחת או מספר סופי של נקודות, יש ליחֵס את המידה 0; וכן לקבוצה בת־מנייה של נקודות, לפחות לפי כל מושג של מידה המקיים את הדרישה ג) בעמ' 206. אמנם כבר בדברֵנו על מידת ב וֹ ר ל ו ל ב י ג רמזנו, שאין המצב פשוט כפי שנראה הדבר בגישה הראשונה. שם הסתפקנו ברמזים, ללא הגדרה מלאה ומדוייקת למושג המידה. עתה תנתן דוגמה לא־טריביאלית, אך גם לא מסובכת מדי, לקבוצת־נקודות קווית שננתח אותה בפרוטרוט בקשר למושג המידה; נגיע למסקנות מפתיעות למדי.

נחלק את ריוח־היחידה מ 0 עד 1 (ציור 16) לשלשה חלקים שוים ונציין במיוחד, למשל ע"י העברת דְיוֹת, את החלק האמצעי $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. כן נחלק כל אחד משני החלקים הנותרים לשלשה חלקים שוים ושוב נציין כל שליש אמצעי, דהיינו $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ו $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. נמשיך בתהליך זה ללא הגבלה, בציינֵנו בכל צעד את שלישו האמצעי של כל ריוח שנשאר לא־מצויין בצעד הקודם. הצעד השלישי יתן אפוא ארבעה רווחים מצויינים, והם $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$. אורך הרווחים המצויינים המופיעים בצעד ה־n־י הוא $\frac{1}{3^n}$ כל אחד. הקבוצה C שנדון בה תכיל, ראשית, את ק צ וֹ ת כל הרווחים המצויינים, ושנית את כל הנקודות בין 0 ל 1 שאינן חלות ברווחים מצויינים [1] (כלומר, כל נקודה שבשום צעד לא תיכלל בריוח מצויין), לרבות הקצוות 0 ו 1.

ציור 16

לקבוצה C יש תכונות שונות אשר חלק מהן מתואר במלואים לחלק החמישי, מספר ח). אך שתים מתכונותיה נציין כאן. קודם כל C א י נ ה צ פ ו פ ה ב ש ו ם מ ק ו ם, אם נבין את המונח „צפוף" כמו בעמ' 93/4: שבין כל שני איברים יימצא איבר נוסף (ולכן אינסוף איברים נוספים). ואמנם שתי נקודות נתונות P_1 ו P_2 של C יכולות, ראשית, להיות שני קצותיו של אותו הריוח המצויין; אם כן, הרי לפי הגדרת C אין ביניהן כל נקודה של C. שנית, אם P_1 ו P_2

---

1. אלה הן נקודות־ההצטַברות של קצות הרווחים.

אינן מסוג זה, הרי לפי הגדרת C יש ביניהן לפחות ריוח מצויין אחד (למעשה אף אינסוף רווחים מצויינים); שכן התהליך של חלוקה וברירת רווחים מצויינים חודר אל כל חלק מריוח־היחידה, שאינו בעצמו ריוח מצויין או חלק ממנו. לפיכך, אם i הוא איזה ריוח מצויין שהוא בין P_1 ל P_2 – וכאן יוכל אחד מקצותיו של i להתלכד עם P_1 או עם P_2 – הרי בין קצותיו של i אין כל נקודה של C. על כל פנים לא יקיים אפוא הריוח מ P_1 עד P_2 את התנאי, שיש בין כל שתי נקודות של הריוח השייכות ל C לפחות נקודה נוספת אחת של C, וזה מה שבטאנו באימרה: C אינה צפופה בשום מקום.

שנית, לקבוצה C יש עצמת הרֶצף א. כדי להוכיח זאת, ללא הסתמכות על מושגים ומשפטים כלליים שלא הובאו עד הנה, נתאר את נקודות הקבוצה C – כלומר, את המספרים הממשיים המתאימים – כשברים שיטתיים בעלי המספר היסודי 3[1]; בקיצור: „כשברים שלשוניים". השליש הראשון של קטע־היחידה מכיל אותם השברים השלשוניים

$$0.a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad (a_k = 0, 1, 2)$$

שבהם $a_1 = 0$; ואילו $a_1 = 1$ בשליש השני, $a_1 = 2$ בשליש השלישי. כמו כן $a_2 = 0$ (נוסף על $a_1 = 0$) בין 0 ל $\frac{1}{9}$, $a_2 = 2$ בין $\frac{2}{9}$ ל $\frac{1}{3}(=\frac{3}{9})$; וכן קיים (נוסף על $a_1 = 2$) $a_2 = 0$ בין $\frac{2}{3}(=\frac{6}{9})$ ל $\frac{7}{9}$, $a_2 = 2$ בין $\frac{8}{9}$ ל $1(=\frac{9}{9})$. לעומת זאת מכילים הרווחים המצויינים $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ את הנקודות שבתיאוריהן קיים $a_1 = 1$ או $a_2 = 1$. כן הדבר בהמשך התהליך, וקל לראות באופן כללי, שנקודות הקבוצה C (כלומר, קצות הרווחים המצויינים והנקודות שאינן חלות ברווחים מצויינים) הן אלה שאפשר לתארן כשברים שלשוניים בלי להיזקק אף פעם לסיפרה 1. גם קצות הרווחים המצויינים אינם יוצאים מכלל זה, שכן יש להם (פרט ל 0) תיאורים כפולים (סופי ואינסופי), כמו שיש תיאור כפול כשבר עשרוני סופי ואינסופי למספרים $\frac{m}{10^k}$, אם m ו k הם מספרים טבעיים, לרבות $k=0$. למשל, הנקודה $\frac{1}{3}$ שייכת ל C, אף כי תיאורה כשבר שלשוני סופי הוא 0.1; שהרי אפשר לתארה גם כשבר השלשוני האינסופי $0.0222\ldots$, בדיוק כפי שאפשר לתאר $\frac{1}{10}$ כשבר העשרוני האינסופי $0.0999\ldots$.

---

1. המושג של שבר שיטתי בעל המספר היסודי (השלם) n $(n>1)$ מבואר ב I, 140. הוא מהווה הכללה למושג „שבר עשרוני", המתכוון למספר היסודי $n=10$. נזכיר במיוחד את המסקנה (I, 141) שכל שבר שיטתי סופי חיובי מתאר מספר הניתן גם לתיאור כשבר אינסופי.

ע"י שינוי הדוגמה שלפנינו היה אפשר להגיע לשברים עשרוניים שבהם חסרה אחת הספרות. אולם מבחינה גיאומטרית דוגמות אלו מסובכות הן קצת יותר.

עתה קל להוכיח שלקבוצה C יש עָצמת הרֶצף. לשם כך ניצור התאמה חד־חד־ערכית בהחליפנו, בכל שבר שלשוני מתוך C, את הסיפרה 2 בסיפרה 1 בכל מקום. את הביטויים החדשים נבין לא כשברים שלשוניים אלא כשברים דואליים ($n=2$). לפי זה יופיעו כל השברים הדואליים $0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ $(a_k = 0, 1)$, ומכיון שאפשר לתאר כל מספר ממשי מתוך הריוח הסגור מ 0 עד 1 כשבר דואלי[1], תהיה עצמת הקבוצה C כעצמת הריוח כולו, כלומר, כעצמת הרצף א.

והנה הדבר המפתיע: לקבוצה C, עם היותה בעלת עצמת הרצף, יש המידה 0. כדי להוכיח זאת מספיק להסתמך על התכונה (עמ' 206), שמידת קבוצה המופיעה כסכום של סידרת קבוצות זרות, שוה לסכום מידותיהם של המחוברים. מלבד זאת נשתמש רק בזה, שמידת הריוח הפתוח (a, b) שוה ל $|b-a|$ ושמידת הקבוצה $A-B$, אם B קבוצה חלקית של A, שוה להפרש המידות של A ו B (עיין ב) בעמ' 206). לא נסמוך על שום תכונה פרוטה של הגדרה פלונית למושג המידה; לכן כח המסקנה יפה לא רק לגבי מידת לביג כי אם גם לגבי מושגי־מידה אחרים שיש להם התכונה הנ"ל, או אפילו תכונה חלשה ממנה במקצת.

הקבוצה C העומדת לבדיקה נוצרה מתוך ריוח־היחידה, בעל המידה 1, ע"י השמטת כל הרווחים (הפתוחים) „המצויינים". בצעד הראשון מופיע ריוח אחד כזה: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ומידתו היא $\frac{1}{3}$; בצעד השני מופיעים שני רווחים מצויינים: $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ו $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, ומידת כל אחד מהם $\frac{1}{3^2}$; בצעד השלישי יש ארבעה ($=2^2$) רווחים מצויינים בעלי המידה $\frac{1}{3^3}$ כל אחד. באופן כללי מופיעים בצעד ה־k־י 2^{k-1} רווחים מצויינים, ולכל אחד מהם המידה $\frac{1}{3^k}$. לכן יש לסכום הסידרה, שאיבריה הם הרווחים המצויינים כולם, המידה[2]

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{3^k} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

לפיכך מידת C שוה להפרש $1-1$, כלומר ל 0, מש"ל.

---

1. כאן יש אי־דיוק ידוע, שאמנם אינו משפיע על מהלך־מחשבתנו: לא כל השברים הדואליים הללו מתארים מספרים ממשיים שונים, אלא יש ששבר דואלי סופי ושבר דואלי אינסופי מתארים אותו המספר. למשל השברים השלשוניים $0.02(=\frac{2}{9})$ ו $0.00222\ldots(=\frac{1}{9})$ מתארים מספרים שונים; אך השברים הדואליים המוחלפים 0.01 ו $0.00111\ldots$ מציינים אותו המספר הממשי $\frac{1}{4}(=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots)$. אולם אין זה משפיע על עצמת הקבוצה הנדונה (לפי ג) בעמ' 49 $(\aleph+\aleph_0=\aleph)$; שהרי השברים הסופיים מצטרפים לקבוצה בת־מנייה בלבד.

2. הלא סכומו של הטור הגיאומטרי $a+aq+aq^2+\ldots$ שוה ל $\frac{a}{1-q}$ (I, 292). במקרת דידן $a=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$.

בלשון תורת־ההסתברות (עמ׳ 208) אומרת מסקנה זו: ההסתברות לכך, כי בשבר שלשוני תחסר לגמרי סיפרה אחת (כאן הסיפרה 1), היא 0. הוא הדין, כמובן, כלפי כל מספר יסודי אחר; למשל לגבי השברים העשרוניים. מסקנה זו כלולה במשפטו המפתיע של בורל הקובע (למשל, כלפי המספר היסודי 2): ההסתברות לכך, כי בשבר דואלי יתכנס היחס $\frac{p}{n}$ אל $\frac{1}{2}$, אם p הוא מספר האפסים בין n הספרות הראשונות, שוה ל 1. לקבוצת כל שאר השברים הדואליים יש אפוא המידה 0; ביניהם נמצאים גם אלה שלגביהם אין היחס $\frac{p}{n}$ מתכנס אל שום גבול. בצורה פחות מדוייקת יש לבטא זאת כך: „כמעט בכל״ שבר דואלי יש „באופן אַסימפּטוטי״ אותו מספר של אפסים ושל יחידות.

הקבוצה C, שהוכנסה למתימטיקה בפעם הראשונה ע״י סמית[1] ואחרי כך ע״י קנטור[2], משמשת לתפקידים חשובים שונים. קל לשנותה (למשל ע״י החלפת 3 במספר אחר) ולהכלילה, בפרט גם בצורה שמידתה תהיה חיובית ולא אפס. כאן הצגנוה רק כדי להראות בעליל, שפעולות גיאומטריות פשוטות למדי מביאות אותנו לידי מקרה שבו בעית „האורך״ או „המידה״, אפילו בממד אחד, אינה קלה בשום פנים.

הקשר הישר בין קבוצה מן הסוג של C לבין קבוצת כל השברים העשרוניים או הדואליים מתואר במלואים לחלק החמישי, מספר ח).

אחרי רדתנו משני ממדים לממד אחד, נעלה עתה לשלשה ממדים. יתברר שמעבר זה גורר אחריו לא רק שינוי כמותי כי אם גם איכותי במובנים אחדים: בעיות, שהן פשוטות באופן יחסי במישור, אינן ניתנות לפתרון כל עיקר במרחב. אמנם גם כאן לא נוכל להביא כל ההוכחות; אך בצורה פשוטה למדי אפשר לתת בירור לעצם המצב.

בחלקו הראשון של סעיף זה, בדברנו על תחומים במישור המוגבלים ע״י ישרים (מצולעים, ובפרט משולשים), התברר שאמנם לא כל שני תחומים, שלהם מיוחס אותו השטח, ניתנים להפרדה למספר סופי של משולשים חופפים; ברם אפשר להוסיף עליהם משולשים חופפים במספר סופי, באופן ששני הסכומים ניתנים להפרדה כנ״ל.

בעברנו למרחב התלת־ממדי נשים במקום התחום המישורי „הפשוט ביותר״, הקבוע ע״י שלש נקודות שאינן חלות בקו ישר אחד, דהיינו משולש, תחום מרחבי (גוף) פשוט ביותר; כלומר, תחום קבוע ע״י ארבע נקודות שאינן חלות במישור

1. H. J. St. Smith ב*Proceed. of the London Mathem. Society*, סידרה ראשונה, כרך 6 (1875)

2. עיין *Mathem. Annalen*, כרך 21 (1883), עמ׳ 590.

אחד, ומוגבל ע״י ארבעת המישורים (הפֵּאוֹת) המקשרים שלש שלש מתוך ארבע הנקודות הנתונות: הוא ארבעון (פיראמידה בעלת בסיס משולש, טֶטראהֶדרון), כלומר, פֵּאוֹן בעל ארבע פיאות[1]. אפשר להפריד כל פיאון למספר סופי של ארבעונים. לכן יש להגדיר, כמו במישור, כשווי־הפרדה שני פיאונים שאפשר להפרידם למספר סופי של ארבעונים, באופן שלכל ארבעון המהווה חלק של הפיאון האחד יותאם ארבעון חופף מתוך הפיאון השני לפי התאמה חד־חד־ערכית. מגמתנו הטבעית תהיה לפרש את שויון־הנפח בין שני פיאונים כאפשרות להוסיף על כל פיאון פיאונים חופפים־בהתאמה במספר סופי, באופן ששני הפיאונים המתקבלים כסכומים יהיו שווי־הפרדה.[2] (אם אפשרות זו קיימת, יהיו הפיאונים שווי־נפח במובן הרגיל.)

כאמור ב §§1 ו 2, עסקו וטרחו כבר עמי המזרח, ואחריהם היוונים, בקביעת הנפח של פירמידה, למשל של ארבעון. הדרך הרצויה תהיה לצאת מנפחה של קוביה (החזקה השלישית של אורך המקצוע), או של תיבה (מכפלת ארכיהם של שלשת המקצועות), ולהוכיח בדרך אלמנטרית, מתאימה לזו שבמישור (משולש), שנפח הארבעון שוה לשליש המכפלה של שטח הבסיס בגובה הארבעון. אמנם אצל אבקלידס יש הוכחה מדוייקת למשפט הקובע, שנפחי ארבעונים בעלי גובה שוה מתיחסים כשטחי בסיסיהם. אך ההוכחה אינה אלמנטרית אלא מסתמכת על תהליכי־גבול (אֶכסהוסטיה). עברו מאות ואף אלפי שנים; בתחילת המאה ה 19 דרש גאוס במפגיע להוכיח את המשפט הנ״ל של אבקלידס בדרך אלמנטרית. הילברט חזר על הענין בשנת 1900 בהרצאתו על „בעיות המתימטיקה״, אמנם בצורת ההשערה החפוכה: שאי אפשר לבצע את הדבר; בשלישית מן הבעיות הללו[3] הציג במפורש את הדרישה לציין שני ארבעונים בעלי אותו שטח־הבסיס ואותו הגובה, שאי אפשר לא רק להפרידם לארבעונים חופפים אלא אף להשלימם ע״י הוספת ארבעונים חופפים לשני פיאונים שווי־הפרדה.

והנה מיד אחרי הרצאתו הצליח אחד מתלמידיו של הילברט, דין[4], לפתור

1. „פיאון״ הוא המושג המתאים למושג המישורי „מצולע״; בפרט מתאים „ארבעון״ למושג „משולש״. השם הלועזי נגזר מהמלים היווניות $\tau\acute{\varepsilon}\tau\tau\alpha\rho\alpha = 4$, $\H{\varepsilon}\delta\rho\alpha =$ מושב.

2. באמת אפשר להצליח בדרך זו — ללא שימוש באכסיומת ארכימידס — אם דנים לא באילו פיאונים שהם אלא במקבילונים בלבד. החבדל הגיאומטרי בין המישור למרחב טמון בזה, שאפשר להפוך כל משולש ע״י „העברת הראש״ (עיין בציור 38 במלואים) למקבילית, אבל אין תהליך אנלוגי לגבי הארבעון במרחב.

3. על הראשונה מבין „הבעיות״ דובר בעמ׳ 43.

4. M. Dehn. עיין *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen*, Math.-Phys. Kl., 1900 וכן *Math. Annalen*, כרך 55, 1902. השוה גם B. Kagan באותו כתב־עת, כרך 57, 1903.

את הבעיה הנ"ל ולהראות בזה שאי־אפשר לבסס את תורת התכולה במרחב לפי העקרונות המבססים אותה במישור. (הכוונה ליצירים המוגבלים באופן קווי; כלומר, ע"י ישרים או מישורים.) שוויון הנפח מתלכד עם אפשרות ההשלמה לפיאונים שווי־הפרדה רק בתנאים מיוחדים לגבי פינותיהם (הזוויות המרחביות בקדקדים). כבר במקרה הפשוט של קוביה וארבעון בעל אותו הנפח אין מתקיימים תנאים אלה. יש להוסיף שאי אפשר להשיג את המטרה הרצויה במרחב אפילו מתוך שימוש באכסיומת ארכימידס.

כדי לבסס את תורת הנפח לגבי פיאונים נחוצים אפוא אמצעים לא־אלמנטריים מן הסוג שאבקלידס השתמש בהם. משמעותו של דבר היא להגדיר שני פיאונים כשווי־נפח אם אפשר להוכיח, בעזרת הפרדה והשלמה כנ"ל, שהפרש הנפחים קטן מכל מספר קבוע מראש. כאן מופיע מושג הגבול. לפי שיטה זו אפשר לבסס את התורה כולה, ובפרט להוכיח שנפחו של ארבעון שוה לנפחו של מקבילון בעל שטח־בסיס שוה ושליש הגובה. אמנם תישאר פתוחה השאלה אם אפשר לבסס ביסוס אלמנטרי את תורת הנפח בדרך אחרת, שלא בעזרת הפרדה והשלמה.

באשר לדרך ביצועו של ביסוס כנ"ל לפי תהליך גבולי, נעיר קודם כל: בהתאימנו מידות־נפח לפיאונים, ולגופים בדרך כלל, נדרוש גם כאן שיתמלאו התנאים הבאים: לפיאון שהוא חלק־ממש של פיאון שני תותאם מידת־נפח קטנה ממידת השני; מידת פיאון המתואר כסכום פיאונים במספר סופי, שוה לסכום מידותיהם של חלקים אלה; לפיאונים חופפים יש מידה שוה, וכן לפיאונים המועברים זה אל זה בעזרת השתקפות. אם נוסיף על כך, שלכל פיאון תהיה מידה (חיובית), וכי מידת הקוביה שצלעה 1 תהיה גם היא 1, לא יקשה להוכיח שתי תכונות אלו:

א) שנפחה של תיבה שוה למכפלת שלשת מקצועותיה;

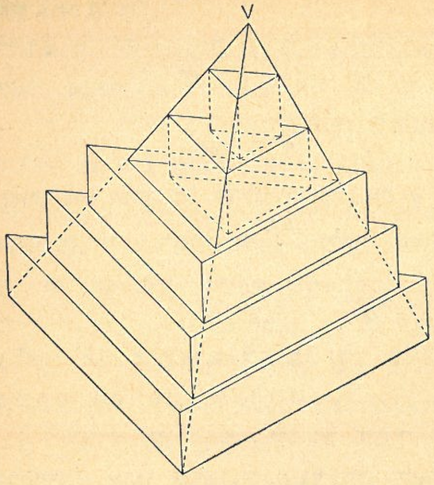
ב) שנפחה של מנסרה ישרת־זוית שוה למכפלה של בסיס המנסרה וגבהה.

אחרי זה נגש אל הבעיה של נפח הפירמידה; מכיון שאין הבדל בקושי אם בסיס הפירמידה משולש (מקרה הארבעון) או איזה מצולע שהוא[1], נדון מיד במקרה הכללי. לשם פשטות נניח, שהֵיטל ראשה של הפירמידה על מישור הבסיס – כלומר: עֲקב האנך המורד מראש הפירמידה על בסיסה – יימצא בפנים מצולע־הבסיס (או באחת מצלעותיו); קל להשתחרר אחרי כך מהנחה זו.

נסמן ב h את גובה הפירמידה וב V את ראשה, ונמתח מישור מקביל למישור הבסיס ברוחק x מ V. המישור חותך את פני הפירמידה

1. נניח רק שאין למצולע „פינה קמורה", כלומר זווית פנימית הגדולה מ 180^0; וכן שאין לו צלעות חודרות זו לתוך זו.

במצולע דומה למצולע־הבסיס, והיחס בין צלעות מתאימות שוה ל $\frac{x}{h}$. לכן, אם שטחי שני המצולעים ההם יסומנו ב A_x וב A, קיימת כידוע המתכוֹנת $A_x : A = x^2 : h^2$.



ציור 17

אם נחלק עתה את הגובה למספר איזה שהוא n של חלקים שוים (עיין בציור 17) ונמתח דרך נקודות־חלוקה מישורים מקבילים למישור הבסיס, נקבל, בסמננו את שטחי המצולעים השונים (המתקבלים כחתכים של המישורים הללו בפירמידה) ב $A_1, A_2, \ldots, A_n = A$, את השויונות

$$A_1 = A \cdot \left(\frac{h^2}{n^2} : h^2\right) = \frac{A}{n^2} \cdot 1^2,\ A_2 = \frac{A}{n^2} \cdot 2^2, \ldots, A_n = \frac{A}{n^2} \cdot n^2.$$

הבה נקח את המצולעים בעלי השטחים A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ כבסיסים למנסרות בעלות הגובה $\frac{h}{n}$, ובכל מקרה לשתי מנסרות: אחת למעלה (עיין בציור) הבולטת מחוץ לפירמידה ואחת למטה החסומה פנימה[1]. בצרפנו את המנסרות מכל סוג לחוד, נקבל שני גופים בנויים שכבות־שכבות, שאחד מהם מקיף את הפירמידה והשני מוקף על ידיה.

נסמן ב $\overline{I}$ ו $\underline{I}$ את נפחי שני הגופים האלה וב I את נפחה המבוקש של הפירמידה; בהתאם לתהליך הידוע בשני ממדים, למשל לגבי שטחו של עיגול, נקבל (השוה התנאי הראשון שבעמ' 214):

$$\underline{I} < I < \overline{I}.$$

והנה לפי התנאים דלעיל (עמ' 214) והנוסחה לנפחה של מנסרה (ב) שם) קיימים היחסים:

$$\underline{I} = \frac{h}{n} \cdot \frac{A}{n^2}(0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2),\quad \overline{I} = \frac{h}{n} \cdot \frac{A}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

מאידך מוכיחים בתורת־המספרים את הנוסחה[2]

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. לעליונה מבין המנסרות הבנויות למטה יש שטח־הבסיס 0, ולכן מתאפס גם הנפח.

2. נוסחה זו מוצאת את הוכחתה הטבעית בתורת „הטורים החשבוניים מן הסדר השני". הואיל ואין כאן המקום להאריך, נסתפק בהוכחת (אימות) הנוסחה לפי שיטת האינדוקציה השלימה. הנוסחה

לכן קיים:

$$\underline{\mathrm{I}}=\frac{hA}{6n^3}(n-1)\,n\,(2n-1)=\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

$$\overline{\mathrm{I}}=\frac{hA}{6n^3}n(n+1)\,(2n+1)=\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

ועתה יבוא תורו של תהליך־הגבול: אם n יגדל במידה מספיקה, יתקרב כל אחד משני הביטויים האלה אל $\frac{hA}{3}$, כלומר (השוה I, פרק י"א)

$$\lim_{n\to\infty}\underline{\mathrm{I}}=\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{I}}=\frac{hA}{3}.$$

עלינו ליחס אפוא לפירמידה כמידת־נפחה את שליש המכפלה משטח־בסיסה ומגבהה.

הקורא הזוכר מה שכתוב בכרך הראשון על מושג הסֶכם (האינטגרל המסויים), מבין בודאי שפה נעשתה כלאחר־יד אינטגרציה. ואמנם בדרך כלל שייכות ההגדרה והקביעה לנפחו של גוף המוגבל ע"י משטחים, כגון מישור, פני כדור או אליפסוֹאיד או היפרבוֹלוֹאיד וכו׳, לחשבון האינטגרלי, ואין אלה תפקידים פשוטים כל עיקר. תפקיד מסובך עוד יותר של החשבון האינפיניטֶסימלי הוא להגדיר ולקבוע מידות־שטח לפניהם של משטחים עקומים. כל עוד נרצה להימנע משימוש מפורש בחשבון האינטגרלי, ניטיב להסתמך על עקרונו של Cavalieri האומר:

> אם לשני גופים חסומים יש התכונה „לגבי כל חתכי הגופים עם מישורים, שכולם מקבילים לאותו המישור, שוים תמיד שטחי החתכים «באותו הגובה»", הרי הגופים הם בעלי אותו הנפח.

קאבאליארי ביטא את עקרונו בשנת 1635. אך באופן היסטורי לא היה בכך משום חידוש, שכן הוא הוא העקרון ששימש יסוד לשיטתו האינפיניטסימלית של ארכימידס (השוה בעמ׳ 167), ושעליו סמכו גם הירוֹן ואחרים מתקופת היוונים. יש לשער שהדברים הגיעו בצנורות ידועים אל חוקרי המאה

נכונה היא כלפי $n=1$, שהרי $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1^2$. נניח שהיא נכונה כלפי $n=k$, ז"א שקיים

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)\,(2k+1)}{6}.$$

לפי זה נקבל

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)\,(2k+1)}{6}+$$

$$+(k+1)^2=(k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}=$$

$$=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}=\frac{(k+1)\,(k+2)\,(2k+3)}{6};$$

והרי זוהי הנוסחה הטעונה הוכחה כלפי $n=k+1$, מש"ל.

ה17, ואז התפתחו לאחד הגורמים להמצאת החשבון האינטגרלי. ואמנם אין דרך מדוייקת לביסוס העקרון הנ"ל אלא בעזרת האינטגרל. המקרה הפשוט ביותר, הן להסברת העקרון הן להוכחתו, הוא זה שבו הולכים וגדלים, או קטנים, שטחי החתכים כגדול הגובה, כדוגמת הפירמידה (עיין בציור 17).

נסיים תיאור זה בהצביענו על הבחנה מסוג אחר לגמרי בין שני ממדים לשלשה, בתחום השאלות שלפנינו. בעמ׳ 206 דובר על אי־האפשרות לפתור את בעית־המידה לגבי קבוצות־נקודות במרחב בעל איזה מספר שהוא של ממדים, אם על המידה למלא את התנאים א) — ג) שפורשו שם. אכן הוויתור על התנאי ג), דהיינו על „חיבוריות" המידה כלפי סידרה של מחוברים, מאפשר פתרון לבעיה, אם מספר הממדים אינו עולה על 2 (עמ׳ 204); כלומר, בישר ובמישור. לעומת זאת הראה האוסדורף בשנת 1914[1] להפתעת העולם המתימטי, שבמרחב התלת־ממדי, וכל שכן במרחבים העולים עליו, אין פתרון כללי לבעית המידה אפילו אם דורשים את התנאים א) וב) בלבד: לאמור, אם דורשים חיבוריות רק כלפי מספר סופי של מחוברים. הואיל ולפי ההסתכלות ודאי שאין לוותר על דרישה זו, מביע משפטו זה של האוסדורף את המסקנה: במרחב המושג של קבוצת־נקודות שרירותית הוא מסובך במידה כזו עד שאין אפשרות להגדיר כלפיו מושג־מידה המתקבל על הדעת. האוסדורף ביצע את הוכחתו בבנותו חפיפה של שליש פני־כדור על חצי פני־הכדור. ביֶתר דיוק: אפשר להפריד את פניו K של כדור לארבע קבוצות A, B, C, Q, שהאחרונה מהן ניתנת להימנוֹת, באופן ש A חופפת הן על B הן על C הן על $B+C$[2]. לא יקשה להראות שמידתה של קבוצה הניתנת להימנות היא על כל פנים 0. לכן, הואיל ולקבוצות חופפות יש על־פי א) אותה המידה, קיימים לפי ב), אם $m(N)$ מסמן את מידת הקבוצה N, היחסים הבאים:

$$m(K)=m(A)+m(B)+m(C)=3\cdot m(A)$$

$$=m(A)+m(B+C)=2\cdot m(A).$$

הואיל ו $m(K)$, ולכן $m(A)$, שונה מ 0, הגענו לידי סתירה. — האוסדורף מוכיח את חפיפוּת הקבוצות הנ"ל בעזרת סיבובים סביב צירי־סיבוּב, הנבחרים באופן מתאים. (גם הוכחה זו משתמשת בעקרון־הבחירה.)

מסקנתו המפתעת של האוסדורף עוררה את הרושם כאילו עומד המרחב

---

1. *Mathem. Annalen*, כרך 75, עמ׳ 428; Grundzüge der Mengenlehre, עמ׳ 469. הכללה מרחיבה למסקנת האוסדורף נתנו, על־פי מהלך המחשבה שבמשפט־האקויוָלנטיות (עמ׳ 129), S. Banach ו A. Tarski בכרך 6 של ה *Fundamenta Mathem.* (1923).

2. ההוכחה באה להראות שהגדרה הממלאת את התנאים הנדונים למידה (תכולה) במרחב התלת־ממדי — ולא כל שכן במרחב בעל יותר ממדים — אינה אפשרית. אילו היתה אפשרית, הרי היתה אפשרית גם הגדרה למידה על פני הכדור; לשם כך די להתאים לקבוצה על פני הכדור, כמידתה, את נפחו של הגוף החרוטי הנקבע ע"י הקבוצה ומרכז הכדור.

להפוך עורו פתאום כאשר נעבור משני ממדים לשלשה. ברם פון נוימן[1] הראה במחקר מעמיק, שאין הדבר תלוי באפייו הגיאומטרי של המרחב דוקא כי אם בתכונה מסויימת של חבורת הסיבובים כנגד המרחבים השונים. כאן מתגלה במקרה פרוט הקשר האמיץ שבין הגיאומטריה לתורת־החבורות (אפילו לתורת החבורות המופשטות; עיין I, 99); קשר, שלאפייו ולתוצאותיו הרב־גווניות מוקדש הפרק הבא בעיקרו.

יצאנו בראשיתו של סעיף זה מן המושגים והמשפטים הפשוטים ביותר בדבר אורך ושטח, הנלמדים בבית הספר, ושכל אחד משתמש בהם בחיי יום־יום — והגענו בדרך טבעית, מתוך ניתוח ההנחות הקודמות ומתוך הכללה בכוונים שונים, לבעיות שבהן עסוקים טובי החוקרים בדורנו ושקבעו להן מקום מרכזי במחקר המתימטי החדיש. המסקנות שהוזכרו כאן מציינות את הגבולות המוחלטים להכללה ואת ההבדלים הטבעיים בין מרחבים שונים, כגון בין המישור לבין המרחב התלת־ממדי. בפרט ראינו כיצד הופיעו כבר לפני ארבעת אלפי שנים אצל עמי המזרח בעיות מסוג זה, שאך בדורנו או בדור הקודם מצאו את פתרונן המלא. בגלל זה הוקדש לשאלות אלו, עם היותן פרוטות מהשקפת הגיאומטריה בכלל, מקום נרחב בפרק זה הדן בהתפתחות הגיאומטריה מימי קדם עד עתה.

פרק ששי: סוגי־גיאומטריה שונים באספקלריה של תורת השמורות והחבורות.

§ 1. סקירה כללית על הצגת הבעיה ופתרונה. נקודות לא־אמיתיות ועקרון הדואליות.

בפרק הקודם, בעיקר ב § 3, הכנסנו מיון מסויים לגיאומטריה לפי השיטות השונות שבהן יש לבנותה; בפרק זה יופיע מיון אחר, המבחין בין גיאומטריות שונות על־פי תכנן; דהיינו, על־פי הנושאים המופיעים בהן. הסקירה המכינה שבסעיף זה היא כללית והסתכלותית.

כל אחד יודע מהו תַּרשים־יסוד של בנין (בית, מגדל וכו'), שהאדריכל משתמש בו כדי לתכן את תכניתו ולהסבירה לאחרים. הכוונה לציור מישורי המתקבל ע"י הטלה במקבילים המאונכים למישור־היסוד של הבנין, או גם במקבילים שאינם מאונכים; הואיל ואין הבדל זה משפיע על הרעיונות הבאים, יוכל הקורא להתכוון, לשם נוחיותו, להטלה מקבילה מאונכת. אם, למשל,

1. J. von Neumann: Zur allgemeinen Theorie des Masses. *Fundamenta Mathem.*, vol. 13 (1929). השוה גם A. P. Morse באותו כתב־עת, כרך 36 (1949).

גג הבית הוא מישורי ואפקי (שטוח), נקבל ע"י ההטלה[1] העתק חופף לצורת הגג במישור־היסוד. ברם אם הגג, כנהוג בכמה ארצות, מורכב הוא משני מישורים משופעים הנחתכים למעלה בקו ישר אפקי, לא יהיה ההעתק חופף. נניח, למשל, ששתי צלעותיו האפקיות התחתונות של הגג מקבילות הן ותרשים־היסוד הוא בצורת מלבן; במקרה זה הרוחק בין קו החיתוך הנ"ל לבין כל אחת מצלעות הגג המקבילות גדול הוא מן הרוחק בין הישרים המתאימים להם בתרשים.

נסתכל במקרה שלישי לצורת הגג; שיהיה מעין מגדל, מוגבל ע"י שלשה מישורים הנחתכים בנקודה אחת (ראש הגג) שבה נפגשים המישורים כהיפגש שלש פיאות של קוביה באחד מקדקדיה — באופן שתיווצרנה באותה פינה שלש זוויות ישרות בין המקצועות. ברור כי ההטלה במקבילים מעתיקה זויות אלו במישור ההיטל לא כישרות אלא כקהות; הרי שם הן יוצרות יחד זווית מלאה, ולפיכך כל אחת היא בת 120 מעלה. ריבוע או איזה מלבן שהוא בפיאות המגדל יועתק בדרך כלל כמַקבילית משופעת — אך על־כל־פנים כמקבילית. כללו של דבר: כל זוג של מקבילים בגג, כלפי כל אחת מצורות־הגג הנ"ל, יופיע בתרשים שוב כזוג של מקבילים, אף כי לא בעל אותו הרוחק בין הישרים.

הקורא יודע היטב צורתה של אליפסה; אולם כדאי שיזכור קצת גם את צורתן של פראבולה והיפֶּרבולה, שלהם נמצאים ציורים בכרך הראשון (עמ' 241, ציור 25; עמ' 281, ציור 44). נניח עתה שבגג נמצא צוהר (חלון) בצורת מעגל כדי להחדיר אור למטה. אם הגג הוא מישורי ואפקי, יועתק הצוהר בתרשים שוב בצורת מעגל (חופף על המקור) — תמיד מתוך ההנחה שנשתמש במקבילים המאונכים למישור התרשים. אולם במקרה כללי יותר — אם המקבילים אינם מאונכים, או אם הם מאונכים אך מישור הגג המכיל את הצוהר אינו אפקי אלא משופע — יופיע הצוהר בתרשים בצורת אליפסה. וכן הדבר גם אם הצוהר עצמו הוא אֶליפטי ולא מעגלי, אלא שהאליפסות אינן חופפות ואף לא „דומות" בדרך כלל. לא יקשה לראות שגם במקרה כללי כזה תועתק פראבולה שוב כפראבולה, והיפרבולה כהיפרבולה, אך ההעתק לא יהיה „דומה" למקור המועתק.

נניח עתה שעל הגג המשופע מונח קנה־מידה שבו חרוט כל ס"מ בצורת תג. ההעתקהִ בעזרת מקבילים תתן גם בתרשים מעין קנה־מידה, באשר הרוחק בין כל תג חרוט לבין שכנו שוה תמיד — רק שבדרך־כלל רוחק זה אינו ס"מ דוקא כמו במקור. הסיבה לכך היא היא שגרמה לעיל להפיכת מעגל לאליפסה. אך העובדה שרחקים שוים יועתקו שוב לרחקים שוים, גוררת אחריה מסקנה חשובה: עם השתנות הרוחק עצמו לא ישתנה היחס בין שני רחקים. לאמור: אם תהיינה A, B, C אלו נקודות שהן בישר אחד בגג, ואם A', B', C' הן תמונותיהן בתרשים, שונה אמנם בדרך־כלל הרוחק $\overline{A'B'}$ מהרוחק $\overline{AB}$, אולם

1. הטלה (היטל) היא פירוט למושג המקיף יותר של העתקה (העתק), או של העברה.

