מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת
אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה שניה: גיאומטריה (א)

מסדה

הוצאת „מסדה" בע"מ, תל־אביב

מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך ראשון: המספר והפונקציה

מחצית שניה: אנליזה

עם 40 ציורים

הוצאת "מסדה" בע"מ, תל־אביב

תוכן הענינים

חלק שלישי: פוּנְקְציות. מוּשג הגבול.

החשבון האינפי־ניטֶסימָלי (גדלים „קטנים לאינסוף").

פרק תשיעי: פונקציות.

§ 1. דוגמות לשם בירור המושגים[1].

בפרקים הקודמים עסקנו עפ"י רוב במספרים. כל מספר נתון, יהי זה שלם או שבור או אירציונלי או מרוכב, הוא גודל קבוע (קוֹנסטַנטה)[2]. מובן שגדלים קבועים אינם צריכים להיות דווקא מספרים; אם לפנינו ציור (למשל שני ישרים חותכים), אז כל נקודה מסויימת שבציור (למשל: נקודת־החיתוך של הישרים) הריהי קבועה. הקבועים שאנו זקוקים להם במתימטיקה הנם עפ"י רוב מספרים או נקודות; ומכיון שאפשר לסמן — לפי קו־המספרים, ובדרך כלל: לפי הגיאומטריה האנָליטית (עמ' 117 ו 231) — את הנקודות בעזרת מספרים, נופק שעפ"י רוב מתכוונים במלה „(גודל) קבוע"[3] למספר קבוע.

אין צורך שנדע תמיד את המספר המסויים, המתואר ע"י קבוע. אם נעסוק למשל בפתרון המשואה $ax^2+bx+c=0$, הרי ברור שסימוני המקדמים a, b, c מתכוונים לקבועים, לא פחות מן המספר 0 שבאגף הימני. סימַנו את המקדמים באותיות a, b וכו' לפי שיטת ה„חשבון באותיות" (השוה בעמ' 4), כדי להדגיש ששיטת פתרונה של המשואה איננה תלויה בערכים המספריים המיוחדים שיש למקדמים הנ"ל. גם הנעלם x מסמן כאן גודל קבוע או גדלים קבועים; הלוא המשואה מטילה עלינו לחשב את הנעלם מתוך המקדמים, וקביעותם של המקדמים גוררת שגם ערך הנעלם יהיה קבוע, עם כי ערך זה אינו ידוע מראש. אמנם אצל משואה ריבועית יש, בדרך כלל, בשביל הנעלם שני ערכים קבועים, ואצל משואות אחרות מספר גדול יותר.

לעומת זאת יש לנו בחלקים רבים של המתימטיקה ענין גם עם סמלים שאינם מסמנים קבועים אלא משתנים; בייחוד כך הדבר במקצועות שיש להם שימוש למדעי־הטבע, כמו לפיסיקה, לאסטרונומיה, לכימיה וגם לביולוגיה. המקרים

---

1. בסעיף זה לא נשים לב לדיוקים, הואיל וכוונתו בעיקר: הכנה למה שיבוא אחריו.
2. מן המלה הרומית constans, שמובנה: ידוע, יציב.
3. השם „גודל" משמש רק נושא לתואר „קבוע", לכן נשמיטנו עפ"י רוב. על כל פנים אין כאן הכוונה לְמה שמגדירים כגודל ב„תורת־הגדלים" (יסודות האנליזה).

שבהם מופיעים יותר ממשתנה אחד (שנים, שלשה ויותר) חשובים בייחוד, בהיות המשתנים תלויים ביניהם לבין עצמם, כך שאין כל אחד מהם יכול להשתנות מבלי השפיע על חבריו. אפשר אף לאמור שיום־הולדתו של מדע הטבע, במלוא מובן־המלה, חל ברגע שבו נתגלה: ערכיהם המשתנים של הגדלים הקובעים את מצב הטבע אינם, בדרך כלל, בני־חורין זה לעומת זה כי אם תלויים הם זה בזה ואף קובעים זה את זה. ישנו קשר אמיץ בין הכרה זו ובין „חוק הסיבתיות" במובנו המדוייק של חוק זה, אבל אין כאן המקום לעמוד על כך.

כדי לברר את המצב, נקח שתי דוגמות פשוטות מן הפיסיקה; ישנו חוק פשוט, החוק של בויל־מריוט[1], האומר: אם גז „אידיאלי" סגור בתוך כלי ע"י בוכנה, תהיה המכפלה של לחץ־הגז p[2] בנפח־הגז v[3] גודל קבוע; המכפלה איננה תלויה אפוא בהנעת הבוכנה, שהגבהתה תגדיל את הנפח ותקטין את הלחץ, והורדתה תפעל בכוון ההפוך. בחוק זה, המתבטא ע"י הנוסחה $p\cdot v=c$, נמצאים מלבד הקבוע c[4] עוד שני גדלים, הלחץ p והנפח v, שאינם קבועים אלא משתנים. הנוסחה באה להודיענו שמידת הלחץ — היינו מספר, המתיחס ליחידת הלחץ שבחרנו בה — קשורה במידת הנפח בהתאם לנוסחה. לכן אם נתון הלחץ, נוכל לחשב את הנפח בצורה $v=\frac{c}{p}$; מאידך, אם נדע שבמצב מסויים נפח הגז שווה למספר v (למשל בסמ"מ מעוקבים), הרי מתקבל הלחץ בצורה: $p=\frac{c}{v}$. כוונת הנוסחה ותועלתה נמצאות דוקא בכך, שפניה מועדות לכל האפשרויות של גודל הלחץ או הנפח; לאמור: לא למספרים קבועים אלא למשתנים. אופי זה יש בדרך כלל לנוסחות המתימטיות המבטאות חוקי־טבע.

דוגמה אחרת: אשמיט מידי גוף כלשהו על־מנת שיפול ארצה. אם נחשב את הזמן t[5] (בשניות) מן הרגע בו התחיל הגוף לנפול, ואם נסמן ב s[6] את ארכה של דרך הנפילה (בס"מ), אז קיים, כידוע מן המיכניקה, חוק־הנפילה המפורסם $s=\frac{1}{2}gt^2$ (במקרה האידיאלי, בלי להתחשב בהתנגדות האויר). בנוסחה זו מסמן g קבוע המכונה „תאוצת הנפילה", ושערכו קרוב ל 981 ס"מ לשניה. לעומת זאת t ו s, המורים על משך הזמן ועל אורך הדרך, אינם קבועים אלא משתנים. נוכל לתת לזמן t ערך חיובי כלשהו (בגבולות מסויימים, המתאימים לגובה הגוף מעל פני הארץ בתחלת הנפילה) ולחשב על־סמך זה את הרוחק מנקודת־המוצא בזמן t.

---

1. R. B. Boyle-E. Mariotte
2. ראש המלה הרומית pressio שמובנה: לחץ.
3. ראש המלה הרומית volumen שמשתמשים בה במובן של נפח.
4. אם בנוסחת ידועה יש רק קבוע אחד, מסמנים אותו עפ"י רוב ב c או ב C, ז"א באות הראשונה של המלה הרומית constans (עיין לעיל). במקרה שלפנינו אין לנו ענין בערכו של c, התלוי בכמה גורמים צדדיים; כמו צורת הכלי, כמות הגז, מידת־החום של הגז (שהנחנוה כקבועה), וכו'.
5. ראש המלה הרומית tempus שמובנה: זמן.
6. ראש המלה הרומית spatium שמובנה: מרחב, רוחק.