היחס (המנה) $\overline{A'C'}:\overline{B'C'}$ ישווה ליחס $\overline{AC}:\overline{BC}$ בין רחקי המקורות [1]. בקיצור: יחסם של שני קטעים באותו הישר נשמר בהעתקה מסוג זה; ברם לא היחס בין קטעים בעלי כוונים שונים, כפי שמראה הפיכת מעגל לאליפסה. נציין עוד שבהישנות התהליך לא יתחדש כלום. כלומר: אם נעתיק את התרשים שוב בעזרת מקבילים, לא נבטל מאומה מן התכונות שנשארו אחרי ההעתקה הקודמת.

בגיאומטריה האלמנטרית כפי שהיא נלמדת בבית הספר, מבדילים אנו בהקפדה בין מלבן למקבילית כללית ובין מעגל לאליפסה. ברם לפי התהליך שלפנינו מתעוררת השאלה: מה הן תכונותיהם של היצירים השונים (במישור [2]) הנשמרות – כלומר, שאינן משתנות – כלפי כל העתקה מן הסוג הנ"ל? הנסיונות דלעיל ממציאים לנו תשובה בצורה הבאה: עלינו להוציא מן הגיאומטריה האלמנטרית [3] את כל מה שמסתמך על זווית ישרה (ולכן ריבוע ומלבן), מעגלים וכו' ולהשאיר מושגים כמו יחסי־קטעים, מקבילים, מקבילית, אליפסה (כולל מעגל), פראבולה, היפרבולה. באשר למכשירים באותה גיאומטריה, נשאיר כמובן את הסרגל כמכשיר למשיכת קוים ישרים; אך ב„סולם" שבקנה־מידה אין להשתמש לשם מדידה מוחלטת לארכו של קטע כי אם רק לשם השוואת קטעים שבאותו ישר. עלינו לוותר על המחוגה; לעומת זאת מותר להשתמש ב„סרגל־מקבילים", דהיינו מכשיר המאפשר שרטוט מקבילים ברחקים שונים. כללו של דבר: ההעתקה הנ"ל בעזרת מקבילים משמשת מעין נפה, המוציאה את תכונות המידה המוחלטת והאורתוגונליות (ישרות־הזווית), והקולטת את יתר התכונות הגיאומטריות כגון הקבלה, חילת נקודות בקו ישר ויחסי־הקטעים שבו.

תהליך זה של ניפוי נוצר ע"י סוג־העתקה מסויים: העתקה בעזרת מקבילים, המכונה גם „הטלה במקבילים". אולם לא כל העתקה תגרור אחריה ניפוי זה דוקא. אפשר להעתיק לא בעזרת ישרים מקבילים אלא בעזרת קרניים היוצאות מנקודה אחת, שהיא „מרכז־ההטלה"; במקרה זה מדברים על „הטלה מרכזית". הדוגמה הקרובה לנו ביותר, ולכאורה הפשוטה ביותר, היא ההעתקה בעזרת העין, כלומר תהליך הראייה. אולם תהליך זה אינו משמש דוגמה מוצלחת, מפני שאנו מערבבים בו, מתוך היסח הדעת ובעל כרחנו, גורמים פסיכולוגיים וסובייקטיביים ועניני הרגל; לכן יש

1. זוהי מסקנה מידית מהפיכה רחקים שוים לרחקים שוים. אם ההעתקה גוררת כיפול כל רוחק בגורם הקבוע k הרי מתקבל $\overline{A'C'}:\overline{B'C'}=(k\cdot\overline{AC}):(k\cdot\overline{BC})=\overline{AC}:\overline{BC}$.

2. לשם פשטות בלבד מצטמצמים אנו במישור. לעמקו של דבר, יפה כחם של כל הרעיונות האלה גם במרחב התלת־ממדי.

3. ארכו של קטע אינו חשוב אפילו בגיאומטריה האלמנטרית, שבה אין מבדילים בדרך־כלל בין ריבועים בעלי צלעות שונות, או בין משולשים דומים (עיין להלן).

להעדיף תהליך דומה לו, הנתון למבחן אובייקטיבי, הלא הוא ההעתקה בעזרת עדשת המצלמה. הבה ננתח את תוצאת ההעתקה (ההטלה) על־ידי הצילום! מטעם שנרחיב עליו את הדיבור בסוף הסעיף הזה, אין כאן הבדל בדבר אם נצלם במישרין את הגג וכו' שאליו נתכוון או את תרשים־היסוד שיצרנו לו בצעד הקודם. כמו כן לא נדרוש שמישור הצילום יקביל למישור המצולם (אם עצם זה הוא מישורי, כפי שנניח לשם פשטות); רשאים שני המישורים להיות נטויים (מלוכסנים) זה לזה.

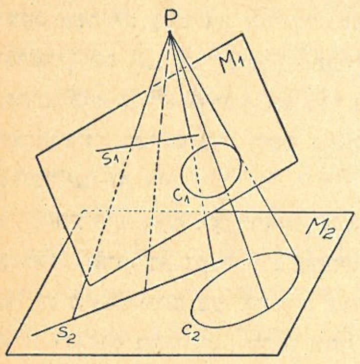
החידוש המפתיע הראשון הוא, שבצלמנו קוים מקבילים, למשל פסי רכבת במסילה ישרה, לא נקבל שוב מקבילים אלא ישרים ההולכים ומתקרבים זה לזה. (כך גם נראה אותם בעינינו, רק שההרגל משיאנו במקרה זה עפ"י רוב להרגיש כאילו ראינום מקבילים.) מכאן אחד הגורמים לטענה השגורה „קוים מקבילים נחתכים באינסוף" – טענה שכשלעצמה אינה אלא שטות; אך אפשר להעניק לה משמעות כמבואר ב § 3. מאידך יועתק כל קו ישר לקו ישר ע"י הצילום. לפיכך תועבר מקבילית לאיזה מרובע שהוא. בצלמנו מעגל – או גם איזו אליפסה שהיא – תהיה תמונתה תלויה במקום בו נעמיד את המצלמה (כשהעדשה מאונכת למישור המעגל): מחוץ למעגל, בפנים, או בקו־המעגל עצמו. לא יקשה ביותר להווכח, שבמקרה הראשון נקבל כתמונה אליפסה, במקרה השני – קטע של היפרבולה, ובשלישי פראבולה [1]. כמו־כן אפשר לצלם, למשל, היפרבולה באופן שהתמונה תהיה היפרבולית או אליפטית או פראבולית.

אם נצלם קנה־מידה שבו הרוחק בין תגי־החלוקה שוה, או ציור השקול כנגד זה (למשל שורת עמודים הנמצאים ברוחק שוה כל אחד משכנו, כגון עמודי טלגרף), הרי בצילום לא רק שלא יזדהה הרוחק בין שכנים עם הרוחק שבמקור, אלא הרוחק בין נקודות הקרובות למצלמה יצטלם כגדול מן הרוחק בין נקודות מרוחקות. לכן לא ישאר בהעתק (בצילום) אפילו היחס בין רחקי הנקודות A, B, C החלות בקו ישר, יחס שנשאר בערכו לעיל על־סמך הטלה במקבילים. ואולם, כפי שנבאר ונוכיח בפרוטרוט להלן (§ 3), ישתמר ערכו של היחס הכפול בין ארבע נקודות A, B, C, D שבקו ישר; לאמור: המנה המכילה במונה את יחס־הקטעים $\overline{AC}:\overline{BC}$ ובמכנה את יחס־הקטעים $\overline{AD}:\overline{BD}$.

עד כאן השתמשנו בדוגמת הצילום, שבו רגילים אנו כל כך, כדי להמחיש את ההטלה המרכזית. ברם אפשר כמובן להמחישה גם בדרך גיאומטרית טהורה,

1. הקורא יוכל להקל על עצמו את הבנת הדבר בחשבו על דוגמה אחרת, לא דרך הצילום: נציג בחדר אפל על־יד הקיר צלחת עגולה (או אליפטית) במצב אפקי ונאירנה בעזרת נר. אם עקב האנך מן הנר למישור הצלחת נמצא מחוץ לצלחת, יהיה צל הצלחת בקיר אליפטי; אך היפרבולי אם העקב בפנים הצלחת, ופראבולי אם האנך פוגע בשולי הצלחת.

והציור 18 יספיק כדי לבאר את עיקרי הדברים הנאמרים לעיל. (המישורים M_1 ו M_2 שבציור אינם צריכים להיות מקבילים זה לזה; מרכז ההטלה P לא יימצא, כמובן, באף אחד משני המישורים.) יצירים המתקבלים זה מזה ע״י הטלה מרכזית, כגון הישרים s_1 ו s_2, או המעגל c_1 והאליפסה c_2, נקראים „יצירים פֶּרְספֶּקטיביים".



ציור 18

בהשתמשנו במשל דלעיל נוכל לומר: אחרי שהוצאנו מקודם דרך נפה דקה למדי את תכונותיה „העדינות" של הגיאומטריה האלמנטרית, נשארו בידינו התכונות הנשמרות כנגד כל הטלה במקבילים. עתה הכנסנו את התכונות הנשארות לתוך כברה (הגסה מן הנפה), ובזה נוציא חלק מן התכונות שנשארו בפעם הראשונה, כגון ההקבלה, יחסי־קטעים, ההבדל בין שלושת הסוגים העיקריים של חֲתכי־חרוט (אליפסה, היפרבולה, פראבולה). בדרך זו קבלנו ג י א ו מ ט ר י ה ח ד ש ה המ כ י ל ה א ת ה ת כ ו נ ו ת ו ה מ ו ש ג י ם ש נ ק ל ט ו א פ י ל ו ב כ ב ר ה: ק ו י ש ר, ח ת ך־ח ר ו ט, ה י ח ס ה כ פ ו ל ב י ן א ר ב ע נ ק ו ד ו ת ב א ו ת ו ה י ש ר, וכו׳. גיאומטריה חדשה זו מכנים בשם ג י א ו מ ט ר י ה פ ר ו ֶי ק ט י ב י ת[1] (הֶ ט ל י ת), הואיל והיא דנה בתכונות היצירים הגיאומטריים שאינן משתנות מתוך איזו הטלה שהיא. לגיאומטריה הקודמת, המתקבלת מתוך הטלות במקבילים בלבד, קוראים בשם ג י א ו מ ט ר י ה אֲ פ י נ י ת[2] (או גיאומטרית־מקבילים); ואילו לגיאומטריה האלמנטרית הרגילה, שבה יושם לב לזוויות, למשל לזווית ישרה[3], קוראים בשם ג י א ו מ ט ר י ה אֶ ק ו ו י פ ו ר מ י ת[4] או אוֹרתוֹגוֹנלית (של זווית ישרה). היא שמה לב לאותן תכונות גיאומטריות הנשמרות כנגד כל העתקה ד ו מ ה, ובה יש אפוא להבדיל בין מעגל לאליפסה, אך לא בין שני מעגלים בעלי מחוגים שונים.

מסתבר שאפשר לחשוב על צעד נוסף בכוון זה. הלא בגיאומטריה האקוויפוֹרמית אין מבדילים בין משולשים דומים או בין מעגלים שונים. (לכן

---

1. projicere = לירות, להטיל.

2. המלה הרומית affinis ר״ל מְחֻתָּן, קרוב, מקביל. השם הוכנס ע״י Euler שהתכוון, כנראה, למשמעות של שמירת ק צ ו ת הישרים, כלומר נקודותיהם „הרחוקות לאינסוף" (finis = קצה). בכתיב העברי מוטב להשתמש בחטף־פתח.

3. קל להראות כי מתוך ההנחה, שהזווית ה י ש ר ה משתמרת, יוצא שכל זוית משתמרת בגדלה.

4. גיאומטריה של שויון־צורה; מן המלים הרומיות aequus = שוה ו forma. באשר לשם השני, לקוח הוא מהמלים היווניות $\grave{o}\rho\vartheta\acute{o}\varsigma$ = ישר, $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ = זוית.

היינו יכולים לכנותה גם בשם „גיאומטרית־הדמיון".) מאידך אפשר אף להבדיל בין שני יצירים דומים שאינם חופפים; לאמור: נוכל לשים לב ל א ר כ ו ש ל כ ל ק ט ע, ולהגיע בדרך זו ל ג י א ו מ ט ר י ה מֶ ט ר י ת (גיאומטרית־החפיפה). מבחינת הגיאומטריה כמדע אין ערך רב לצעד נוסף זה; מידתו של קטע היא ענין „גיאוֹדיטי" יותר מגיאומטרי. אמנם בקשר להבהרת היחסים בין הדרגות השונות לגיאומטריה נוח לשים לב גם לגיאומטריה המטרית. הצד השוה שבגיאומטריות המטרית והאֶקוויפוֹרמית הוא ששתיהן דנות ב ג ד ל י ם (ארכי־קטעים או שטחים וכו׳, זוויות); ואילו בגיאומטריה האפינית מופיעים רק י ח ס י ־ג ד ל י ם, ובגיאומטריה הפרוֹייקטיבית י ח ס י ם ב י ן יחסי־גדלים. לפי נוחיותנו נקח כדוגמה מדי פעם בפעם את הגיאומטריה האֶקויפורמית א ו המטרית.

כאן ישאל השואל: מה הן ההעברות (ההעתקות) שכלפיהן נשמרות אפילו תכונותיה של הגיאומטריה ה מ ט ר י ת? התשובה היא פשוטה ומובנת לכל קורא, אף אם לא שמע אותה במפורש בלמדו גיאומטריה: הן ה ת נ ו ע ו ת, במישור או במרחב. ע״י תנועה בעלמא יועבר כל יציר גיאומטרי ליציר חופף עליו, ובין יצירים חופפים אין אנו מבחינים בגיאומטריה, אף־על־פי שבחיים מֵטיבים אנו להבחין ביניהם (למשל בין תותח שברשות מדינת ישראל לתותח חופף בסוריה). העשירה בתכונות בין הגיאומטריות הנ״ל היא הגיאומטריה המטרית, והיקף ההעברות שלעומתה (כלומר, שכלפיהן נשמרות תכונות הגיאומטריה המטרית) הוא מוגבל באופן יחסי, בהצטמצמו בתנועות בלבד. צרה ממנה היא הגיאומטריה האֲפינית, שתכונותיה נשמרות לא רק כלפי התנועות כי אם גם כלפי ההטלות במקבילים. הדלה בתכנה בין הגיאומטריות דלעיל הלא היא הגיאומטריה הפרוֹייקטיבית, המכילה רק תכונות כלליות למדי של היצירים הגיאומטריים; בהתאם לכך מקיפה ביותר מערכת ההעברות שכלפיהן נשמרות תכונות הגיאומטריה הזאת: היא מערכת כ ל ההעתקות ההיטליות.

אפשר לחשוב על העברות כלליות עוד יותר, כגון אלו שאפשר לבצען כלפי יצירים עשויים מחומר גמיש לגמרי. בעזרתן אפשר להפוך אליפסה לכל עקום סגור אחר, ואפילו למלבן או למשולש. בהעברות כלליות אלו, שבהן יש תפקיד מכריע למושג ה ר צ י פ ו ת, נדון בפרק השביעי — בהתחשב עם אפייה השונה לחלוטין של הגיאומטריה הנוצרת בדרך זו ובחשיבות המכרעת שרכש לו המקצוע ההוא בזמן האחרון.

נשוב לבעית ה מ כ ש י ר י ם, המשמשים גם הם המחשה טובה לציון אפיין של הגיאומטריות השונות. בגיאומטריה המטרית משתמשים אנו, נוסף על סרגל רגיל וסרגל־מקבילים, במחוגה (או בזווית ישרה) ובקנה־מידה. בגיאומטריה האפינית נוכל לוותר על המחוגה (על הזווית הישרה), ובקנה־המידה

---

1. $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$ = מידה. מכאן גם השם ליחידת־האורך „מֶטר".

נשתמש לשם מדידתם של יחסי־קטעים בלבד. בגיאומטריה הפרוייקטיבית נוכל לוותר גם על סרגל־המקבילים, וקנה־המידה יאפשר לנו למדוד יחסים כפולים. אמרנו כאן „נוכל לוותר", שכן לא היתה כוונה לאסור את השימוש, למשל, בסרגל־מקבילים בגיאומטריה הפרוייקטיבית. יש אשר שימוש זה יהיה נוח, אולם אינו נחוץ. משל למה הדבר דומה? לדרכי התנועה ממקום למקום. ברצותנו בחופש תנועה שלם, במעבר לא רק בתוך יבשת אחת ומיבשת ליבשת אלא אף במחקרים מיטיאורולוגיים במעטה־האויר (האטמוספירה), לא נוכל להסתפק בנעלים ורכבות ואף לא באניות אלא נחוץ גם המטוס. בהסתפקנו בנסיעות על פני כדור הארץ נוכל לוותר על המטוס (עם היותו נוח גם כאן), ואם נצטמצם ביבשת אחת תהיה מיותרת גם האניה, ובעקרונו של דבר די בהליכה — כמו שבגיאומטריה הפרוייקטיבית מספיק בעקר הסרגל. (ב § 3 נרחיב את הדיבור על השאלה, אם אפשר לקבוע את היחס הכפול בין ארבע נקודות של ישר אחד בעזרת הסרגל בלבד, ללא שימוש בכל קנה־מידה.)

בהצטמצמנו לשם פשטות גם להלן בגיאומטריה מישורית, נשאל עתה מה הם היחסים הגיאומטריים היסודיים הקיימים בכל אחת מן הגיאומטריות; כלומר, היחסים שעליהם יש להעמיד את כל יחסי הגיאומטריה הנדונה בעזרת הגדרות מתאימות. מכיון שמכשירה של הגיאומטריה הפרוייקטיבית הוא הסרגל, המאפשר למשוך ישרים, אין לרשותנו כאן אלא היחס היסודי היחיד „נקודה חלה בקו ישר". (אפשר לבטאו גם בנוסח „ישר חל בנקודה", כלומר: עובר דרך הנקודה.) יחס זה נשמר בודאי בעברנו מן ה„מקור" לתצלום. (בעברנו מן המישור למרחב, נוסיף את שני היחסים „ישר חל במישור" ו„נקודה חלה במישור"; אפשר לוותר על אחד משניהם.) כמה מכריע ו„ראשוני" הוא יחס זה של „חילה" בין נקודה וישר, יתברר בֶּיתר שאת בהמשכו של פרק זה ובפרק השמיני (§ 4). בגיאומטריה האֲפינית יתווסף יחס ההקבלה („ישר מקביל לישר אחר") על יחס החילה, והגיאומטריה האֶקויפוֹרמית מוסיפה על שניהם את יחס האנכיות (האוֹרתוֹגוֹנליוּת) האומר „ישר מאונך לישר אחר"[1].

מטעמים פסיכולוגיים ודידַקטיים רגילים ללמד קודם כל את הגיאומטריה האקויפורמית ויורדים לגיאומטריות המצומצמות יותר, האפינית והפרוייקטיבית, דרך תהליכי הניפוי שתוארו לעיל. ואולם הדרך הטבעית והשיטתית היא העליה מן הכלל אל הפרט — כפי שעלינו גם בחלק הרביעי מן המושג הכללי של קבוצה־סתם למושגים הפרוטים של קבוצה סדורה וסדורה היטב. לפי זה יהיה

1. קנה־המידה הוא מכשיר המשמש כאן לשם נוחיות בלבד: כדי למנות כמה פעמים בוצעה פעולה יסודית ידועה. בזאת נדון להלן. על גורם הרציפות הנמצא בקנה־המידה דובר בפרק הששי של הכרך הראשון; השוה להלן, סוף הפרק השמיני. — מיחסי הסדר התעלמנו פה.

הגיוני הדבר לצאת מהגיאומטריה הפרוייקטיבית המבוססת על יחס החילה; לציין אחר כך, בין כל זוגות של שני ישרים, זוגות מסויימים כזוגות של „ישרים מקבילים"; ולהוסיף כצעד שלישי ציון זוגות מסויימים, בין זוגות הישרים הנחתכים, כזוגות של „ישרים מאונכים". זוהי הדרך המושלמת של בנית הגיאומטריה הסינתיטית.

עד כאן תואר בקווים כלליים הרעיון היסודי של מיון גיאומטריות וביסוסן שמוקדש לו פרק זה. הרעיון נתבסס בעיקר ע"י A. Cayley ו Felix Klein [1] ומילא תפקיד מרכזי בגישה הגיאומטרית במשך הרבע האחרון של המאה ה 19, עד שבמאה ה 20 הורכבו עליו רעיונות עמוקים עוד יותר. רעיונו הכללי של ביסוס זה גורר אחריו כמה רעיונות־לווי חשובים; עליהם נייחד עתה את הדיבור.

איש לא יטיל ספק בעקרון האומר, שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר אחד ויחיד שבו חלות הנקודות. אם נצטמצם גם להבא בגיאומטריה המישורית, מתקבל על הדעת שיש לתת שוויון־זכויות לנקודה ולישר. שכן, כאמור לעיל, הגיאומטריה הפרוייקטיבית מסתמכת על היחס היסודי של חילה בין נקודה וישר, ובתוך יחס זה אין זכות־בכורה לאחד משני האיברים הקשורים בו; לאמור, הוא יחס „סימטריי"[2]. באופן טבעי וכמעט הכרחי מתעוררת אפוא השאלה: הקובעים באמת גם כל שני ישרים שונים[3] נקודה אחת ויחידה שבה חלים הישרים (כלומר, שדרכה הם עוברים)? התשובה הקרובה להינתן תהיה: בדרך כלל כן, אך לא במקרה שמקבילים הם שני הישרים. אולם תשובה זו אינה נוחה, באותו המובן שבו לא מצאנו לנוח להגביל

1. דרך־המחשבה דלעיל מכונה בספרות המתימטית בשם „הפרוגרמה של אֶרְלַנגן" לפי ספרו הקטן של קליין, שהופיע ב Erlangen בשנת 1872 ותורגם לשפות רבות:

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.

פרק ששי זה מסתמך לעתים קרובות על השקפותיו ופרסומיו של קליין. השוה, מבין ספרים חדישים יותר, למשל:

O. Veblen and J. W. Young: Projective geometry. 1918.

T. E. Faulkner: Projective geometry. 1949. 136 pp.

L. Godeaux et O. Rozet: Leçons de géométrie projective. 2e éd. Liège 1952. 278 pp.

H. S. M. Coxeter: The real projective plane הספר האלמנטרי לגמרי (1949; 196 pp.) יוצא מבסיס אכסיומטי (עיין בפרק השמיני) לפי השיטה הסינתיטית, בהדגישו את מושג ההעברה ובהתקדמו בעיקר לפי הכוון של von Staudt. השיטה האנליטית מופיעה רק בחלקו האחרון של הספר.

2. על הסימטריה של יחס בין שני עצמים מתימטיים עיין I, 3 ו־72.

3. כמובן: ישרים באותו המישור. בהתאם להסכם שנדון בגיאומטריה מישורית, מיותר הדבר להדגיש זאת במיוחד.

באריתמיטיקה את החיסור למקרה שהמחוסר גדול מן המחַסר, או את החילוק למקרה שהמחולק הוא „כפולה" של המחלק. על כל פנים לא תוכל תשובה זו לספקנו כאשר נימצא בשטח הגיאומטריה הפרוייקטיבית, שבה אין „הקבלה" כל עיקר אלא כל זוגות של ישרים שקולים הם זה כנגד זה! לכאורה לפנינו מיצר שאין ממנו מוצא.

אך נזכור נא כי מצב דומה נוצר במתימטיקה לעתים קרובות, וכבר בלימודי בית הספר התיכון נתקל התלמיד בקשיים מסוג זה – אף כי אין שם הזדמנות לברר באופן שיטתי (פילוסופי, כביכול), איך רגיל המתימטיקן לחלץ עצמו מן המיצר. השיטה הכללית לכך נקראת בזמננו בשם שיטת העצמים האידיאליים; היא מכוונת לתת תוקף כללי למשפטים, שלכאורה יש לקבוע לגביהם „יוצאים מן הכלל" – תופעה שכיחה בדקדוק אך שנואה על המתימטיקן. (המונח „אידיאלי" מופיע בניגוד ל„ריאלי", כלומר: מציאותי, ממשי.) הכרנו לדעת שיטה זו כבר בפרק הרביעי של כרך הראשון, כשאי־האפשרות לחַסר או לחַלק באופן כללי בתחום המספרים הטבעיים הכריחה אותנו להכניס זוגות־מספרים שהתגלו כמספרים „השליליים" או „השבורים". דוגמה זו נראית אולי פשוטה מדי. לכן נבחר בנושא אלגברי, קשה קצת יותר, והוא פתירת המשוואה הריבועית (בעלת מקדמים רציונליים, או ממשיים): $ax^2 + bx + c = 0$.

במקרים רבים יש למשוואה כזו שני שרשים ממשיים: למשל יש למשוואה $x^2 + x - 12 = 0$ השרשים $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, ולמשוואה $x^2 - 2 = 0$ השרשים $x_1 = \sqrt{2}$ ו $x_2 = -\sqrt{2}$. אך במקרים אחרים, כגון $x^2 + 1 = 0$ או $x^2 + 2x + 5 = 0$, אין במציאות שורש ממשי. כדי „להציל" את המסקנה הרצויה שיש שרשים לכל משוואה אלגברית בעלת מעלה חיובית (השוה I, 183) ממציאים, נוסף על המספרים הממשיים „הריאליים", סוג חדש של מספרים „אידיאליים" המכונים מספרים דמיוניים או מרוכבים; אפשר להצדיקם „אחרי מעשה" בדרכים שונות המתוארות בפרק השביעי של הכרך הראשון. בעזרתם תקבלנה שתי המשוואות הנ"ל את השרשים $\pm\sqrt{-1}$ ו $-1 \pm 2\sqrt{-1}$.

על סוג אחר של „עצמים אידיאליים" דובר ב I, 48, כשהתברר שבתחומים של מספרים אלגבריים, בדרך כלל, אין פירוק חד־ערכי לגורמים ראשוניים; כדי להציל את המשפט על הפירוק החד־ערכי, מוסיפים על המספרים־ממש של השדה עוד מספרים „אידיאליים".

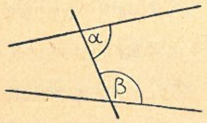
בדומה לכך נוסיף כאן על הנקודות „האמיתיות" שבהן נחתכים שני ישרים לא־מקבילים, עוד נקודות לא־אמיתיות[1] שבהן נחתכים שני מקבילים. רמז לכך, כמה נקודות לא־אמיתיות נחוצות לשם זה – לשון אחר:

1. סוג אחר של נקודות לא־אמיתיות יופיע ב § 4.

מתי יש לראות שתי נקודות לא־אמיתיות כשונות זו מזו – נקבל בשימנו לב לזה, שכשם שלשני ישרים לא־מקבילים יש נקודה משותפת, כן יש גם לשני ישרים מקבילים דבר משותף, והוא כוונם[1]. לפיכך נצא ידי חובתנו אם נראה את המונח „נקודה לא־אמיתית" כביטוי אחר, לא־רגיל אמנם אך מועיל לתפקידנו הנוכחי, תחת המונח „כוון". (מי שמתפלא על אפנת־דיבור כה מוזרה, יזכור נא את מימרתו של פוּאֶנְקָרֵה שהובאה ב I, 68: גבורתו של המתימטיקן, בניגוד קיצוני למשורר, היא בזה שהוא מסמן דברים שונים בשם אחד.) הואיל ויש לכל מערכת של ישרים מקבילים אותו הכוון, הרי משותפת לכל ישרי המערכת נקודה לא־אמיתית אחת ויחידה[2]. בעזרת נקודות אידיאליות אלה ניתן תוקף מוחלט, ללא יוצא מן הכלל, למשפט „לכל שני ישרים של המישור משותפת נקודה אחת".

על מה שנאמר כאן יש להוסיף, שהצורך להבחין בין נקודות אמיתיות ולא־אמיתיות קיים רק בגיאומטריה המטרית או האפינית, שבהן יש משמעות למושג ההקבלה. בגיאומטריה הפרוייקטיבית אין הפלייה בין שני סוגי הנקודות, והן נהנות מזכויות שוות. ואמנם אין בה גם מקום להפלייה בין הטלה ממרכז מסויים לבין הטלה במקבילים; שכן האחרונה אינה אלא הטלה מרכזית שמרכז־ההטלה שלה הוא נקודה לא־אמיתית.

עתה, בעזרת הנקודות הלא־אמיתיות, אפשר להעניק משמעות ידועה למימרה „מקבילים נחתכים באינסוף". שהרי שני ישרים, החותכים אותו ישר שלישי („החותך") בזוויות חד־צדדיות פנימיות α ו β שסכומן גדול רק במשהו מ 180^0 (ציור 19), חותכים זה את זה (בצד הנגדי לזוויות הנ"ל) ברוחק גדול מן החותך; לכן אפשר להצדיק, במובן הסתכלותי כביכול, את הנוהג לכנות את נקודתה האידיאלית של ישר גם בשם „הנקודה הרחוקה לאינסוף"; אמנם במקרה זה אין לומר שהיא נמצאת בכוון מסויים של הישר, ולכן יש לתאר את „הנקודה שבאינסוף" בשני הכוונים גם יחד, כאילו התחבר



ציור 19

1. אנו דנים כאן בישרים לא־מכוונים; כלומר, אנו מזַהים את שני הכוונים שאפשר לתתם לקו ישר נתון. — בכל הפרק הזה נסתמך על אכסיומת אבקלידס, שלפיה יש במישור כלפי כל ישר נתון מקביל אחד ויחיד דרך נקודה נתונה. בברירה אחרת ידובר בפרק השמיני, § 2.

2. אפשר אף לומר בפשטות: נקודה אידיאלית היא מערכת כל הישרים המקבילים לישר מסויים. הגדרה זו דומה בכמה מובנים להגדרת המספר האירציונלי או הממשי (פרק ששי של הכרך הראשון), כמערכת של אינסוף מספרים רציונליים, ועוד יותר דומה היא להגדרת העָצמה כמערכת כל הקבוצות האֶקויוָלנטיות (עמ' 40 של כרך זה).

בה הישר לקו סגור[1]. על־כל־פנים אין זו נקודה־ממש כי אם נקודה אידיאלית, כמבואר לעיל. מבחינה חשבונית מתאימה הנקודה האידיאלית בישר לתהליך־גבול (עיין בפרק י״א של הכרך הראשון); לפי הציור 19 ישאף הפסוק של נקודת־החיתוך לאינסוף. השוה ב § 3 (שעורים הומוגיניים).

בהתאם לכך יש למישור אינסוף נקודות לא־אמיתיות, כפי ריבוי הישרים העוברים דרך נקודה מסויימת בכל הכוונים האפשריים.

ננתח את הכנסת הנקודות הלא־אמיתיות גם באספקלריה פילוסופית, לפי תהליכי ההגדרה שבתורת־ההגיון. הפילוסופים[2] הכירו מזמן שעל־סמך תהליך־ההגדרה „הקלסי” לפי אריסטו בלבד אין להגיע לכל המושגים הדרושים למדע; יש צורך גם בגישה „פונקציונלית”, הקובעת מושג מתוך יחסיו אל מושגים אחרים. כך הוא המצב, למשל, לגבי הנקודה: ההסתכלות לא תוכל לעולם להגיע לנקודה המתימטית, הואיל ולהכרה־דרך־החושים ניתנים גופים בלבד ולא נקודות או קווים. מה שנוגע לנקודות האמיתיות, נראה בפרק השמיני (§ 4) כיצד מרשה השיטה האכסיומטית החדישה לתת „הגדרה שימושית” לנקודה ולשאר מושגיה הראשוניים של הגיאומטריה. ברם כאן רואים אנו את הנקודות האמיתיות כנתונות, ועלינו מוטל להגדיר את הנקודות הלא־אמיתיות. נבצע זאת, לא בבארנו נקודה לא־אמיתית מהי, אלא בפרטנו את היחסים הקיימים בין הנקודות הלא־אמיתיות לבין הנקודות והישרים האמיתיים; לשון אחר: בפרטנו מה אפשר לטעון לגבי נקודה לא־אמיתית. כך עשינו בתיאורים הקודמים, בפרט כשקבענו אימתי יש לשני ישרים נקודה לא־אמיתית משותפת: כאשר הישרים מקבילים! במידה רחבה מספקת קביעה זו אף את העקרון של „יציבות החוקים הפורמליים” (I, 70) הדורש, במקרה שלפנינו, שהנקודות הלא־אמיתיות תקיימנה יחסים מעין אלה הקיימים בין הנקודות האמיתיות לבין עצמן. אילו הענקנו לכל ישר שתי נקודות לא־אמיתיות (ולכל שני ישרים מקבילים אותן הנקודות, כפי שנתבאר לעיל), כי אז היו ממלאות שתי הנקודות הללו, ביחס למערכת כל הישרים המקבילים לישר מסויים, את התפקיד שממלאים שני הקטבים (של „צפון” ו„דרום”) בפני־כדור ביחס למערכת כל קווי־האורך. על־ידי כך היה מופר כלפי הנקודות הלא־אמיתיות העקרון הנוהג כלפי הנקודות האמיתיות: שכל

1. אין מקום להקשות: „למה תהיה לכל ישר נקודה לא־אמיתית אחת בלבד; הרי ההסתכלות מראה שנחוץ לתת לו שתים, כנגד שני כווני ההתרחקות האפשריים!” הכנסת האלמנטים האידיאליים, ובפרט האינסופיים, תלויה לא ב„אמת” אובייקטיבית כי אם בשרירות־לבנו, המודרכת ע״י הנוחיות, כלומר ע״י צרכי המדע. נוח הדבר לצרכי הגיאומטריה הפרוייקטיבית, כמבואר לעיל, לתת נקודה לא־אמיתית יחידה לכל ישר. (במקצועות מתימטיים אחרים נוחה יותר הסכמה אחרת.)

2. השוה הספרים שציינו בעמ' 39.

שתי נקודות קובעות ישר אחד ויחיד החַל בהן, או שכל שני ישרים שונים נחתכים בנקודה אחת בלבד.

ועתה נבוא על שכרנו תמורת סיפוחן של הנקודות הלא־אמיתיות: השכר הוא חוק הדואליות[1], המבוסס על ההתאמה השלימה בין המשפטים היסודיים „כל שתי נקודות שונות קובעות ישר יחיד החל בהן” ו„כל שני ישרים שונים קובעים נקודה יחידה החלה בהם”. לפיכך אפשר לזַוג לכל משפט m מתוך הגיאומטריה הפרוייקטיבית משפט שני, המתקבל מן הראשון ע״י תמורה עקבית בין המונחים „נקודה” ו„ישר” והמונחים המוגדרים על־פיהם; לשם כך יש להעמיד את היחסים המופיעים ב m על היחס היסודי של „חילה” בעזרת הגדרות מתאימות. מספיק אפוא להוכיח אחד מבין כל שני משפטים כאלה; השני נובע ממנו על־סמך הדואליות, ומתקבל אפוא בצורה מיכאנית לגמרי הפועלת מעין מלון משוכלל בין שתי שפות. (השוה ב § 3, בייחוד בסופו.) בספרים רבים על גיאומטריה פרוייקטיבית מופיעים באמת זוגות־משפטים, דואליים זה לזה, באותו העמוד בצורת טורים מימין ומשמאל, משפט מול משפט. וכן הדבר לגבי הגדרות.

אמנם יתרון זה קיים בגיאומטריה הפרוייקטיבית בלבד, ולא באפינית או במטרית. שכן ציונם של קוים ישרים ידועים כמקבילים (וכל־שכן כמאונכים) הורס את הדואליות במשפטים היסודיים, ועל־סמך זה גם בכל מה שנבנה עליהם. הלא בעוד שאפשר לדבר על ישרים מקבילים או מאונכים זה לזה, אין משמעות לביטוי „נקודות מקבילות” או „מאונכות”.

אם נבנה את הגיאומטריה הפרוייקטיבית במרחב תחת במישור, תתקים דואליות בין הנקודה והמישור (תחת הנקודה והישר); וכן בין ישרים וישרים. (ליחס „ישר חל במישור” דואלי אפוא היחס „ישר חל בנקודה”, כלומר: עובר דרך הנקודה.) המשפטים היסודיים קובעים במקרה זה מצד אחד, שכל שלש נקודות שאינן חלות באותו הישר קובעות מישור אחד ויחיד החל בהן, ומצד שני, שכל שלשה מישורים „שאינם חלים באותו הישר” (כלומר: שאינם עוברים דרך ישר אחד) קובעים נקודה אחת ויחידה החלה בשלשת המישורים. המקרה היוצא מן הכלל מקיף, כמובן, גם את הקבלתם של שלשת המישורים; ואמנם, כשם שמעניקים לכל ישר נקודה לא־אמיתית אחת, כן מעניקים לכל מישור ישר לא־אמיתי אחד, בתנאי שלכל שני מישורים מקבילים יש אותו ישר לא־אמיתי. אפשר לקבל את הישר הלא־אמיתי של המישור מתוך „אלומת” כל הישרים במישור הנידון, העוברים דרך נקודה אמיתית מסויימת; שהרי לכל ישר שבאלומה יש נקודה לא־אמיתית אחת, וכל הנקודות הללו שונות זו מזו ונחשבות אפוא לכל נקודותיו של הישר הלא־אמיתי. מתוך כך ניתן תוקף מוחלט, ללא יוצא מן הכלל, למשפט האומר: שני מישורים במרחב התלת־ממדי נחתכים

1. ביטאוהו בראשונה J. D. Gergonne ו J. V. Poncelet בין 1825 ל 1830. ביסוס מעמיק יותר נתן J. Plücker.