מאידך, אם נתון לנו s, נוכל לחשב את הזמן t הנחוץ לגוף כדי להגיע לרוחק s; חשבון זה מסובך קצת מן החשבון הקודם. נקח למשל s כגובה הגוף מעל פני הארץ בתחלת הנפילה; אז יגיד הערך המתאים של t, כמה זמן יפול הגוף עד הגיעו ארצה. לו באה הנוסחה רק להודיענו שאחרי מספר קבוע של שניות יגיע הגוף למקום פלוני, כי אז לא היתה בה תועלת רבה, והנוסחה לא תבטא חוק־טבע. ערכה דוקא בזה, שכחה יפה לכל הזמנים ולכל ארכי־הדרך, לפחות בגבולות מסויימים, ושנוכל אפוא להשתמש בה בשביל מספר אינסופי של מצבים שונים. סוף דבר: הזמן t והדרך s הנם משתנים (תלויים זה בזה) ולא קבועים.

בכל אחת משתי הדוגמות הקודמות צויין יחס בין שני משתנים. אנו רגילים גם ביחסים, שלתוכם נכנסים שלושה משתנים או יותר. אם אקבע למשל בחדרי בָרוֹמֶטר (מד־לחץ) (או בָרוֹגרָף, כלומר מכשיר הרושם באופן אבטומטי ותמידי את גודל הלחץ), יתן לי המכשיר יחס בין שני משתנים: בין הזמן ובין לחץ־האויר השורר שם באותו זמן. ואולם נוכל ליצור גם יחס בין לחץ־האויר וגורמים אחרים, יחס שבו מופיעים יותר משני משתנים. לפי תנועת הציקלונים (תַתים) האויריים מעל כדור הארץ, תלוי לחץ האויר במקום (האורך והרוחב הגיאוגרפי) שבו נמוד, מצד אחד; בזמן שבו נמוד, מצד שני; ואם במקום גיאוגרפי מסויים נתרומם מעל פני הארץ, בעלותנו על הר זקוף או בטוסנו באוירון, יתמעט הלחץ ע"י העליה; הלחץ תלוי אפוא גם בגובה. הגענו כך אל יחס בין המשתנים הבאים: הזמן, האורך והרוחב הגיאוגרפי, הגובה מעל לארץ, והלחץ הברומֶטרי המתאים.

דוגמה אחרת נקבל, בהרחיבנו את הדוגמה דלעיל, הקושרת את הלחץ p בנפחו v של גז בצורה $p\cdot v=c$. הקבוע c כאן תלוי, מלבד בגורמים אחרים, גם במידת־החום. נכניס עתה במפורש את מידת־החום (הטֶמפֶרָטורה); הצורה שאליה תיהפך הנוסחה הנ"ל בהתחשב עם מידת־החום, נקראת „החוק של בויל־מריוט וגי־לוסק"[1]; אם מסמן T את הטמפרטורה המוחלטת (ז"א הטמפרטורה לפי סלסיוס[2] $+273^0$), קובע החוק: $pv=RT$; R כאן קבוע. זהו יחס בין שלושת המשתנים p, v, T.

במתימטיקה (לא כן בפיסיקה) נהוג לסמן את הקבועים באותיות הראשונות של האלפא־ביתא הרומי או היווני: a, b, c, ..., A, B, C, ..., α, β, γ, ...; לעומת זאת את המשתנים ב x, y, z, u, v, w, ξ, η, ζ, ... מובן שזהו רק מנהג, אבל מנהג מועיל; פעמים יתכן לנהוג אחרת.

נשוב אל היחסים בין שני משתנים, שהם הפשוטים ביותר ואולי גם החשובים ביותר; למשל אל $p\cdot v=c$! כאמור לעיל, אפשר לתת ליחס זה בין המשתנים p ו v גם אחת הצורות $p=\frac{c}{v}$ ו $v=\frac{c}{p}$. מהשקפה אלגברית אין כל

---

1. L. J. Gay-Lussac
2. A. Celsius

הבדל בין שלוש צורות אלו. ברם גדול ההבדל ביניהם, אם יושם לב ל p ו v באשר הם משתנים. על־סמך הצורה $p=\frac{c}{v}$ נוכל לתת למשתנה v ערכים כפי רצוננו, בהגבלות התלויות באפייו הפיסיקלי של החוק; לפי זה נקבל ערכים מסויימים ל p. מהשקפה זו נכנה v בשם „משתנה בן־חורין", או „משתנה לא־תלוי": שהרי השתנותו של הנפח v תלויה בעיקר ברצוננו. לעומת זאת מופיע הלחץ p גם הוא כמשתנה אמנם, אבל משתנה ביחס להשתנותו של הנפח v. נקרא אפוא ל p „ערך המשתנה באופן יחסי", או „משתנה תלוי". הזאת אומרת שבתהליך הפיסיקלי, הקובע את היחס בין הלחץ ובין הנפח, יהיה הנפח דוקא משתנה לא־תלוי, והלחץ תלוי בו? לא ולא! נוכל לבטא את היחס גם בצורה $v=\frac{c}{p}$, שבה מופיע כמשתנה לא־תלוי הלחץ p, וכמשתנה תלוי הנפח v. השאלה „לאיזה משני המשתנים מגיע היתרון להיות לא־תלוי במובן פיסיקלי?" תקבל את תשובתה בהתאם לצורה שהקדמנוה לעיל, והיא $p\cdot v=c$. לפי זה אין לאחד מן המשתנים משפט־הבכורה על פני חברו, ושקולים הם זה כנגד זה במובן פיסיקלי. רק הצורה המתימטית שנבחר בה כדי לבטא את החוק הפיסיקלי, תוכל לתת יתרון לאחד המשתנים. היתרון הזה מתבטא למשל לפי הצורה $p=\frac{c}{v}$ כך: „המשתנה התלוי p מהווה פונקציה[1] של המשתנה הלא־תלוי v." הפונקציה מביעה אפוא חוק של תלות, שעל־פיו רואים במקרה זה משתנה אחד כתלוי באחר, במשתנה הלא־תלוי. אם מאידך נכתוב $v=\frac{c}{p}$, יופיע הנפח v כפונקציה של הלחץ p.

המשתנה הלא־תלוי נקרא גם גורם[2] הפונקציה, או בלועזית: הארגוּמֶנט[3] של הפונקציה.

טיפלנו כאן בשתי הצורות האחרונות מבין השלוש שבהן תארנו את החוק הפיסיקלי הנידון. אבל מה ביניהן ובין הצורה הראשונה $p\cdot v=c$? ההבדל הוא, שבשתי הצורות האחרות מופיע אחד המשתנים מפורש כפונקציה של השני; אז מדברים על „פונקציה מפורשת (אֶכְּסְפְּליציטית)". לעומת זאת, לפי הצורה $p\cdot v=c$ מופיע היחס בין p ו v בצורה לא־מפורשת או סתומה; במקרה זה מדברים על „פונקציה סתומה (אימְפְּליציטית)[4].

קל להפוך פונקציה מפורשת, כמו $p=\frac{C}{v}$, לפונקציה סתומה; למשל לצורה $pv-C=0$. ברם הטענה ההפוכה איננה נכונה. אם לפנינו יחס כמו, למשל, $p\cdot 2^p\cdot v^2=C$, יקשה לתאר p כפונקציה מפורשת של v. ואף במקרים שבהם

1. מן המלה הרומית functio שמובנה בערך: פקידות, שרות.
2. במלה „גורם" משתמשים אמנם במתימטיקה גם במובן אחר: בשביל הכופל והנכפל בפעולת־הכפל (השוה בעמ' 24). אבל אין חשש להחלפה, בהיות שני המובנים שונים כל כך.
3. המלה הרומית argumentum ר"ל: טענה, נימוק, גורם.
4. explicite לקוח מן המלה הרומית explicare שמובנה: הוציא לאור, התר, ברר; implicite מ implicare, = קפל, סתום.