בישר אחד. המשכו העקבי של הרעיון מעניק למרחב מישור לא־אמיתי אחד. על־סמך הנימוק ההסתכלותי־כביכול שהובא לעיל יש האומרים „ישר (או מישור) רחוק לאינסוף" תחת „ישר לא־אמיתי"; יתכן שביטוי זה יקל על המתחיל את תפיסת הענין, אך יש בו משום טשטוש טהרת־השיטה של „העצמים האידיאליים".

לפני סיימנו סעיף זה עלינו להבליט שני מושגים שהופיעו ברעיונות הקודמים כלאחר יד, והם: החבורות והשמורות. מושג החבורה ידוע לנו מהפרק החמישי שבכרך הראשון. נעלה על זכרוננו רק את ראשי הפרקים: המדובר במערכת (קבוצה) $\mathfrak{G}$ של עצמים שביניהם מוגדרת פעולה („פעולת־החבורה"), היוצרת מתוך כל שני עצמים a ו־b של $\mathfrak{G}$ הנתונים בסדר זה (לרבות $a = b$) איבר מסויים, קבוע באופן חד־ערכי, $c = a \times b$ של $\mathfrak{G}$, באופן שהפעולה מקיימת את התנאים הבאים:

א) היא אסוציאטיבית; לאמור: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

ב) היא ניתנת להיפוך חד־ערכי בתוך $\mathfrak{G}$; כלומר, כנגד כל זוג a ו־b יש עצם יחיד z בתוך $\mathfrak{G}$ המקיים את היחס $a \times z = b$; וכן עצם יחיד $\bar{z}$ המקיים את היחס $\bar{z} \times a = b$.

בתנאים אלו נקראת $\mathfrak{G}$ חבורה. החבורות המופיעות בפרק זה הן על־פי רוב אינסופיות; כלומר, החבורה מכילה אינסוף איברים.

נקח לשם הדגמה את המקרה הידוע ביותר לקורא; הלא הוא הגיאומטריה המטרית במישור. כאמור לעיל, נוכל לראותה כתורת אותן תכונות של היצירים הגיאומטריים שאינן משתנות מתוך כל תנועה במישור; כלומר, מתוך העברה שאינה משנה צורתם וגדלם של היצירים כי אם מקומם בלבד. והנה ברור, שהתנועות יוצרות חבורה, אם נראה כפעולת־החבורה את צירופן של התנועות a ו־b, כך ש־$a \times b$ מסמן את התנועה המעבירה בבת אחת כל יציר לפי תוצאת התנועה a בראשונה ו־b בשניה. למשל: אם a מסמן הזזה ב־10 ס"מ ימינה, b הזזה ב־5 ס"מ שמאלה וסיבוב חיובי בזווית ישרה סביב נקודה מסויימת, הרי מסמן $a \times b$ הזזה ב־5 ס"מ ימינה בצירוף סיבוב כנ"ל. אם נרשה, נוסף על התנועות, גם שינויו של קנה־המידה — כלומר, אם נביא בחשבון את כל ההעברות הדומות ונצרף כנ"ל שתי העברות מהסוג החדש, הרי נקבל שוב חבורה, רחבה יותר, המקיפה כחבורה חלקית את חבורת התנועות.

בסעיפים הבאים יתברר שכן המצב כלפי ההעברות האפיניות והפרוייקטיביות; אלו ואלו יוצרות חבורות. חבורת ההעברות הפרוייקטיביות היא המקיפה ביותר ומכילה כל אחת מן החבורות הקודמות כחבורה חלקית. מתוך האמור לעיל יוצא: כִּגדול החבורה שהיא אופיינית לגיאומטריה מסויימת, כן עניה אותה גיאומטריה בתכונות גיאומטריות בעלות משמעות בתוכה; הגיאומטריה הפרוייקטיבית היא הכללית ביותר והמצומצמת בתכן הגיאומטרי, ואילו

הגיאומטריה האֶקויפורמית (או המטרית) מלאת פרטים היא ועשירת תוכן[1]. כל גיאומטריה היא קבועה די־צרכה ע"י החבורה (חבורת ההעברות) האפיינית לה. בפרק השביעי נצעד צעד נוסף קדימה בהיקף החבורה ובכלליות הגיאומטריה. (בדור האחרון התברר, שאפשר ואפשר לעשות צעדים נוספים מסוג זה.) מאידך נמצאות הגיאומטריות הלא־אבקלידיות, שבהן נדון בפרק השמיני, בתוך המסגרת „הקלסית" (של קליין) למיוּן הגיאומטריות השונות; אך ייבצר מאתנו להשקיף עליהן באספקלריה זו, תפקיד המצריך הכנות טכניות רבות.

ואחרון אחרון: הכנסנו כאן, דרך אגב כביכול, אחד המושגים החשובים שבמתימטיקה החדישה על כל כווניה ומקצועותיה, הלא הוא מושג השמורה[2]. תפסנו גיאומטריה מסויימת כתורת התכונות הגיאומטריות שאינן משתנות[3] (כלומר, הנשמרות) כלפי כל העברה מתוך חבורת־העברות ידועה, האפיינית לגיאומטריה הנדונה. לא נוכל לציין כאן את כל חשיבותה של תורת־השמורות בגיאומטריה. פשוט יותר לרמוז לאחד משימושיה באלגברה. הופעתה הראשונה, כנראה, קרתה בראות לגראנז' (בשנת 1773), כי לתבנית הריבועית החדשה, שאליה תעבור התבנית הריבועית $ax^2 + 2bxy + cy^2$ מתוך ההצבה (ההעברה) $x = X + mY$, $y = Y$, יהיה אותו „הבוֹחַן" כמו לתבנית המקורית. (הבוחן מוגדר כ־$b^2 - ac$; לאמור, הוא פונקציה מסויימת של מקדמי התבנית.) באמת מראה חשבון קל שהתבנית החדשה היא:

$$aX^2 + 2(am + b)XY + (am^2 + 2bm + c)Y^2 = AX^2 + 2BXY + CY^2;$$

והלא קיים:

$$B^2 - AC = (am + b)^2 - a(am^2 + 2bm + c) = b^2 - ac.$$

במקרה זה לא ישתנה אפוא הבוחן מתוך ההצבה הנ"ל: הוא משמש „שמורה" לתבנית. הדבר נתגלה ללגראנז' בעסקו בבעיה מתורת־המספרים.

עוד לפני אמצע המאה ה־19 התחילה התפתחותה המהירה של תורת

---

1. שמא יבין הקורא, הזוכר עוד מה שלמד לעיל בחלק הרביעי, את הענין בְּיֶתר בהירות, אם ישים לב לאנלוגיה לתורת־הקבוצות: טיפוסי־הסדר הם העצמים הנוצרים ממושג הקבוצה הסדורה כשמורות לגבי חבורת ההעתקים הדומים. חבורה זו היא חלק של חבורת כל ההעתקים, חבורה הקובעת את תורת העצמות (או האקויולנטיות), שהיא כללית ו„עניה" מתורת הטיפוסים, כמו שעניה הגיאומטריה הפרוייקטיבית בהשוואה למטרית.

2. מושג זה משמש בסיס שיטתי לתורות אריתמיטיות וגיאומטריות זה כמאה שנה. רגילים לראות כהולדת תורת־השמורות את משפטו של G. Boole משנת 1841 שהוא הכללת משפטו הנ"ל של Lagrange כלפי המקרה של איזו הצבה ליניארית הומוגינית שהיא. התפתחותה המהירה של התורה היא פרי השליש האחרון של המאה ה 19, וכאן יש להזכיר גם את שמו של S. Lie הנורביגי.

3. השם הלועזי invariant (לא־משתנה) הוכנס ע"י J. J. Sylvester. הוא ו Gordan היו שני החלוצים היהודים של תורת־השמורות.

השמורות באלגברה, בעיקר הודות למחקריהם רחבי־ההיקף של קיילי וסילבסטר. אך המושג החדש לא הצטמצם באלגברה וגיאומטריה בלבד; הוא נכנס לתוך האנליזה (וע"י זה לגיאומטריה הדיפרנציאלית), בעיקר בצורת „התבניות הדיפרנציאליות", והגיע אולי לשיא חשיבותו בפיסיקה: החל מן העקרון המצומצם של שמירת האנרגיה, דרך עקרון־היחסות של איינשטיין (1915), ועד לתורות ה„שדה" והגראביטציה החדישות. כמה מוטעית היא הדעה הנפוצה על מהות היחסות – ששימשה, אגב, מכשיר עיקרי בידי הקטרוג האנטישמי, כאילו היהודים אינם מודים בערכים „מוחלטים" ורואים את הכל כיחסי – יוצא דוקא מתוך העובדה, שלפי גרעינה המתימטי־פיסיקלי אין תורת היחסות אלא תורה של שמורות, המדגישה את הקוטב היציב במרוצת התופעות.

אמנם ההערות האחרונות דוקא מחייבות אותנו לסיים סעיף זה, המהווה תמצית לפרק כולו, בדברי הסתיגות ואזהרה. במשך חלק ניכר של המאה ה 20 שלטה עדיין התפיסה דלעיל לגיאומטריות השונות, המסתמכת על „הפרוגרמה של אֶרלַנגן". אך כבר סמוך לאמצע המאה ה 19 ניבא רימן (בעיקר במחקרו על התפשטות החום מ 1861) להשקפה אחרת בתפיסת הגיאומטריה – „ניבא ולא ידע מה ניבא". ערך מחשבותיו של רימן התגלה אך בדור האחרון מתוך התפתחותה של הפיסיקה[1], ובפרט של תורת היחסות, התפתחות שהיתה מהפכנית לגבי הגיאומטריה אולי יותר מאשר בפיסיקה עצמה. הקורא המתקדם יוכל לקבל מושג על מהפכה זו מתוך הרצאתו של Veblen בקונגרס הבינלאומי למתימטיקנים בבולוניה 1928[2], ומאז הלכה המהפכה הלוך והתעמק.

נוכל לרמוז, בצורה הניתנת להבנה במידת האפשרות לנושא קשה, על התפתחות זו באמרנו: החבורה הצרה ביותר מבין אלה שבהן הגדרנו לעיל גיאומטריות, היתה חבורת כל התנועות; חבורה המשאירה ללא שינוי לא רק את צורת היצירים הגיאומטריים אלא אפילו את גדלן, למשל את ארכו של קטע. אך בעצם אפשר לחשוב על חבורה צרה עוד יותר, ולכן על גיאומטריה עשירה עוד יותר: על החבורה הזהותית המכילה את היחידה בלבד ואינה מאפשרת שום העברה (אף לא הזזה), ועל הגיאומטריה המתאימה שבה כל יציר שונה מכל יציר אחר, אף אם ההבדל הוא רק במצבם במרחב.

---

1. המצב הוא דומה לגבי מחקר אחר של רימן, „נאום ה habilitatio" שלו, רק שכאן ידע כנראה מה ניבא. אך הקהל המדעי לא הבינו עד בוא איינשטיין. עיין בפרק השמיני, § 3.

2. עיין ב Atti של הקונגרס ההוא, כרך ראשון (בולוניה 1929), עמ' 181—189. שֵׁם ההרצאה: Differential invariants and geometry. השוה גם, למשל, בספרים:
O. Veblen and J. H. C. Whitehead: Foundations of differential geometry. 1932
T. Y. Thomas: Differential invariants of generalized spaces. 1934.

מתקבל על הדעת, משום מה אין גיאומטריה זו מופיעה בפרוגרמה של אֶרלנגן: מפני שהיא רחבה מדי ומשוללת התהליך המדעי של איחוד השונים, תהליך האפייני כל כך למתימטיקה בכללה[1]. הלא המרחב הוא המקום שבו נמצאים היצירים הגיאומטריים ושבו נזיז, נניע ונשוה אותם. וכאן נתחוללה המהפכה: לפי רימן והפיסיקה החדישה חדֵל המרחב מהיות „המקום שבו..."; אלא יש לו (כך נאמר בפיסיקה; או יכול להיות לו, מנקודת־השקפה מתימטית) מבנה (סטרוקטורה) משלו[2], וחקירת המבנה – לרבות צורות־המבנה האפשריות – גם היא תפקיד גיאומטרי־פיסיקלי, ואולי התפקיד הראשי. לפי זה יכולה להיות, ותהיה בדרך־כלל, החבורה הזהותית דוקא חבורת הגיאומטריה.

ננסה לתאר, דרך משל ורמז, מצב זה במרחב הדו־ממדי, הואיל והבנתו בשלשה ממדים דורשת ידיעות קודמות ניכרות. אם המרחב הנדון הוא מישור, נוכל להזיז בו כל יציר (מישורי) ללא כל קושי. הוא הדין אם פני כדור מהווים את המרחב; גם בו אפשר להזיז, למשל, כיפה (כדורית) לכל מקום אחר של „המרחב". אמנם במקרה זה אין המרחב „ישר" כי אם „עקום", אבל עיקומו הוא קבוע ואינו משתנה ממקום למקום – תכונה המאפשרת את הזזת היצירים. אולם אם נחליף את פני הכדור בפניו של אליפסואיד, הרי כבר על־פי ההסתכלות ברור שאי אפשר להזיז בו יציר (למשל, כיפה) ממקום למקום; העיקום יהיה פונקציה של המקום, ופונקציה זו היא הקובעת את מהות המרחב.

אולי ישאל השואל: מדוע מתפלפלים הגיאומטרים על מרחבים כה מסובכים (מרחבים עקומים בעלי שלשה ממדים, ואף יותר)? והנה בא הנסיון הפיסיקלי ומטפח על פני השואל, בהראותו כי העולם שבו אנו חיים, שמבחינה מתימטית אין לו בעצם כל יתרון לעומת עולמות אפשריים אחרים, הוא דוקא מרחב „עקום" ולא מרחב „ישר". מתברר גם מדוגמה זו שלמחקר המתימטי העיוני, אפילו במקרים שבהם ייראה מופשט ביותר ורחוק מן המציאות, יכולה להיות זיקה בלתי־צפויה ל„עולם הממשי" – אף כי אינו טעון הצדקה כזו!

§ 2. על הגיאומטריה האֲפינית.

אם נלך לפי הפרוגרמה המבוארת ב § 1 בכוון מחבורות צרות למקיפות יותר, יהיה עלינו להתחיל בגיאומטריה המטרית או האקוויפורמית. לא נעשה כך; שהרי גיאומטריות אלו ידועות לכל אחד מבית הספר. רבים מבין הקוראים

---

1. רעיון זה הודגש בבהירות יתירה ע"י E. Meyerson; עיין בספרו: Du cheminement de la pensée. 3 כרכים. 1931.

2. הפיסיקנים מעדיפים את המונח: תורת־שדה משלו. מנקודת השקפתם הרי מציאות החומר ופילוגו במרחב, הם הם הקובעים את מבנה המרחב.

הכירו לדעת גם גישה שיטתית יותר (עיין לעיל עמ׳ 168/9) לגיאומטריות הללו לפי הדרך האנליטית (גיאומטרית־שעורים), ואחדים אולי אף לפי הדרך הסינתיטית; אמנם לא כל אחד יודע את התורה הכללית והפרוטה לחתכי־החרוט (אליפסה, היפרבולה, פראבולה), ועוד פחות את תורת המשטחים מן הסדר השני, כגון אליפסואיד, פראבולואיד היפרבולי, וכו׳. אך עם כל חשיבותן של תורות אלו בתוך המתימטיקה ושימושיה אין להן ערך עקרוני עד כדי כך שיהיה מקומן בספר כזה, השואף לתת לקוראיו מושג על מהות המתימטיקה, בעיותיה ושיטותיה, ולא דוקא ידיעות על תוכן המתימטיקה. נוסף על כך היה פיתוח התורות ההן מצריך טכניקה וחשבונות יתר על המידה.

מטעמים אחרים, בייחוד באשר לידיעות הקודמות הדרושות, אין לנו אפשרות לתאר כמה דברים שהם חשובים מבחינת השימוש, כגון תורת הווקטורים והטֶנסורים[1], או לטפל בתחום הענקי של שימושי החשבון האינפיניטסימלי בתוך הגיאומטריה. רמזים וספרות לשני הנושאים האלה נמצאים לעיל בעמ׳ 183/4, וגם בכרך הראשון, בפרקים ז׳ וי״ב.

לפי המיון שבסעיף הקודם עלינו לגשת עתה לגיאומטריה האֲפינית. התיאור שבסעיף זה יהיה קצר ויסתפק בראשי פרקים ובדוגמות אחדות. הרי יש לפנינו תפקיד דומה בסעיף הבא, הדן בגיאומטריה הפרוייקטיבית; במה שנקצר כאן נאריך שם, בעיקר מחמת חשיבותה (העקרונית והשימושית גם יחד) של הגיאומטריה הפרוייקטיבית, העולה על זו של האפינית[2].

יש שתי דרכי גישה לענין: הגיאומטרית־בניית, והאנליטית־חשבונית. לפי המגמה הראשונה, שעליה נעמוד ברמז בלבד, יש להעיר קודם כל, שבעזרת מכשירי הגיאומטריה האפינית אפשר לחצות כל קטע $\overline{AB}$. השיטה הנוחה ביותר לשם כך מסתמכת על הנקודה הלא־אמיתית I של הישר AB, מזה, ועל מושג היחס ההרמוני בין ארבע נקודות של הישר, המוגדר בגיאומטריה הפרוייקטיבית (הקודמת, במובן שיטתי, לאפינית), מזה. שכן לפי הגדרת היחס ההרמוני יוצא (עמ׳ 246), כי האמצע בין A ל B הוא הנקודה Q של הישר AB היוצרת, יחד עם A, B ו I, רביעיה הרמונית (A, B, Q, I). האפשרות לבניה זו תלויה במושג ההקבלה, שיש לו מקום בגיאומטריה האפינית ולא בפרוייקטיבית; שהרי בלעדי המושג הזה אין להגדיר את הנקודה הלא־אמיתית I שאין לה כל

1. על תולדות התורות האלה אפשר לעמוד, למשל, על פי הספר:
H. G. Forder: The calculus of extension. 1941.

2. הקורא המתענין ביֶתר פירוט לבעיות אלמנטריות של הגיאומטריה האפינית, ימצא חומר מענין בספר הרב־צדדי:
F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band II: Geometrie (3rd ed. 1925; English ed. by E. R. Hedrick and C. A. Noble, 1939).

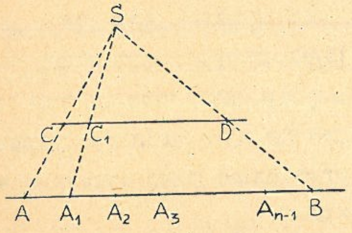
הצטיינות כלפי שאר נקודות הישר בלא מושג ההקבלה. לפי זה אפשר להגדיר גם את השויון בין שני קטעים $\overline{AB}$ ו $\overline{CD}$ שבאותו הישר בכך, שהאמצע בין A ו D יתלכד עם האמצע בין B ו C. אפשר להקצות קטע פעם שניה (כלומר, לבנות בישר AB קטע $\overline{BF}$ שישוה ל $\overline{AB}$), וכן גם n פעמים לגבי כל מספר טבעי n.

כן אפשר, אם נתון הקטע $\overline{AB}$ יחד עם אמצעוֹ Q, לבנות דרך איזו נקודה E שהיא מחוץ לישר AB את המקביל ל AB, שייחודוֹ בין כל הישרים דרך E מציין את אפייה האֲפיני של הגיאומטריה.

על היחסים השקולים כנגד ציוּן מקבילים או חציית קטע נמנה, למשל, יחס הרחקים בין נקודה מסויימת ושתי נקודות אחרות של אותו הישר, וכן המשפט שקרנזולי המקבילית חוצים זה את זה.

נוסיף הערה אחרונה בכוון הנידון: על־סמך ההנחות האפיניות הנ״ל (מתן שני מקבילים או קטע יחד עם אמצעו) קל להגיע לחלוקה הרציונלית של הקטע. שכן כיפולוֹ פי n (עיין לעיל) של קטע נתון $\overline{AA_1}$, באופן שיהיה (עיין בציור 20)

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n-1}B},$$



ציור 20

מאפשר גם את חילוקו של קטע $\overline{CD}$ ל n חלקים שוים. לשם כך נטיל $\overline{AB}$ על $\overline{CD}$ מקביל ממרכז־ההטלה S, המתקבל כחיתוך הישרים AC ו BD. (השוה הציור 4 בעמ׳ 25, הרומז להטלת כל נקודותיו של $\overline{AB}$ על $\overline{CD}$.) מאידך אפשר לכפל את החלק ה־n־י של $\overline{CD}$ m פעמים. סוף דבר: מציאות המקבילים בגיאומטריה האפינית מבטיחה את האפשרות לבנות את הכפול פי־$\frac{m}{n}$ לכל קטע נתון.

יודגש בפירוש, שחצייתו של קטע היא פעולה (או יחס) מתוך הגיאומטריה האפינית שאין לה מקום ומשמעות בגיאומטריה הפרוייקטיבית (§ 3). כן הדבר לגבי שאר הפעולות והיחסים שהוזכרו כאן.

לא נמשיך את פיתוחה הבנייתי־סינתיטי של הגיאומטריה האפינית. והלא גם הרמזים הקודמים לגביה התכוונו בעיקר למקרה הפשוט ביותר: גיאומטריה בממד אחד. קל יותר לקבל רושם ראשון, כולל במקצת, לפי השיטה האנליטית; אך גם כאן נסתפק בגיאומטריה פשוטה: בדו־ממדית, דהיינו בגיאומטריה במישור.

מהלך־המחשבה שלפנינו משתלב באופן טבעי לענין, הידוע לרבים מבין הקוראים על־פי מה שלמדו בגיאומטריה האנליטית, והוא: העברת שעורים (קוֹאוֹרדינַטוֹת) בגיאומטריה המטרית. כדי למצוא, למשל, „משוואת" מעגל או

אליפסה הנמצאים באיזה מצב שהוא במישור. נוח מאד להזיז את מוצא השעורים אל מקום מתאים במישור; במקרים הנ"ל: אל מרכז המעגל או האליפסה. אפשר לראות הזזה זו באחת משתי אספקלריות שונות (שההבדל ביניהן אמנם אינו חשוב למעשה): או להבינה כך שכל נקודה תקבל, במקום שעוריה הקודמים, שעורים חדשים לפי חוקי־העברה מסויימים (באופן שהמוצא החדש יקבל את השעורים 0,0); או לראות את ההזזה כתנועה המעבירה כל נקודה (פרט אולי ליוצאות מן הכלל, הנשארות יציבות), ולכן כל יציר גיאומטרי, למקום אחר, באופן שהמרחב בכללו (במקרה דנא: המישור) יועבר אל עצמו. כל תנועה כזו יש לראות כצירוף של הזזה מקבילה וסיבוב.[1]

לשם הביצוע החשבוני לא ישתנה מאומה, בין אם נאחז בגישה הראשונה המחליפה את ערכי השעורים, בין בשניה המחליפה את הנקודות הקודמות עצמן בנקודות חדשות. הואיל וערכי־השעורים החדשים $\bar{x}$ ו $\bar{y}$ תלויים, לפי חוק מסויים, בערכים הקודמים x ו y, נוכל לתאר כל העברת־שעורים במישור בצורה

$$\bar{x}=f(x,y), \qquad \bar{y}=g(x,y), \tag{1}$$

שבה מבטאות הפונקציות f ו g את חחוק הנידון. (כל הקבועים והפונקציות המופיעים כאן הנם ממשיים, כמו השעורים בעצמם.)

אך אין להפוך טענה זו. לאמור: לא כל זוג של משוואות מעין (1) מבטא העברת־שעורים במובן שצויין לעיל. הרי כל העברה כזו הופכת כל יציר גיאומטרי ליציר חופף; לשון אחר, לפי הגישה השניה: התנועה אינה מעוותת (משַנה) את צורת היצירים. בפרט ישאר, למשל, הרוחק בין שתי נקודות אחרי ההעברה כערכו מקודם. ועתה נקח לשם דוגמה לגבי (1) את הפירוט הפשוט

$$\bar{x}=cx, \qquad \bar{y}=cy,$$

שבו מסמן c מספר קבוע השונה מ ± 1 (וכמובן גם מ 0). יהיו x_1, y_1 ו x_2, y_2 שעוריהן של שתי נקודות נתונות; הרוחק ביניהן הוא, על־פי משפט פיתגורס, השורש הריבועי הלא־שלילי מ $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. ברם אחרי ההעברה נקבל כרוחק בין הנקודות את השורש הריבועי מן

$$(\bar{x}_2-\bar{x}_1)^2+(\bar{y}_2-\bar{y}_1)^2=c^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2],$$

והלא ערך זה שונה מקודמו. כלומר: הרוחק בין הנקודות השתנה, בניגוד לדרישת החפיפות.

בהתחלות הגיאומטריה האנליטית פותרים את הבעיה הבאה: מה הן תכונותיה ההכרחיות והמספיקות להעברה מהסוג (1), כדי שתבטא העברת־שעורים, ז"א שתהפוך כל יציר ליציר חופף. לא נעסוק להלן בנושא זה, שהרי הגיאומטריה האלמנטרית (המטרית והאֶקוויפוֹרמית) אינה ענינגו כאן. נסתפק

1. יתכן להוסיף את „ההפיכה", כלומר ההשתקפות בקו מסויים, כגון $\bar{x}=-x$, $\bar{y}=y$; ובגיאומטריה האֶקוויפוֹרמית, המרשה העברות ליצירים דומים ולא רק לחופפים, את ההעברות הדומות.

בהערה אחת שיש לה תוקף גם לגבי נושאי הסעיף הזה והסעיף הבא: הפונקציות f ו g שב(1) צריכות על־כל־פנים להיות ליניאריות (עיין להלן) בגורמיהן x ו y; לולא כך, לא יֵהָפך ע"י ההעברה קו ישר לקו ישר אלא לקו עקום.

הבה נדון עתה בהעברות האֲפיניות שביטויין החשבוני במישור הוא

$$\bar{x}=a_1x+b_1y+c_1, \qquad \bar{y}=a_2x+b_2y+c_2; \tag{2}$$

כאן מסמנים a_k, b_k, c_k אילו קבועים שהם. חשבון קל מאשר שכל העברה כזו מעבירה קו ישר, כגון $y=ax+b$ (השוה I, 232), שוב לקו ישר. מאידך מותאם, על פי (2), לכל זוג של ערכים סופיים x, y זוג של ערכים $\bar{x}$, $\bar{y}$ שגם הם סופיים. כלומר, לכל נקודה אמיתית (עמ' 226) מותאמת שוב נקודה אמיתית – עובדה התלויה בכך שאין מכנה[1] במשוואות (2); אילו הופיע מכנה, כגון במשוואות $\bar{x}=x$, $\bar{y}=\frac{1}{y}$, היתה נקודה אמיתית נהפכת לנקודה לא־אמיתית, וחילופו (עיין בסעיף הבא). עובדה זו של שמירת הנקודות האמיתיות מזה והנקודות הלא־אמיתיות („קצוֹת המרחב"; כאן: קצות המישור) מזה מתאימה לכך, שהגיאומטריה האפינית היא גיאומטריית מקבילים.

מציינים את העובדה שאין מכנה במשוואות (2) ע"י הכינוי ל(2): „העברה ליניארית שלמה". יש לומר גם „קווי" תחת „ליניארי"; לפי שם זה יודגש לא שהמשוואות (2) ליניאריות הן במובן האלגברי (ז"א בנות המעלה 1), כי אם שהן מעבירות קו ישר לקו ישר. עובדות אלו, האלגברית והגיאומטרית, שקולות זו כנגד זו[2], אם בצד האלגברי נרשה גם העברות שבורות.

כדי להקל את בדיקת משמעותן (הגיאומטרית או האנליטית) של המשוואות (2), נשקול בדעתנו שהמחובר האחרון ($+c_1$ ו $+c_2$) אינו מבטא אלא הוספת ערך קבוע, כלומר הזזה של המרחב, שערכה וכוונה נקבעו ע"י c_k. לכן לא נפסיד מאומה בניתוח ההעברה, אם נחליף את ההעברה הכללית (2) בהעברה (או ההצבה) ה„הוֹמוֹגינית"

$$\bar{x}=a_1x+b_1y, \qquad \bar{y}=a_2x+b_2y. \tag{3}$$

לפי צורת ההעברה (3) לא תשתנה נקודת־הראשית.

קודם כל נעורר את השאלה אם ואימתי מהווה (3) באמת העברה, כלומר התאמה חד־חד־ערכית של נקודות. הלא צורת המשוואות מוסרת רק שלכל נקודה (x, y) מותאמת נקודה חדשה אחת $(\bar{x}, \bar{y})$, ואת חילוף הדבר יש לבדוק עוד. לשון אחר: האפשר לפתור את זוג־המשוואות (3) לגבי הנעלמים x ו y, באופן שיתבטאו ע"י $\bar{x}$ ו $\bar{y}$? והנה, אם „הקוצב" של (3) אינו מתאַפס, ז"א אם

1. המדובר במכנה המכיל אחד המשתנים x, y; המקדמים הקבועים הרי הם מספרים ממשיים, ולכן חילוק במספר קבוע לא ישנה מאומה.

2. מכאן השימוש „ליניארי" למשוואות בנות המעלה 1. המלה הרומית linea ר"ל קו; הכוונה לקו ישר.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \equiv a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0, \qquad (4)$$

– תנאי שנניחנו מעתה תמיד – אפשר לפתור את המשוואות באופן חד־ערכי לגבי x ו y; שכן חשבון פשוט נותן:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\bar{x} - \frac{b_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\bar{y} = \alpha_1 \bar{x} + \beta_1 \bar{y}, \\ y &= -\frac{a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\bar{x} + \frac{a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\bar{y} = \alpha_2 \bar{x} + \beta_2 \bar{y}. \end{aligned} \right. \qquad (5)$$

המשוואות (5) גם הן מן הסוג (3); לפיכך אֲפינית גם ההעברה ההפוכה (5) המתאימה לכל זוג $(\bar{x}, \bar{y})$ זוג יחיד (x, y). קוצב ההעברה ההפוכה, שהוא לפי (5)

$$\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2},$$

שונה גם הוא מ 0; ז״א התנאי (4) מתמלא שוב.

אם נצרף להעברה (3) העברה נוספת

$$\bar{\bar{x}} = c_1 \bar{x} + d_1 \bar{y}, \quad \bar{\bar{y}} = c_2 \bar{x} + d_2 \bar{y}, \quad (c_1 d_2 - d_1 c_2 \neq 0) \qquad (\bar{3})$$

מראה חשבון קל שקשורים גם (x, y) ו $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ ע״י העברה אֲפינית

$$\bar{\bar{x}} = e_1 x + f_1 y, \quad \bar{\bar{y}} = e_2 x + f_2 y. \quad (e_1 f_2 - f_1 e_2 \neq 0)$$

כן יהיה מצב הענינים אם נקח במקום (3) את הצורה הכללית (2).

כבר בעמ׳ 230 דובר על צירוף כזה של שתי העברות. קל לאשר ע״י חשבון, שצירוף זה מקיים את החוק האסוציאטיבי; כלומר, אם נצרף לתוצאת שתי ההעברות (3) ו $(\bar{3})$ העברה שלישית, נקבל אותה העברה כאילו צרפנו להעברה (3) את תוצאת הצירוף של $(\bar{3})$ ושל ההעברה השלישית. בשימנו לב לכך, שקיימת העברה „ניטרלית" (הזהות $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$), ושכנגד כל העברה אפינית יש העברה הפוכה, יוצא שמערכת כל ההעברות האפיניות מהווה חבורה לגבי הצירוף הנדון. (עיין I, 89–90 ו 100/1.)[1]

„המשוואה הכללית" לקו ישר במישור ה x ו y היא כידוע (השוה I, 232)

$$Ax + By + C = 0.$$

בהכניסנו כאן את הערכים (5) ל x ו y, נקבל משוואה בעלת הצורה

$$\bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{y} + \bar{C} = 0,$$

שבה $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ מסמנים קבועים, כמו מקודם A, B, C. (במקרה זה קיים אפילו $\bar{C} = C$, אולם רק משום שבחרנו בצורה הפרוטה (3) במקום הצורה הכללית (2).) בדרך זו אושרה טענתנו דלעיל, כי כל העברה אפינית מעבירה

1. קל לראות כי החבורות הפרוטות בעלות הצורה (3) מהוות גם הן חבורה, שהיא חבורה חלקית של חבורת כל ההעברות האֲפיניות (2).

קו ישר שוב לקו ישר. כל העברה בעלת תכונה זו – ובמרחב התלת־ממדי: בעלת התכונה להעביר כל מישור למישור – נקראת קוֹליניאציה[1] (או היטליות). כל אֲפיניוּת היא אפוא היטליות; אך חילוף הדבר אינו קיים, כפי שנראה בסעיף הבא. מאידך יש לראות מיד, שאֲפיניוּת אינה בדרך־כלל העברה דומה, וכל־שכן לא העברה חופפת (תנועה). לכן משַנה העברה אפינית בדרך־כלל לא רק את אורך הקטעים שביציר גיאומטרי נתון, אלא גם את הזוויות שבו; משולש יועבר למשולש בעל צלעות וזוויות אחרות, ולכן גם בעל יחס־צלעות אחר.

נכנה, כנהוג, ישרים בשם ישרים מקבילים אם אין להם נקודה (אמיתית) משותפת, או אם הם מתלכדים. בהפעילנו העברה אפינית על שני ישרים בעלי נקודת־החיתוך P, מוכרחת הנקודה $\bar{P}$ המתקבלת מ P לחול בכל אחד משני הישרים שיתקבלו מהישרים הנתונים. לאמור: זוג של ישרים חותכים יועבר לזוג של ישרים חותכים, ולפיכך זוג של ישרים מקבילים לזוג של ישרים מקבילים – בהתאם למה שראינו. החשבון מראה מיד, כי הישרים

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

מקבילים הם לפי ההגדרה דלעיל אם, ורק אם, $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$; שכן במקרה זה, ובו בלבד, אין זוג (x, y) הממלא את שתי המשוואות יחד – פרט למקרה $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$, שבו כל (x, y) הממלא אחת המשוואות ימלא גם את אחותה; ז״א, פרט למקרה שבו מתלכדים שני הישרים.

בדוגמה הבאה, החשובה באופן עקרוני, נפנה ליצירים לא־קוויים; הקוראים, שלמדו את יסודות הגיאומטריה האנליטית במישור, לא ימצאו קושי בדבר. הסתכלנו כמה פעמים במעגלים, באליפסות, בפראבולות ובהיפרבולות, ופעמים הופיעו גם משוואותיהן האנליטיות. כל העקומים ההם נכללים, מטעם שנגע בו בסעיף הבא, במושג „חתכי־חרוט". משוואותיהם נכללות במשוואה הריבועית (בעלת המעלה 2) הכללית בין השעורים x ו y, שצורתה היא:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \qquad (6)$$

משום כך קוראים לכל חתך־חרוט גם בשם „עקום מן הסדר השני" (קו ריבועי), בעוד שהישרים הם קווים מן הסדר הראשון.

הבה נכניס למשוואה זו את הערכים (5) ל x ו y, כפי שעשינו לעיל כלפי משוואת הישר! החשבון הוא מיכני בעלמא ומראה שנקבל שוב משוואה בעלת הצורה (6) בשעורים החדשים $\bar{x}$ ו $\bar{y}$, רק שהמקדמים a עד f יעברו לערכים קבועים אחרים התלויים במקדמי (5) (או (3)). זאת אומרת: כל העברה אֲפינית הופכת עקומים מן הסדר השני (חתכי־חרוט) שוב לעקומים מן הסדר השני. (לפי אותה מחשבה יש לראות שהדבר קיים לגבי עקומים של כל סדר שהוא.)

1. מן המלה הרומית col-lineatio שפירושה קוויות־יחד.

אך גדולה מזו! כפי שראינו לעיל, הופכת כל העברה אפינית נקודה אמיתית („סופית") שוב לנקודה אמיתית. האליפסות (כוללות מעגלים) הן עקומים שאינם משתרעים עד לאינסוף; כלומר, עקומים שכל נקודותיהם הן אמיתיות – בניגוד לפראבולות והיפרבולות[1]. מתוך תכונה זו, בצירוף התכונות שבהערה למטה, מתקבל המשפט:

כל העברה אפינית הופכת אליפסות (לרבות מעגלים) לאליפסות, פראבולות לפראבולות, היפרבולות להיפרבולות.

העברה אֶקוויפורמית מעבירה, כמובן, מעגלים למעגלים. אולם אין הדבר כך לגבי העברה אפינית כללית: היא מעבירה מעגל לאיזו אליפסה שהיא. מהשקפת הגיאומטריה האפינית אין באמת כל הבדל בין אליפסות־סתם לבין אותן אליפסות מיוחדות המכונות מעגלים. דוגמה לכך הכרנו כבר בראשית ה § 1 (עמ' 219); ההעתקה שהשתמשנו בה שם היא אפינית – בניגוד לצילום (עמ' 221) שאינו מעביר ישרים מקבילים לישרים מקבילים, ולכן אינו אפיני.

לעיל העירונו, שמשולש לא יועבר ע"י העברה אפינית למשולש דומה דוקא; לשון אחר, היחס בין קטעים במישור לא ישאר „שמור". ואולם לא יקשה על הקורא להוכיח שהיחס בין שני קטעים שבאותו הישר יישמר, כשייהפך הישר ע"י העברה אפינית לישר אחר. חשבון שיופיע בסעיף הבא יפיץ אור מלא על תופעה זו.

נבדוק עוד מה יקרה לשטחו של משולש אם מפעילים העברה אפינית. כפי שצויין בעמ' 199, שטחו הכפול (פי שנים) של המשולש בעל הקדקדים $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ הוא, כאשר $k=1, 2, 3$:

$$\bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \end{vmatrix} = (\bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \bar{x}_3) + (\bar{x}_3 \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \bar{x}_1) + (\bar{x}_1 \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \bar{x}_2).$$

הבה נכניס כאן במקום $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ את הערכים המתקבלים מתוך (3) (כנגד $x = x_k$, $y = y$), ונסמן ב T את שטחו הכפול של המשולש בעל הקדקדים (x_k, y_k). חשבון קל, הנראה מובן מאליו למי שיודע את „משפט־הכפל" של קוצבים, מראה שקיים

$$\bar{T} = T \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = T \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

אם נסמן את „קוצב־ההצבה" של ההעברה (3), שהופיע כבר ב (4), בסמל

$$\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2, \qquad (7)$$

1. ההבדל בין שתי אלה הוא, כי לפראבולה יש נקודה לא־אמיתית אחת, ואילו להיפרבולה שתי נקודות לא־אמיתיות.

הרי מתברר כי על־פי העברה אפינית מסויימת נכפלים כל שטחי משולשים באותו הגורם Δ, שאינו תלוי במשולש הנדון והשונה מ 0 על־סמך (4).

ראינו ב § 5 של הפרק הקודם שאפשר – בעזרת חיבור, חיסור ותהליכי־גבול – להעמיד את שטחו של כל תחום מישורי על שטחי משולשים. לפי זה נקבל ללא קושי עקרוני:

העברה אפינית אינה משפיעה על שטחי תחומים במישור אלא בצורת כפל בגורם הקבוע (7), התלוי אך בהעברה והמכונה קוצב ההעברה או ההצבה.

משפטים מקבילים לגמרי קיימים לגבי הנפחים (של ארבעון, או של איזה גוף שהוא במרחב התלת־ממדי). במקרה זה מכילות משוואות־ההצבה (3) שלשה איברים כל אחת, ולפי זה מתבטא הגורם הקבוע כקוצב מסובך יותר.

נסיים סעיף זה בשתי הערות בעלות אופי פרוט.

ראשית: חשבון, שאת רעיונו העיקרי נתאר במלואים לחלק החמישי, מס. ט), מראה שאפשר להעמיד כל העברה אֲפינית על „אפיניות טהורה", כלומר על משוואות־ההצבה הבאות, תחת (2) או (3):

$$\bar{x} = ax, \qquad \bar{y} = by.$$

(לאמור: בעזרת סיבובים, נוסף על קביעה מתאימה לראשית הצירים, אפשר להפוך איזו אפיניות שהיא לאפיניות טהורה.) מובן שבמקרה המיוחד $a = b$ יש כאן העברה אקוויפורמית. במקרה הכללי $a \neq b$ נוכל לבאר באופן הסתכלותי־קִינֶמַטי העברה זו כך: מותחים (או דוחסים, אם הגורם קטן מ 1) את המישור כולו בכוון ציר ה x לפי היחס $a:1$, ובכוון ציר ה y לפי היחס $b:1$. על כך מתווספת עוד השתקפות מתאימה, אם אחד הגורמים a, b הוא שלילי (השוה בהערה 1 בעמ' 236). ביאור הסתכלותי זה להעברות האפיניות מסביר את חשיבותן הרבה בפיסיקה, בפרט בתורת האֶלַסטיות ובהידרודינמיקה. – התנאי (4), הדורש שקוצב־ההצבה לא יתאפס, מתמלא כאן מעצמו; שכן הקוצב שוה ל $a \cdot b$, ושני הגורמים האלה שונים מ 0.

שנית, נרמוז בקיצור לחשיבותן של ההעברות האפיניות לגבי השירטוט (למשל, של האדריכל והמהנדס), או בניסוח עיוני: לגבי הגיאומטריה התיאורית. כבר ב § 1 צויינה חשיבות ההטלה בעזרת מקבילים, כלומר ההעברה האפינית, בשביל השירטוט המעשי. ברם כאן הכוונה לפירוט ידוע שהוא בבחינת יוצא מן הכלל במובן המתימטי, אך בעל חשיבות יתירה בשימושים.

בעמ' 237/8 ראינו שאם קוצב־ההצבה (4) אינו מתאַפס, מתארת ההצבה הנדונה – (3), או גם (2) – התאמה חד־חד־ערכית בין הנקודות (x, y) ו $(\bar{x}, \bar{y})$. מובן על־פי מהות ההצבה (בהיותה שלימה וליניארית) שההתאמה היא גם רציפה. הוא הדין לגבי הצבה אפינית במרחב התלת־ממדי.

אולם אם הקוצב מתאפס, אין כאן התאמה חד־חד־ערכית; אדרבה, במקרה זה מתאימה אותה הנקודה $(\bar{x}, \bar{y})$ לאינסוף נקודות שונות (x, y). ולא עוד אלא מתוך כך לא יישמר אפילו מספר הממדים (השוה עמ׳ 57). עובדה זו חשובה היא בעיקר אם נצא מהמרחב התלת־ממדי; במקרה זה יתקבל בדרך־כלל העתק של גוף תלת־ממדי למישור. והלא זהו תפקידו המכריע של השירטוט הטכני, ובעיה מרכזית של הגיאומטריה התיאורית. יש לראות במקורב גם את הצילום כהעתקה מסוג זה, אם הרוחק בין מכשיר־הצילום לגוף המצולם גדול למדי, כך שקרני הצילום תהיינה „כמעט" מקבילות.

כדי שלא נצטרך לחזור על הדבר פעם שניה, נעיר כבר כאן שענין זה של התאפסות הקוצב מופיע באופן דומה בהעתקים הפרוייקטיביים, שבהם נדון בסעיף הבא. גם שם תוכלנה העברות „סוררות" כאלה לשמש העתקים בין יצירים שוני־ממדים; בפרט להעתקת גופים מרחביים אל המישור, כנהוג בגיאומטריה התיאורית.

לענין זה נודעת חשיבות, נוסף על שימושיו בטכניקה ובאדריכלות, גם לגבי אמנות הציור; שהרי גם הצייר מתאר יצירים מרחביים במישור. ואמנם ציירים שונים, בעיקר באיטליה (במאה ה 15 וה 16), העמיקו לחקור בשאלות הפֶרספֶקטיבה גם במובן מדעי; בראשם Lionardo da Vinci, שהצטיין ברב־צדדיותו באמנות, במדע ובטכניקה גם יחד. מכאן באה דחיפה ניכרת לא רק לגיאומטריה התאורית כי אם לגיאומטריה הפרוייקטיבית בכללה.

§ 3. יסודות הגיאומטריה הפרוֹיֶקטיבית. המשפטים של דיזארג, פַּסקַל ובריאנשון.[1]

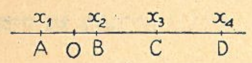
ראינו ב § 1 שהמכשיר המתאים והמספיק לגיאומטריה הפרוייקטיבית הוא הסרגל, המרשה למשוך קוים ישרים. הפעולות האפשריות כאן הן אפוא: א) לבנות את נקודת־חיתוכם של שני ישרים; ב) לקשר שתי נקודות ע״י ישר. ברגע הראשון נראה הדבר רחוק למדי, שאפשר להגיע בעזרת פעולות כה פשוטות לידי מסקנות חשובות ורב־גווניות ולפיתוח מקצוע מדעי בעל רמה ושימושים. הבה נעיין איך אפשר הדבר, בשימוש מינימלי או ללא שימוש באמצעים ובמושגים שמעבר לתחום הפרוייקטיבי.

נתחיל במושג היחס הכפול בין נקודות שבקו ישר אחד[2]. מושג זה

1. על־פי רוב נצטמצם גם בסעיף זה במישור, ורק פעמים ספורות נדבר על המצב במרחב התלת־ממדי.

2. המושג נמצא בראשונה, כנראה, אצל Pappos. העברתו לישרים (עיין להלן), במקום נקודות, בוצעה ע״י Carnot ו Poncelet.

יסודי הוא לגבי התורה שלפנינו; לשם הגדרתו נסתמך על החשבון בקטעים. בעצם אין הדבר מתאים לגיאומטריה הפרוייקטיבית המסתמכת על „חילה" (x חל ב y) בלבד ולא על מדידות; לשאלה זו נחזור להלן. השם יחס „כפול" בא להדגיש שאין כאן יחס בין שני ארכי־קטעים אלא יחס בין שני יחסים כאלה.



ציור 21

נניח שנתונות אילו ארבע נקודות שהן: A, B, C, D בקו ישר מסויים (ציור 21)[1]. כ„יחסן הכפול" (ABCD) נכנה את המנה של שתי מנות־קטעים

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} : \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = r. \tag{1}$$

מספרי־הקטעים $\overline{\mathrm{AC}}$ וכו׳ ייחשבו כאן כבעלי סימן מסויים[2] באופן שקיים $\overline{\mathrm{BA}} = -\overline{\mathrm{AB}}$; בפרט $\overline{\mathrm{AA}} = 0$. ביתר כלליות נכתוב:

$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CA}} = 0. \tag{2}$$

מתוך ההגדרה יוצא, שהיחס הכפול (ABCD) לא ישתנה

א) אם יומר הזוג „הראשון" (A, B) בזוג „השני" (C, D); לאמור:

$$(\mathrm{CDAB}) = (\mathrm{ABCD}).$$

ב) אם תומרנה זו בזו נקודות הזוג הראשון A ו B, ויחד עם זה נקודות הזוג השני C ו D; לאמור: (BADC) = (ABCD).

יש עוד סדירה רביעית בעלת אותו הערך ליחס הכפול, בנוסף על ערך־המוצא (ABCD) ועל התמורות א) וב); הוא המקרה שבו תבוצענה שתי התמורות א) וב) יחד. לפי זה נקבל: (DCBA) = (ABCD). מצאנו אפוא:

$$(\mathrm{ABCD}) = r = (\mathrm{CDAB}) = (\mathrm{BADC}) = (\mathrm{DCBA}). \tag{3_1}$$

אך יש אפשרויות־תמורה נוספות בין ארבע נקודות. קודם כל אפשר להמיר את המונה והמכנה במנה העיקרית (1) (מנה של מנות); לאמור: להמיר C ב D; נקבל $(\mathrm{ABDC}) = \frac{1}{r}$. לפי (3_1) נקבל מכך שלש תמורות נוספות בעלות אותו הערך:

$$(\mathrm{ABDC}) = \frac{1}{r} = (\mathrm{DCAB}) = (\mathrm{BACD}) = (\mathrm{CDBA}). \tag{3_2}$$

כדי לקבל תמורות הממציאות ערך שלישי, נוח להסתמך על הזהות (היעילה בכמה שטחים גיאומטריים):

$$\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{BD}} = 0. \tag{4}$$

1. בשים לב לתיאור הניתן להלן הוכנסו בציור 21 גם שעוריהן x_k של ארבע הנקודות — ביחס לנקודת־ראשית שרירותית O באותו ישר (שיש לראותו כ„ציר ה x"). אם הכוון מ O אל B ישמש כוון חיובי, יהיה x_1 שלילי: שוה לרוחק בין O ל A, אך בסימן —.

2. למשל, על־פי הקביעה: $\overline{\mathrm{AC}}$ חיובי אם C מימין ל A, שלילי אם C משמאל ל A.

יש לאשר מיד את קיום הזהות בעזרת ההצגות הבאות, המותרות על־פי (2) (השוה גם ציור 21):

$$\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD},\quad \overline{BC}=\overline{BD}-\overline{CD},\quad \overline{CA}=\overline{CD}-\overline{AD}.$$

על־סמך היחס (4), שאפשר לכתבו גם בצורה $\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}-\overline{AB}\cdot\overline{CD}$, נסיק מן ההגדרה (1):

$$(ABCD)+(ACBD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=$$
$$=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}-\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}=1.$$

נקבל אפוא, בצרפנו את התמורות דלעיל:

$$(3_3)\qquad (ACBD)=1-r=(BDAC)=(CADB)=(DBCA).$$

לבסוף נוכל לבצע על הערכים שב(3_2) וב(3_3) את תתהליכים (כל אחד לחוד, או את צירופם יחד) שבעזרתם עברנו מ(3_1) ל(3_2) ול(3_3); לאמור, את התמורות שהובילונו מן הערך r אל הערכים $\frac{1}{r}$ ו $1-r$. לפי זה נקבל:

$$(3_4)\qquad (ADBC)=1-\frac{1}{r}=(BCAD)=(DACB)=(CBDA),$$

$$(3_5)\qquad (ACDB)=\frac{1}{1-r}=(DBAC)=(CABD)=(BDCA),$$

$$(3_6)\qquad (ADCB)=\frac{1}{1-\frac{1}{r}}=1-\frac{1}{1-r}=(CBAD)=(DABC)=(BCDA).$$

הואיל וכל $24=6\cdot4$ סדירות אלו של ארבע הנקודות הנתונות שונות זו מזו, מהוות הן את כל אפני־הסדירה האפשריים של הרביעיה; שהרי אפשר לסדר ארבע נקודות לפי $24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ אפנים שונים בלבד.

לגבי הנקודות שברביעיה מזה וערך היחס הכפול מזה, נציין את המקרים המיוחדים הבאים.

ראשית, בתתנו לשתים מתוך נקודות הרביעיה להתלכד, נקבל על־פי (1) את המקרים:

א) אם $A=C$ או $B=D$, יהיה $r=(ABCD)=0$.

ב) אם $A=B$ או $C=D$, יהיה $r=(ABCD)=1$.

ג) אם $A=D$ או $B=C$, יהיה, לפי א) והנוסחה (3_2), $\frac{1}{r}=0$; במקרה זה נכתוב באופן סמלי $r=\infty$.

קל לראות כי הערכים הנ"ל: $0, 1, \infty$ ליחס הכפול מתקבלים במקרים דלעיל בלבד.

שנית, יש חשיבות מיוחדת למקרים שבהם ישוה היחס הכפול ל -1.

דבר זה יקרה אם, ורק אם, מתמלאים התנאים $r^2=1$, $r\neq1$; במקרה זה שונות אפוא ארבע הנקודות. נכתוב את התנאים בצורה:

$$r=\frac{1}{r}.\qquad (r\neq1)$$

במקרה זה יהיה גם $1-r=1-\frac{1}{r}$, $\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{r}}$.

לפי (3_1) – (3_6) מתברר אפוא, שבמקרה $r=-1$ נותנות כל התמורות האפשריות בין ארבע הנקודות שלשה ערכים שונים בלבד ליחס הכפול, ולא ששה כבמקרה הכללי. הלא $r=-1$ גורר אחריו:

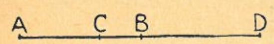
$$\frac{1}{r}=-1,\quad 1-r=1-\frac{1}{r}=2,\quad \frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{r}}=\frac{1}{2};$$

כלומר, $(-1, 2, \frac{1}{2})$ היא שלישיית הערכים האפשריים.

על־פי ההגדרה (1) מביע $r=-1$ את היחס

$$\overline{AC}:\overline{BC}=-\overline{AD}:\overline{BD};\quad \overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{BD}.$$

לאמור: הקטע $\overline{AB}$ יחולק „מבפנים" ו„מבחוץ" באותו היחס ע"י הנקודות C ו D. (השוה בציור 22, שבו ערכו המוחלט של היחס $\overline{AC}:\overline{BC}$ שוה ל 2:1.) קוראים לכך חלוקה הרמונית.[1] לפיכך קוראים לרביעיית־נקודות (A, B, C, D) „רביעיה הרמונית" אם היחס הכפול (ABCD) שוה ל -1; במקרה זה נקראת D „הנקודה ההרמונית הרביעית" לגבי השלישיה (A, B, C).



ציור 22

בהשלמה למה שנאמר ב § 5 של הפרק הקודם, יודגש עוד פעם התפקיד המכריע שיש לגדלים היחסיים (כלומר, להבחנה בין קטעים „חיוביים" ו„שליליים") בהגדרת היחס הכפול – כמו בהגדרת היחס הפשוט בין קטעים בגיאומטריה האַפינית. רק מתוך כך יכול החשבון לשים לב לאפשרויות השונות לגבי הסדר בין נקודות בקו ישר, בין קרניים באלומה וכו׳. דבר זה יובלט, אם נכתוב מעתה P_1, P_2, P_3, P_4 תחת A, B, C, D, ונבטא את היחס הכפול בעזרת שעוריהן x_k של ארבע הנקודות P_k בקו הישר הנידון (שהקורא יוכל לתארו כציר הx; השוה בציור 21, עמ׳ 243). היחס הכפול יופיע לפי זה בצורה[2]

1. המושג והשם הוכנסו כבר באסכולה של פיתגורס. ברם חשיבותו המכרעת בלטה רק בפיתוח הגיאומטריה הפרוייקטיבית.

2. על־פי הצורה הזאת או על־פי ההגדרה (1) מתבאר למה בחרו במונח „הרמוני" לרביעיה בעלת היחס הכפול -1. באסכולה של פיתגורס כינו — מטעמים גיאומטריים, אופטיים ואקוסטיים — את המנה $\frac{2kl}{k+l}$ בשם „הממוצע ההַרמוֹני בין k ו l". (במוסיקה למשל, יהיה לפי זה ה„קווארט"

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} \qquad (1')$$

צורה זו מראה שהיחס הכפול חיובי הוא, אם הנקודות P_3 ו P_4 נמצאות שתיהן בפנים או שתיהן מחוץ לקטע $\overline{P_1 P_2}$ (השוה בציור 21), ושהוא שלילי במקרה הנגדי, כלומר אם זוגות־הנקודות (P_1, P_2) ו (P_3, P_4) מפרידים זה בין זה (השוה בציור 22). שני מצבים שונים בין נקודות הרביעיה משַוים אפוא אותו ערך מוחלט ליחס הכפול; בלעדי היחסיות הזאת לא יתכן, למשל, להגדיר את המצב ההרמוני ע״י תנאי אחד ($r = -1$).[1]

בעזרת הביטוי ($1'$) ליחס הכפול נרחיב את הדיון לקראת המקרה שאחת מנקודות הרביעיה, למשל P_4, תהיה הנקודה הלא־אמיתית של הישר הנדון. לשם כך עלינו להשאיף x_4 לאינסוף. לפני עשותנו כך „נצמצם" ב x_4 את המנה שבנוסחה ($1'$); כלומר, נחלק את המונה ואת המכנה ב x_4. נקבל:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{1 - \dfrac{x_2}{x_4}}{1 - \dfrac{x_1}{x_4}}.$$

כשאוף x_4 אל ∞ (אין הבדל אם אל $+\infty$ או אל $-\infty$)[2], כן תשאפנה שתי המנות $\frac{x_2}{x_4}$ ו $\frac{x_1}{x_4}$ אל 0. בסמננו את הנקודה P_4 במקרה זה ב $P\infty$, נקבל אפוא:

$$(P_1 P_2 P_3 P_\infty) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

לגבי שתי נקודות נתונות P_1 ו P_2 אפשר לשאול: איפה צריכה להימצא הנקודה P_3, כדי שהרביעיה, שנקודתה הרביעית היא $P\infty$, תהיה הרמונית? התנאי הוא:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = -1, \quad x_3 - x_1 = x_2 - x_3, \quad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

מצאנו כך: בהינתן בקו ישר איזה קטע שהוא, יוצרים אמצע הקטע והנקודה הלא־אמיתית של הישר, יחד עם קצות הקטע, רביעיה הרמונית.

בהתאם לדואליות בין נקודות וישרים במישור (עמ' 229) אפשר

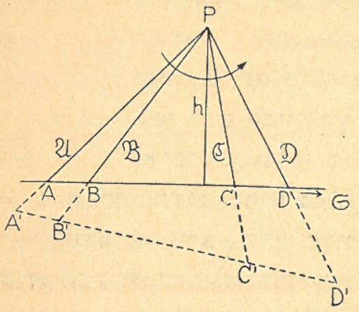
הממוצע ההרמוני בין הטון היסודי לאוקטאב שלו.) והנה, אם בציור 22, הבא להמחיש את היחס ההרמוני, נשים $\overline{AC} = k$, $\overline{AD} = l$, $\overline{AB} = m$, הרי קיים לפי הגדרת ההרמוניות $-\frac{l}{l-m} = \frac{k}{k-m}$, או $k(l-m) + l(k-m) = 0$, ז״א $m = \frac{2kl}{k+l}$.

1. בדבר זה שוגים כמה ספרים אלמנטריים המתכוונים לערכים מוחלטים ומאפיינים את המצב ההרמוני כמתאים לערך 1.

2. זה נובע מהגדרת הנקודה הלא־אמיתית שבקו ישר; עיין בעמ' 227.

להגדיר את היחס הכפול גם לגבי רביעיית ישרים (קרניים) העוברים דרך נקודה אחת[1]. כדי לתת קביעה מסויימת לזווית בין ישרים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$ העוברים דרך נקודה נתונה P (עיין בציור 23), נקבע קודם כל מגמת־סיבוב מסויימת („חיובית") סביב P; המגמה הנגדית תיחשב לשלילית. (השוה I, 147.) אם תסומן הזווית בין $\mathfrak{A}$ ל $\mathfrak{B}$ ב $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, יהיה לפי זה

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = -(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).^{2}$$



ציור 23

ביתר כלליות (השוה (2) בעמ' 243):

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{C}, \mathfrak{A}) = 0.$$

נגדיר עתה את היחס הכפול בין ארבע הקרניים $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ העוברות דרך P, בעזרת הסינוס הטריגונומטרי של זוויות, כדלקמן:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})} : \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}. \qquad (5)$$

גם במקרה זה יהיה היחס הכפול מספר (אם נתפוס גם ∞ כמספר, עיין לעיל). ההגדרה (5) מקבילה היא לחלוטין ל (1) בעמ' 243.

משפט יסודי שהיה ידוע כבר ל Pappos[3] מקשר את היחס הכפול בין נקודות ואת היחס הכפול בין קרניים, וזה תכנו (השוה ציור 23)[4]:

אם חותך ישר $\mathfrak{S}$, שאינו עובר דרך P, את ארבע הקרניים $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ העוברות דרך P בנקודות A, B, C, D, קיים השוויון בין יחסים כפולים

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (ABCD).$$

מותר, כמובן, לקרוא שויון זה גם בכוון ההפוך: בסמננו ב $\mathfrak{S}$ את הישר

---

1. המתחילים יוכלו לדלג על נושא זה (עד לסוף העמוד הבא).

2. הסכם זה אינו מספיק לקביעה חד־ערכית של הזוויות בין קוים ישרים, אפילו נוסיף שכל שתי זוויות, שההפרש בינֵיהן מחלק ב 360^0, נחשבות כשוות. הלא בהינתן הישרים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$ יש שתי זוויות קטנות מ 360^0 באופן שסיבובו של $\mathfrak{A}$ במגמה החיובית, כדי ערכה של הזווית, ילַכד את $\mathfrak{A}$ עם $\mathfrak{B}$. דו־ערכיות זו מתאימה לשני צדדיו (מן הנקודה P) של הישר; לכן גדולה אחת הזוויות מאחותה ב 180^0. דו־הערכיות תסולק, אם נקבע כוון מסויים לכל ישר ונדרוש שהסיבוב ילכד $\mathfrak{A}$ עם $\mathfrak{B}$ גם בהתחשב בכווניהם של הישרים (קרניים). — אולם קביעה כזו אינה נחוצה לשם קביעה חד־ערכית ליחס הכפול, מפני שכל אחת ממנות־הסינוסים המופיעות בנוסחה (5) לא תשתנה ע״י הפיכת כוונו של $\mathfrak{A}$; הדבר נובע מן הנוסחה $\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$. (השוה I, 252.)

3. מובן שלא היתה בידו הצורה הטריגונומטרית למשפט.

4. פה יש לשים לב לחלק העליון של הציור בלבד. החלק המסורג ממחיש דברים שיבואו.

בו חלות ארבע נקודות נתונות A, B, C, D, נגדיר $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ כקרניים המקשרות איזו נקודה נתונה P שמחוץ ל $\mathfrak{S}$ לנקודות A, B, C, D. לכן נוכל לנסח במלים את המשפט בכל אחת משתי הצורות הבאות:[1]

> ארבע קרניים דרך נקודה אחת נחתכות ע״י כל ישר, שאינו עובר דרך הנקודה, בארבע נקודות, שיחסם הכפול שוה ליחס הכפול בין הקרניים הנתונות. ארבע נקודות שבישר אחד „מוטלות" מכל נקודה שאינה חלה באותו ישר ע״י ארבע קרניים, שיחסן הכפול שוה ליחס הכפול בין הנקודות. – בקיצור: היחס הכפול נשמר (אינו משתנ֗ה) כלפי פעולות החיתוך וההטלה.

הוכחת המשפט ניתנת במלואים לחלק החמישי, מספר י).

משפט זה ממציא דרך פשוטה לבנית הנקודה ההרמונית הרביעית לגבי שלישיית־נקודות נתונה; דרך זו מבוארת במלואים לחלק החמישי, מספר יא).

הבה נתן למשפט דלעיל ניסוח נוסף, המסתמך על הציור 23 במלואו. הטלנו שם ממרכז ההטלה P את רביעיית־הנקודות (A, B, C, D) על קו ישר אחר, וקבלנו רביעיה חדשה (A', B', C', D'). על־פי המשפט הקודם ישוה היחס הכפול של כל אחת משתי הרביעיות ליחס הכפול $(\mathfrak{A}BCD)$; לכן הם שוים זה לזה. לאמור:

> היחס הכפול בין ארבע נקודות לא ישתנה מתוך הטלת הנקודות אל ישר אחר מאיזה מרכז P. היחס הכפול תלוי אפוא אך בזוויות הנוצרות ע״י הקרניים שממרכז־הטלה מסויים לארבע הנקודות.

בקשר למסקנות האחרונות מתעוררת שאלה המכוונת לנושא בכללו: משום מה עוסקים אנו, בקשר לתכונות הפרוייקטיביות, בארבע נקודות דוקא, ולכן ביחס הכפול? האם לא תשמור כל העברה פרוייקטיבית, כלומר: כל הטלה, גם את היחס „הפשוט" בין שלש נקודות (דהיינו היחס בין רחקיהן), כמו שהיא שומרת את היחס הכפול בין ארבע, וכמו שהעברה אֲפינית שומרת את היחס הפשוט בין שלש נקודות? התשובה היא שלילית: ההטלה אינה שומרת את היחס הפשוט, ולא עוד אלא שאפשר להעביר שלש נקודות שרירותיות בישר אחד לשלש נקודות שרירותיות במשנהו בעזרת העברה פרוייקטיבית! מכיון שהשלישיות הן שרירותיות, אפשר לבחרן כך שבאחת יהיה יחס הרחקים בין הנקודות שונה מן היחס שבשניה. הוכחה למשפט זה נמצאת במלואים לחלק החמישי, מספר יב).

מכאן יובן כמה חשוב המשפט דלעיל, הקובע שיש שמורה לגבי העברות פרוייקטיביות בין ארבע נקודות בישר אחד, והיא היחס הכפול.

1. גם קיומו של משפט זה בצורה דלעיל מסתמך על כך, שבהגדרת היחס הכפול, הן לנקודות הן לקרניים, המדובר הוא בגדלים יחסיים ולא מוחלטים. לולא כך היה צורך בהבחנה מסובכת לגבי סדר הנקודות והקרניים.

נקדים לטיפול בגיאומטריה הפרוייקטיבית עצמה ענין נוסף, שנודעה לו חשיבות בגיאומטריה האנליטית בכללה, והוא: השעורים (קואורדינטות) ההומוגיניים[1]. בעיקר נצטמצם שוב במישור, אף כי במרחב המצב דומה מאד.

קודם כל יזכור הקורא מה שלמד על שעורים רגילים (קַרטיסיים) x, y במישור; בפרט ידוע שלכל קו ישר העובר דרך נקודת־הראשית – פרט לציר ה y עצמו, שמשוואתו $x = 0$ – יש משוואה בעלת הצורה $y = ax$. (עיין I, 232.)

רמזנו גם פעמים (למשל ב I, 235) לגיאומטריה האנליטית במרחב התלת־ממדי, שבה מותאמים לכל נקודה שלשה שעורים קַרטיסיים x, y, z; למדנו שם שבמרחב מתארת המשוואה $z = ax + by + c$ מישור, שהוא היציר המרחבי השקול כנגד הישר בשני ממדים. כדי לבטא במרחב קו ישר יש צרך בשתי משוואות[2]; בהתאם למה שנאמר לעיל על המשוואה $y = ax$ במישור, יהיה במרחב זוג המשוואות לקו ישר, העובר דרך נקודת־הראשית ושאינו חל במישור ה (x, y) (כלומר, במישור $z = 0$), בעל הצורה

$$x = kz, \qquad y = lz,$$

שבה מסמנים k ו l מספרים קבועים. לשון אחר: על גבי כל קרן היוצאת מנקודת־הראשית ואינה חלה במישור ה (x, y) עצמו נשארים ערכי המנות $\frac{x}{z}$ ו $\frac{y}{z}$ קבועים.

הבה נשוב למישור! הן באופן עקרוני הן לשם טיפול פשוט בבעיות מסויימות, יש יתרון לשיטה המתארת כל נקודה במישור ע״י שלשה שעורים ξ, η, ζ ולא ע״י שנים x, y בלבד. הא כיצד? נשים

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{\zeta} \tag{6}$$

בתנאי $\zeta \neq 0$.[3] לעומת כל נקודה בעלת השעורים הרגילים x ו y יש לפי זה אינסוף שלישיות מתאימות

$$\lambda\xi, \qquad \lambda\eta, \qquad \lambda\zeta \qquad (\lambda \neq 0) \tag{7}$$

שבהן מסמן λ קבוע שרירותי השונה מאפס. מאידך קובעת כל מערכת (ξ, η, ζ),

1. הקורא שירגיש קושי בנושא זה יוכל לדלג גם עליו (עד לעמ' 252) — על כל פנים על הדברים הדנים במרחב — ויבין בכל זאת את רוב הרעיונות המובאים אחר כך.

2. נוכל לראות שתי משוואות אלו כמשוואותיהם של שני מישורים הנחתכים בישר הנדון. למשל (עיין בדוגמה הניתנת למעלה) מתארת המשוואה $x = kz$ מישור העובר דרך ציר ה y, $y = lz$ מישור העובר דרך ציר ה x; הישר שבו נחתכים שני המישורים האלה — לאמור: מערכת נקודותיהם המשותפות — עובר אפוא דרך נקודת־החיתוך בין ציר ה x וציר ה y, ז״א דרך נקודת־הראשית.

3. להלן נשתחרר מתנאי זה ונדרוש רק שלא יתאפסו ξ, η, ζ יחד. ואמנם השלישיה $(\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0)$ אינה מתארת שום נקודה. שם נלמד לדעת טעם גיאומטרי־הסתכלותי לכך.

שבה $\zeta \neq 0$, לפי (6) באופן חד־ערכי שעורים רגילים x ו y, ולכן נקודה מסויימת. שתי המערכות (ξ, η, ζ), $(\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta)$ קובעות אותה הנקודה. הגורם השרירותי λ הוא המהווה קושי פסיכולוגי ידוע בעיני המתחיל ללמוד על שעורים הומוגיניים.

המשוואה הכללית לקו ישר בשעורים קרטיסיים $Ax + By + C = 0$ עוברת לפי (6) אל הצורה ההומוגינית

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{8}$$

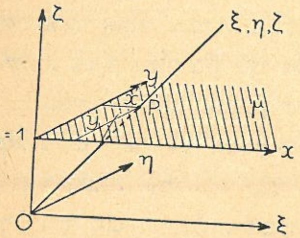
בהתאימנו נקודה לשלישיה (ξ, η, ζ) התנינו $\zeta \neq 0$, אף כי לפי החשבון הפורמלי אין לראות משום מה יש להפלות לרעה אחד משלשת השעורים ע״י הגבלה זו. ואמנם אין צורך בהפלייה זו – וביתר הבלטה: הכנסת השעורים ההומוגיניים היתה מפסידה את ערכה אילו עמדנו בהגבלה $\zeta \neq 0$. אדרבה, ההיתר לתת ל ζ גם את הערך 0 (מתוך שמירה על הכלל שלא יתאפסו שלשת השעורים יחד), הוא הנותן לנו כח לעשות חיל בתחום, בו נשארנו אובדי עצה כמעט כל עוד החזקנו בשעורים הקרטיסיים: הלא הוא תחום הנקודות הלא־אמיתיות שעליהן דובר דרך הכנה כבר בעמ׳ 226. כשם שהשלישיות (ξ, η, ζ) בעלות ערכי ζ שונים מ 0 מתארות את הנקודות „האמיתיות״ (x, y), כן תתארנה השלישיות $(\xi, \eta, 0)$ את הנקודות הלא־אמיתיות. (גם כאן, כמו בהכנסת הנקודות האלה דרך הבעיה של נקודת־החיתוך של שני ישרים במישור (עמ׳ 227), נמצאת הצדקה פסיכולוגית לתפיסת הנקודות הלא־אמיתיות כ„אינסופיות״ כביכול. שכן בהתקרב ζ ל 0 יגדלו, בהתאם ל(6), ערכיהם המוחלטים של x ו y, בתנאי ש ξ ו η שונים מ 0. יש אפוא הצדקת־מה לדבר במקרה $\zeta = 0$ על ערכים „אינסופיים״ ל x ו y, או לפחות לאחד מהם (אם $\xi = 0$, או $\eta = 0$).) בשפת השעורים ההומוגיניים תהיינה אפוא הנקודות הלא־אמיתיות אותן נקודות ששעורן השלישי ζ שוה ל 0.

גם במקרה זה יש אינסוף שלישיות (7) המציינות אותה הנקודה; לאמור, נקודה לא־אמיתית מסויימת תתואר ע״י אינסוף השלישיות $(\lambda\xi, \lambda\eta, 0)$ שבהן $\lambda \neq 0$. אחד הערכים ξ או η יוכל גם הוא להתאפס, אך לא שניהם.

לקורא המכיר במקצת את הגיאומטריה האנליטית במרחב, או שהבין לפחות את המשפטים הספורים שהובאו לעיל לגבי נושא זה, אפשר לתת המחשה הסתכלותית במרחב התלת־ממדי להכנסתם העיונית של השעורים ההומוגיניים במישור.[1]

1. מובן מאליו, שאותה חשיבות שיש לשעורים אלה במישור, יש להם במרחב תלת־ממדי; שם תופיע, במקום השלישיה (x, y, z), רביעיה (ξ, η, ζ, τ) הקובעת את הנקודה. אם רוצים לתת „המחשה הסתכלותית״ לשעורים ההומוגיניים במרחב, נחוץ לצאת אל המרחב בעל ארבעה ממדים (עיין בפרק השמיני, § 1). ההמחשה הבאה במרחב התלת־ממדי קשה היא במקצת, והקורא המדלג עליה לא יסבול אחר כך.

נראה לרגע את ξ, η, ζ כשעוריהן הרגילים (הַקרטיסיים) של נקודות במרחב התלת־ממדי, תחת ראותנו אותם כשעורים הומוגיניים במישור μ שבו אנו דנים. נקודת־הראשית לשעורים ξ, η, ζ תסומן ב O. כלפי המישור μ עצמו נשתמש בשעורים הקרטיסיים הרגילים x ו y. אם נשים $\xi = x$ ו $\eta = y$, הרי פירוש הדבר לפי (6): $\zeta = 1$; לאמור: במרחב (ξ, η, ζ) מופיע במקרה זה μ כמישור מקביל למישור־השעורים (ξ, η) ברוחק 1 ממישור זה. (השוה בציור 24.)