אין קושי עקרוני. פעמים אי־נוח למדי לשים פונקציה מפורשת במקום הסתומה. הקורא היודע קצת מן הגיאומטריה האנליטית, זוכר שהקשר הפונקציונלי בין הפוסק והפסוק, המגדיר אֶליפסה, הוא $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. מתוך צורה סתומה זו אפשר אמנם לתאר y כפונקציה מפורשת של x; אבל הצורה הסתומה פשוטה ונוחה יותר.

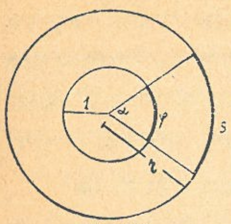
אם נתונה פונקציה מפורשת, ישנו ממילא משתנה תלוי יחיד. אין צורך שיש רק משתנה לא־תלוי יחיד x, כך שהמשתנה התלוי יופיע כפונקציה של x. בדוגמה שבעמ' 227 מופיע הלחץ הברומטרי כפונקציה של כמה משתנים לא־תלויים (אף לא־תלויים זה בזה!), והם: המקום הגיאוגרפי, הגובה והזמן. כמו־כן נוכל, בחוק של בויל־מריוט וגי־לוסק, לראות את T כפונקציה של הלחץ p והנפח v $\left(T=\frac{p\cdot v}{R}\right)$; או p כפונקציה של T ו v $\left(p=\frac{TR}{v}\right)$; או v כפונקציה של T ו p $\left(v=\frac{TR}{p}\right)$. במקרה האחרון למשל יהיה v המשתנה התלוי, והנו תלוי בשני המשתנים הלא־תלויים T ו p.

פונקציה מפורשת שבה מופיע משתנה לא־תלוי יחיד, תיקרא „פונקציה של משתנה אחד (או: של גורם אחד)"; בשאר המקרים יש לנו „פונקציה של משתנים או גורמים שונים", וביתר דיוק: של שני משתנים, שלשה משתנים וכו'.

יש ונמצא אף יחס שבו מופיע לכאורה רק משתנה אחד. נקח למשל את ערכה של לירת־א"י (או של לירת־סטרלינג)! בהגדירנו את ערך המטבע — כפי שהיה נהוג עד המלחמה הקודמת — ע"י כמות הזהב שאפשר לקנות בו, נראה את ערך הלירה כגודל משתנה. ואולם יש לנסח את המשפט הנכון: במשך הזמן מהווסד המטבע של „לירת־א"י" עד יום הכפורים תרצ"ב היה המשתנה הנ"ל שווה לגודל קבוע. כמו־כן מהירותה של רכבת, המשתנה בדרך כלל, תוכל להיות במשך זמן־מה גודל קבוע. במקרים כאלה נכתוב נוסחה בעלת הצורה $y=c$; לאמור: ערך המשתנה (התלוי) y כפונקצית הזמן הוא הגודל הקבוע c, בגבולות מסויימים הטעונים פירוש בכל מקרה.

כשיש למשתנה התלוי ערך קבוע כנגד כל ערכי הגור(מי)ם המובאים בחשבון, מדברים על „פונקציה קבועה".

כדאי להדגיש כי לתכונה, להיות „גודל קבוע" או „משתנה", אין אופי אובייקטיבי ומוחלט. הברירה בין שתי האפשרויות נמצאת במקרים רבים בידינו; כלומר, תלויה במטרה שאליה נשאף. כדי להבהיר זאת, נחזור לדוגמה $T=\frac{pv}{R}$. האם כאן p ו v שניהם משתנים, או רק אחד מהם משתנה, ואיזה מהם? התשובה תהיה: הדבר תלוי בדרך בה הגענו אל היחס הנ"ל, או במטרה שאליה נתכוון. יש וברצוננו להדגיש את תלות הטֶמפרטורה T בנפח v ובלחץ p; לפנינו אז פונקציה של שני המשתנים v ו p. מאידך אם נרצה לחקור את התהליך בהיות לחץ קבוע, שאינו משתנה במשך התהליך, הרי מביעה הנוסחה את תלות הטמפרטורה בנפח; p הנו קבוע, ו v הגורם היחיד. במקרים אחרים יהיה p הגורם היחיד ו v קבוע — אם נשאיר קבוע את נפח הגז במשך התהליך שבו משתנה הלחץ.



ציור 18

דוגמה אחרת נקבל, בשימנו לב ליחס שבין קשת מעגלית, מחוג המעגל והזוית המרכזית המתאימה לקשת. אורך־הקשת s הנהו מתכונתי (שוה־יחס) לזוית α הקובעת את הקשת (עיין בציור 18). מאידך ידוע שהיקפו של מעגל מתכונתי למחוג־המעגל r, ולכן קיים אותו הדבר, אם הזוית α קבועה מראש, לגבי הקשתות המתאימות שבמעגלים שונים. נקבל אפוא את הנוסחה: $s = C \cdot r \cdot \alpha$, שבה C קבוע[1] („גורם־מתכונת"). נוסחה זו מציגה את הקשת s כפונקציה של שני המשתנים r ו α. ואולם במעגל בעל המחוג הקבוע r מתארת הנוסחה את הקשת כפונקציה של הזוית המתאימה בלבד; מאידך, בשימנו לב למעגלים שונים בקשר עם הזוית הקבועה α, נקבל את הקשת כפונקציה של המחוג בלבד.

נבליט את ההבדל בין קבועים (למשל: מספרים נתונים) ובין משתנים או פונקציות גם מתוך גישה אחרת! כל תלמיד בבית־ספר תיכון ראה לוח־לוגריתמים (עשרוניים). אבל אם נשאל תלמיד באופן מופשט: „מהו לוח־לוגריתמים?", לא יקל לקבל תשובה ההולמת את המצב. אף מפי אנשים נבונים אפשר לשמוע: לוח־לוגריתמים זהו אוסף של מספרים ידועים הנקראים „לוגריתמים". האם הדבר כך? האפשר בכלל לומר על מספר — למשל על המספר 3, או על המספר ...0,30103 — שהוא לוגריתמוס? שאלה זו טפשה לא פחות מן השאלה: האם המספר 17 הוא „מספר־בית" ברחוב? מספר מסויים איננו לוגריתמוס כשהוא לעצמו, אבל יוכל לשמש לוגריתמוס, כמו שכל מספר טבעי נתון יוכל לשמש מספר־בית, בתנאי שנתאר לנו רחובות ארוכים למדי. השימוש במספר כבלוגריתמוס תלוי בהתאמה, המעמידה כנגד כל מספר (חיובי) את הלוגריתמוס שלו. ובכן לא יקשה לענות על השאלה דלעיל: לוח־לוגריתמים איננו רשימת מספרים מסויימים בעלי תכונות מיוחדות, המכונים לוגריתמים, אלא היא התאמה בין מספרים חיוביים x („אנטילוגריתמים") מצד אחד ובין ערכי הלוגריתמים שלהם y מצד שני, כך שהטבלה מגדירה את הפונקציה $y = \log x$, שהיא ביטוי אחר בשביל $x = 10^y$ (עיין בסוף ה § 3). במובן זה נשתמש בטבלה, בחפשנו את הלוגריתמוס למספר נתון x. (ברם ידוע שמשתמשים בטבלה גם בכוון ההפוך, היינו: כדי לחפש את המספר x בהנתן הלוגריתמוס שלו y.)

באחד מספרי ההיסטוריה המפורסמים של תקופתנו נאמר, כי 5 מהווה פונקציה. המחבר מנמק זאת כך: „הלוא $y = \sqrt{x}$ היא פונקציה; מכיון ש $5 = \sqrt{25}$, הרי גם 5 פונקציה." עד כמה זה אבסורדי, נראה בשימנו לב ליחס: „y הוא אביו

---

1. ערכו של C תלוי בשיטה שבה נמוד את הזויות. אם נמוד כרגיל לפי מעלות, הרי הפירוט $r = 1$, $\alpha = 360^0$ נותן בשביל s את היקפו 2π של מעגל־היחידה; ז"א $2\pi = C \cdot 1 \cdot 360$, ולכן $C = \frac{\pi}{180}$ (כידוע $\pi = 3{,}14159\ldots$). עיין גם בסוף הסעיף הזה.