ציור 24

הבה נבחר איזו נקודה $P = (x, y)$ במישור μ ונקשר אליה את הראשית O ע״י קרן ישרה! כאמור לעיל, תשארנה המנות $\frac{\xi}{\zeta}$ ו $\frac{\eta}{\zeta}$ קבועות לאורך כל הקרן; אך הואיל וכנגד $\zeta = 1$ קבלנו $\xi = x$, $\eta = y$, צריך להיות בכל הקרן

$$\frac{\xi}{\zeta} = x, \qquad \frac{\eta}{\zeta} = y.$$

והנה פירוש הדבר הוא שבעזרת השעורים ההומוגיניים ξ, η, ζ „העתקנו״ את הנקודה הפרוטה P של μ לקרן, ולכן את המישור μ כולו לאלומת־הקרניים היוצאת מנקודת־הראשית O של „מרחב־העזר״ התלת־ממדי לכל הכוונים, אלומה היוצרת מעין „הטלה״ של המישור אל המרחב. לפיכך אפשר לומר: שעוריה ההומוגיניים של נקודה P במישור μ אינם אלא שעוריהן המרחביים הקרטיסיים של הנקודות שבקרן, היוצאת מ O והמטילה את P אל תוך המרחב.

לפי זה נמצא לפנינו מעין פשר הדבר, משום מה אין השעורים ההומוגיניים קבועים אלא תלויים בגורם שרירותי λ; הלא הם מתאימים לאינסוף הנקודות שבקרן הנדונה! כן מתברר בדרך זו, כיצד קבלנו בעזרת ערכים סופיים ל ξ, η, ζ גם את הנקודות הלא־אמיתיות של המישור μ בעלות „שעורים אינסופיים״ x ו y. נשיג נקודות אלו ע״י הקרניים מ O החלות במישור ה (ξ, η); קרניים אלו מקבילות אפוא למישור μ. לשון אחר: נשיג את הנקודות הלא־אמיתיות בשימנו $\zeta = 0$.[1]

לכל נקודותיו הלא־אמיתיות של המישור מתאים ישר אחד, „הישר הלא־אמיתי״ של המישור, שבו חלות הנקודות הללו. (השוה ב § 1, עמ׳ 229.) דבר זה נמצא בהתאמה לכך, ש„משוואת״ הנקודות הלא־אמיתיות מצאנו $\zeta = 0$; כלומר, משוואה ליניארית, או משוואת קו ישר, המתקבלת

1. על־סמך זה מתברר גם הפרט דלעיל, שלא התאמנו נקודה במישור μ לשלישיה $(\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0)$, כלומר לנקודת הראשית O במערכת השעורים המרחבית. הלא ע״י הנקודה O בלבד לא תיקבע כל קרן מסויימת, ולכן גם לא תיקבע כל נקודה (x, y).

מתוך (8) בקבענו $A=B=0$, בעוד ש C יוכל לקבל כל ערך שונה מ 0. לסידור פורמלי זה יש, לפי העתק המישור למרחב ממרכז ההטלה O, גם משמעות הסתכלותית; הלא לכל ישר s במישור μ מתאימה לפי המחשתנו אלומת־קרניים מישורית, והיא: אלומת הקרניים היוצאות מ O והעוברות דרך כל הנקודות של s. וחילופו: כל אלומת־קרניים מישורית שמוצאה מ O, קובעת ישר מסויים ב μ, והוא החיתוך בין האלומה לבין μ. אולם לגבי החלק השני של כלל זה יש מקרה יוצא מן הכלל: אם האלומה חלה במישור ה(ξ, η) עצמו, כלומר ב $\zeta=0$. טבעי הדבר אפוא שנכלול מקרה זה בקבענו: $\zeta=0$ יהיה הישר הלא־אמיתי של μ, שהוא גם החיתוך בין שני המישורים הנדונים, בין μ ומישור ה(ξ, η).

הצורך לראות כמקומן של כל הנקודות הלא־אמיתיות במישור קו ישר דוקא, מתברר אף לפי אספקלריה אחרת שאינה מוציאה אותנו מן המישור. לפי עקרון־היציבות (עמ׳ 48) לגבי החוק, שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר אחד ויחיד שבו הן חלות, קובעות בפרט גם שתי נקודות לא־אמיתיות Q_1 ו Q_2 של המישור ישר מסויים q (התלוי לכאורה בשתי הנקודות הלא־אמיתיות Q_1 ו Q_2 שבעזרתן הוגדר q). בישר q לא תחול שום נקודה אמיתית; שהרי כל ישר דרך נקודה אמיתית P – לאמור: כל ישר אמיתי – מכיל נקודה לא־אמיתית אחת בלבד (עמ׳ 227/8), הקובעת יחד עם P את הישר. מאידך מכיל הישר q את כל הנקודות הלא־אמיתיות של המישור. גם דבר זה נובע מעקרון־היציבות, הפעם לגבי החוק האומר שלכל שני ישרים שונים משותפת נקודה יחידה: שכן לפי זה מכיל q, לעומת איזה ישר אמיתי שהוא s של המישור, כנקודת־החיתוך בין q ו s את הנקודה הלא־אמיתית דוקא של s; והלא כל נקודה לא־אמיתית של המישור חלה באחד (לא באחד בלבד!) מבין ישרי המישור. לפיכך אין q תלוי בבחירת הנקודות Q_1 ו Q_2, אלא q הוא הישר הלא־אמיתי של המישור, ונקבע ע״י כל שתי נקודות לא־אמיתיות שונות. – באופן דומה יש לראות שכל הנקודות הלא־אמיתיות שבמרחב חלות במישור אחד, במישור הלא־אמיתי של המרחב התלת־ממדי.

יברר נא הקורא לעצמו שקביעה זו, המעניקה למישור נקודות לא־אמיתיות כפי נקודותיו של ישר, היא „שרירותית" במובן זה שהיא נוחה: היא באה לשם שמירת החוקים היסודיים על החילה בין נקודה וישר. במקצועות אחרים יתכן לתקן קביעה אחרת; למשל בתורת הפונקציות המרוכבות (ו, 341) ניתנת למישור של גאוס (ו, 163/4) נקודה לא־אמיתית אחת בלבד. מי שיודע את ההעתק הסטיריאוגרפי בין הכדור לבין מישור המשיק לו, ינחש בנקל את יתרונה של קביעה זו – שלפיה תותאם הנקודה הלא־אמיתית של המישור לאותה נקודה של הכדור, הנגדית לנקודת המגע; למשל ל„קוטב הצפוני", אם המישור משיק לכדור ב„קטבו הדרומי".

אחרי ההכנות המפורטות האלה, שבאו לברר את היחס הכפול מזה ואת השעורים ההומוגיניים מזה, נתחיל לטפל בגיאומטריה הפרוייקטיבית במישור[1] לפי אותה שיטה אנליטית שנקטנוה בסעיף הקודם כלפי הגיאומטריה האפינית.

פה כמו שם כוונתנו היא לחבורה של העברות ההופכות כל קו ישר שוב לקו ישר – כלומר, לחבורה של העברות קוויות או ליניאריות (עיין בביאור הניתן בעמ׳ 237). ברם שם הצגנו את התנאי הנוסף שכל נקודה אמיתית תועבר לנקודה אמיתית גם היא; כלומר, שכל שני ישרים מקבילים יועברו לישרים מקבילים; משום כך נאלצנו להתנות שבמשוואות ההעברה הליניארית (עיין (2) בעמ׳ 237) לא יופיע מכנה. עתה אין להתנות כל תנאי נוסף על התנאי הקובע, שישר יועבר לישר. נוכל לצאת, כפי שיתברר להלן, תחת המשוואות (2) הנ״ל, ממשוואות־ההעברה הבאות (של „העברה ליניארית שבורה"):

$$\bar{x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \qquad \bar{y}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}. \qquad (9)$$ [2]

ואמנם לפי זה מתבטא הישר $A\bar{x}+B\bar{y}+C=0$ בעזרת x ו y בצורה

$$A(a_1x+b_1y+c_1)+B(a_2x+b_2y+c_2)+C(a_3x+b_3y+c_3)\equiv$$ [3]

$$(Aa_1+Ba_2+Ca_3)x+(Ab_1+Bb_2+Cb_3)y+(Ac_1+Bc_2+Cc_3)=0,$$

דהיינו ע״י משוואת־ישר מתאימה בשעורים x ו y; דבר זה ניתן גם להיפוך (השוה להלן).

בהכניסנו תחת השעורים הקרטיסיים (x, y) ו $(\bar{x}, \bar{y})$ שעורים הומוגיניים (ξ, η, ζ) ו $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ על־פי המשוואות (6) בעמ׳ 249 ועל־פי המתאימות להן $\bar{x}=\frac{\bar{\xi}}{\bar{\zeta}}$, $\bar{y}=\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}}$, נקבל תחת (9) משוואות־העברה חדשות שהן הומוגיניות.

---

1. ביסוס אכסיומטי (השוה בפרק השמיני) לגיאומטריה הפרוייקטיבית נמצא בספר
A. N. Whitehead: The axioms of projective geometry. 1906.
כספרי־לימוד לגיאומטריה הפרוייקטיבית נציין, נוסף על הספרים שצויינו בעמ׳ 225:
T. F. Holgate: Projective pure geometry. 1930.
D. J. Struik: Analytic and projective geometry. 1953. 300 pp.
J. W. Young: Projective geometry. 1930.

2. העובדה שכאן מופיע אותו המכנה הליניארי במשוואת־ההעברה לגבי שני השעורים, אינה מקרית אלא הכרחית לדרישה שישר יועבר לישר, כפי שמראה החשבון שלמעלה. הוא הדין במרחב כלפי שלש משוואות־ההעברה.

3. סימן־הזהות $\equiv$ בא שוב להשמיענו, כי אין כאן אלא הצגה נוספת (שאין בה כל חידוש) לביטוי אשר התאפסותו מותנית ע״י המשוואה שלפנינו. כמו־כן גם להלן.

לשם כתיבתן בצורה נוחה נסלק את המכנים במשוואות

$$\frac{\bar{\xi}}{\bar{\zeta}} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta}{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta}, \qquad \frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}} = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta}{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta}.$$

נבצע בפשטות סילוק זה, בהשוותנו את המונים למונים ואת המכנה למכנה, בהוספת „גורם־מַתכוּנתי" k. לפי זה תעמודנה במקום (9) משוואות־ההעברה ההומוגיניות

$$k\bar{\xi} = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \quad k\bar{\eta} = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \quad k\bar{\zeta} = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta.\ ^{1} \tag{10}$$

המשוואות (9) מבררות, כי „בדרך־כלל" תועבר נקודה אמיתית (x, y) שוב לנקודה אמיתית $(\bar{x}, \bar{y})$ – פרט למקרה שהמכנה מתאפס. מקרה זה יחול אם $\bar{\zeta} = 0$, כפי שמראה המשוואה האחרונה ב (10). שוב מתאשר שמוצדק הדבר לכנות את הנקודות הלא־אמיתיות [2] בשם „נקודות אינסופיות"; שהרי אם המכנה $a_3x + b_3y + c_3$ (או $\bar{\zeta}$) מתקרב ל 0, יגדלו ערכי השעורים $\bar{x}$ ו $\bar{y}$ או לפחות אחד מהם.

כדי להיווכח שההעברה הפרוייקטיבית (9) או (10) מהווה העתק בין המישור המקורי והמישור החדש, מספיק להראות שיש למשוואות (10) היפוך חד־ערכי המייצג גם את ξ, η, ζ בצורה ליניארית שלמה ע"י $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$; דהיינו בצורה

$$\varkappa\xi = \alpha_1\bar{\xi} + \beta_1\bar{\eta} + \gamma_1\bar{\zeta}, \quad \varkappa\eta = \alpha_2\bar{\xi} + \beta_2\bar{\eta} + \gamma_2\bar{\zeta}, \quad \varkappa\zeta = \alpha_3\bar{\xi} + \beta_3\bar{\eta} + \gamma_3\bar{\zeta}. \tag{11}$$

באלגברה (בתורת המשוואות הליניאריות) מוכיחים שיש היפוך [3] כזה אם, ורק אם, קוצב־ההצבה אינו מתאפס; לאמור, אם

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2) \neq 0. \tag{12}$$

הוכחה זו ניתנת במלואים לחלק החמישי, מספר יג).

אם התנאי (12) מתמלא[4], מהווה אפוא (9) או (10) התאמה חד־חד־ערכית בין הנקודות שבשני המישורים.

1. אם נבין משוואות אלו, כפי שנהגנו בעמ׳ 251, כמכוונות לשעורים קַרטיסיים בשני מרחבים תלת־ממדיים (ξ, η, ζ) ו $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, יש לפנינו העברה אַפינית בין שני המרחבים, הואיל וההעברות (10) שלמות הן.

2 מדובר כאן בנקודות הלא־אמיתיות במישור „החדש" (של $\bar{x}$ ו $\bar{y}$, או $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$). באשר למישור „המקורי", הרי חלות הנקודות הלא־אמיתיות בישר $\zeta = 0$: הן תועברנה אפוא בדרך כלל לנקודות אמיתיות של המישור החדש.

3. ההיפוך הוא גם חד־ערכי, פרט לאפשרות של כפל בגורם קבוע שרירותי (בהקבלה לגורם k). לדבר זה דאגנו ע"י הכנסת הגורם $\varkappa$.

4. מסקנה מובנת כמעט מאליה היא, שבמקרה זה גם קוצב ההצבה ההופכת, המורכב בצורה אנלוגית מן ה α_n, β_n, γ_n, אינו מתאפס.

אם $D = 0$, נקבל העברה „פתולוגית", שיש לה חשיבות רבה מנקודת מבטה של הגיאומטריה התיאורית; השוה בעמ׳ 242.

ההשוואה בין (10) ו (11) מראה, שקיום משוואה ליניארית $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$ בין השעורים ξ, η, ζ גורר אחריו קיומה של משוואה ליניארית מתאימה בין $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, וחילופו. זאת אומרת: **ההעברה שלפנינו מעבירה כל ישר של המישור האחד לישר מסויים במישור השני.** אישרנו בדרך זו מה שהיה צפוי מראש – שהרי לשם הישג זה השתמשנו במשוואות־העברה ליניאריות דוקא. אין חידוש בכך כלפי ההעברות האֲפיניות; החידוש הוא בזה, שישר אמיתי ידוע במישור המקורי יועבר לישר הלא־אמיתי במישור החדש, ואילו הישר הלא־אמיתי של המישור המקורי יועבר לישר אמיתי (פרט, כמובן, למקרה [האפיני] שבו $a_3 = b_3 = 0$).

מסקנתנו האחרונה ניתנת גם להיפוך, דבר שאינו מובן מאליו. לאמור, קיים המשפט שהוכח ע"י Möb us (הוכחתו קשה במקצת ולא תינתן כאן):

כל התאמה חד־חד־ערכית (ורציפה) בין נקודותיהם של שני מישורים, המעבירה כל קו ישר לקו ישר, היא העברה פרוייקטיבית; כלומר בעלת הצורה (9) או (10).

משפט זה מראה, שכל העברה **היטלית** במובן הגיאומטריה, כלומר הטלה מרכזית או הטלה במקבילים, היא באמת **פרוייקטיבית** לפי ההגדרה האנליטית (העברה ליניארית שבורה), שהרי כל הטלה מעבירה ישר שוב לישר.

ההוכחה לכך, שמערכת כל ההעברות הפרוייקטיביות מהווה **חבורה** לגבי הפעולה של צירוף שתי העברות, מבוצעת בעקרונה בדיוק כהוכחה המתאימה לגבי ההעברות האפיניות (עמ׳ 238). לפי המשפט האחרון נוכל לומר: בקחתנו מבין כל הקוליניאציות – ז"א ההעברות ההופכות תמיד ישר לישר –, שכולן יחד יוצרות את החבורה הפרוייקטיבית, אותן קוליניאציות בלבד ההופכות כל ישר אמיתי לישר אמיתי, נקבל **חבורה חלקית** של החבורה הפרוייקטיבית, והיא החבורה האפינית. בהצגתן האנליטית של ההעברות (עמ׳ 237) מצויינות ההעברות האפיניות (בין ההעברות הפרוייקטיביות כולן) בכך, שההצגה **אינה מכילה מכנה.**

באשר למושג **ההקבלה** (קווים מקבילים; ונוסף על זה במרחב: מישורים מקבילים, או ישר מקביל למישור), הרי אין לו מקום שיטתי בגיאומטריה הפרוייקטיבית, כפי שהוסבר ב § 1. הלא שני ישרים מקבילים מצויינים בזה, שאין להם נקודת־חיתוך; לשון אחר: שנקודתם המשותפת היא לא־אמיתית. אך אין הגיאומטריה הפרוייקטיבית מפלה בין נקודות אמיתיות ללא־אמיתיות, הואיל וכל נקודה אמיתית תוכל להיהפך לנקודה לא־אמיתית ע"י העברה פרוייקטיבית, וחילופו. הישר הלא־אמיתי הוא שוה־זכויות עם שאר הישרים; לכן זוגות הישרים, שנקודות־חיתוכם חלות בישר ההוא והנקראים לפי זה

„מקבילים" בגיאומטריות פחות כלליות. לא נשתנו כאן כל עיקר משאר הזוגות. השקפה זו, יחד עם הגדרת היחס הכפול לגבי נקודות בקו ישר ולגבי קרניים (ישרים) דרך נקודה, משמשות בסיס לעקרון הדואליות במישור (עמ׳ 229), שמוצאו מקיומו הכללי של המשפט „שתי נקודות שונות קובעות ישר מסויים, ושני ישרים שונים קובעים נקודה מסויימת".

כיוצא בזה במרחב התלת־ממדי: שם נחתכים כל שני מישורים, אף אם הם מקבילים, בישר מסויים; במקרה ההקבלה הוא הישר הלא־אמיתי המשותף לשניהם. למערכת הנקודות בישר אחד מתאימה כאן לפי הדואליות מערכת המישורים העוברים דרך ישר אחד, והיחס הכפול בין ארבעה מישורים כאלה יוגדר באופן אנלוגי להגדרה שבעמ׳ 247. אולם במרחב שוררת רב־גווניות יתירה; הלא כאן קובעות כל שלש נקודות, שאינן חלות בישר אחד, מישור מסויים, וכן — מתוך המרה של נקודה במישור, ושל ישר בישר — קובעים כל שלשה מישורים, שאינם עוברים דרך ישר אחד, נקודה מסויימת.

כשם שההעברות הפרוייקטיביות מעבירות כל ישר במישור שוב לישר, כן מעבירות הן (השוה עמ׳ 239) כל עקום מן הסדר השני (חתך־חרוט) — המוגדר ע"י משוואה ריבועית בין השעורים x ו y — שוב לעקום כזה. השיטה הפשוטה ביותר להוכיח זאת היא החשבון, וכאן לפנינו שתי דרכים הבאות כאחת. מצד אחד נוכל לקחת את העקום בצורתו הרגילה (עיין (6) בעמ׳ 239) ולהכניס במקום x ו y את ההצבה (השוה (9) בעמ׳ 253)

$$x = \frac{\alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y} + \gamma_1}{\alpha_3\bar{x} + \beta_3\bar{y} + \gamma_3}, \qquad y = \frac{\alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \gamma_2}{\alpha_3\bar{x} + \beta_3\bar{y} + \gamma_3},$$

בתנאי שהקוצב $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ אינו מתאפס. לפי זה תתקבל (מתוך חשבון קל, שאת תוצאתו יש לחזות מראש מבלי לבצעו בפועל[1]) משוואה ריבועית בין $\bar{x}$ ו $\bar{y}$; כלומר, משוואה מן הסוג (6) הנ"ל. פירוש הדבר, שההצבה דלעיל, המבטאת את ההעברה הפרוייקטיבית הכללית, הופכת עקום מן הסדר השני לעקום מאותו סדר. — מצד שני אפשר לעשות את החשבון הנדון בעזרת שעורים הומוגיניים, דהיינו על־פי משוואות־ההצבה (11) בעמ׳ 254; לשם כך יש לצאת מן הצורה ההומוגינית לעקום מן הסדר השני, צורה המתקבלת מתוך (6) הנ"ל ע"י ההצבה (6) בעמ׳ 249: $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $y = \frac{\eta}{\zeta}$. לפיכך הצורה של משוואת העקום היא:

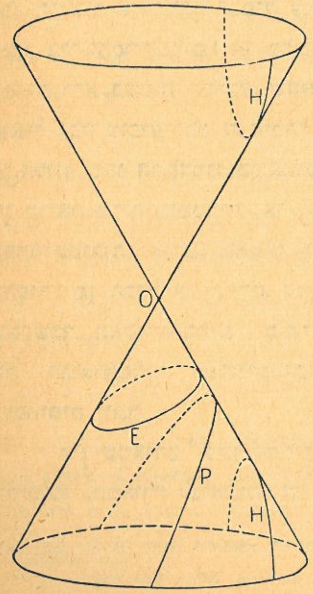
$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi\zeta + e\eta\zeta + f\zeta^2 = 0.$$

אך בניגוד למה שנאמר לגבי ההעברות האפיניות בעמ׳ 240, לא תהפוך העברה פרוייקטיבית כללית אליפסה דוקא לאליפסה, פראבולה לפראבולה, היפרבולה להיפרבולה. כמו שבין זוגות

1. לשם כך כופלים את המשוואה, המתקבלת ע"י ההצבה, במכנה המשותף $(\alpha_3\bar{x} + \beta_3\bar{y} + \gamma_3)^2$.

ישרים בגיאומטריה הפרוייקטיבית אין הצטיינות מיוחדת לישרים מקבילים זה לזה, כך אין בידי הגיאומטריה הזאת להפלות בין חתכי־החרוט מן הסוגים השונים, אלא כולם שקולים זה כנגד זה. באופן גיאומטרי מתברר הדבר מיד על־פי ההסבר שניתן[1] בגיאומטריה האפינית. שם שימשה מבחן־הפלייה מציאותן ואי־מציאותן של נקודות לא־אמיתיות בעקום; והרי כאן יש שויון־זכויות בין הנקודות האמיתיות והלא־אמיתיות! מאידך, מי שיודע את האפיון האנליטי לעקומים השונים מן הסדר השני, יאשר את הדבר בנקל גם דרך חשבון; לפיו מציאות המכנה במשוואות־ההעברה היא הגורמת להפיכת אליפסות להיפרבולות וכו׳.

ממהלך ההוכחה יוצא שאפשר להכליל את המסקנה בשני כוונים: ראשית, מן הסדר 2 לכל סדר שהוא; שנית, מן המישור למרחב. באמת, אחרי שיוגדר — בדרך סינתיטית או אנליטית — הסדר לעקום במישור או למשטח במרחב, רואים מיד לפי השיטה דלעיל, שהסדר לא ישתנה מתוך הפעלת איזו העברה פרוייקטיבית. באשר למרחב, מראה ההכללה שכל העברה פרוייקטיבית הופכת „משטח מן הסדר השני", כגון אליפסואיד (בפרט: כדור), או היפרבולואיד חד־יריעָתי או דו־יריעתי וכו׳, למשטח מן הסדר השני — אך לאו דוקא משטח החסום כולו בתחום סופי (אליפסואיד) למשטח מאותו הסוג; וכו׳. היציאה למרחב מרשה גם שימושים אחרים, כגון הטלה ממרכז מסויים — שבצענו אותה במישור רק לגבי קבוצת נקודות הנמצאות בקו ישר[1] — לגבי קבוצת נקודות הנמצאות במישור; למשל, בקו עקום סגור במישור. השימוש המפורסם ביותר, הנותן מיד באופן הסתכלותי את הקירבה הפרוייקטיבית בין העקומים השונים מן הסדר השני, מבוצע כלפי חָרוּט מעגלי, הוא משטח המחולל ע"י הקרניים היוצאות ממרכז מסויים O אל נקודותיו של מעגל ידוע והלאה, בתנאי ש O חל באנך על מישור המעגל במרכזו. בחתכנו את החרוט במישור, נקבל „חתך־חרוט"; בפרט אליפסה (או פראבולה או היפרבולה), אם הזווית בין המישור לבין „ציר" החרוט גדולה (או שוה, או קטנה) מן הזווית שבין מחוללי החרוט ובין צירו. (במקרה ההיפרבולה יש חשיבות לדבר שהחרוט משתרע, בהתאם להגדרתו הכללית, משני עברי המרכז O; לאמור: נחוץ להאריך את הקרניים אחורנית על מנת שתהיינה לישרים שלמים.) אפשר להמחיש את הדבר



ציור 25

1. השוה ציור 23 בעמ׳ 247, וכן מספר יא) במלואים לחלק החמישי.

בצורה הסתכלותית על־פי תבנית (מודל) במרחב; למודל כזה רומז הציור 25.

לפי תבנית כזו נוח לבטא את הדברים האמורים למעלה גם בצורה אחרת. נדגיש קודם כל, שיש להביא בחשבון אף את המקרה שמישור־החיתוך עובר דרך מרכז־החרוט O עצמו. במקרה זה נקבל כחתך זוג של ישרים או ישר או את O בלבד; לכן נקרא זוג־ישרים גם חתך־חרוט „סורר". כאשר מישור־החיתוך לא יעבור דרך O, יהיה עקום־החיתוך עקום סגור E (דהיינו אליפסה), אם המישור חותך את כל מחוללי החרוט. אם נטה את המישור יותר מזה, יושג פעם מצב שבו מקביל המישור לאחד המחוללים: החתך הוא פראבולה P אשר „צירה" מקביל לאותו ישר מחולל. בהטותנו את המישור מזה והלאה נקבל מצב שבו מקביל המישור לשני מחוללים שונים; במקרה זה מורכב החתך משני חלקים נפרדים, שני ענפי היפרבולה H, שכן המישור חותך גם את הארכת החרוט מעבר ל O. (שני המחוללים הנידונים קובעים את כווני האסימפטוטות.) לפי זה אפשר לראות את הפראבולה כמקרה־גבול בין האליפסה להיפרבולה.

בדרך זו הכרנו לדעת כמה „שמורות" (עמ' 231) של הגיאומטריה הפרוייקטיבית. הפשוטה בין כולן היא היחס הכפול, ובמובן ידוע אפשר להעמיד את כל שאר השמורות על היחס הכפול, כשם שבגיאומטריה המֶטרית אפשר להעמיד את כל שאר השמורות, כגון שטח וכו', על השמורה האַפיינית: ארכו של קטע. אך מתעוררת כאן בעיה שהיא חמורה מבחינה עקרונית: הרי הגדרנו את היחס הכפול עצמו בדרך מטרית ולא פרוייקטיבית, כיחס בין יחסי־קטעים! או בלשון המכשירים האפייניים: הגדרנוהו בעזרת קנה־המידה ולא בעזרת הסרגל, שהוא המכשיר המתאים לגיאומטריה הפרוייקטיבית, הואיל ובה מופיע יחס ה„חילה" בלבד. אמנם גישה זו לא היתה לאבן־נגף על פי הכוון שבו התקדמנו בגיאומטריה בפרק זה: הכוון מן הפרט אל הכלל, מן הגיאומטריה המטרית או האֶקוויפוֹרמית, דרך הגיאומטריה האֲפינית, אל הפרוייקטיבית. אולם, כאמור לעיל, המתימטיקנים רגילים להתקדם לפי הכוון ההפוך: מן הכלל אל הפרט. לכן היה רצוי כאן לראות את הגיאומטריה האפינית, וכל־שכן האקוויפורמית, כפירוטים במרחב הפרוי־קטיבי, תחת ראותנו את הגיאומטריה הפרוייקטיבית כחלקה דלת־תוכן בתוך מרחבים עשירים ומפורטים יותר.

פון שטאודט[1] נתן פתרון, שהוא כמעט מניח את הדעת מבחינה עקרונית, בביסוסו „הטהור" לגיאומטריה הפרוייקטיבית. אמנם פתרונו קיצוני הוא: באשר

1. K. C. G. von Staudt. ספרו Geometrie der Lage הופיע ב 1847, והמשכו ניתן בשלשת החלקים של Beiträge zur Geometrie der Lage (1856—1860).

ההגדרה הרגילה ליחס הכפול מסתמכת על ארכי קטעים, דהיינו על מספרים, הרחיק לכת עד כדי הדרישה לגרש לחלוטין את המספרים, ואתם את השיטות האנליטיות, מן הגיאומטריה הפרוייקטיבית. באמת הראו מחקריו שהדבר אפשרי; אך יותר לא צמח מהם, כי הקרבן שיש להקריב על מזבח המטרה הנ"ל קשה מדי. הגיאומטרים לא קבלו עליהם את הסיבוכים הנובעים מתוך ויתור מלא על האנליזה ופרקו עול זה מעל צוארם. אפשר לומר (השוה בפרק הקודם, עמ' 174) שמנצחון עיוני זה של „השיטה הגיאומטרית הטהורה" דוקא מתחיל הוויתור־למעשה על טוהר שיטות לטובת צירוף הרעיונות המזוקקים והמועילים שבשיטות השונות יחד.

להשפעה הרבה יותר עמוקה זכתה השקפתו המהפכנית של קיילי[1] מאמצע המאה ה 19 ואילך. אפשר לקחת כנקודת־מוצא להבנת רעיונו את ההכרה שהרוחק d בין שתי נקודות P_1 ו־P_2 אינו מוכרח להיתפס במובן הרגיל דוקא, הבנוי באופן אנליטי על משפט פיתגורס. (במישור $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$; במרחב $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$.) אדרבה, מתברר שדי לדרוש מפונקציית־הרוחק $d(P_1, P_2)$ שתמלא, מלבד היותה חד־ערכית ולא־שלילית, שלשה תנאים כלליים בלבד, ואלה הם:

א) $d=0$ אם, ורק אם, שתי הנקודות P_1 ו P_2 מתלכדות;

ב) הרוחק הוא סימטרי לגבי הנקודות; כלומר $d(P_1, P_2)=d(P_2, P_1)$;

ג) $d(P_1, P_2)+d(P_2, P_3)\geqq d(P_1, P_3)$. יחס זה נקרא „אי־השויון המשולשי" על־פי המשפט האומר, כי סכומן של שתי צלעות במשולש גדול מן הצלע השלישית. והנה מכניס קיילי מושג שיעמוד תחת הרוחק הרגיל, והממלא שלש התכונות הנ"ל, בקבעו: כ„רוחק" בין P_1 ו P_2 נראה את היחס הכפול בין זוג הנקודות P_1 ו P_2 וזוג של נקודות נוספות של יציר „מוחלט" (במישור או במרחב). ביאור מפורש וחשבוני לענין זה אינו יכול להינתן כאן; השוה את נושא הסעיף הבא[2]. נרמוז כאן רק לרעיון היסודי שעל־פיו תופס קיילי את הבעיה: היחס הכפול הלא הוא, אם נתעלם מעצם הגדרתו, מושג אפייני לגיאומטריה הפרוייקטיבית. והנה דורש קיילי להעמיד את הגיאומטריה בכללה, לרבות הגיאומטריה המטרית, על הגיאומטריה

1. השוה בייחוד את מאמרו הששי על quantics משנת 1859; עיין:
A. Cayley: Collected mathematical papers, vol. II (1889), p. 561.

2. לקורא המכיר כבר במקצת את שתי הגיאומטריות הלא־אבקלידיות, ההיפרבולית והאליפטית (פרק שמיני). יהיה ענין בכך לדעת, שהשקפתו הנ"ל של קיילי מאפשרת איחוד שיטתי בין שלש הגיאומטריות (שתי הנזכרות והרגילה, האבקלידית, או הכללה מסויימת שלה). כפי שהראה קליין מ 1871 ואילך, מגיעים אל כל אחת מבין שלש גיאומטריות אלה לפי הבחירה בה קובעים את פונקציית־הרוחק של קיילי.

הפרוייקטיבית. עקרונו המפורסם הוא: „הגיאומטריה הפרוייקטיבית[1] היא הגיאומטריה כולה.” (אמנם עקרון זה מתעלם מן הטופולוגיה, ובכלל מן הגיאומטריות שהן כלליות מהפרוייקטיבית; עיין בראשית הפרק הבא.) כבר נזכר לעיל ערך השמורות בקשר לגישה זו; בפרט ראינו שכל ההצבות המתאימות לגיאומטריות השונות הנ״ל הן ליניאריות, ושנוח לקחתן בצורה ההומוגינית. לכן מבחינה אלגברית אין הגיאומטריה אלא תורת השמורות של ההצבות ההומוגיניות הליניאריות, לפי תפיסת קיילי[2].

אי אפשר לתאר תורה זו בלעדי הכנות אלגבריות־חשבוניות רחבות, ולכן אין לה מקום במסגרתו של ספר זה. נזכיר רק את הרעיון הכללי שלפיו מתכן קיילי את בנין הגיאומטריה.

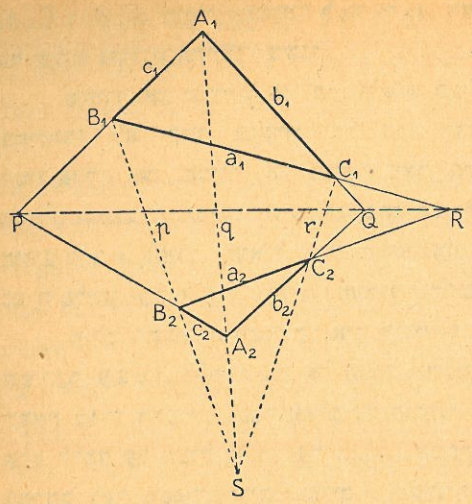
בנייתה של איזו גיאומטריה, שהיא כללית פחות מן הפרוייקטיבית, תאופשר במסגרת הגיאומטריה הפרוייקטיבית ע״י סיפוחו של יציר גיאומטרי מסויים שאינו נמצא — ביתר דיוק: לא צויין ע״י תכונה אָפיינית — בגיאומטריה הפרוייקטיבית. על־סמך מה שלמדנו עד כאן, מספיק לברר את הדבר לאור הדוגמה של הגיאומטריה האֲפינית. לפי ההשקפה הפרוייקטיבית שקולים זה כנגד זה כל הישרים שבמישור — דבר שבלעדיו לא היה קיום לעקרון הדואליות. הבה נספח עתה את הישר הלא־אמיתי; כלומר, נבטל את שויון־הזכויות בין כל הישרים ונציין אחד מהם כישר הלא־אמיתי! על־סמך זה תיכנס הבחנה מסויימת לתוך המשפט שכל שני ישרים שונים קובעים נקודה משותפת אחת ויחידה; מעתה יש להבחין, אם נקודת־החיתוך חלה בישר הלא־אמיתי אם לאו. במקרה השני נשארים הישרים הנדונים ישרים חותכים גם בגיאומטריה החדשה (האפינית); ואילו במקרה הראשון יוכרו שני הישרים כמקבילים, מושג שלא היה לו מקום לפני הסיפוח. ואמנם מספיק יחס־ההַקבלה, נוסף על יחס־החילה, כדי לציין את הגיאומטריה האפינית במלואה. אנלוגי לגמרי המצב במרחב: כאן יצויינו מישורים מקבילים ע״י זה שהמשותף ביניהם — הוא קו ישר — חל במישור הלא־אמיתי, שבגיאומטריה הפרוייקטיבית לא נשתנה משאר המישורים.

בעקרונו דומה המעבר הנוסף אל הגיאומטריה האֶקויפורמית. בה מצויינים, מלבד ישרים מקבילים, גם ישרים מאונכים זה לזה. הסיפוח הנחוץ לשם כך במרחב הוא חתך־חרוט „מוחלט” מסויים; השווה התיאור הניתן בסעיף הבא לדבר זה, מתוך צמצום במישור.

1. הוא משתמש במונח descriptive לגבי מה שקראו אחריו projective, בעוד שהיום מציינים במונח ההוא את הגיאומטריה התיאורית בלבד. אך המונח descriptive מוצלח הוא בעצם ממונחנו; ביחוד מבליט הוא את הוויתור על מושג הגודל כפי שהוא מתגלה במדידת קטעים או זוויות.

2. מלבד קיילי נמנו J. J. Sylvester ו G. Salmon על חלוצי התורה הזאת.

מתוך הנושאים השונים של הגיאומטריה הפרוייקטיבית, שאפילו הפשוטים ביניהם היו מספיקים למלא ספר בפני עצמו, נוכל לציין כאן אך שנים, בעלי חשיבות מיוחדת גם לגבי ביסוס הגיאומטריה בכללה, והם: המשפט של דיזארג, ומשפטי פסקל ובריאנשון.[1]



ציור 26

משפטו המפורסם של דיזארג היה במובן היסטורי התגלית הקדומה מבין משפטיה החשובים של הגיאומטריה הפרוייקטיבית, לבד מתגליותיו של פאפוס[2]. המשפט דן בשני משולשים הנמצאים במצב „פֶּרספֶּקטיבי”, וטוען (השוה ציור 26)

יהיו שני משולשים $A_1 B_1 C_1$ ו $A_2 B_2 C_2$ שרויים במצב כזה, שהישרים המקשרים קדקדים מותאמים — לאמור: הישרים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 — נחתכים בנקודה אחת S[3]. במקרה זה זוגות הצלעות המותאמות — לאמור: הזוג $B_1 C_1 = a_1$ ו $B_2 C_2 = a_2$; הזוג $C_1 A_1 = b_1$ ו $C_2 A_2 = b_2$; הזוג $A_1 B_1 = c_1$ ו $A_2 B_2 = c_2$ — נחתכים (בהמשכיהם) בשלש נקודות החלות בישר אחד.

קודם כל מביע משפט זה תכונה פרוייקטיבית. מספיק להצביע על כך מתוך ההנחה ששני המשולשים נמצאים באותו מישור, דהיינו במישור של עמוד זה. אם נטיל עתה מאיזה מרכז שהוא את הציור למישור אחר, הרי לא ישתנה מאומה בהנחות המשפט, ולכן תישאר גם המסקנה במקומה.

באשר להוכחת משפטו של דיזארג, הרי היא פשוטה לגמרי, ובעצם מובנת מאליה מבחינה הסתכלותית, אם שני המשולשים שרויים במישורים שונים π_1 ו π_2. שהרי במקרה זה יקבעו הישרים $A_1 A_2$ ו $B_1 B_2$, הנפגשים ב S, מישור מסויים שבו חלים גם הישרים $A_1 B_1$ ו $A_2 B_2$. לכן נחתכים הישרים האחרונים, ונקודת־החיתוך חלה בהכרח בישר שהוא משותף לשני המישורים π_1 ו π_2. מאותו טעם עצמו נחתכים גם הישרים $B_1 C_1$ ו $B_2 C_2$, וכן הישרים

1. Blaise Pascal; Ch. J. Brianchon.

2. יש אמנם רגליים לדבר, שגם משפט־דיזארג היה ידוע כבר ליוונים; אולי אפילו לאבקלידס.

3. אם שלשתם מקבילים זה לזה, מתקבל מקרה פרוט למשפט הכללי; השוה להלן בהערה 2 בעמ׳ 264.

$A_1 C_1$ ו $A_2 C_2$, בישר המשותף ל π_1 ול π_2. לאמור: בישר המשותף ההוא חלות כל שלוש נקודות־החיתוך, מש"ל.

מאידך אם שרויים שני המשולשים במישור אחד (משפטו של דיזארג במישור), לא יקשה בעקרונו של דבר להוכיחו ע"י הטלה מרחבית. לשון אחר: אם הציור 26 מתאר מצב במישור־הציור ϱ, נראה את הציור כהטלה המבוצעת ממישורים שונים, בהם שרויים המשולשים עצמם, שרק היטליהם מופיעים ב ϱ. לפיכך, הואיל ולגבי המשולשים עצמם קיים המשפט הנדון, חלים גם היטליהן (על ϱ) של נקודות־החיתוך (כל־שכן!) בישר אחד.[1]

אולם מתעוררת השאלה: איך מוכיחים את המשפט במקרה זה במישור־הציור עצמו, ללא יציאה אל הממד השלישי? וכאן נתגלתה עובדה מפתעת, יוצאת מגדר הדברים „המתקבלים על הדעת", שלא ללמד על עצמה בלבד יצאה אלא ללמד על הכלל כולו: על הכלל „המתקבל על הדעת" כאילו משפט, הדן במרחב בעל מספר־ממדים מסויים[2], מקום־הוכחתו „הטבעי" הוא אותו מרחב עצמו. לפי כלל זה היינו דורשים הוכחה מישורית למשפטו של דיזארג לגבי שני משולשים החלים במישור אחד. ונהפוך הוא: מקום־ההוכחה הטבעי למשפט מישורי זה הוא המרחב התלת־ממדי[3]. אמנם אפשר להוכיחו גם במישור; אך הוכחה זו, לא רק שהיא מסובכת יותר במידה ניכרת, אלא היא מוכרחת להסתמך על יחס הדמיון בין ציורים; כלומר, על מושגים מתוך הגיאומטריה האֶקוויפוֹרמית, שההגיון היה דורש להתעלם מהם בבואנו לדון במשפט מן הגיאומטריה הפרוייקטיבית.

דברים אלה נראו מפתיעים מאד כשהובררו והתלבנו בסוף המאה ה 19, למעלה מ 250 שנה אחרי היגלות המשפט בעצמו. בעינינו חדלו מהיות מוזרים או מיוחדים במינם. בפעם הראשונה התוודענו לתופעה מסוג דומה בראותנו (ב I, 29—33) שלמשפטים רבים מתורת המספרים השלמים, משפטים פשוטים למדי על־פי ניסוחם, אין הוכחה „אלמנטרית", ז"א הוכחה בעזרת מושגיה של

1. נפרט זאת לצרכי הקורא המתקדם. אם נטיל מנקודה מסויימת O, למשל מן העין, את כל התבנית המרחבית — לאמור: את שני המשולשים, את שלשת הישרים המקשרים קדקדים מותאמים, ואת הישר המשותף למישורים π_1 ו π_2 — תתקבל תבנית המכילה עשרה ישרים ועשרה מישורים הנחתכים ב O. כל חיתוך מישורי בהטלה מרחבית זו יוצר ציור שבו שרויים שני משולשים כפי המבואר במשפטו של דיזארג, וזוגות הצלעות המותאמות נחתכות בנקודות החלות בישר אחד. — שיטה זו של הטלת תבנית מאיזה מרכז וחיתוך ההטלה במישור, היא שיטה חשובה בגיאומטריה הפרוייקטיבית הסינתיטית.

2. אם המספר הוא 2: המישור; אם המספר 3: המרחב התלת־ממדי הרגיל.

3. השוה מה שנאמר ב I, 255 לגבי פונקצית־הלוגריתמוס הממשית: נוכל להבין את תכונותיה כהוגן רק בקחתנו את גורם הפונקציה בשני ממדים (במישור המספרים המרוכבים), ולא בממד אחד (בקו המספרים הממשיים).

תורת המספרים; אלא הוכחתם מסובכת היא ומבוססת על מושגי האנליזה (מספרים אי־רציונליים, טורים אינסופיים, אינטגרלים). שם (עמ' 30) הוזכר גם המשפט החדיש והמהפכני שבנה אב לכל תופעות מסוג זה במובן כללי יותר: משפטו של Gödel משנת 1930[1].

הבה נוציא לפועל כלפי משפטו של דיזארג את השיטה שהזכרנוה ב § 1 ובסעיף זה כאָפיינית לגיאומטריה הפרוייקטיבית: שיטת הדואליות! נוכל להצטמצם במישור; לפי זה עלינו להמיר נקודה בישר, ויחס החילה בין נקודות וישרים יועבר אל עצמו. ע"י תהליך זה נקבל ממשפט דיזארג את המשפט הבא:

יהיו שני משולשים, בעלי הצלעות a_1, b_1, c_1 ו a_2, b_2, c_2, שרויים במצב כזה, שנקודות־החיתוך בין צלעות מותאמות — לאמור: בין a_1 ו a_2, בין b_1 ו b_2, בין c_1 ו c_2 — חלות בישר אחד[2]; במקרה זה נחתכים הישרים המקשרים זוגות של קדקדים מותאמים — לאמור: הישרים $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ — בנקודה אחת. (עיין בציור 26.)

והנה מראה ההשוואה בין משפט זה והמשפט דלעיל (עמ' 261) שלפנינו היפוך משפטו של דיזארג; דהיינו, המשפט המתקבל מתוך החלפת ההנחה והמסקנה (הטענה). ב I, 235 הודגש — מבחינה הגיונית ומתימטית גם יחד — שבדרך כלל אסור להפוך משפט מתימטי, במובן של החלפת ההנחה במסקנה. לכן המשפט דלעיל הוא משפט חדש; אעפ"י כן קבלנוהו ללא הוכחה מיוחדת, על־פי עקרון הדואליות.

נסיים סעיף זה במשפטו המפורסם של פסקל, לפחות במקרה מיוחד, פשוט אך חשוב[3], ונצרף לו את המשפט הדואלי המותאם. המשפט הראשון טוען (עיין בציור 27):

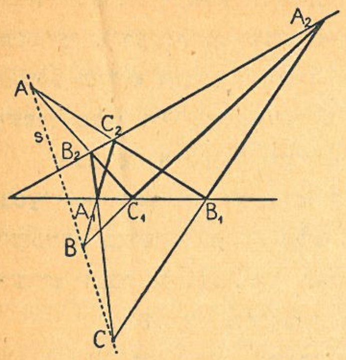
1. הבנה מעמיקה יותר למצב הענינים הושגה מתוך משפטו של הילברט (יסודות הגיאומטריה, פרק חמישי) האומר: אם באיזו גיאומטריה מישורית מתקימות האכסיומות היסודיות הרגילות, לרבות אכסיומת המקבילים, הרי קיום משפטו של דיזארג הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך, שאפשר להרחיב את המישור הנדון למרחב בעל שלשה (או יותר) ממדים, שגם בו מתמלאות האכסיומות היסודיות הרגילות. השוה גם:

F. W. Levi: On a fundamental theorem of geometry. *Journal of the Indian Math. Society*, N. S. vol. 3 (1939).

2. מקרים פרוטים מתקבלים אם בכל זוג מקביל ישר אחד למשנהו, או אם הישרים באחד הזוגות מקבילים לישר המקשר את נקודות־החיתוך של ישרי שאר הזוגות.

3. מקרה זה היה ידוע כבר לפאפוס במאה השלישית לסה"נ. מבחינה עקרונית חשוב הוא כמעט כמשפט הכללי המובא להלן (עמ' 265). לגבי הקשר בין משפטי פאפוס (או דיזארג) ופסקל עיין:

G. Hessenberg: Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Mathem. Annalen*, vol. 61 (1905), pp. 161—172.



ציור 27

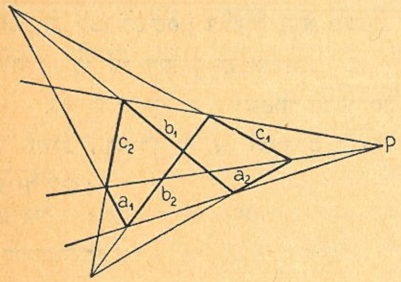
אם נתונות שתי שלישיות של נקודות (A_1, B_1, C_1) ו (A_2, B_2, C_2) באופן שכל שלישיה חלה בישר אחד, גם נקודות־החיתוך בין הזוגות הבאים של ישרים

B_1C_2 ו C_1B_2, C_1A_2 ו A_1C_2, A_1B_2 ו B_1A_2

חלות בישר אחד s.

בהוציאנו מן הכלל את המקרים של נקודות לא־אמיתיות, נציין את המקרים הפרוטים הבאים: אם שנים מן הזוגות הנ״ל מורכבים מישרים מקבילים, מורכב גם הזוג השלישי ממקבילים;[1] אם אחד הזוגות בלבד מכיל ישרים מקבילים, מקביל להם הישר המקשר את נקודות־החיתוך של שני הזוגות הנותרים.[2]

הוכחה למשפט זה תנתן במלואים לחלק החמישי, מספר יד). הוכחה זו מבוצעת אמנם במישור, אך היא משתמשת, נוסף על העברות פרוייקטיביות, גם במושג הדמיון הגיאומטרי, כלומר במושג הלקוח מן הגיאומטריה האֶקוויפוֹרמית. למשפט עצמו יש אופי פרוייקטיבי טהור; שכן מדובר בו בקוֹליניאציוֹת בלבד והסרגל מספיק לביצוע הבניה.



ציור 28

נקבל את המשפט הדואלי בהחליפנו נקודה בישר. הוא מביע לפי זה (משפט של בריאנשון; עיין בציור 28):

אם נתונות שתי שלישיות־ישרים (a_1, b_1, c_1) ו (a_2, b_2, c_2) באופן שישרי כל שלישיה עוברים דרך נקודה אחת, גם שלשת ה„קרנזולים" המקשרים את נקודות־החיתוך

A. Cronheim: A proof of Hessenberg's theorem. *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, vol. 4 (1953), pp. 219—221.
השוה גם:
K. Reidemeister: Grundlagen der Geometrie. Berlin, 1930.
G. de Robinson: The foundations of geometry. Toronto, 1940.

1. שהרי שתים „מנקודות־החיתוך" חלות במקרה זה בישר הלא־אמיתי; לכן גם השלישית.
2. במקרה זה משותפת למקבילים נקודה לא־אמיתית, והיא צריכה אפוא לחול בישר המקשר את נקודות־החיתוך הנותרות. כלומר, לישר זה יש אותו כוון כמו למקבילים ההם.

בין b_1 ל c_2 ובין c_1 ל b_2, בין c_1 ל a_2 ובין a_1 ל c_2,
בין a_1 ל b_2 ובין b_1 ל a_2
עוברים דרך נקודה אחת.[1]

בשמותיהם של פסקל ובריאנשון מכנים בדרך־כלל משפטים כלליים מאלה שהובאו כאן. אמנם אין להוכחותיהם מקום בספר זה, כי המשפטים הכלליים דנים בחתכי־חרוט (עקומים מן הסדר השני) שתורתם הכללית לא הובאה כאן. אך לפחות נוסח המשפטים הכלליים ינתן כאן; כדי להראות כיצד מהווים הם הכללות למשפטים דלעיל, נקדים ביאורים אחדים.

ראשית, כבר בעמ׳ 258 (בקשר לציור 25) נאמר שבין חתכי־החרוט נמנה כמקרה קיצון, „סורר", גם זוג־ישרים. דבר זה הוסבר שם בדרך גיאומטרית. קל עוד יותר להבינו מבחינה אנליטית. הלא ביטויו האנליטי הכללי של חתך־חרוט הוא משוואה מן המעלה 2 בין השעורים x ו y. ובכן, אם נתונים שני ישרים בהצגתם האנליטית במישור

$$f(x, y) \equiv ax + by + c = 0, \qquad g(x, y) \equiv dx + ey + h = 0,$$

הרי זוג הישרים מתבטא בצורה $f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$; הלא משוואה זו אומרת שלפחות אחת המשוואות $f(x, y) = 0$ ו $g(x, y) = 0$ מתמלאת, ומאידך כל נקודה המאפסת אחת הפונקציות $f(x, y)$ ו $g(x, y)$ ממלאת את המשוואה

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \equiv adx^2 + (ae + bd)xy + bey^2 +$$
$$+ (ah + cd)x + (bh + ce)y + ch = 0.$$

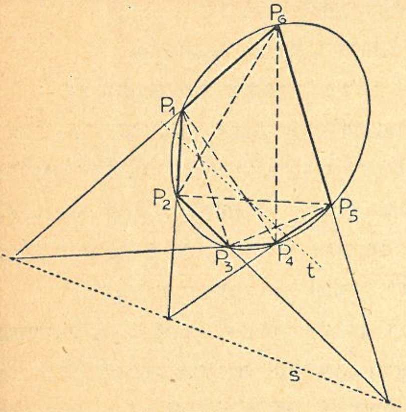
והנה זוהי משוואה מן המעלה 2 בין x ו y; למייצגה הגיאומטרי יאה אפוא להיקרא עקום מן הסדר 2 או „חתך־חרוט".

שנית, אפשר לראות את המערכת של שש הנקודות A_k, B_k, C_k עם קטעי־הישרים המקשרים אותם בציור 27, דהיינו הקו השבור $(A_1)\,B_2\,C_1\,A_2\,B_1\,C_2\,A_1$, כמשוּשֶׁה; במקרה שלפנינו המשושה חודר לעצמו (פעמיים). לפי הסדר שבו מופיעים בקו שבור זה קדקדי המשושה, צריכים להיקרא A_1 ו A_2 קדקדים „נגדיים", וכן B_1 ו B_2, C_1 ו C_2. (משום כך סומנו הנקודות באופן זה.) לכן יש לכנות את זוגות הישרים המוּדגשים במשפטו של פסקל (עמ׳ 264) בשם „זוגות של צלעות נגדיות במשושה". לפיכך, אם נבין את המונח „צלעות" בריבוי המשכיהן, מביע המשפט טענה על נקודות־החיתוך בין הזוגות של צלעות נגדיות במשושה, בתנאי שקדקדי המשושה יחולו בזוג־ישרים, כלומר בחתך־חרוט ממין מיוחד. ועתה נבין בקלות, כהכללה למשפט ההוא, את משפטו של פסקל בצורתו הכללית (השוה ציור 29, שבו מצוייר חתך־החרוט כאליפסה):

משפט פסקל: אם משושֶה מוקף בחתך־חרוט, חלות שלש נקודות־החיתוך בין הזוגות של צלעות נגדיות בישר אחד.

1. הקורא יפרש נא בעצמו את המקרים הפרוטים המתקבלים במקרה של הקבלה.

יודגש בפירוש — כפי שיוצא כבר מן הציור 27 בקשר למשפט דלעיל — שאין צורך לקחת את קדקדי המשושה בסדר מסויים „טבעי", על־מנת לקבוע מה הן צלעות „נגדיות". לשם הבלטת הדבר ניתנו בציור 29 שתי המחשות שונות למשפטו של פסקל: אחת ביחס למשושה $P_1P\text{-}P_3P_4P_5P_6$, והשניה (בעזרת קוים מסורגים) ביחס למשושה $P_1P_3P_5P_2P_6P_4$. הישר שבו חלות נקודות־החיתוך הנדונות הוא במקרה הראשון s, במקרה השני — t.



ציור 29

משפטו של פסקל קובע, שבין כל שש נקודות החלות בחתך־חרוט קיים קשר מיוחד. לשון אחר: שש נקודות שרירותיות אינן חלות באותו חתך־החרוט, כשם שלא שלש נקודות שרירותיות חלות באותו הישר, ולא ארבע נקודות שרירותיות באותו המעגל (הכל במישור). אין בזה משום הפתעה בשביל מי שמכיר במקצת את תורת העקומים מן הסדר השני, מבחינה אנליטית או סינתיטית; שכן יודע הוא, שעקום כזה נקבע כבר ע"י חמש מנקודותיו.

פסקל מצא את משפטו בשנת 1640, בהיותו בן 16 שנה. עברו יותר משלש יובלות שנים עד שבריאנשון ניסח (ב 1806) את משפטו, הנובע מקודמו באופן אבטומטי לפי עקרון הדואליות, אם משתמשים בעקרון זה בצורה מתאימה גם כלפי מושג העקום. והנה המשפט:

משפט בריאנשון: אם משושה מקיף חתך־חרוט (כלומר, צלעות המשושה משיקות לעקום), נחתכים בנקודה אחת שלשת הישרים המקשרים את זוגות הקדקדים הנגדיים של המשושה.

§ 4. על העצמים הדמיוניים בגיאומטריה.[1]

מחשבתנו תהיה מודרכת שוב, כמו בהכנסת היצירים הלא־אמיתיים, ע"י עקרון־היציבות. עקרון זה כבר היה לנגד עינינו בהכניסנו את המספרים הדמיוניים והמרוכבים לתוך האריתמיטיקה (ו, 142). ראינו שם, שלעומת משוואות ריבועיות כגון $x^2-1=0$ או $x^2-3x+2=0$, שיש להן שרשים ממשיים, יש אחרות כגון $x^2+1=0$ או $x^2-3x+3=0$, המחוסרות שרש ממשי. כדי להבטיח שלכל משוואה אלגברית בעלת מעלה חיובית יש שרשים,

1. תכנו של סעיף זה אינו נדרש לפרקים הבאים של הספר.

הכניסו המתימטיקנים את המספרים $a+bi$ [1] לתוך האלגברה, ומכאן החל מסע־נצחונם באריתמיטיקה ובאנליזה.

אולם לא מפי אנלוגיה פורמלית אנו חיים כאן, אלא בעיות הגיאומטריה בעצמן מדריכות אותנו לקראת נקודות דמיוניות, כשם שהדריכונו לקראת נקודות לא־אמיתיות במובן הסעיפים הקודמים. הצד השוה שבדברים הללו הוא שיטת העצמים האידיאליים (השוה בעמ' 226). לא במקרה פונים אנו לנושא זה אחרי הכניסנו את השעורים ההומוגיניים ואת הנקודות הלא־אמיתיות (שמעתה נכנה אותן גם בשם „נקודות אינסופיות", שהרי אף הנקודות הדמיוניות אינן „אמיתיות" על־כל־פנים); ואמנם יתברר שנקודות, שהן דמיוניות ואינסופיות גם יחד, תביאנה תועלת רבה.

הגורם הדוחף אותנו הוא, כאמור, הרצון שלא להזדקק להבחנה בין מקרים שונים ולא להרשות מקרים היוצאים מן הכלל הקבוע מראש. קו ישר ומעגל במישור יש אשר יחתכו זה את זה בשתי נקודות (כשהרוחק בין מרכז המעגל והישר קטן ממחוג המעגל), ויש אשר אינם נחתכים (כשהרוחק גדול מן המחוג)[2]. כיוצא בזה יקרה בדבר נקודותיהם המשותפות של שני מעגלים: מצד אחד קיימת האפשרות של שתי נקודות־חיתוך (או נקודת־מגע, השקולה כנגד שתים), מצד שני האפשרות של העדר כל נקודה משותפת, אם מעגל אחד משתרע כולו מחוצה לרעהו או פנימה לו. והנה איך ניתן הדבר להתבאר באספקלריה אלגברית? אם נשתמש בשעורים הקרטיסיים הרגילים x ו y במישור, הרי קו ישר מתבטא בעזרת משוואה ליניארית, ומעגל בעזרת משוואה ריבועית (בעלת צורה מיוחדת) בין x ל y. כידוע מבית הספר התיכון, אפשר להעמיד את מערכת שתי המשוואות האלה בשני נעלמים על משוואה ריבועית אחת בנעלם אחד; לאמור, ערכי x ו y הממלאים את שתי המשוואות, מהווים תמיד שני זוגות (x, y), אף כי ערכיהם יהיו פעמים ממשיים ופעמים מרוכבים. אם מסקנה כללית זו מגלה ניגוד־מה להבחנת המקרים בתיאור הגיאומטרי דלעיל, הרי יתירה היא הסטיה במקרה של שני מעגלים; שכן מערכת של שתי משוואות ריבועיות מביאה במקרה הכללי, דרך חילוץ אחד הנעלמים, למשוואה מהמעלה הרביעית, וכך מתקבלים לפי שיטת האלגברה ארבעה זוגות (x, y) הממלאים את המשוואות הנתונות; ואילו לפי המצב הגיאומטרי יש שלא נקבל כל נקודה משותפת בין שני מעגלים ויש שנקבל שתי נקודות — אך לעולם לא ארבע!

לשם בירור המצב נכניס, כבסעיף הקודם, שעורים הומוגיניים במישור,

1. נסמן בכל הסעיף הזה, כרגיל, את $\sqrt{-1}$ ב i.

2. מקרה הגבול שבו שוה הרוחק למחוג, יוכל להיכלל במקרה הראשון. במקרה זה רואים, כידוע, את הנקודה המשותפת היחידה כשקולה כנגד נקודותיים, בהיותה נקודת־המגע בין המעגל למשיק.

בעזרת המשוואות (6) מעמ׳ 249 [1]. לפי זה נקבל כמשוואת הישר (השוה עמ׳ 250)[2]

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0, \tag{1}$$

וכמשוואת העקום הכללי מן הסדר השני (עמ׳ 256)

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi\zeta + e\eta\zeta + f\zeta^2 = 0; \tag{2}$$

בפרט כמשוואת המעגל בעל המרכז $(p, q, 1)$ והמחוג r (עמ׳ 185)

$$(\xi - p\zeta)^2 + (\eta - q\zeta)^2 - r^2\zeta^2 = 0. \tag{3}$$

(כל הקבועים A, B, a, וכו׳ הם ממשיים.) מתוך השקפה אלגברית ברור, שלזוג המשוואות (1) ו(2) יש תמיד[3] שני פתרונים $(\xi:\eta:\zeta)$, כאמור לעיל. אם (2) מתאר, למשל, אליפסה, והישר (1) עובר מחוץ לאליפסה, נקבל פתרונים שאינם ממשיים אלא מרוכבים.

באשר למעגלים, הבה נחתוך את המעגל (3) בישר הלא־אמיתי (האינסופי) $\zeta = 0$, ונקבל:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \qquad \zeta = 0. \tag{4}$$

והנה אלה הן שתי נקודות, כיאה לחיתוך בין מעגל וישר: הלא המשוואה הראשונה גוררת אחריה $\xi : \eta = \pm i : 1$; לכן הנקודות הן בעלות השעורים הבאים:

$$\xi:\eta:\zeta = i:1:0, \qquad \xi:\eta:\zeta = -i:1:0. \tag{5}$$

צורה זו מראה, שיציר־החיתוך בין מעגל לבין הישר הלא־אמיתי **אינו תלוי** במעגל המיוחד (3) שיצאנו ממנו; כלומר, בקבועים p, q, r. לפיכך **חותך כל מעגל את הישר הלא־אמיתי באותן שתי הנקודות** (5), הנקראות משום כך **נקודות־המעגל הדמיוניות של המישור**.[4]

---

1. הקורא יזכור אל נכון, כי הנקודה (ξ, η, ζ) תלויה **ביחסים** $\xi:\zeta$ ו $\eta:\zeta$ בלבד, וכי השלישיה $(0, 0, 0)$ אינה מסמנת כל נקודה.

2. כמבואר בעמ׳ 250, יהיה (1) הישר הלא־אמיתי אם $A = B = 0$ ו $C \neq 0$; משוואת הישר הלא־אמיתי היא אפוא: $\zeta = 0$.

3. פרט למקרים מיוחדים, כגון כשהאגף השמאלי של (2) מתפרק לשני גורמים שאחד מהם הוא האגף השמאלי של (1).

4. בספרים אחדים הן מכונות נקודות־המעגל **האינסופיות**". ביטוי זה אינו מוצלח (אף־על־פי שהנקודות נתקבלו ע״י החיתוך בישר האינסופי). שכן, אם נחשב את הרוחק d של הנקודות הנדונות מנקודת־הראשית (מוצא השעורים), נמצא

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\zeta^2}} = \sqrt{\frac{-1+1}{0}} = \frac{0}{0},$$

כלומר, הרוחק הנהו ביטוי שאין לו ערך מסויים. כמו־כן הרוחק בין נקודת־מעגל דמיונית ובין כל נקודה אמיתית הוא לא־מסויים. ע״י מסקנה מוזרה זו מתנקם בנו החשבון על אשר הכרחנוהו למלא תפקיד כמעט בלתי־אפשרי, והוא: שהנקודות תימצאנה ברוחק r ממרכז המעגל (3) — על־סמך היותן נקודות של המעגל — ויחד עם זה בישר האינסופי.

מאידך, אם נרצה שהעקום (2) יעבור דרך הנקודות (5), או לפחות דרך אחת מהן (ז״א אם נדרוש כי (2) יתמלא, למשל, כלפי הערכים $\xi = i$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$), נקבל:

$$-a + bi + c = 0.$$

כדי שמספר מרוכב ישוה ל 0, צריך להתאפס הן חלקו הממשי הן חלקו הדמיוני; לאמור: $a = c$, $b = 0$. לעקום הנדון יש אפוא על־פי הדרישה, שאחת הנקודות (5) תחול בו, המשוואה

$$a\xi^2 + a\eta^2 + d\xi\zeta + e\eta\zeta + f\zeta^2 = 0,$$

וחשבון קל מאד מראה שמשוואה זו היא מן הסוג (3), כלומר שהיא מייצגת **מעגל**. בכך קבלנו את היפוך המשפט דלעיל:

> כל עקום מהסדר השני, העובר דרך אחת מנקודות־המעגל הדמיוניות שבמישור, הוא מעגל, ועובר אפוא גם דרך נקודת־המעגל הדמיונית השניה.

מסקנות אנלוגיות לגמרי מתקבלות במרחב התלת־ממדי. שם עומד משטח מן הסדר השני תחת העקום (2), כדור תחת המעגל, עקום דמיוני קבוע במישור הלא־אמיתי תחת שתי הנקודות (5).

עתה ברור תירוץ קושייתנו דלעיל, משום מה נחתכים שני מעגלים (באותו המישור) לכאורה בלא יותר משתי נקודות, אף־על־פי ששני עקומים מן הסדר השני היו צריכים להיחתך בארבע נקודות: הלא, נוסף על שתי הנקודות המשותפות הרגילות, היכולות להיות ממשיות או מרוכבות, נפגשים המעגלים גם בשתי נקודות־המעגל הדמיוניות, שהן משותפות לכל מעגלי המישור![1]

לא נוכל להמשיך ולהיכנס לתוך החשבונות הקשורים ביציאה אל התחום הדמיוני. אך נגע בשאלה קרובה לענין זה, לפחות עד כדי ציון המחשבה המדריכה, והיא **המחשה גיאומטרית, „ממשית", לנקודות הדמיוניות והמרוכבות**, כדי שלא נצטרך להסתמך רק על החשבון הפורמלי הלקוח מן האלגברה.[2] יש אפוא צורך בהתאמה ידועה, ז״א בחוק המתאים לכל נקודה דמיונית יציר גיאומטרי ממשי מסויים. נוסף על כך נדרוש, על־פי מה שלמדנו בסעיף הקודם, שההתאמה לא תשתנה ע״י העברות פרוייקטיביות;

---

1. רעיונות ומושגים אלו הומצאו כבר ע״י J. V. Poncelet (עיין ספרו משנת 1822, לעיל עמ׳ 173). הוא הסתמך אמנם במידה רחבה על הרגש האינטואיטיבי, בהיעדר המכשיר האנליטי של השעורים ההומוגיניים.

2. von Staudt פיתח כראשון רעיונות אלו בצורה מופשטת מאד (עיין ספריו הנזכרים בעמ׳ 258, בעיקר הספר השני). הרעיון קבל תמונה מוחשית יותר, בצורה השוה לכל נפש, ע״י O. Stolz (עיין *Math. Annalen*, כרך 4, 1871).

לאמור, ההתאמה הנותנת את מייצגה הממשי של נקודה דמיונית או מרוכבת נתונה, כחה יהיה יפה גם אחרי ביצועה של איזו העברה פרוייקטיבית.

הבה נתאר את ההמחשה הנדונה (במישור)! יהיו שעוריה ההומוגיניים של הנקודה המרוכבת P:

$$\xi = x_1 + ix_2, \qquad \eta = y_1 + iy_2, \qquad \zeta = z_1 + iz_2. \tag{6}$$

(האותיות הרומיות מסמנות מספרים ממשיים.) אם נראה גם מספרים אלה כשעורים הומוגיניים, הרי קבועות ע״י P שתי נקודות ממשיות P_1 ו P_2:

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1); \qquad P_2 = (x_2, y_2, z_2); \tag{7}$$

ולא עוד אלא שהנקודות P_1 ו P_2 הן נקודות ממשיות שונות, אם P היא באמת נקודה דמיונית או מרוכבת; שהרי $P_1 = P_2$ היה מביע:

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2$$

וזאת אומרת לפי (6), שהיחס בין ξ, η, ζ הוא ממשי:[1] $\xi : \eta : \zeta = x_1 : y_1 : z_1$.

מכיון ש P_1 ו P_2 שונות הן, קובעות הן קו ישר שמשוואתו בשעורים הומוגיניים היא:[2]

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \equiv \xi(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \eta(z_1 x_2 - x_1 z_2) + \zeta(x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0. \tag{8}$$

והנה, הואיל וחלות הן P_1 הן P_2 בישר זה, חלה בו גם הנקודה $P = (x_1 + ix_2,\ y_1 + iy_2,\ z_1 + iz_2)$, וכן הנקודה הצמודה (השוה I, 159) $\bar{P} = (x_1 - ix_2, y_1 - iy_2, z_1 - iz_2)$. אלה הן מסקנות מידיות מכך, שהחלק הממשי והחלק הדמיוני הטהור (ז״א מקדמו של i) ב (8) שניהם שוים ל 0.

אל יעלה על דעת הקורא, שהזוג (P_1, P_2) של נקודות ממשיות מציין את הנקודה המרוכבת P במובן אפייני. הרי P_1 ו P_2 תלויות, על־פי (7) ו (6), בתיאור המיוחד (6), כלומר בערכי ξ, η, ζ בעצמם, בעוד שהנקודה P תלויה ביחס בין ξ, η, ζ בלבד. נאשר זאת ע״י החשבון, בכפלנו את שעורי P דלעיל בגורם שרירותי מרוכב $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; נקבל לפי (6), על־סמך השויון $i^2 = -1$:

$$\lambda\xi = \lambda(x_1 + ix_2) = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + i(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2),$$

$$\lambda\eta = \lambda(y_1 + iy_2) = \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 + i(\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2),$$

$$\lambda\zeta = \lambda(z_1 + iz_2) = \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 + i(\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2).$$

1. מובן שהגדרת השעורים ההומוגיניים מרשה לנו תמיד לתת לשעורים באופן מלאכותי ערכים דמיוניים, בהעניקנו לגורם השרירותי (עמ׳ 249) ערך דמיוני. אך נקודה נקראת דמיונית או מרוכבת רק אם יחסי השעורים אינם ממשיים.

2. הקורא שטרם התרגל לשעורים הומוגיניים, יוכל לקחת את המנות $\frac{\xi}{\zeta}$ ו $\frac{\eta}{\zeta}$ כשעורים קרטיסיים, וכן את $\frac{x_k}{z_k}$ ו $\frac{y_k}{z_k}$ כשעוריהן הקרטיסיים של הנקודות P_k. בחלקו במקרה זה את המשוואה (8) במכפלה $\zeta \cdot z_1 \cdot z_2$ יווכח כי P_1 ו P_2 חלות בישר (8).

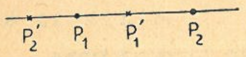
והנה, אף־על־גב שהנקודה P לא השתנתה מתוך כפל שעוריה ב λ, קבלנו במקום הנקודות P_1 ו P_2 נקודות P_1' ו P_2' המצויינות ע״י היחסים

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) : (\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2) : (\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) = x_1' : y_1' : z_1', \\ &(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) : (\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2) : (\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2) = x_2' : y_2' : z_2'. \end{aligned} \tag{9}$$

בשנותנו את λ לפי שרירות לבנו – פעולה שאינה משנה את P – נקבל זוגות־נקודות אחרים (9). ובכן יוצא שהמערכת האינסופית של כל זוגות־הנקודות (9), לעומת כל ערכי הגורם $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, מייצגת את הנקודה הדמיונית P. הנקודות המיוחדות $P_1' = (x_1', y_1', z_1')$ ו $P_2' = (x_2', y_2', z_2')$ הן ממשיות.

מערכת זו, התלויה רק ביחס בין שעוריה ההומוגוניים של הנקודה P, היא היציר הממשי שאליו התכוונו בעמ׳ 269. היחס בין P למייצגה ממשי זה הוא גם פרוייקטיבי, כפי שדרשנו לעיל; כלומר, אם נפעיל איזו הצבה ליניארית הומוגינית (ממשית) על ξ, η, ζ, מועברים הן x_1', y_1', z_1' הן x_2', y_2', z_2' לפי אותה ההצבה, כפי שמראה החשבון בהתאם למשוואות־ההצבה (10) בעמ׳ 254.

כל הנקודות הממשיות P_1', ו P_2' חלות בקו ישר הקבוע ע״י הנקודות P_1 ו P_2 (השוה בציור 30 [1]); שכן, בהכניסנו לאגף השמאלי של (8) תחת ξ, η, ζ את הערכים x_1', y_1', z_1' או x_2', y_2', z_2' לפי (9), נקבל את הסכום 0. גדולה מזו: כעבור λ על כל המספרים המרוכבים – ז״א כעבור (λ_1, λ_2) על כל הזוגות של מספרים ממשיים – תעבור הנקודה P_1', וכן הנקודה P_2', על כל נקודותיו של הישר הנ״ל, ברם באופן שכל קביעה ל P_1' תקבע באופן חד־ערכי גם את בת־זוגה P_2', וחילופו. עובדה זו מתאשרת ע״י החשבון ביתר קלות, אם נשים לב לכך שבעצם תלוי (9) רק ביחס בין λ_1 ו λ_2. בסמננו, למשל, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ – ב μ, מופיע במתכונת הראשונה (9) היחס $(x_1 + \mu x_2) : (y_1 + \mu y_2) : (z_1 + \mu z_2)$. כדי שיחס זה יקבל ערך נתון, בהתאם לנקודה P_1' הרצויה לנו מבין כל הנקודות החלות בישר $P_1 P_2$, מספיק לפתור משוואה ליניארית. אם למשל $\mu = 0$, נקבל את היחס $x_1 : y_1 : z_1$, כלומר את הנקודה P_1; את האמצע בין P_1 ל P_2 נקבל כנגד $\mu = 1$; וכו׳. באופן אנלוגי מופיע בשויון השני (9) היחס $(z_1 - \frac{1}{\mu} z_2) : (y_1 - \frac{1}{\mu} y_2) : (x_1 - \frac{1}{\mu} x_2)$.



ציור 30

לא נמשיך בפיתוחה של מחשבה זו. נעיר רק, שייצוג זה לנקודה דמיונית

1. אחרי הביאורים דלהלן לא יקשה על הקורא להיווכח שבמקרה שלפנינו (ייצוג נקודה דמיונית P), וכן תמיד כשהנקודות „הכפולות" (עיין לקמן) הן דמיוניות, מוכרח הסדר בין שני זוגות־הנקודות להיות כמו בציור 30; ז״א כך שאחת מנקודות הזוג השני נמצאת בין נקודות הזוג הראשון, והשניה מחוצה להן.