של x", יחס המהווה באמת פונקציה של המשתנה x, העובר כאן לא על ערכים מספריים כי אם על בני אדם. ואולם, הגוררת העובדה שדוד אביו של שלמה, את המסקנה שדוד הנו פונקציה? איש שהוליד בן איננו סתם „אב", כי הלוא הוא גם בן, ואולי אח ובעל וכו׳; אבל אפשר לראותו כאב, כאשר אפשר לראות מספר כשורש ריבועי או כלוגריתמוס או כמספר־בית.

ההמחשה הגיאומטרית לפונקציות: בטרם נמשיך לברר תכונותיהן של פונקציות שונות, כדאי להפנות את לב הקורא לאמצעי נוח ומועיל עד מאד, המאפשר לתאר דרך ההסתכלות פונקציות, ובייחוד פונקציות של משתנה אחד.

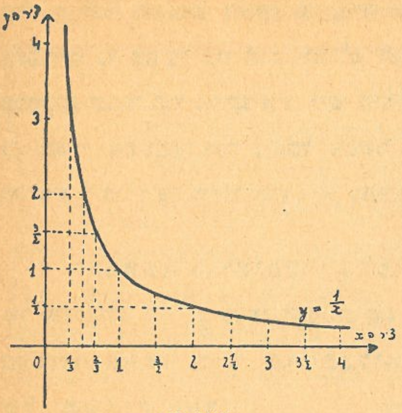
כבר בעמ׳ 163/4 הזכרנו את השיטה היוצרת התאמה חד־חד־ערכית בין כל נקודות המישור לכל הזוגות של מספרים ממשיים (x, y), כך שלכל זוג של מספרים ממשיים כלשהם תותאם נקודה מסויימת של המישור, וחילופו[1]. לשם כך השתמשנו בשני צירים, שנקרא להם עתה „צירי הקואורדינטות" או „צירי השעורים": ציר ה x (ציר הפסוק) וציר ה y (ציר הפוסק); לשם פשטות נציירם כך שאחד מאונך לחברו, ושכוונו „החיובי" של x מופנה ימינה, כוונו „החיובי" של y למעלה. נקודת־החיתוך ביניהם תיקרא מוצא או נקודת־ראשית. בין שימושי התיאור הגיאומטרי הזה של זוגות־מספרים, השימוש החשוב ביותר הוא: תיאור פונקציה של גורם אחד ע"י קו עקום במישור הקואורדינטות — או מהשקפה גיאומטרית: ייצוג עקום כפונקציה של גורם אחד. את השימוש הזה המציא בעיקר דיקרט בספרו „הגיאומטריה" (1637), שהופיע כנספח לספר הפילוסופי המפורסם „על המיתודה"[2]. במקרים ידועים השתמשו אמנם בשיטה זו כבר ארכימדס ואפולוניוס; בזמן אחד עם דיקרט הגיע אליה גם פרמה.

רוב הקוראים יודעים בוודאי איך מתארים, לפי שיטה זו של „הגיאומטריה האנליטית", פונקציה של גורם אחד ע"י קו עקום, ולכן נסתפק ברמז קל. (תיאור עקרוני ינתן בחלק החמישי, כרך שני.) נקח את הדוגמה $p = \frac{c}{v}$, ונניח $c = 1$, על־מנת לקבל מקרה מסויים בשביל הציור. לשם ההתאמה לסימונן הרגיל של

---

1. מדובר רק על מספרים ממשיים. הקורא יסיח כאן את דעתו משיטת הפרק השביעי, ששם תארנו את המספרים המרוכבים כנקודות המישור.

2. Discours de la Méthode; ספר זה בעצמו הופיע בתרגום עברי (ע"י י. אור בעריכת ח. י. רות), ירושלים תרצ"א.

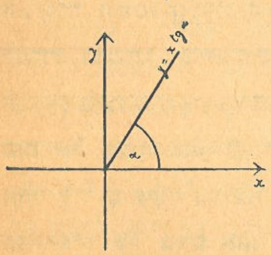


ציור 19

הקואורדינטות נכתוב x תחת v ו y תחת p; נקבל כך את הפונקציה של x $y=\frac{1}{x}$, ורק לגבי ערכי x החיוביים, הואיל ונפחו של גז תמיד חיובי. בציינֵנו בציר ה x את כל ערכי x החיוביים המסמנים את נפח הגז[1], ובהתאימנו לכל ערך x כפוסק את $y=\frac{1}{x}$, נקבל כמקומן של הנקודות, המתאימות לזוגות (x, y), את העקום המופיע בציור 19.

הקורא היודע קצת מן הגיאומטריה האנליטית יבין, שכאן לפנינו מחצית הִפֶּרבולה שוות־שוקיים; היינו, המחצית שכנגד ערכי x החיוביים. למחצית השניה, שכנגד ערכי x השליליים, מתאימים (לפי $y=\frac{1}{x}$) גם ערכים שליליים לפוסק y, והיא נמצאת אפוא ברביע השלישי. (השוה בפרק העשירי, ציור 44.)

בקחתנו תחת $y=\frac{1}{x}$ את הפונקציה $y=ax$ (a קבוע כלשהו), נקבל כתיאורה הגיאומטרי (קו) ישר העובר דרך נקודת־הראשית; קל לראות (השווה ציור 14 בעמ' 151 ועמ' 154/5) שהמספר a הוא ה tan הטריגונוֹמֶטרי של הזוית α שבין כוונו החיובי של ציר ה x ובין הישר הנידון (עיין בציור 20).[2] לכן $a=1$, אם $\alpha=45^0$; $a=-1$, אם $\alpha=135^0$.



ציור 20

קל לראות שהפונקציה $y=ax+b$ מתוארת גם היא ע"י ישר, רק שזה איננו עובר דרך נקודת־הראשית אם $b \neq 0$.

עלינו להדגיש במיוחד את הישרים המתאימים לפונקציות מן הסוג $y=a$. ישרים אלו מקבילים לציר ה x; ביתר דיוק: לפי מצבם הרגיל של הצירים, נמצא המקביל למעלה מציר ה x וברוחק a ממנו, אם $a>0$; ערך הפוסק y הנו במקרה זה הערך הקבוע a, ואיננו תלוי בערך הפסוק; לפנינו אפוא פונקציה קבועה.

את תיאורה הגיאומטרי או ה"גרָפי" של פונקציה מכיר כל אחד מתיאורים גרפיים סטָטיסטיים או כלכליים, וגם מן התמונה הניתנת למשל ע"י הבָּרוֹגרָף. יש ערך מיוחד לתיאורה הגרפי של פונקציה, בתתו את ערכי הפונקציה בבת־אחת

1. נתעלם כאן מזה שבשביל ערכים קטנים של הנפח (ולכן ערכים גדולים של הלחץ) יחדל הגז מהיות כמעט "גז אידיאלי", או מהיות גז כל עיקר; במקרה זה מפסידה הנוסחה את ערכה הפיסיקלי.

2. מדובר כאן על אותו הכוון של הישר הפונה למעלה, ז"א החודר לתוך הרביע הראשון או השני. מטעמים טכניים מופיעה בציור 20 רק המחצית "העליונה" של הישר $y=x \tan\alpha$, שיש להאריכה לתוך הרביע השלישי. — אך אם הישר הנידון הוא ציר ה y (ציר הפוסק) בעצמו, אי־אפשר לתארו כפונקציה מן הסוג הנ"ל (מפני ש $\tan 90^0$ איננו במציאות), אלא כפונקציה הקבועה $x=0$, שבה מסמן x (לא y) את המשתנה התלוי.

לנגד עינינו. נקבל כך סקירה הסתכלותית על "מהלך" הפונקציה; נראה איפה "תעלה" ואיפה "תרד" (ביחס לכוון משמאל ימינה, ז"א להגדלת ערכי הגורם x), איפה תגיע לערך גדול ביותר (שיא) או לערך קטן ביותר (שֶפל), איפה תקבל את הערך 0 (נקודות־חיתוך עם ציר ה x), וכו'.

דוגמת הבָרוגרף מאלפת גם במובן אחֵר. מה שמצייר הברוגרף זהו לחץ־האויר כפונקצית הזמן; בפעולתו הרציפה יתן לנו קו עקום רציף, המתאים לכל רגע את הלחץ השורר באותו רגע. ואולם דיאגרַמות של לחץ האויר מציירים גם אנשים שאין להם ברוגרף, כי אם ברומֶטר פשוט, שממנו יקראו ויכתבו את לחץ האויר בשעות מסויימות, למשל שש פעמים ליום. הא כיצד? איך יתכן שיקבלו דיאגרמה הנותנת את הלחץ, המתאים למשל לכל שעה? הלוא אינם יכולים לדעת מהו לחץ האויר בתקופות שבין הזמנים בהם קראו את הלחץ מעל הברומטר? ואמנם כן הדבר. מה שיוכלו בעצם לסמן בדיאגרמה, איננו עקום[1] רציף כי אם נקודות בודדות, המתאימות לזמני־התצפיות x את הלחץ השורר בהם כפוסק y. בהסתמכנו על כך שתנודות הלחץ תהיינה קטנות בין תצפית אחת לחברתה, אנו מרשים לנו לקשר ע"י קטעים ישרים את הנקודות הבודדות המתאימות לתצפיות.

נקח עתה דוגמה מתימטית! y יוגדר כמספר הגורמים הראשוניים (עמ' 26) השונים, המחלקים את המספר החיובי x. אם נשאל לערך y המתאים ל $x=\frac{1}{2}$, לא תהיה התשובה: $y=0$, אלא: ערכו של y איננו מוגדר; כי הלוא למושג "מספר הגורמים הראשוניים של x" יש מובן רק אם x שלם. משום כך מוגדרת הפונקציה שלפנינו רק אצל הערכים הבודדים x שהם מספרים טבעיים. בשבילם קל לקבוע את ערכי y; עיין ברשימה זו:

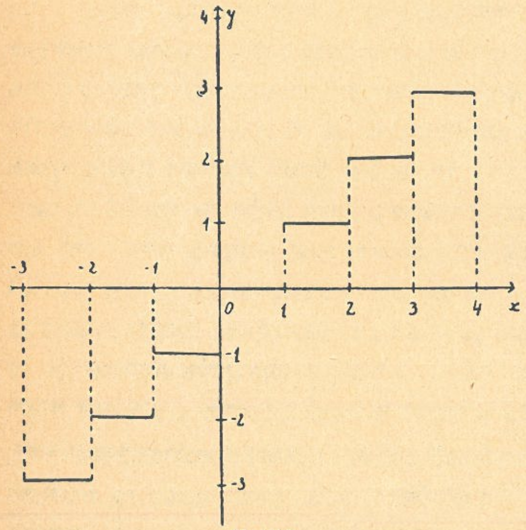
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 ...
y	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1	2 ...

בהגדילנו x במדה מספיקה, נקבל כמובן גם בשביל y ערכים גדולים יותר; כנגד $x=2310=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ למשל נקבל $y=5$. אמנם בנסותנו להתאים לפונקציה זו ציור, נקבל רק נקודות בודדות. אין כל הגיון ותועלת בזה לקשר נקודות בודדות אלו ע"י קטעים ישרים; שהרי לכל אחת מן הנקודות הבודדות אין קשר פנימי עם שתי שכנותיה מזה ומזה, ולפונקציה אין מובן אצל ערכי x לא־שלמים. אף־על־פי־כן אין סיבה למה לא נכַנה גם חוק זה בין x ו y בשם "פונקציה", בצאתנו מן המושג המבואר בראש הסעיף: "יחס בין שני משתנים."

נִתן עוד דוגמה, הנמצאת לכאורה באמצע בין האחרונה ובין הקודמות לה, אף כי לאמיתו של דבר קרובה היא לאחרונה. נסמן ב $[x]$ את המספר השלם, הקטן מ x ושָכן לו, כך שאין מספר שלם בין $[x]$ ובין x; אם x בעצמו שלם, יהי

1. במלה "קו עקום", או בקיצור "עקום", נשתמש לא בניגוד לקו ישר, כי אם כהכללת המושג של ישר; הישרים נמצאים אפוא בין העקומים.

$x=[x]$. הפונקציה, המתאימה לכל ערך ממשי x את $y=[x]$ כמשתנה התלוי, מוגדרת אצל כל x ממשי. היא איננה קבועה לגמרי, אלא קבועה לפרקים, וביתר דיוק: היא קבועה בין כל שני מספרים שלמים סמוכים. יש לה למשל הערך $y=1$ מן $x=1$ עד „לפני" $x=2$, ז"א אם $1 \leq x < 2$.



ציור 21

אפשר לתאר פונקציה זו ע"י ציור, רק שהציור אינו נותן את אשר רגילים לכנות בשם „קו עקום" (ציור 21). מנימוק המתקבל על הדעת למראה הציור, נקראת פונקציה כזו (גם מסוג כללי יותר) „פונקצית־מדרֵגות". (הקווים המרוסקים בציור אינם חלק מתיאור הפונקציה; הם באים רק כדי להקל על התפישה.) לכל x שלם מתאימה, מבין שתי נקודות העקום הנמצאות בציור מעליו או מתחתיו, רק העליונה ביניהם — דבר שאי־אפשר לתארו בציור.

הצד השווה שבדוגמה זו ובקודמות (פרט לזו העוסקת בגורמים הראשונים) הוא זה, שגם $[x]$ מוגדרת בתוך רֶצף (קוֹנטינוּאוּם, מֶשֶך) של ערכי x, ז"א אצל כל הערכים הממשיים, המתאימים לציר ה x כולו או לחלק שבין שתי נקודות. לעומת זאת נוהגים לבטא את התפקיד המכריע, שיש למספרים ה ש ל מ י ם בשתי הדוגמות האחרונות, ע"י הכינוי „פונקציה של תורת־המספרים" (אף אם הוגדרה ברֶצף).

לאור הדוגמות השונות שלפנינו נפנה עתה אל מושג יסודי חדש, והוא: „תחום־ההגדרה של פונקציה." בעמ' 233 הופיעה פונקציה המוגדרת רק אצל ערכי הגורם השלמים. בדוגמה הפיסיקלית $p=\frac{c}{v}$ היה עלינו לצמצם את ערך הגורם v למספרים החיובים, מפני שנפחו של גז איננו לא שלילי ולא 0. ברצותנו לראות את ערך הלירה הא"יית כפונקציה קבועה של הזמן, נאלצנו להגביל את ערכי הגורם (הזמן) לתקופה שבה היתה הלא"י מטבע חוקית, ובעלת קשר יציב וחסר־שינוי עם הזהב. במקרה הפונקציה $y=ax+b$ שתארנוה כקו ישר, וכמו־כן בדוגמה $y=[x]$, לא היתה כל הגבלה להשתנותו של x בתחום המספרים הממשיים. במשך הפרק הזה נדע אף פונקציות, שגורמן מקבל ערכים מרוכבים כלשהם.