P ע״י אינסוף זוגות של נקודות ממשיות (וגם דמיוניות), החלות כולן באותו הישר עם P, מהווה דוגמה לאחד ממושגיה הראשונים[1] של הגיאומטריה הפרוייקטיבית, והוא מושג האינבולוציה. בשם זה קוראים להתאמה בין נקודות הישר לבין עצמן, בתנאי שזוגות אלה של נקודות המותאמות זו לזו ימלאו דרישות ידועות. החשובה שבדרישות אומרת: קיימות שתי נקודות, ממשיות או דמיוניות, שכל אחת מהן מותאמת לעצמה — „הנקודות הכפולות" של האינבולוציה — ושתי נקודות אלה, אם הן ממשיות, יוצרות יחד עם כל זוג של נקודות מותאמות רביעיה הרמונית (עמ׳ 245). כל שני זוגות — ולכן, כמובן, גם נקודה כפולה וזוג אחד, או שתי הנקודות הכפולות בלבד — קובעים את האינבולוציה לחלוטין. במקרה שלפנינו הנקודות הכפולות הן דמיוניות; אחת מהן היא עצם הנקודה P שלשם ייצוגה העלינו את כל בנין המחשבה דלעיל; היא הנקודה $(x_1+ix_2,\ y_1+iy_2,\ z_1+iz_2)$. הנקודה הכפולה השניה היא הנקודה הצמודה ל P, כלומר $(x_1-ix_2,\ y_1-iy_2,\ z_1-iz_2)$. זוהי מסקנה מידית מן הצורה הפשוטה שניתנה בקטע הקודם לשוויונות (9) (בעזרת μ); שהרי $\pm i$ הם שני הערכים ל λ הממלאים את המשוואה $\mu=-\frac{1}{\mu}$.

האינבולוציה כולה משמשת אפוא ייצוג והמחשה ממשית לנקודה הדמיונית P שהיא נקודה כפולה של האינבולוציה.[2]

עקרון הדואליות מרשה לנו לעבור, ללא כל עיון חדש, מן הנקודה לישר ולתת ייצוג ממשי לישר דמיוני: זה יהיה, תחת ישר ממשי הנושא זוגות נקודות המצטרפות לאינבולוציה, נקודה ממשית כנושאת כל הישרים העוברים דרכה, מתוך צירוף הישרים האלה לזוגות־זוגות במובן של אינבולוציית־ישרים. הישרים הכפולים הם כאן דמיוניים, הלא הם הישר הדמיוני שיצאנו לייצגו והישר הצמוד לו.

טבעי הדבר לשאול: מה נרוויח מהייצוג הממשי ליצירים דמיוניים? מי שניגש לבעיות הגיאומטריה מתוך השקפה אנליטית עיונית, יענה אמנם על קושיה זו ב„תיובתא"; התמונה האלגברית לא תוסיף פשטות ושקיפות בדרך זו. ברם איפכא מסתברא בעיני הגיאומטרים הרואים את רקע מדעם כמרחבי־

1. מושג זה מופיע כבר ב Brouillon של דיזארג (עמ׳ 173) וגם השם involution נקרא עליו בספר ההוא.

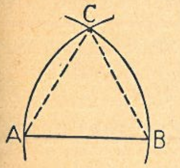
2. יש להקשות: אם כן אפוא, מהו היחס בין הנקודה הכפולה השניה לבין האינבולוציה? גם על כך ניתנה תשובה ע״י von Staudt מתוך הבחנה בין שני כוונים אפשריים באינבולוציה, שאחד מהם מתאים ל P והשני לנקודה הצמודה. — אין להתפלא על כך שכאן, במקרה של נקודה כפולה דמיונית, קובעת P בלבד (כלומר, נקודה כפולה יחידה) את האינבולוציה; שהרי ע״י P, מתוך הפרדת החלק הממשי והחלק הדמיוני הטהור, נתונה גם הנקודה הצמודה.

הסתכלותי: בשבילם בא הייצוג הנ״ל כדי לתת המחשה ממשית ליחסים הגיאומטריים בין יצירים דמיוניים. אמנם ביצוע הרעיון אינו פשוט ביותר, מפני שלאמיתו של דבר ישר דמיוני הוא יציר בעל שני ממדים, דבר שלא יוכל להפתיענו לאור המחשת המספרים הדמיוניים והמרוכבים באריתמיטיקה (פרק שביעי של הכרך ראשון). אך עצם האפשרות העקרונית להמחשה הסתכלותית משמשת בודאי נימוק נוסף להצדקת הרחבתו של התחום הממשי ע״י סיפוח יצירים דמיוניים — לא רק באריתמיטיקה כי אם גם בגיאומטריה.

מלואים לחלק החמישי (פרקים ה׳ ו׳).

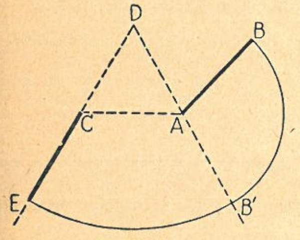
א) בניות־יסוד של אבקלידס. (מלואים לעמ׳ 162/3)

בבנית־העזר א) נתון קטע $\overline{AB}$. סביב כל אחד מקצותיו A ו B (עיין בציור 31) נחוג מעגלים העוברים דרך הקצה השני, על־פי הדרישה השלישית (עמ׳ 161). מתוך ההנחה הסתומה, ששני המעגלים חותכים זה את זה, מוכיח אבקלידס: אם נקודת־חיתוך (אחת מהן) תסומן ב C, יהיה המשולש ABC שוה־צלעות.



ציור 31

בבנית העזר ב) נתונים נקודה C וקטע $\overline{AB}$; מוטל עלינו להקצות מ C קטע השוה ל$\overline{AB}$. לפי הבניה הקודמת נצייר (עיין בציור 32) „מעל" הקטע $\overline{CA}$ משולש שוה־צלעות CAD ונמשיך, על־פי הדרישה השניה (עמ׳ 161), את הצלע $\overline{DA}$ מעבר ל A והלאה. סביב A נחוג מעגל דרך B, החותך את ההמשך הנ"ל בנקודה B′ (על־פי הנחה סתומה בדבר מציאותה של נקודת־חיתוך). כן נחוג סביב D מעגל דרך B′ החותך (כנ"ל) את המשך הצלע $\overline{DC}$ בנקודה E, באופן שקיים $\overline{CE}=\overline{AB'}=\overline{AB}$, דבר שקל להוכיחו. $\overline{CE}$ הוא אפוא קטע מן הסוג המבוקש.



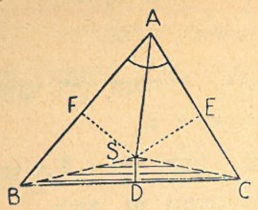
ציור 32

ב) הוכחת־תרמית שכל משולש הוא שוה־שוקיים. (מלואים לעמ׳ 163)

במשולש הנתון ABC (ציור 33) נצייר את חוצה הזווית שאצל A ואת האנך החוצה את הצלע $\overline{BC}$ ($\overline{BD}=\overline{CD}$). אם שני הישרים האלה מקבילים, הרי חוצה־הזווית מאונך הוא לצלע שכנגד (BC), וזה גורר אחריו שהמשולש ABC הוא שוה־שוקיים.

נניח אפוא שחוצה־הזווית והאנך־החוצה ממולו *אינם מקבילים* זה

לזה. לפיכך הם נחתכים; נבחין בין שני המקרים שבהם תימצא נקודת־החיתוך S *בפנים* המשולש (כבציור 33) או *מחוצה* לו (כבציור 34). בשני המקרים נוריד מ S אנכים לשתי הצלעות האחרות $\overline{AB}$ ו $\overline{AC}$ או להמשכיהן, ונסמן את עקבות האנכים ב E (על AC) וב F (על AB). נקשר את S ע"י ישרים גם לשני הקדקדים האחרים B ו C.

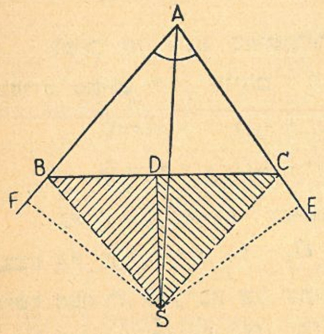


ציור 33

במקרה הראשון חופפים המשולשים ASF ו ASE, בהיותם מתאימים א) בצלע $\overline{AS}$, ב) בזוויות שאצל A (הרי AS הוא חוצה־זווית), ג) בזוויות הישרות AES ו AFS; לכן קיימים השוויונות:

$$\overline{AF}=\overline{AE},\qquad \overline{SF}=\overline{SE}. \tag{1}$$

כמו כן חופפים המשולשים (המקווקווים בציורנו) SDB ו SDC, בהיותם מתאימים בצלע $\overline{SD}$, בצלעות $\overline{DB}=\overline{DC}$ ובזוויות הישרות שאצל D; לכן גם $\overline{SB}=\overline{SC}$. בצרפנו שוויון זה אל היחסים (1), נמצא שהמשולשים SFB ו SEC חופפים גם הם, הואיל והזוויות אצל F ו E הן ישרות. קיים אפוא השוויון $\overline{FB}=\overline{EC}$, וצירופו לשוויון הראשון ב(1) נותן ע"י חיבור קטעים: $\overline{AB}=\overline{AC}$; מש"ל.



ציור 34

במקרה השני חופפים גם כן שלשת זוגות המשולשים ASF ו ASE, SDB ו SDC (מקווקווים), ולכן SFB ו SEC. השוויון המבוקש $\overline{AB}=\overline{AC}$ יוצא אפוא ע"י חיסור מתוך $\overline{AF}=\overline{AE}$ ו $\overline{FB}=\overline{EC}$.

ינסה נא הקורא לברר לעצמו שהתרמית בהוכחה זו היא ההסתמכות על ציורים, שהם משורטטים בטעויות הנובעות מתוך יחסי־סדר משובשים. אפשר לאמת את הדבר הן ע"י הוכחה עיונית הן מתוך ציור מדוקדק. (כדי לגרות את יצר־העצמאות שבקורא, ינתן פירוש מפורט יותר לא כאן כי אם בסוף ג), עמ׳ 278.)

ג) הוכחות לגבי ישר ומישור בגיאומטריה אנליטית טהורה. (מלואים לעמ׳ 177 ו־178)

ראשית עלינו להוכיח: אם „ישר" s, המתואר כזוג של „מישורים" שונים (השוה 2) בעמ׳ 176)

$$F_1(x,y,z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$
$$F_2(x,y,z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

„עובר דרך הנקודה" (x_0, y_0, z_0), הרי אפשר לתאר את s גם בצורה

$$(x-x_0):(y-y_0):(z-z_0) = a:b:c; \qquad (2)$$

כאן a, b, c הם מספרים שלא כולם שוים ל 0 (והתלויים, כמובן, במקדמי (1)).[1]

לשם זה נזכור, ראשית, שכל שלישיה (x, y, z) הממלאת את שתי המשוואות (1), ממלאת לפי ההנחה גם את המשוואות

$$F_1(x,y,z) - F_1(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad F_2(x,y,z) - F_2(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

וחילופו; לכן אפשר להגדיר את הישר s, במקום הצורה (1), גם ע"י שני המישורים (השונים)

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &\equiv F_1(x,y,z) - F_1(x_0,y_0,z_0) \equiv \\ &\equiv A_1(x-x_0) + B_1(y-y_0) + C_1(z-z_0) = 0, \\ G_2(x,y,z) &\equiv F_2(x,y,z) - F_2(x_0,y_0,z_0) \equiv \\ &\equiv A_2(x-x_0) + B_2(y-y_0) + C_2(z-z_0) = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

לפיכך חל s גם במישורים (השוה (3) בעמ' 177; $\varkappa_i$, וכן λ_i, הם זוגות מספרים שאינם שוים שניהם ל 0 לגבי אותו i)

$$\begin{aligned} H_1(x,y,z) &\equiv \varkappa_1 G_1(x,y,z) + \lambda_1 G_2(x,y,z) = 0, \\ H_2(x,y,z) &\equiv \varkappa_2 G_1(x,y,z) + \lambda_2 G_2(x,y,z) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

מאידך יכולים שני המישורים (4) לשמש הגדרה לישר s, אם אפשר לבטא את הפונקציות G_1 ו G_2 שב (3), המגדירות את s, בעזרת H_1 ו H_2. שיטת הפתירה למערכת של שתי משוואות ליניאריות עם שני נעלמים מלמדת, שאפשר לבטא כך את G_1 ו G_2 אם, ורק אם, $\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2 \neq 0$. (האגף השמאלי נקרא, כידוע, הדיטֶרמינַנט או הקוצב של המערכת.)

נוסיף על שני המישורים (4) מישור שלישי מאותו סוג:

$$H_3(x,y,z) \equiv \varkappa_3 G_1(x,y,z) + \lambda_3 G_2(x,y,z) = 0 \qquad (4')$$

ונבחר למקדמים $\varkappa_i$, λ_i את הערכים:

$$\varkappa_1 = -C_2, \quad \lambda_1 = C_1; \quad \varkappa_2 = -B_2, \quad \lambda_2 = B_1; \quad \varkappa_3 = -A_2, \quad \lambda_3 = A_1.$$

חשבון קל מביא לפי זה מן (4) ו (4') אל היחסים (עיין (3))

$$\begin{aligned} (C_1A_2 - A_1C_2)(x-x_0) - (B_1C_2 - C_1B_2)(y-y_0) &= 0, \\ (A_1B_2 - B_1A_2)(x-x_0) - (B_1C_2 - C_1B_2)(z-z_0) &= 0, \\ (A_1B_2 - B_1A_2)(y-y_0) - (C_1A_2 - A_1C_2)(z-z_0) &= 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

1. אגב, מצורה זו יוצא, שהמישורים (1) אינם „מקבילים"; לאמר: שאין קיימים שלשת היחסים $A_2 = kA_1$, $B_2 = kB_1$, $C_2 = Ck_1$. דבר זה מתאים להנחה, שהמישורים קובעים ישר; כלומר, שיש להם נקודות משותפות.

כל זוג מתוך שלישיה זו קובע את הישר s לפי האמור לעיל, אם הקוצבים

$$-(B_1C_2 - C_1B_2), \qquad -(A_1B_2 - B_1A_2), \qquad -(C_1A_2 - A_1C_2)$$

שונים בהתאם מ 0. והרי לא יתכן שכל שלשת הקוצבים האלה יתאפסו! שכן פרוש הדבר היה:

$$A_2 = kA_1, \quad B_2 = kB_1, \quad C_2 = kC_1; \qquad (k \neq 0)$$

כלומר, שני המישורים (3) מתלכדים הם, בניגוד להנחה.

מכיון שלפחות אחד משלשת הקוצבים הנ"ל שונה אפוא מ 0, יש בין שלש המשוואות (5) לפחות זוג אחד **הקובע** את הישר s, והוספת המשוואה השלישית אינה מעלה ואינה מורידה. אם כל שלשת הקוצבים שונים מ 0, יוצא מ (5) שקיימת „המתכונת המאורכת"

$$(x-x_0):(y-y_0):(z-z_0) = (B_1C_2 - C_1B_2):(C_1A_2 - A_1C_2):(A_1B_2 - B_1A_2).$$

ברם אפשר להשתמש במתכונת זו גם במקרה שלא כל הקוצבים מימין שונים מ 0, כי גם במקרה זה נוכל לראותה כביטוי אחר ליחסים (5). בסמננו את הקוצבים שבאגף הימני של המתכונת ב a, b, c, נשיג אפוא כ„משוואת" הישר s העובר דרך (x_0, y_0, z_0) את הצורה (2) שבעמ' 276; מש"ל.

מתוך תוצאה זו נובעת מיד גם הטענה השניה שבעמ' 177, והיא **שדרך שתי נקודות שונות** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ו $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ **עובר ישר אחד ויחיד**. אכן, בהכניסנו לתוך (2) את הערכים $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, נקבע כבר את היחס $a:b:c$ באופן חד־ערכי. לשון אחר, משוואת הישר דרך P_0 ו P_1 היא:

$$(x-x_0):(y-y_0):(z-z_0) = (x_1-x_0):(y_1-y_0):(z_1-z_0).$$

לבסוף עלינו למצוא את התנאי לכך, שיחסי המקדמים (למשל $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ אם $D \neq 0$) במשוואת המישור

$$F(x,y,z) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

לא יהיו קבועים מתוך שלשת התנאים (שלש משוואות ליניאריות ליחסים הנ"ל)

$$F(x_1,y_1,z_1) = F(x_2,y_2,z_2) = F(x_3,y_3,z_3) = 0;$$

כלומר, מתוך הדרישה ששלש הנקודות השונות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) תחולנה במישור הנידון. התנאי הוא, כידוע, שאחת המשוואות הנ"ל (למשל, השלישית) כלולה היא בשתי חברותיה, דהיינו, נובעת מהן ע"י תרכובת ליניארית; לאמור, $F(z_2,y_3,z_3) \equiv \varkappa F(x_1,y_1,z_1) + \lambda F(x_2,y_2,z_2)$, או ביתר פירוט:

$$x_3 = \varkappa x_1 + \lambda x_2, \quad y_3 = \varkappa y_1 + \lambda y_2, \quad z_3 = \varkappa z_1 + \lambda z_2, \quad 1 = \varkappa + \lambda.$$

הראשון והאחרון מבין היחסים האלה מצטרפים אל

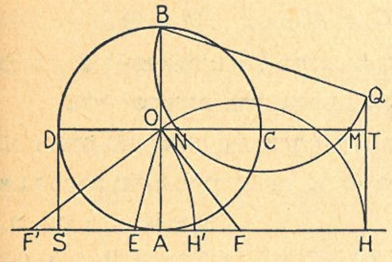
$$x_3 - x_1 = (\varkappa - 1)x_1 + \lambda x_2 = -\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_2 - x_1).$$

בהשתמשנו ביחסים המתאימים לגבי y ו z, נקבל את המתכונת (6) מעמ' 178

$$(x_3 - x_1):(y_3 - y_1):(z_3 - z_1) = (x_2 - x_1):(y_2 - y_1):(z_2 - z_1),$$

הקובעת ששלש הנקודות חלות בישר אחד.*

ד) בנית המצולע המשוכלל בעל 17 צלע[1]. (מלואים לעמ' 189)



ציור 35

נצייר במעגל בעל המרכז O והמחוג 1 (עיין בציור 35) שני קטרים מאונכים AB ו CD ונמשוך ב A וב D משיקים למעגל, הנחתכים ב S. נקבע את הנקודה E (בעזרת שתי חציות) באופן שיהיה $AE = \frac{1}{4} AS$ [2]. לפי זה קיים [3]:

$$AE = \frac{1}{4}, \quad OE = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \frac{1}{4}\sqrt{17}.$$

נחוג סביב E מעגל (שאינו מופיע בציור) בעל המחוג EO, החותך את הישר AS בנקודות F ו F′. η_1 ו η_2 יוגדרו ע״י

$$AF = EF - EA = OE - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\eta_2,$$

$$AF' = EF' + EA = OE + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\eta_1;$$

לפיכך קיים:

$$OF = \sqrt{AO^2 + AF^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_2^2}, \qquad OF' = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_1^2}.$$

המעגל סביב F בעל המחוג FO יחתוך את הישר AS, בעבר (מ F) הנגדי ל A, ב H, והמעגל סביב F′ בעל המחוג F′O יחתוך אותו ישר, בעברה של A (מ F′), ב H′. נגדיר η_{11} ו η_{22} ע״י

$$AH = AF + FH = AF + OF = \frac{1}{2}\eta_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_2^2} = \eta_{22},$$

---

* הנה הפירוש שהובטח לעיל בסוף המספר ב) בעמ׳ 275: ראשית, לעולם לא תחול S בפנים המשולש ABC; כלומר, המקרה של הציור 33 אינו אפשרי. שנית, באשר לציור 34, הרי לעולם לא תחולנה נקודות־העקב E ו F כפי שצוייר שם, אלא אחת חלה בצלע הנדונה עצמה והשניה בהמשך הצלע האחרת. לפיכך נצטרך פעם לחבר קטעים, ופעם לחסר.

1. בניה זו לקוחה מן הספר:

L. E. Dickson: Elementary theory of equations. New York, 1914.

באשר לבניות אחרות למצולע זה, השוה ב I, 202.

2. בכל הפרשה הזאת מסמנים AE וכו׳ קטעים ולא קווים ישרים, אלא אם כן צויין הדבר במפורש.

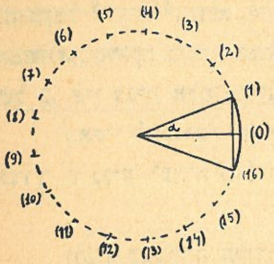
3. בשרשים הריבועיים המופעים כאן הכוונה תמיד לערכים לא־שליליים.

$$AH' = F'H' - F'A = OF' - AF' = \eta_{11}.$$

כדי לפתור את המשוואה הריבועית האחרונה הדרושה למטרתנו, נמשוך דרך H ישר HQ המקביל ל AO; T תהא נקודת־החיתוך בין הישרים DC ו HQ (בין H ל Q), והקטע TQ ישוה ל AH′. מעל הקוטר BQ נחוג מעגל, ונקודות־החיתוך בין מעגל זה והישר OT תהיינה N ו M, באופן ש N נמצאת בין O ל M. נגדיר $OM = \eta_{222}$. האנך החוצה את OM (ב L), יחתוך את מעגל־היחידה סביב O ב P. (L ו P לא סומנו בציור.) הטענה היא: **המיתר CP הוא צלעו של המצולע המשוכלל בעל 17 צלעות, המוקף במעגל־היחידה סביב O.**

נוכיח זאת בקיצור נמרץ, באופן שהדבר יהא מובן, לפחות, לקורא המתקדם. נצא מן המשוואות הריבועיות המתאימות (השוה I, 224; הסימונים שנקבעו שם נשמרו גם כאן). η_1 ו η_2 הם שרשי המשוואה $x^2 + x - 4 = 0$ (1); η_{21} ו η_{22} הם שרשי המשוואה $x^2 - \eta_2 x - 1 = 0$ (2); η_{11} ו η_{12} שרשי המשוואה $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$ (3); לסוף, η_{221} ו η_{222} שרשי המשוואה $x^2 - \eta_{22}x + \eta_{11} = 0$ (4).

כדי להבדיל בין שני שרשיה של כל משוואה, נציג את השרש המתאים ל (1) בציור 36, שבו $\alpha = \frac{2\pi}{17}$, כ $\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ (השוה I, 224), וכל שאר השרשים מופיעים אפוא כחזקות של שרש זה. לפי זה יהיה



ציור 36

$$\eta_{222} = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad \eta_{221} = 2\cos\frac{8\pi}{17}, \quad \eta_{222} > \eta_{221}.$$

בדרך דומה נקבל:

$$\eta_{22} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17}, \quad \eta_{11} = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17}.$$

לכן η_{22} ו η_{11} שניהם הם חיוביים. מאידך

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}$$

הוא שלילי.

והנה השויון $\eta_1\eta_2 = -4$ (לפי (1)) מראה ש η_2 הוא חיובי. לכן נקבל מן המשוואות (1) עד (4):

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{17} - 1), \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1),$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{2}\eta_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_1^2}, \quad \eta_{22} = \frac{1}{2}\eta_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\eta_2^2}.$$

אם נקח בציור 35 את הישרים OC ו OB כציריה של מערכת־שעורים, יהיו ל B השעורים (0,1) ול Q השעורים (η_{22}, η_{11}). לכן ה„פסוקים" ON ו OM הם שרשי המשוואה (4), והגדול ביניהם הוא

$$OM = \eta_{222} = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

באשר לסוף הבניה, הרי קיים

$$\cos \sphericalangle LOP = OL = \cos\frac{2\pi}{17}, \quad \sphericalangle LOP = \frac{2\pi}{17}.$$

מכאן שהמיתר CP הוא צלע המצולע המבוקש.

ה) אי־התפרקותן של המשוואות (2), (3), (4) בעמ׳ 187/8 בשדה המספרים הרציונליים. (מלואים לעמ׳ 189)

המשוואה (2), שבה תלויה הכפלת הקוביה, היא:

$$x^3 - 2 = 0.$$

כדי שהפולינום $x^3 - 2$ יהא פריק, צריך אחד הגורמים (הרציונליים) להיות ליניארי (על סמך שני הפירודים החיבוריים האפשריים של 3, שהם $1+1+1 = 1+2 = 3$). יהא שורש המשוואה הליניארית המתאימה $x = \frac{r}{s}$ (רציונלי); מותר להניח ש r ו s הם זרים. מן השויון $(\frac{r}{s})^3 = 2$, או $r^3 = 2s^3$, נובע ש r הוא זוגי: $r = 2t$. לפי זה נקבל $4t^3 = s^3$, ז״א s זוגי הוא, בניגוד להנחת הזרות בין r ל s. לכן אין המשוואה פריקה בשדה המספרים הרציונליים. הואיל ומאידך מעלתה 3 אינה חזקה של 2, אין בניה אלמנטרית להכפלת הקוביה, על־פי המשפטים בעמ׳ 185 ו 190[1].

באשר למשוואה (3), הרי מספיק לדון בערך מסויים של φ, למשל ב $\varphi = 120^0$; בדרך זו נגיע לצורה ('3) שבעמ׳ 187:

$$(3') \qquad x^3 - 3x + 1 = 0.$$

והנה, כבמקרה הקודם, אילו היה הפולינום $x^3 - 3x + 1$ פריק, היה מכיל גורם רציונלי ליניארי; נוכל לכתוב את שרשה של המשוואה הליניארית המתאימה בצורה $x = \frac{r}{s}$, שבה s חיובי ו r זר ל s. בהכניסנו ערך זה לתוך ('3) ובכפלנו ב s^2, נקבל: $\frac{r^3}{s} - 3rs + s^2 = 0$. לפיכך $\frac{r^3}{s}$, השווה ל $3rs - s^2$, הוא מספר שלם. על כן, אילו היה $s > 1$, היה קיים גורם משותף ל r ול s בניגוד להנחת הזרות; לכן $s = 1$.[2] מאידך, מתוך הצבת השורש השלם $x = \frac{r}{s} = r$ עובר האגף השמאלי של ('3) אל $r^3 - 3r + 1$; כדי שביטוי זה יתאפס, צריך גם 1 להתחלק ב r; כלומר,

1. המשפט האחרון, הקובע כתנאי הכרחי שמעלת המשוואה הנדונה היא חזקה של 2, אינו נחוץ בכלליותו. שכן בכל שלשת המקרים שלפנינו מדובר על משוואה בעלת המעלה 3 שאינה פריקה, ואין זה קשה להוכיח במישרין, שאי אפשר לפתור משוואה כזו בעזרת שרשים ריבועיים.

2. כך יוצא בדרך־כלל, שכל שורש רציונלי הוא מספר שלם, אם מקדם החזקה הגבוהה (כלומר, של x^n במשוואה בעלת המעלה n) הוא 1. זהו מקרה פרוט ל„לימה" (lemma) הידוע של גאוס האומר: אם הפולינום

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

בעל מקדמים שלמים, מתפרק למכפלת שני פולינומים בעלי אותה צורה עם מקדמים

$r = \pm 1$[1]. מכיון שלא $+1$ ולא -1 אינם שרשים למשוואה ('3), יוצא שאין לפתור את הבעיה (במקרה שלפנינו: לבנות זווית של 40^0) בדרך אלמנטרית; שהרי גם כאן מעלת המשוואה האי־פריקה ('3) היא 3, ולא חזקה של 2. — בהתאם לכך אין לבנות בדרך אלמנטרית מתושע משוכלל (עמ׳ 187).

במקרה של המשוואה (4)

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

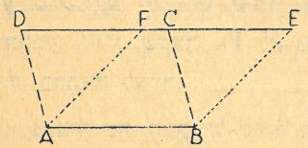
שבה תלויה בנית המשובע המשוכלל, דומה ההוכחה למקרה הקודם. שוב תביא ההנחה שב $x = \frac{r}{s}$ יהא s חיובי וזר ל r, לידי המסקנה $s = 1$, ולכן קיים כנגד $x = r$:

$$r^3 + r^2 - 2r = r(r^2 + r - 2) = 1;$$

כלומר 1 מתחלק ב r, ז״א $r = \pm 1$, בעוד שלא $+1$ ולא -1 אינם שרשים למשוואה (4). לכן אין בניה אלמנטרית לחילוק המעגל לשבעה חלקים שוים.

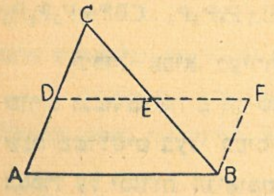
ו) על שטחי מקביליות בעלות בסיסים שוים וגבהים שוים. (מלואים לעמ׳ 198)

קודם כל ברור, ללא שימוש באכסיומות הרציפות, ששתי מקביליות כאלו שוות־שטח הן במובן המוגדר בעמ׳ 196. לשם פשטות נוכל להניח, שלשתי המקביליות ABCD ו ABEF (ציור 37) יהא הבסיס המשותף $\overline{AB}$, וכי הצלעות שממולו $\overline{CD}$ ו $\overline{EF}$ תמצאנה בישר אחד. בהוסיפנו על המקבילית הראשונה את המשולש BCE ועל השניה את המשולש ADF החופף על BCE, נקבל בשני המקרים את הטרפיז ABED. לכן שתי המקביליות הן שוות־שטח.



ציור 37

הציור 38, שבו נצא מן המשולש ABC ונעביר דרך האמצע E של $\overline{BC}$ ישר DF המקביל ל AB, בהקצותנו $\overline{EF}$ שוה ל $\overline{ED}$, מראה על נקלה שהמשולש ABC שוה־הפרדה הוא למקבילית ABFD; ע״י הוספת המשולשים החופפים BFE ו CDE יושלמו שניהם אל המחומש ABFEC. לפיכך כל משולש הוא שוה־הפרדה למקבילית ידועה בעלת אותו הבסיס וחצי הגובה, ומכאן יוצא בהתאם למשפט הקודם, שכל שני משולשים בעלי בסיסים שווים וגבהים שווים הם שווי־שטח.



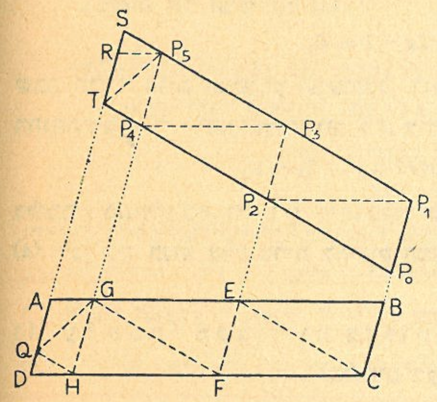
ציור 38

רציונליים, הרי מקדמים רציונליים אלו שלמים הם. ינסה־נא הקורא להוכיח זאת כנגד $n = 3$ ע״י פירוק המכנים לגורמיהם הראשוניים!

1. גם זוהי עובדה כללית אלגברית, שהיא מסקנה מכך שהאיבר הקבוע במשוואה הוא ± 1.

אך מטרתנו מרחיקה לכת מזה; הלא היא להוכיח, ששתי מקביליות בעלות בסיסים שווים וגבהים שווים הן לא רק שוות־שטח אלא אפילו ש ו ו ת ־ ה פ ר ד ה; לשם כך זקוקים אנו לאכסיומת א ר כ י מ י ד ס, כאמור בעמ׳ 198.

תהיינה ABCD ו SP_1P_0T שתי המקביליות הנתונות (ציור 39); ציירנון כך ש $\overline{P_0P_1}=\overline{CB}$ (בסיסים שווים) ושהנקודות C, B, P_0, P_1 תחולנה בישר אחד, וכן הנקודות D, A, T, S בישר המקביל ל CB (גבהים שווים). הבה נמשוך את הישרים P_1P_2 בהקבלה ל BA, P_2P_3 בהקבלה ל P_0P_1, P_3P_4 בהקבלה ל BA, וכו׳ (בציור שלפנינו נגמר תהליך זה במשיכת P_4P_5 המקביל ל P_0P_1). ל פ י א כ ס י ו מ ת א ר כ י מ י ד ס (עמ׳ 165) צ ר י ך ל ה י מ צ א ב מ ע ר כ ת ה ק ט ע י ם $\overline{P_{2k}\,P_{2k+2}}$



ציור 39

ק ט ע מ ס ו י י ם $(k=n)$ ש ב ו (א ו ב ק צ ה ו) ח ל ה ה נ ק ו ד ה T; בציור 39 זהו הקטע P_4P_6, שקצהו P_6 לא נכלל בציור. לשם פשטות נעסוק עתה במקרה $n=2$, בהתאם לציור.

נעביר את המקביל ל BA דרך P_5; מקביל זה אינו חותך את הצלע $\overline{P_0T}$ כמו המקבילים דרך P_1 ו P_3, כי אם את הצלע $\overline{ST}$. נקודת החיתוך תסומן ב R. בהתאם לבניות הקודמות נמשוך במקבילית התחתונה (ABCD) את CE, FG ו HQ כמקבילים ל P_0T, ואת EF ו GH כמקבילים ל BC; לפי זה יהיה QG מקביל ל TP_5.

בדרך זו – וכן במקרה הכללי שלעומתו עומד כאן $n=2$ – הופרדו המקביליות הנתונות למשולשים חופפים, שהם

$P_0P_1P_2$ ו CBE; $P_1P_2P_3$ ו CFE;...; P_4P_5T ו HGQ; P_5RT ו GAQ; P_5SR ו HQD.

הוכחנו אפוא, בעזרת האכסיומה של ארכימידס, שמקביליות בעלות בסיסים שווים וגבהים שווים הן שוות־הפרדה. קל להסיק מזה, בדרך שהלכנו בה לעיל, שגם משולשים בעלי בסיסים שווים וגבהים שווים הם שווי־הפרדה. הילברט הראה בספרו על יסודות הגיאומטריה (§ 19 של המהדורות האחרונות) ש א י ־ א פ ש ר להוכיח את שויון־ההפרדה ללא שימוש באכסיומת ארכימידס. בגיאומטריה „לא־ארכימידית" קיים רק ש ו י ו ן ־ ש ט ח בין מקביליות או משולשים כאלה ו ל א ש ו י ו ן ־ ה פ ר ד ה.

ז) ע ל ש ט ח ו ש ל מ ר ו ב ע. (מלואים לעמ׳ 201)

קבענו בעמ׳ 199 את שטחו ה י ח ס י (התלוי במגמת ההקפה) של משולש – שקדקדיו 1, 2, 3 הם בעלי השעורים הקרטיסיים במישור x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 – בצורת קוצב

$$(1,2,3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3y_1-y_3x_1)+(x_1y_2-y_1x_2)\right].$$

כדי לקבוע את שטחו של מרובע – קודם כל מתוך ההנחה הרגילה שאף אחת מצלעותיו לא תחתוך צלע אחרת – נוכל להפרידו בעזרת אחד הקרנזולים לשני משולשים. כאן תהיינה שתי אפשרויות הפרדה. אך במקרה של מצולע בעל n צלעות יש, אם n גדול במקצת, כבר מספר עצום של מקרים, ולא יהיה קל כל עיקר להוכיח, מתוך מיון המקרים השונים לגבי ההפרדה מצד אחד ולגבי מגמת ההקפה מצד שני, שהתוצאה שוה בכל המקרים.

אולם כל מי שהוא בקי ביסודות הגיאומטריה האנליטית מזה ובתורת הקוצבים מזה, ידע להוכיח ללא קושי, ראשית במקרה המשולש, שכנגד א י ז ו נ ק ו ד ה נ ו ס פ ת ש ה י א 0 במישור המשולש קיים היחס

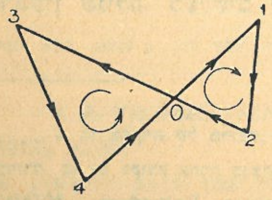
$$(1,2,3)=(0,1,2)+(0,2,3)+(0,3,1). \qquad \text{(I)}$$

נוסחה אנלוגית קיימת כנגד כל מצולע בעל n צלעות. לאמור: אם נסמן את שטח המצולע בעל הקדקדים 1, 2, ..., n ב $(1, 2, 3, \dots, n)$, בהוסיפנו ששטח זה יהיה חיובי כשהקפת המצולע בסדר מ 1 דרך 2, 3, ... עד n תתאים למגמה החיובית (הנגדית למגמת המחוג בשעון) ושלילי במקרה ההפוך – מתקיימת במקרה $n=4$, ז"א לגבי שטח המרובע, הנוסחה

$$(1,2,3,4)=(0,1,2)+(0,2,3)+(0,3,4)+(0,4,1); \qquad \text{(II)}$$

וכן לגבי כל n. נוסחה זו מעמידה באופן אחיד, ללא כל צורך להבדיל בין מקרים שונים, את שטחו של כל מצולע על שטחו של משולש. נבחר בנקודה 0, שתוכל להימצא בפנים המצולע או מחוצה לו (ואף בהיקפו), לפי נוחיותנו ככל האפשר; למשל, נקח את מוצא השעורים (נקודת־הראשית) כ 0. אגב: לנוסחה הנ"ל יש גם ערך שימושי; הלא היא מרשה לחשב את שטחו של מגרש מוגבל ע"י קטעים ישרים, אם ידועים שעוריהם של הקדקדים (קצות הקטעים).

ועתה נעורר את המקרה שבגללו העלינו על הפרק את שטח המצולע, ובפרט המרובע. אם מספר הצלעות גדול מ 3, אפשריים מקרים שבהם צלע ידועה עוברת (חודרת) דרך אחת מחברותיה; במקרה של מרובע מראה זאת הציור 40. לפי מהלך הרעיונות שבו צעדנו עד כה, תתעורר כאן לא השאלה „איך נגדיר את שטח המרובע, או



ציור 40

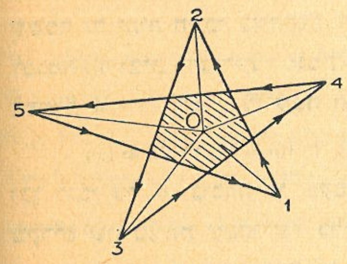
המצולע, במקרה כזה?" כי אם השאלה „איזו משמעות גיאומטרית יש להגדרת השטח שבנוסחה (II) במקרה זה?". כדי לענות נקח כנקודה (השרירותית) 0 ב (I) את נקודת־החיתוך (החדירה)[1]; בציור 40 נקודת־החיתוך בין הצלעות $\overline{23}$ ו $\overline{41}$. מכיון שבחירה זו גורמת לכך שהשטחים (0, 2, 3) ו (0, 4, 1) יתאפסו, נשאר היחס

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 1, 2) + (0, 3, 4).$$

במשולש $\overrightarrow{012}$ מסודרים הקדקדים לפי המגמה השלילית, ולכן השטח (0, 1, 2) הוא שלילי; ואילו (0, 3, 4) הוא חיובי. לכן יהיה „שטח" המרובע שלפנינו, אם הקדקדים מסודרים לפי $\overrightarrow{1234}$, כשטחו המוחלט של החלק (המשולש) בעל מגמה חיובית פחות שטחו המוחלט של החלק בעל מגמה שלילית.

אפשר (ולא קשה לכל מי שהתרגל בחשבונות כאלה) להכליל מסקנה זו לקראת אילו מצולעים שהם ולהוכיח: כאשר באיזה מצולע שהוא חודרות צלעות לתוך צלעות אחרות ויוצרות ע״י זה חלקים (מצולעים) נפרדים, קובעת ההגדרה דלעיל לשטחו של מצולע את סכום שטחיהם של כל החלקים (כשכל אחד מנוי לפי מספר המונים בו יופיע אותו חלק בהיקף $\overrightarrow{12\ldots n}$), אם שטחו של כל חלק בעל מגמה חיובית יקבל, כדבעי, סימן חיובי, ושטחו של כל חלק בעל מגמה שלילית — סימן שלילי.

„המחומש הכוכבי" בו מופיעים חלקים ידועים פעמיים, יוכל לשמש דוגמה; עיין בציור 41, שבו נבחרה אמנם הנקודה 0 בחלק התיכון ולא כאחת מנקודות החדירה. במקרה זה מתאימים כל שטחי־המשולשים (0,1,2), ..., (0,5,1) למגמה החיובית, וגם ההקפה $\overrightarrow{12345}$ במחומש עצמו היא חיובית; היא מקיפה את „הגרעין" התיכון פעמיים, ואת שאר החלקים פעם אחת.



ציור 41

במישור הצלחנו אפוא להתאים שטח לכל מצולע, יהיה משונה כאשר יהיה. אולם אין הדבר אפשרי לגבי פיאונים במרחב. אותו חוקר (מיביוס; עיין בעמ' 171), שהדגיש את חשיבות הסימן בהגדרת השטח, הוא הראשון שגילה, כשלשים שנה אחרי כך[2], מציאותם של פיאונים שאי

1. כך במקרה של מרובע. אם יש למצולע יותר מארבע צלעות, נקח איזו שהיא מנקודות־החדירה, או גם נקודה אחרת כבציור 41.

2. Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders. *Möbius*, *Gesammelte Werke*, II, p. 473.

אפשר ליחס להם נפח מסויים. ענין זה מסובך הוא במקצת; קשור הוא קשר אמיץ במשטחים החד־צדדיים, כגון העָלה של מיביוס, שנדון בהם בפרק השביעי (חטיבה שלישית). באמת הפיאונים הנדונים חד־צדדיים הם.

ח) קבוצת השברים העשרוניים כקבוצה מושלמת שאינה צפופה בשום מקום[1]. (מלואים לעמ' 212)

נסמן ב D את קבוצת כל השברים העשרוניים המתחילים ב . 0; הם מתארים אפוא את כל המספרים הממשיים בין 0 ל 1 (לרבות 0 ו 1). ביתר דיוק: כל מספר ממשי בין 0 ל 1, הניתן לפיתוח לשבר עשרוני סופי, מופיע ב D פעמיים: בצורה $0.d_1d_2\ldots d_n$ שבה $d_n \neq 0$, ובצורה $0.d_1d_2\ldots d_n{-}1\,999\ldots$; למשל $0.4999\ldots = 0.5$. ואילו כל מספר אחר (לרבות הקצוות 0 ו $0.999\ldots = 1$) מופיע פעם אחת. דברים אלה הוסברו והוכחו ב I, 140 ו 213, ועלו על הפרק גם בחטיבה הראשונה של כרך זה, עמ' 28.

בדרך כלל לא נשים כאן לב לקשר בין מספרים ממשיים לשברים עשרוניים („פיתוחי המספרים"), אלא נדון בשברים העשרוניים כשלעצמם. נגדיר סדר ביניהם, כדלקמן:

> הסדר בין שני שברים עשרוניים מתוך D, המייצגים מספרים ממשיים שונים, יתאים לסדר לפי הגודל הקיים בין שני המספרים ההם. באשר לשני איברי D, המייצגים אותו המספר הממשי, יקדם השבר האינסופי לשבר הסופי. (למשל, $0.499\ldots$ יקדם ל 0.5).

קל להגדיר סדר זה ב D גם ללא הסתמכות על מספרים ממשיים ופיתוחם לשברים עשרוניים, כדלקמן: נשקיף על הספרות 0, 1, 2, ..., 9 בסדרם טבעי זה כעל אותיות הא"ב; לכן נשקיף על השברים העשרוניים האינסופיים והסופיים, החל מ 0. והלוך ימינה, כעל מלים (בעלות אורך אינסופי) בשפת הספרות. (גם השברים הסופיים מהווים מלים כאלה, אם נוסיף אחרי הסיפרה האחרונה השונה מ 0 אינסוף אפסים.) לפי זה יהיה הסדר הנ"ל בין איברי D הסדר שבמילון (הלכסיקוגראפי; השוה בעמ' 143)[2]. — לשם פשטות נשתמש כלפי הסדר המוגדר בסימן הרגיל $<$, באופן ש $a < b$ ר"ל: לפי סדר זה קודם a ל b.

ואמנם לקבוצה D הסדורה כנ"ל יש שתי התכונות היסודיות שלמדנו

המאמר פורסם בראשונה בכתבי חברת המדעים של ליפסיה (כרך 17) ב 1856, שבע שנים אחרי שמיביוס גילה את הדבר.

1. A. Fraenkel: *Journal für d. reine u. angew. Mathematik*, vol. 141 (1912), p. 59.

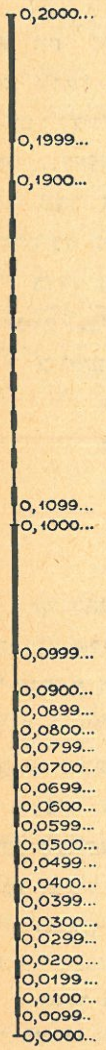
2. בקיצור: הסדר בין שני איברי D יוכרע ע"י הסדר שבין הזוג הראשון של ספרות שונות העומדות באותו המקום אחרי הנקודה.

בקבוצה C בעמ׳ 209/11. קודם כל D א י נ ה צ פ ו פ ה ב ש ו ם מ ק ו ם; כלומר, אם a ו b הם איברים שונים מ D ואם $a<b$, יש איברים $\bar{a}$ ו $\bar{b}$ ב D כך שקיימים היחסים:

א) $b \leq \bar{b} < \bar{a} \leq a$, ב) בין $\bar{a}$ ל $\bar{b}$ אין כל איבר של D.

כדי להוכיח את הדבר, נכתוב a ו b בצורה:

$$a = 0.a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \ldots, \qquad b = 0.b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k \ldots .$$



ציור 42

יכול להיות שמספר מסויים[1] של ספרות ראשונות ב a ו b שוות הן, למשל שקיימים היחסים:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1};\quad a_k \neq b_k.$$

אם $a_1 \neq b_1$, הרי $k=1$. בפרט יוצא שקיים $a_k < b_k$, בו מציין $<$ את הסדר הטבעי בין מספרים שלמים אלו.

ועתה עלינו להבחין בין שני מקרים[2]:

1) אפשר שבין a ל b אין כל איבר של D. לפי מה שנאמר לעיל, יחול מקרה זה אם, ורק אם, קיימים היחסים

$$b_k = a_k + 1,\ a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = 9,\ b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = 0.$$

במקרה זה הוכחנו את הטענה; שהרי $\bar{a}=a$, $\bar{b}=b$ מאַמת אותה.

דוגמה: $a = 0.122999\ldots$; $b = 0.123$.

2) אם אין היחסים דלעיל קיימים, נבחר בשברים העשרוניים מתוך D

$$\bar{a} = 0.a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k 999\ldots, \qquad \bar{b} = 0.a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k{+}1$$

שהשני מהם הוא שבר סופי. על־כל־פנים יהיה $a \leq \bar{a}$; ומכיון שהנחתנו $a_k < b_k$ (a_k ו b_k הלא הן ס פ ר ו ת!) נובע $a_k + 1 \leq b_k$, יהיה גם $\bar{b} \leq b$. (שני השויונות $\bar{a}=a$, $\bar{b}=b$ אינם מתגשמים יחד, שכן זהו המקרה 1) שהוצאנוהו.) הואיל והכתיב של $\bar{a}$ ו $\bar{b}$ מראה, ראשית שקיים $\bar{a} < \bar{b}$ (על־סמך $a_k < a_k + 1$), ושנית שבין $\bar{a}$ ל $\bar{b}$ אין כל איבר של D (כפי שהודגש לעיל), ממלאים $\bar{a}$ ו $\bar{b}$ ביחס ל a ו b את שני התנאים א) ו־ב) דלעיל, מש״ל.

בסמננו את הקשר המיוחד בין שני איברי D שאין ביניהם כל איבר ע״י רווחים מצויינים כמו בעמ׳ 209, נוכל לעמוד באופן הסתכלותי על „התחלת" הקבוצה D בציור 42.

בהכניסנו כאן מושגים חדשים אחדים, נַראה ש D היא

1. אי אפשר שלגבי כ ל k יהיה $a_k = b_k$, כי דבר זה סותר את ההנחה $a<b$.

2. היה אפשר להסתפק במקרה 2) בלבד; הכנסנו גם את 1) כדי לקרב את הענין להסתכלות.

קבוצה מ ו ש ל מ ת (פֶּרפֶקטית), כלומר צ פ ו פ ה ב ת ו כ ה ו ס ג ו ר ה[1]. כדי להוכיח את התכונה הראשונה, יש צורך להראות שלשום איבר a של D אין „שכנים" משני הצדדים כאחד; כלומר: אם a הוא איבר של D ו $c<a<b$, הרי יש איברים נוספים של D בין b ל a, או[2] בין a ל c. דבר זה מתמלא באמת. כדי להקל על הבנתו, נניח כי a אינו שבר עשרוני ס ו פ י, כלומר אינו קצהו הימני (העליון) של קטע מצויין.[3] אפשר להוכיח במקרה שלפנינו: אם $a<b$, יש איבר d ב D הממלא את היחסים $a<d<b$.

בהניחנו שב a וב b k הספרות הראשונות שוות הן, נכתוב b ו a בצורה:

$$b = 0.a_1 a_2 \ldots a_k b_{k+1} b_{k+2} \ldots, \qquad a = 0.a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots .$$

לפי הנחותינו דלעיל קיים $a_{k+1} < b_{k+1}$, ולא כל ה a_n החל מציון מסויים שוים ל 0. לכן השבר הסופי $d = 0.a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}$ עוקב הוא ל b על־סמך $a_{k+1} < b_{k+1}$, וקודם ל a לפי ההנחה לגבי ה a_n; קיים אפוא $a<d<b$, מש״ל.

העובדה, ש D היא קבוצה „סגורה", נובעת מתורת המספרים הממשיים, למשל בצורת חתכים או סדרות יסודיות. (עיין ב I, 121 ו 126, או בכרך זה, חטיבה ג׳ פרק שביעי, § 1.) לפי I, 121 אפשר לבטא את תכונת הסגירות כך: אין חתך מסוג IV („ליקוי") בקבוצה D. באמת קל לראות בהתאם לתורת השברים העשרוניים (I, 136/7), שכל חתך בקבוצה D נקבע או ע״י איבר אחד של D בלבד, או ע״י שני איברים שהם שכנים (שני קצותיו של ריוח מצויין ידוע); במקרה השני יהיה האיבר האחד (שבר עשרוני בעל המחזור $\bar{9}$) האיבר האחרון במחלקתו התחתונה של החתך, והאיבר השני (שבר סופי) האיבר הראשון של המחלקה העליונה.

בדוגמה שלפנינו מדובר בשברים עשרוניים. ברור הדבר, שאין כל יתרון למספר היסודי 10, ושכל מספר טבעי גדול מ 1 יכול לעמוד במקומו; אפשר אפילו להסיק מתוך מה שנאמר בעמ׳ 93/4 על הטיפוס הסידורי η, שהקבוצות D הנוצרות על סמך מספרים יסודיים שונים ד ו מ ו ת הן ביניהן, כלומר שיש להן טיפוסי־סדר שווים. בפרט תוכל אפוא קבוצת כל השברים הדואליים

$$0.a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad (a_k = 0,1)$$

לשמש דוגמה לקבוצה מושלמת שאינה צפופה בשום מקום; קבוצה זו הוכנסה בעמ׳ 211 לשם ההוכחה, כי ל D (כמו לכל קבוצה מושלמת) יש עצמת הרצף.

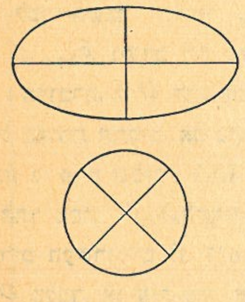
1. מושגים אלה מובנים כאן לפי תורת הקבוצות המופשטות ולא ביחס ל„מרחב" מסויים.

2. אם a הוא שבר עשרוני סופי או בעל המחזור $\bar{9}$, יתכן שתתגשם אחת האפשרויות הנ״ל בלבד; במקרה הראשון: השניה, במקרה השני: הראשונה. בכל מקרה אחר יש תמיד איברים נוספים הן בין b ל a הן בין a ל c. לגבי קצות הריוח כולו קיים רק אי־שויון אחד.

3. ההוכחה לגבי המקרה המוצא כאן מבוצעת לפי אותו המסלול בדיוק, אלא שיש להחליף „שבר סופי" ב„שבר בעל המחזור $\bar{9}$", וכן $>$ ב $<$.

ט) העמדת כל העברה אֲפינית שהיא על העברה אפינית „טהורה". (מלואים לעמ' 241)

נציין את מהלך המחשבה בלבד ללא הוכחת פרטים. ראינו בעמ' 240, שהעברה אפינית כללית (במישור) מעבירה מעגל נתון לאליפסה. כידוע נקרא כל קטע ישר, המקשר שתי נקודות שבקו האליפסה והעובר דרך מרכז האליפסה, בשם „קוֹטר" של האליפסה. הכינוי מושאל מן המעגל; אך באליפסה שונים ארכי הקטרים. מבין קטריה השונים של אליפסה מצטיינים שנים, שהם הגדול והקטן בין כולם; הם מכונים „צירי" האליפסה, וכידוע מאונכים הם זה לזה (עיין בציור 43). העברה אפינית תעביר את מרכז המעגל למרכז האליפסה ולכן כל קוטר של המעגל לקוטר של האליפסה[1]. בפרט קיים המשפט, ששני קטרי המעגל שהועברו לצירי האליפסה, גם הם מאונכים זה לזה[2].



ציור 43

נסמן כאן כמו בעמ' 237 את השעורים המקוריים ב (x, y) ואת השעורים החדשים, המתקבלים מהם על־סמך העברה אפינית מן הסוג (3) שבעמ' 237, ב $(\bar{x}, \bar{y})$. נוסיף שתי הנחות פשוטות לגבי ההעברה הנדונה: ראשית, שמרכז המעגל (במערכת המקורית) ומרכז האליפסה (במערכת החדשה) ישמשו נקודות־ראשית בשתי המערכות; שנית, שנקח כצירים למערכות־השעורים: במערכת המקורית את הישרים שבהם חלים קטרי המעגל שהועברו לצירי האליפסה, במערכת החדשה את הישרים שבהם חלים צירי האליפסה.[3] כדי למלא את ההנחה השניה, נחוץ לכל היותר סיבוב בלבד, אחרי שנתמלאה ההנחה הראשונה בעזרת הזזה. על־סמך הנחות אלו ועל־סמך העובדה שההעברות יוצרות חבורה, נכתוב את משוואות־ההעברה כמו ב (3):

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y, \qquad \bar{y} = a_2 x + b_2 y.$$

והנה, לפי מה שקבענו לעיל, יועבר ציר ה x אל ציר ה $\bar{x}$, וציר ה y אל ציר ה $\bar{y}$. כלומר, כנגד $y = 0$ יהיה גם $\bar{y} = 0$, וכן כנגד $x = 0$ גם $\bar{x} = 0$. העובדה הראשונה נותנת $0 = a_2 x + b_2 \cdot 0$ לגבי כל x, ז"א $a_2 = 0$; כמו־כן

1. זוהי מסקנה מידית מן העובדה, שחציית קטע היא פעולה אפינית; שהרי המרכז חוצה כל קוטר (בשני המקרים).

2. זהו פירוט לעובדה הכללית, שכל זוג של קטרי־מעגל המאונכים זה לזה מועבר לזוג „קטרים צמודים" של האליפסה — מושג השגור בפי כל מי שעסק קצת בתורת חתכי־החרוט.

3. כלומר, בשעת הצורך נוסיף העברה מן הסוג הפשוט המכונה „העברת שעורים" או „תנועה", בהתאם למה שדרוש על־סמך שתי ההנחות.

נותנת העובדה השניה: $b_1 = 0$. לפיכך יש למשוואות (3) הצורה הפשוטה

$$\bar{x} = a_1 x, \qquad \bar{y} = b_2 y;$$

כלומר, יש לפנינו אֲפיניות טהורה (עמ' 241), מש"ל.

י) הקשר בין יחסיהן הכפולים של נקודות וקרניים. (מלואים לעמ' 248)

לשם הוכחת המשפט שבעמ' 248 נסתמך על הציור 23 בעמ' 247. יהי h אורך האנך המורד מ P אל הישר S, שבו חלות הנקודות A, B, C, D. שטחו הכפול[1] של המשולש PAC ניתן ע"י כל אחת משתי המכפלות השוות:

$$\overline{AC} \cdot h = \overline{PA} \cdot \overline{PC} \cdot \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}).$$

כן נותן המשולש PBC את השויון:

$$\overline{BC} \cdot h = \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

בחלקנו את השויון הראשון בשני, נקבל:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})}.$$

ובבצענו את החשבונות המתאימים לגבי המשולשים PAD ו PBD, נקבל:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}.$$

חילוק השויון הקודם בשויון האחרון נותן:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})} : \frac{\sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})}{\sin(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}.$$

והנה, בהתאם ל (1) בעמ' 243 ול (5) בעמ' 247, זהו המשפט שבאנו להוכיחו.

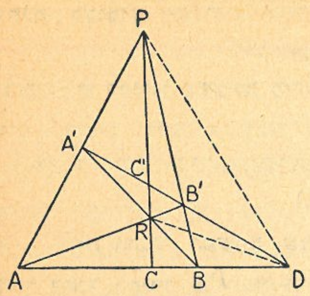
יא) בנית הנקודה ההרמונית הרביעית. (מלואים לעמ' 248)

בישר AB (ציור 44) תינתן נקודה שלישית C; לשם נוחיות התיאור לקחנוה בין A ל B. מוטל עלינו לבנות את הנקודה D בישר AB, באופן ש (A, B, C, D) תהיה רביעיה הרמונית. נבחר[2] באיזו נקודה שהיא P מחוץ לישר AB ונקשרנה עם הנקודות A, B, C; כמו־כן נבחר בנקודה שרירותית R ב PC. לאחרונה נקשר את הנקודות A ו B ל R ונסמן את נקודת־החיתוך בין PA ו BR ב A', ואת נקודת־החיתוך בין PB ו AR ב B'. הטענה היא: נקודת־החיתוך D בין הישרים AB ו A'B' היא הנקודה ההרמונית הרביעית המבוקשת.

לשם הוכחת הטענה נסמן את נקודת־החיתוך בין PC ו A'B' ב C'. לפיכך,

1. במצב כללי של הנקודות בישר S (או של הקרניים דרך P; לגבי המגמה „החיובית" יהיה ערך המכפלות: או שטח־המשולש הכפול, או מכפלתו ב (1−). בציור 23 כל הקטעים והזוויות הנדונים הם היוביים.

2. כנראה הומצאה בניה זו ע"י de la Hire בסוף המאה ה 17.



ציור 44

לפי המשפט שבעמ׳ 248, שוים היחסים הכפולים

$$(ABCD) = (A'B'C'D);$$

שניהם שוים ליחס הכפול של רביעיית־הקרניים ממרכז־ההטלה P:

$$(PA,\ PB,\ PC,\ PD).$$

נסמן את ערכם המשותף ב a. מתוך אותו נימוק, כנגד מרכז ההטלה R, קיים השויון:

$$(A'B'C'D) = (BACD).$$

מאידך נותנת הנוסחה (3_2) בעמ׳ 243: $(BACD) = \frac{1}{a}$. a ממלא אפוא את המשוואה $a = \frac{1}{a}$ או $a^2 = 1$, ועם זה את אי־השויון $a \neq 1$, הואיל ומ־$a = 1$ היתה נובעת התלכדותן של שתי נקודות מתוך הרביעיה (עמ׳ 244)[1].

לפיכך $a = -1$; כלומר, (A, B, C, D) היא רביעיה הרמונית (עמ׳ 245), מש״ל. — בנינו את הנקודה ההרמונית בעזרת הסרגל בלבד!

נוסיף פירוש אחר לתהליך בנייתנו ולציור 44. המערכת של ארבעת הישרים PB′, B′R, RA′, A′P הריהי יוצרת מרובע PB′RA′. מכיון שכל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת (שהיא לא־אמיתית במקרה הפרוט בו מקבילים הישרים), יש לארבעת הישרים הנתונים לא רק ארבע כי אם **שש נקודות־חיתוך**: בציור 44 מתווספות הנקודות A ו B, שגם הן נקראות **קדקדים** למרובע, מתוך שויון־זכות עם הקדקדים „הרגילים״[2]. ציור כזה של מרובע על כל ששת חיתוכי הצלעות נקרא **ארבע־קו שלם**. לארבע־קו כזה יש **שלושה קרנזולים**: מלבד „הרגילים״ PR ו A′B′ עוד AB, המקשר את A ו B.

בהתאם לכך מוגדרות הנקודות C ו D כנקודות־החיתוך בין אחד הקרנזולים (AB) לבין שני האחרים. ואמנם אפשר לנסח את מסקנת ההוכחה דלעיל גם בצורה זו:

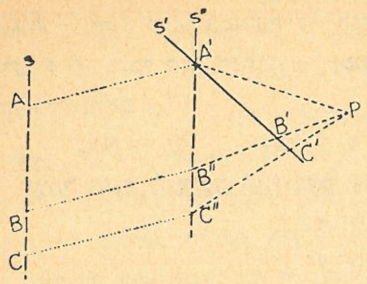
> בארבע־קו שלם יוצרות נקודות־החיתוך שבין אחד הקרנזולים לשני הנותרים, עם שני הקדקדים שבקרנזול הראשון, רביעיה הרמונית.

יב) העברתה של שלישיית־נקודות לשלישיה אחרת בעזרת הטלה. (מלואים לעמ׳ 248)

תנתנה שתי שלישיות שרירותיות: (A, B, C) בישר s, ו (A′, B′, C′) בישר s' (ציור 45). הטענה היא: אפשר להעביר **בעזרת העברה פרוייקטיבית (הטלה) את השלישיה הראשונה לשניה.**

1. נוכל להסיק $a = -1$ גם מתוך כך ש (ABCD) שלילי אם, ורק אם, הזוגות (A, B) ו (C, D) **מפרידים** זה את זה.

2. כל ששת הקדקדים הם אפוא נקודות אמיתיות במקרה של מרובע „כללי״, שאינו טרפז (או מקבילית).



ציור 45

נתחיל בסיבוב הישר s' סביב הנקודה A′ עד שיקביל לישר s; מצבו החדש של s' ייקרא s''. נטיל את s על s'' בעזרת העברה (הזזה) מקבילה לישר A′A; ע״י כך עוברות הנקודות A, B, C לנקודות A″(=A′), B″, C″. לאחרונה נסמן ב P את נקודת־החיתוך בין הישרים B″B′ ו C″C′. אם נקח את P כמרכז־הטלה, תועברנה אפוא הנקודות A″(=A′), B″, C″ ל A′, B′, C′. הואיל וצירופן של שתי העברות פרוייקטיביות יוצר שוב העברה פרוייקטיבית, נגמרה ההוכחה.

אם B″B′ מקביל ל C″C′, תהיה גם ההעברה השניה מקבילה. אם שתי השלישיות הנתונות חלות בישר אחד, אפשר, למשל, לקחת שלישיה נוספת בישר אחר ולהסתמך על תכונת **הטרנסיטיביות** של ההעברות הפרוייקטיביות.

יג) התרת מערכת של שלש משוואות ליניאריות בעזרת קוצב. (מלואים לעמ׳ 254)

לשם הכנה נתחיל בהתרת (פתירת) מערכת של שתי משוואות ליניאריות **הומוגיניות**

$$\begin{aligned} l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 &= 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

עם שלשת הנעלמים x_1, x_2, x_3, מתוך ההנחה[1] **שלא** יתאפסו יחד שלשת הקוצבים מן המעלה השניה:

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix} = l_2m_3 - m_2l_3, \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ m_3 & m_1 \end{vmatrix} = l_3m_1 - m_3l_1,$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = l_1m_2 - m_1l_2.$$

קוצבים אלו מתקבלים מתוך ה„**מטריצה**״ של המערכת הנתונה: $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$.

בודאי יש למערכת (1) הפתרון הטריביאלי $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. נבקש אפוא פתרון נוסף, לא־טריביאלי.

יהא, בהתאם להנחתנו, למשל $\gamma_3 \neq 0$. בכתבנו (1) בצורה

$$l_1x_1 + l_2x_2 = -l_3x_3, \qquad m_1x_1 + m_2x_2 = -m_3x_3,$$

ובהכניסנו תחת הנעלם x_3 ערך קבוע שרירותי, הננו רואים לפנינו מערכת של

1. אם מתאפסים כל שלשת הקוצבים, תהיה התרת המשוואות (1) טריביאלית.

שתי משוואות ליניאריות רגילות, שכידוע יש לה פתרון יחיד (x_1, x_2) אם $l_1m_2 - m_1l_2 \neq 0$, תנאי המזדהה עם הנחתנו $\gamma_3 \neq 0$. בסמננו ב $h\gamma_3$ [1] את הערך שבחרנו ל x_3, נקבל את הפתרון – ומתוך כך גם את הפתרון למערכת (1) – בצורה הסימטרית

$$x_1 = h\gamma_1, \qquad x_2 = h\gamma_2, \qquad x_3 = h\gamma_3. \tag{2}$$

ועתה נפנה למערכת (10) בעמ׳ 254 ונכתבנה בצורה הנוחה יותר לקריאה [2]

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u \\ a_2x + b_2y + c_2z &= v \\ a_3x + b_3y + c_3z &= w. \end{aligned} \tag{3}$$

כמבואר שם, שומה עלינו לפתור משוואות אלו לגבי x, y, z בעזרת u, v, w ובעזרת קבועים (התלויים, כמובן, בקבועים הנתונים a_n, b_n, c_n). הפתרון יתן את ההתאמה (החד־חד־ערכית) המבוקשת בין מישור ה(x, y, z) לבין מישור ה (u, v, w). נניח, שמתמלא התנאי (12) מעמ׳ 254 [3]:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2) \neq 0. \tag{4}$$

הקורא הזוכר מבית הספר את הדרך לפתירת מערכת של שתי משוואות ליניאריות עם שני נעלמים, ינסה בודאי מעצמו, לשם פתירת המשוואות (3), לכפול כל אחת מהן בגורם קבוע מתאים λ_1, λ_2, λ_3, באופן שחיבור המשוואות החדשות יביא לידי משוואה המכילה נעלם אחד בלבד; למשל רק את x. כדי להצליח בזה נדאג לכך, שהגורמים λ_n יקיימו למשל את התנאים

$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = 0, \qquad c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 = 0. \tag{5}$$

והנה זוהי מערכת של שתי משוואות ליניאריות הומוגיניות לשלשת „נעלמי־העזר" λ_n; לאמור: מערכת שבהתרתה עסקנו לעיל. מצאנו שם שכנגד ערך שרירותי h תהיה השלישיה

$$\lambda_1 = h(b_2c_3 - c_2b_3), \qquad \lambda_2 = h(b_3c_1 - c_3b_1). \qquad \lambda_3 = h(b_1c_2 - c_1b_2)$$

פתרון למשוואות (5). בעזרתו של פתרון זה נוכל אפוא „לחלץ" את y ו z מן המשוואות (3). לשם פשטות נוכל לבחור בערך $h = 1$.

הבה נבצע אותו תהליך, שבצענוהו כאן לגבי x, גם לגבי y ו z, בחלצנו פעם z ו x, ופעם x ו y! בדרך זו נקבל:

---

1. כלומר, נסמן ב h את המנה $\frac{x_3}{\gamma_3}$, כנגד הערך השרירותי הקבוע x_3. לפיכך יהיה h שרירותי.

2. כתבנו אפוא x, y, z תחת ξ, η, ζ; וכן u, v, w תחת $k\xi$, $k\eta$, $k\zeta$.

3. אגב: תנאי זה גורם לכך שלפחות אחד משלושת הקוצבים $\begin{vmatrix} b_2 b_3 \\ c_2 c_3 \end{vmatrix}$ וכו׳ אינו מתאפס. (השוה ההנחה שבראשית התיאור דלעיל.) ההנחה מתמלאת ביחס למערכת (5).

$$\begin{aligned} Dx &= u(b_2c_3 - c_2b_3) + v(b_3c_1 - c_3b_1) + w(b_1c_2 - c_1b_2), \\ Dy &= u(c_2a_3 - a_2c_3) + v(c_3a_1 - a_3c_1) + w(c_1a_2 - a_1c_2), \\ Dz &= u(a_2b_3 - b_2a_3) + v(a_3b_1 - b_3a_1) + w(a_1b_2 - b_1a_2). \end{aligned} \tag{6}$$

לגבי u, v, w נתונים יש אפוא מקום רק למערכת יחידה (x, y, z) הפותרת את המשוואות (3), על־פי הנחתנו $D \neq 0$. מערכת זו פותרת באמת את (3), כפי שרואים ע״י הצבה במישרין, או גם מתוך היפוך הכוון בחשבונות הקודמים.

כך קבלנו את הפתרון, שנכתב בעמ׳ 254 בצורת הנוסחה (11), מתוך שימוש בגורם־מתכונתיות $\varkappa$ (בהקבלה לגורם k שב (10)). כדי להבהיר זאת, עלינו רק להכניס את הערכים

$$\alpha_1 = b_2c_3 - c_2b_3, \quad \alpha_2 = b_3c_1 - c_3b_1, \ \ldots$$

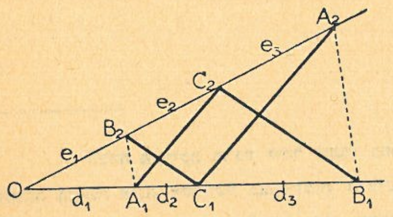
או ערכים מתכונתיים להם.

לסוף נצביע על כך, שאין פתרון חד־ערכי למשוואות (3) אם $D = 0$. הדבר ברור במקרה „הכללי" שבו לא כל מקדמי u, v, w [1] באגפים הימניים של (6) שוים לאפס; שהרי במקרה זה אי־אפשר לקיים את היחסים (6) כנגד u, v, w לא־קבועים, הואיל ומשמאל נמצא תמיד 0. מאידך, אם כל המקדמים ההם שוים ל 0, יש מקום לאינסוף פתרונים; לכן גם במקרה זה לא תיצור המערכת (3) התאמה חד־חד־ערכית בין השלישיות (x, y, z) ו (u, v, w).

יד) הוכחת משפטו של פַּסְקַל במקרה פרוט. (מלואים לעמ׳ 264)

המקרה הנדון הוא מְשֻׁשֶּׁה החסום ב„חֲתָך־חרוט סורר", כלומר בזוג ישרים (השוה בעמ׳ 265). עיין בציור 27, עמ׳ 264.

כדי להקל עלינו במקצת את עבודת ההוכחה, נבצע תהליך שבגיאומטריה הפרוייקטיבית רגילים להשתמש בו, והוא: מפעילים הטלה ידועה (דהיינו, העברה פרוייקטיבית) על התצורה העומדת לדיון, באופן שהתצורה החדשה תהיה פשוטה יותר או נוחה יותר להוכחה. במקרה שלפנינו נבחר בהעברה, ההופכת שתים (למשל את הנקודות A ו B_1 שבציור 27) מנקודות־החיתוך המופיעות במשפט לנקודות לא־אמיתיות. לשון אחר: נבחר את המשושה $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ באופן שהישרים B_1C_2 ו C_1B_2, וכן הישרים C_1A_2 ו A_1C_2, יהוו זוגות של ישרים מקבילים. בדרך זו יעבור הציור 27 לציור מעין הציור 46 הנמצא כאן.



ציור 46

---

1. מקדמים אלו נקראים „קוצבים חלקיים" של המטריצה $\begin{pmatrix} a_1\, b_1\, c_1 \\ a_2\, b_2\, c_2 \\ a_3\, b_3\, c_3 \end{pmatrix}$ שהיא מטריצת המערכת הנתונה (3) של משוואות ליניאריות.

בהתאם לכך חייבים אנו רק להוכיח, שהנקודה C חלה בישר הקבוע ע״י A ו B, ז״א בישר הלא־אמיתי של המישור; לאמור: שגם C היא נקודה לא־אמיתית. לשון אחר: עלינו להוכיח, ששתי ההקבלות שהונחו מראש גורמות לכך, שגם הזוג השלישי של ישרים, A_1B_2 ו B_1A_2, הוא זוג של מקבילים.

על־פי תורת המשולשים הדומים – השייכת אמנם לגיאומטריה האֶקוויפוֹרמית ולא לפרוייקטיבית[1] – קל מאד להוכיח זאת (עיין בציור 46). נסמן ב O את החיתוך בין הישרים המופיעים כ„חתך־חרוט סורר", ב d_1, d_2, d_3 את ארכי הקטעים $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1C_1}$, $\overline{C_1B_1}$, וב e_1, e_2, e_3 את ארכי הקטעים $\overline{OB_2}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2A_2}$. מההקבלה בין הישרים C_1B_2 ו B_1C_2 נובע, שהמשולשים OC_1B_2 ו OB_1C_2 דומים הם; לכן קיים היחס

$$(d_1 + d_2) : e_1 = (d_1 + d_2 + d_3) : (e_1 + e_2).$$

כמו כן נובע מההקבלה בין הישרים A_1C_2 ו C_1A_2 שהמשולשים OA_1C_2 ו OC_1A_2 דומים הם. לפיכך קיים היחס

$$d_1 : (e_1 + e_2) = (d_1 + d_2) : (e_1 + e_2 + e_3).$$

בכפלנו שני יחסים אלו נקבל

$$d_1 : e_1 = (d_1 + d_2 + d_3) : (e_1 + e_2 + e_3);$$

לאמור, גם המשולשים OA_1B_2 ו OB_1A_2 דומים הם, ז״א הישר B_1A_2 מקביל ל A_1B_2; מש״ל.

---

1. הוכחה מעמיקה הרבה יותר ניתנת בספרו של הילברט על „יסודות הגיאומטריה", § 14. ההוכחה הנדונה אינה משתמשת באכסיומות הרציפות (להלן פרק שמיני, § 4), בפרט לא באכסיומת ארכימידס. מאידך מבסס הילברט על משפטו של פסקל (בנוסח הפרוס דלעיל) את תורת המתכונות.

הוכחה מופשטת עוד יותר, המשתמשת אמנם באכסיומת ארכימידס אך מוותרת על מושגי השויון בין קטעים וזוויות, ניתנת בפרק הששי של אותו ספר; ברם לשם הוכחה זו יש צורך הכרחי באחד משני אלה: או לצאת אל המרחב (כלומר, אל המימד השלישי), או להשתמש במשפט דיזארג. (השוה מה שנאמר על הוכחתו של משפט זה ועל זיקתו למרחב בעמ׳ 262.)