איזו הגבלה קיימת אפוא לגבי תחום־ההגדרה של פונקציה, כלומר, תחום הערכים שיכול לקבלם המשתנה הלא־תלוי? (לשון אחר: לגבי תחום־השתנותו של משתנה זה; אומרים שהמשתנה „עובר" על תחום־ההגדרה.) התשובה היא ש א י ן

כ ל ה ג ב ל ה עקרונית. תחום־ההגדרה יכול להיות קבוצה כלשהי — סופית או אינסופית — של מספרים שלמים, רציונליים, ממשיים או מרוכבים, או קבוצת נקודות במישור או במרחב. בחלק הרביעי (כרך שני) נתוודע אל פונקציות שגורמן מקבל ערכים, שאינם מספרים או נקודות אלא קבוצות וכו'. ואולם הפונקציות החשובות ביותר, גם במתימטיקה עצמה גם במדעי־הטבע, הנן מוגדרות אצל ערכים ממשיים (או, בשינוי לשוני בלבד, אצל נקודות של ישר, היכול לשמש ציר ה x[1]); ביתר דיוק: הן מוגדרות ב ת ח ו מ י ם מסויימים של מספרים ממשיים (או מרוכבים).

הסוגים השכיחים ביותר של תחומי־מספרים כאלה הם שלושה:

1) תחום המספרים הממשיים כולם, או תחום כל הנקודות שבישר. את התחום הזה מכנים גם בשם „הרֶצֶף הלא־מוגבל" (במימד אחד).

2) תחום כל המספרים הממשיים שבין שני מספרים שונים a ו b, לרבות את a ו b; תחום זה נקרא „הרֶוַח הסגור" בין a ו b ויסומן כאן ע"י $\{a,b\}$, או ע"י אי־השויון $a \leq x \leq b$ (אם $a<b$; נניח זאת גם להלן).

3) תחום כל המספרים הממשיים בין שני מספרים שונים a ו b, פרט ל a ו b; תחום זה יכונה בשם „הריוח הפתוח" בין a ו b, ויסומן ע"י (a,b) או ע"י $a<x<b$.

בשני המקרים האחרונים תיקראנה הנקודות a ו b „קצות הריוח"; במקרה של ריוח סגור $\{a,b\}$ תיקרא a „נקודת־הראש" ו b „נקודת־הסוף" של הריוח.

מלבד אלה תופענה לפנינו גם דוגמות אחרות של תחומי־הגדרה לפונקציה; למשל: תחום כל המספרים הממשיים החיובים, או תחום כל המספרים הממשיים החיוביים לרבות את 0, או התחום $\{a,b)$ שבו $a \leq x < b$.

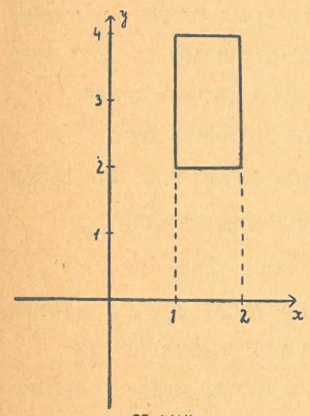
נדגיש עוד אפשרות הקרובה מאד למקרה 3). השתמשנו במונח „ריוח" כלפי תחום כל המספרים שבין שני מספרים נתונים. ואולם לא תמיד איכפת לנו מה הן ק צ ו ת הריוח, אלא חשוב לנו רק שערך מסויים c יימצא ב ת ו ך הריוח. לפיכך נקרא לכל ריוח פתוח, שבתוכו נמצא c, בשם „סביבה של c" — בלי השגיחנו בקצות הריוח. על־פי זה יש לנקודה מסויימת לא סביבה אחת בלבד כי אם סביבות במספר לא־מוגבל.

דברנו עד הנה רק על תיאור גרָפי לפונקציות של גורם אחד, וכן על הגדרת תחום־ההשתנות כלפיהן. תיאור גרפי יש לתת גם לפונקציות של שני גורמים, כמו $z=ax+by+c$. במקרה זה עלינו להתאים לכל זוג (x,y) של ערכי x ו y את ערכו המתאים של z. דבר זה ייעשה לפי הגיאומטריה האנליטית שבמרחב, באמצעות מ ש ט ח במרחב־בן־שלושה־ממדים. בדוגמה שלפנינו יהיה המשטח מ י ש ו ר. מטריח הרבה יותר לבנות תבניות של משטחים במרחב, מְשרטט ציורים במישור;

1. בחלק זה יהיה מובנו של ביטוי כמו „הנקודה a", או „מקום הנמצא בין a ו־b" וכו', תמיד: „הנקודה שבקו־המספרים (עמ' 117), המתאימה למספר הממשי a", או „מקום כך שהמספר c, הקובע אותו בקו־המספרים, גדול מ a וקטן מ b" (או חילופו), וכו'.

הדבר אינו אפשרי כל עיקר בתוך ספר, שהרי עמודיו בעלי שני ממדים בלבד. פונקציות של יותר משני גורמים אין לתאר בדרך הסתכלותית זו כל עיקר, באין כח־דמיון לבני־האדם (או לפחות לרובם המכריע) במרחבים בני ארבעה ממדים ויותר.

כמו שתארנו בציר ה x את תחום־ההשתנות לפונקציה של גורם אחד x, כך נתאר במישור את תחום־ההשתנות לפונקציה של שני גורמים, x ו y, בעזרת צירי ה x וה y. אם למשל בפונקציה $z=x^2+y^2$ תוטל על x ו y ההגבלה, שיימצא x בין 1 ו 2, ו y בין 2 ל 4, אז נאמר: הזוגות (x,y) היכולים לשמש גורם ל z, הם קואורדינטות לנקודות שבתוך המלבן המופיע בציור 22.



ציור 22

כאן המקום לנגוע בדרכים להגדרת פונקציה, בעיה עקרונית שאליה נחזור בסוף הפרק. הדבר פשוט אם תחום־ההגדרה, למשל אצל פונקציה של גורם אחד x, מכיל רק מספר סופי של ערכים. אז דיינו ברשימה שבה כל ערכי x שבתחום, וכנגד כל ערך x ערכו המתאים של המשתנה התלוי y. ואולם מקרה זה אינו חשוב כל־כך לא במתימטיקה ולא במדעי־הטבע: על־פי רוב מוגדרת פונקציה בתחום אינסופי של ערכי x, למשל בריוח מסויים (השוה הדוגמות שהובאו עד כאן). גם בעבור x על כל המספרים הטבעיים (עמ׳ 233), תחום־ההשתנות הריהו אינסופי. במקרים אלו בוודאי לא נוכל להתאים, בעזרת מספר סופי של מלים או אותיות, לכל ערך x לחוד את הערך המתאים של הפונקציה. ההתאמה תוכל להיעשות רק ע״י חוק המציין אותה באופן כללי ובבת אחת. הדרך הרגילה היא לבטא את החוק ע״י נוסחה מתימטית („ביטוי אנליטי"), כמו $y=x^3+2x$ או $y=\sqrt{\sin x}$. אפשרות אחרת נתונה ע״י תיאור גרפי: תחת כתבנו $y=ax+b$ או $y=\frac{1}{x}$, נוכל להגדיר y ע״י ישר מסויים או ע״י היפֶּרבולה שוות־שוקיים במישור ה (x,y). יש וצירופם של חוקים אחדים יגדיר פונקציה; למשל, צירוף שלושת הכללים: א) $y=(x+1)^2$ אצל כל x חיובי; ב) $y=-(x+1)^2$ אצל כל x שלילי; ג) $y=0$ אצל $x=0$. (השוה גם בפרק העשירי, § 4.) מאידך יש מקרים שבהם אי־אפשר לבטא את החוק ע״י נוסחה לפי הסימונים הרגילים, או ע״י ציור; אז נשתמש בביטוי מילולי מתאים, כמו בדוגמה שבעמ׳ 233.

עלינו לבאר עוד סימונן של פונקציות. בדוגמות שהכרנון עד כאן הופיעו פונקציות מסויימות, מפורשות או סתומות; למשל: $p=\frac{c}{v}$ ו $p=\frac{RT}{v}$. הראשונה היא פונקציה של גורם אחד v, השניה פונקציה של שני הגורמים v ו T. ישנו דמיון בין פונקציות מסויימות כאלה ובין המספרים הקבועים 2, $\sqrt{3}$ וכו׳ המופיעים בחשבון: כמו שם כך כאן לפנינו עצם פרוט, רק שהוא פונקציה במקום מספר. הדגשנו לעיל מה שהיה ניכר כבר בפרק הקודם: יש תועלת עצומה בהכנסת אותיות, המורות

על מספרים (ובדרך כלל: על גדלים) קבועים כלשהם. כדאי למשל לפתור את המשואה $ax^2+bx+c=0$ כנגד ערכים כלשהם של המקדמים a, b, c, ולא לפתרה לחוד לגבי כל שלישית־מספרים נתונה (a,b,c). לאותה המטרה נשאף גם אצל פונקציות, ולכן יש צורך בהכנסת אותיות, המורות על כל פונקציה מפורשת של גורם אחד, של שני גורמים וכו׳; וכמו־כן על כל פונקציה סתומה המקשרת ביניהם 2, 3, ... משתנים.

נתפשט המנהג להשתמש, לשם סימונן של פונקציות, בייחוד באותיות ידועות כמו f, g, F, G, φ, ψ, χ וכו׳. לפי זה אפשר לסמן פונקציה מפורשת כלשהי של גורם אחד למשל ע״י $y=f(x)$ או $w=f(z)$, כפי רצוננו כלפי סימון המשתנים; פונקציה מפורשת של שני גורמים למשל ע״י $z=f(x,y)$; וכו׳. כדי לתאר פונקציות סתומות, רגילים להעביר את כל הביטויים אל אגף אחד של סימן־השויון, כך שבאגף השני ישאר 0 (למשל: כותבים $pv-c=0$ במקום $pv=c$); לפי זה נסמן למשל ע״י $F(x,y)=0$ או $G(x,y,z)=0$ יחסים פונקציונליים סתומים בין שנים או שלושה משתנים. $f(x)$ מבטאים: „f של x" (השוה בעמ׳ 174), וכן $f(x,y)$ „f של x ו y", וכו׳. ביחס $y=f(x)$ מסמן אפוא x את המשתנה הלא־תלוי (הגורם), y את המשתנה התלוי, ו f את הפונקציה הנידונה הקובעת את היחס בין y ל x. הכנסתם של סימונים כלליים (אותיות) בשביל פונקציות תחת דַבר רק על פונקציות מסויימות כמו x^2+1 או $\frac{\sin x}{\log x}$, היא התקדמות שחשיבותה דומה להכנסת האותיות לשם סימון גדלים קבועים כלשהם[1].

אם הפונקציה קבועה, ז״א $f(x)=c$ (לכל ערכי x או בתחום ידוע), נכתוב: $y=c$.

בקשר עם סימון פונקציות כלשהן באותיות, יש צורך בהערה המכוונת לסימון בעלמא. הסוגריים, שביניהם הכנסנו את הגורם x בפונקציה $f(x)$, באים כדי להוציא את אי־ההבנה האפשרית בסימון חסר־סוגריים: כאילו fx יתאר מכפלה של x בערך שני f. הודות לסוגריים אפשר להשתמש בסימון קצר ונוח מאד: בהנתן פונקציה מסויימת, כמו $3x+4$ או $\sin x$, ברור לָמה מתכוון המונח „ערך הפונקציה אצל ערך נתון של x". למשל אצל $x=\frac{1}{2}$ או $x=A$. הערך אצל $x=\frac{1}{2}$ יהיה $3\cdot\frac{1}{2}+4=5\frac{1}{2}$, או $\sin\frac{1}{2}$; וכן אצל $x=A$: $3A+4$ או $\sin A$. רצוי לסמן בקיצור ערכי־פונקציה כאלה גם במקרה של פונקציה כלשהי $f(x)$. אז נסמן את ערכה אצל $x=\frac{1}{2}$ ב $f(\frac{1}{2})$, וכמו־כן את ערכה אצל $x=A$ ב $f(A)$. (סימון זה ידוע לקורא במקרה של פונקציה מסויימת כמו $\sin x$ או $\log x$; השוה גם בעמ׳ 174.)

כלפי פונקציה מסויימת מובן תחום־הגדרתה על־פי רוב מעצמו. במקרה

---

1. הקורא יוכל לשאול: למה לא נעשה לגבי פונקציות גם את הצעד השני שעשינוהו לגבי גדלים, והוא: לעבור מגודל קבוע כלשהו a לגודל משתנה x. כלומר: הנוכל להכניס, מלבד סימונן הכללי של פונקציות מסויימות, גם פונקציות משתנות, שבהן היחס הפונקציונלי בעצמו משתנה? באמת נעשה דבר זה בתקופה החדישה של האנליזה הגבוהה; ואולם במסגרת הספר הזה נוכל רק לרמוז עליו (בפרק י״ב).

$y=\frac{1}{x}$ למשל מכיל תחום־ההגדרה את כל המספרים הממשיים, פרט ל 0; ברם בתתנו ל x את המובן הפיסיקלי של נפח, יכיל התחום רק את המספרים החיוביים. לעומת זאת, בהכניסנו את הסימון הכללי $y=f(x)$ וכו׳, עלינו לקבוע בשעת הצורך, מהו תחום־ההגדרה.

נוסיף לבאר מושגים פשוטים אחרים, הקשורים בפונקציות. נקח את האוכלוסיה של עיר פלונית; לכל אחד מתושבי העיר נתאים את גילו (בשנים מלאות), כך שהגורם x יעבור על תושבי העיר, והמשתנה התלוי y יציין גילו של x. מכיון שלכל בן־אדם יש גיל מסויים, הרי לפנינו פונקציה המתאימה באופן חד־ערכי לכל x ערך מסויים y. נוכל גם להפוך את השאלה: נצא מן הגיל כגורם הפונקציה, כך שתחום־ההגדרה מכיל את המספרים הטבעיים עד 90 בערך, ונשאל: מי הם תושבי העיר שיש להם גיל מסויים? אם כך, נתאים לכל גיל את בני אותו הגיל, ונקבל פונקציה המתאימה לכל ערך הגורם לא ערך אחד בלבד של המשתנה התלוי כי אם כמה ערכים שונים. (למספר הערכים האלה יש חשיבות בסטַטיסטיקה.)

דוגמה דומה נקבל, בתארנו את מהלך הטמפֶּרטורה במקום מסויים במשך זמן ידוע, למשל: במשך 24 שעה, מחצות עד חצות. לפי זה תותאם באופן חד־ערכי לכל זמן מתוך התקופה הנידונה טמפרטורה מסויימת, הקובעת את „מידת־החום באותו הזמן". אבל בהפכנו את הכוון ביחס זה, ז"א בשאלנו כנגד כל טמפרטורה לרגע שבו שררה הטמפרטורה, נקבל בדרך־כלל כמה רגעים במשך היום; על „הרגע שבו היתה מידת־חום מסויימת" לא נוכל לדבר בה"א הידיעה, מפני שאיננו קבוע באופן חד־ערכי.

מדוגמות אלו אנו למדים שני דברים: ראשית את ההבדל שבין פונקציה (מפורשת) חד־ערכית לפונקציה רב־ערכית. אמנם בספר זה נעסוק על־פי רוב בפונקציות חד־ערכיות. אבל גם לפונקציות רב־ערכיות יש תפקיד חשוב במתימטיקה ובמדעי־הטבע. מלבד הפונקציות הרב־ערכיות דלעיל, הלקוחות מן החיים וממדעי־הטבע, מופיעות גם בתוך המתימטיקה פונקציות רב־ערכיות. נקח שתי דוגמות!

1) $y=\sqrt{x}$. כדי שלא להכניס מספרים דמיוניים, נַתנה $x \geqq 0$. הואיל ו $(-y)^2=(+y)^2$, ברור שלכל ערך חיובי של x מותאמים שני ערכי y, השונים זה מזה בסימן (+ ו −); רק לערך $x=0$ מותאם ערך יחיד של y, והוא: $y=0$. לכן הפונקציה $y=\sqrt{x}$ היא דו־ערכית (בעלת שני ערכים).

2) נגדיר $y=f(x)$ כך שלכל x יותאם y (ביתר דיוק: כל ערך y) כך שקיים $x=\sin y$. יהי למשל $x=0$. והנה יש אינסוף זויות y שהסינוּס שלהם 0, הלא הן $y=0^0$, $\pm 180^0$, $\pm 360^0$, $\pm 540^0$ וכו׳; בדרך־כלל: $y=n\cdot 180$, בעבוּר n על כל המספרים השלמים. לכן הפונקציה „ההפוכה" לפונקצית הסינוס איננה פונקציה רב־ערכית בלבד כי אם פונקציה רב־ערכית לאינסוף.

מלבד ההבדל הכללי בין פונקציות חד־ערכיות לרב־ערכיות אנו למדים מן

הדוגמות הקודמות דבר חשוב לגבי פונקציות מפורשות של גורם אחד, והוא: היחס בין שתי פונקציות, שכל אחת מהן הפוכה לאחותה.

נשוב אל היחס בין נפחו של גז ולחצו, המתבטא בצורה $pv=c$, או (בשימנו x, y במקום p, v) $xy=c$. כאמור לעיל, נוכל לעבור מיחס סתום זה לפונקציה המפורשת של x: $y=\frac{c}{x}$, או לפונקציה המפורשת של y: $x=\frac{c}{y}$. ברצותנו לבדוק את הפונקציה האחרונה כפונקציה־סתם (גם בלי תשומת־לב למובנם הפיסיקלי של המשתנים), נחזיק במנהגנו לסמן את המשתנה הלא־תלוי ב x. יכולים היינו לסמן את המשתנה התלוי ב y; אך כדי שיזכור הקורא שהכוונה לפונקציה אחרת (לזו ההופכת את $y=\frac{c}{x}$), נסמן הפעם את המשתנה התלוי ב z. לפי זה נאמר: הפונקציה $z=\frac{c}{x}$ הופכת את הפונקציה $y=\frac{c}{x}$; או בוותרנו על הבלטת המשתנה התלוי שאינה מעלה ואינה מורידה כלפי מהות הפונקציה: $\frac{c}{x}$ הופכת את הפונקציה $\frac{c}{x}$. במקרה שלפנינו מזדהות שתי הפונקציות. הן הופכות זו את זו במובן זה, שפעם נייצג את הלחץ כפונקצית הנפח, בפעם השניה את הנפח כפונקצית הלחץ; כלומר במובן זה, שהחלפנו את המשתנה התלוי במשתנה הלא־תלוי. כל אחת משתי הפונקציות האלה תיקרא בשם הפונקציה „ההפוכה" לאחותה.

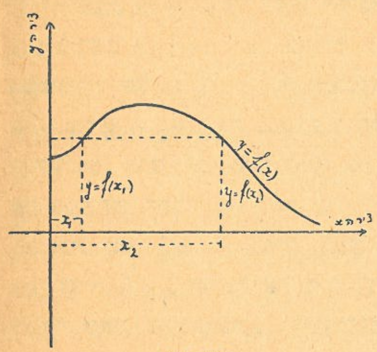
בדרך כלל אין הפונקציה ההפוכה מזדהה עם הפונקציה המקורית. נקח כדוגמה את $y=x^2$ (השוה בציור 26, עמ׳ 241). לפי יחס פונקציוֹנלי זה מתבטא x כתלוי ב y בצורה: $x=\sqrt{y}$; בהחליפנו לפי זה את תפקידי המשתנים, ובסמננו את המשתנה הלא־תלוי החדש שוב ב x ואת התלוי ב z, נקבל: $z=\sqrt{x}$. $\sqrt{x}$ אפוא הפונקציה ההפוכה ל x^2, ו x^2 היא הפונקציה ההפוכה ל $\sqrt{x}$. (היחס בין הפונקציה ה„מקורית" ובין ההפוכה לה הנו יחס הדדי.) בדוגמה זו שונה מאד הפונקציה ההפוכה מן המקורית; ולא עוד אלא האחת, x^2, היא חד־ערכית, וחברתה דו־ערכית. מצב דומה קיים אצל הדוגמות שהכרנון לעיל[1]: היחס בין אוכלוסיה של עיר לגיל התושבים והיחס בין הזמן למידת־החום (במקום נתון), וכו׳[2]. אם הגורם יעבור על תושבי העיר או על שעות היום, הרי לפנינו פונקציה חד־ערכית; הפונקציות ההפוכות, שבהן הגורם הגיל או מידת־החום, הן בדרך־כלל רב־ערכיות. — דוגמה אחרת של היפוך פונקציה נקבל מלוח־לוגריתמים; הלוח מגדיר מחד גיסא את הלוגריתמוס כפונקצית האנטילוגריתמוס (numerus), מאידך גיסא את הפונקציה ההפוכה, הנותנת כנגד כל לוגריתמוס את הנומרוס (השוה בעמ׳ 230).

ביתר קלות נבין תהליך זה של החלפה בין המשתנה הלא־תלוי והמשתנה התלוי — לאמור: המעבר מפונקציה נתונה להפוכה לה — בהשתמשנו בתיאור הגְרָפי

1. ואולם לא תמיד יתן היפוכה של פונקציה חד־ערכית דוקא פונקציה רב־ערכית. זה התברר כבר לעיל אצל $\frac{C}{x}$. כמו־כן הפוכה ל $ax+b$ הפונקציה $\frac{x-b}{a}$, החד־ערכית גם היא. דוגמות אחרות, שכחן יפה לפחות בתחום הממשי, תופענה להלן; $\log x$, x^3. השוה גם בעמודים הבאים.

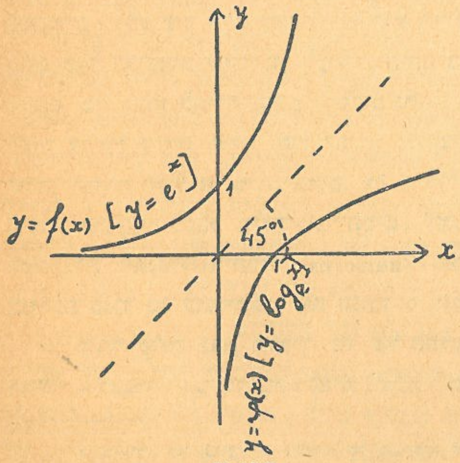
2. היפוך היחס (החד־ערכי) של בן לאביו הנהו רב־ערכי בדרך כלל, אבל לא תמיד.

של הפונקציות. נקח למשל פונקציה $y=f(x)$, המוגדרת אצל כל ערכי x החיוביים, והמקבלת גם היא רק ערכים חיוביים; תמונתה במישור (x,y) נמצאת אפוא ברביע הראשון של מישור־הצירים, והיא נותנת כנגד כל ערך של הפסוק x ערך מתאים של הפוסק $y=f(x)$ (עיין בציור 23). הפונקציה הזאת $y=f(x)$ תהי חד־ערכית: לכל x חיובי מותאם y חיובי יחיד, כך שמעל כל נקודה שבציר ה x נמצאת נקודה יחידה של העקום $y=f(x)$. אין זאת אומרת ש $f(x)$ תהיה חד־חד־ערכית; למשל מותאם לשני הערכים $x=x_1$ ו $x=x_2$ בציור אותו ערך־הפוסק $y=f(x_1)=f(x_2)$. בהחליפנו x ב y, נקבל את הפונקציה ההפוכה $x=\varphi(y)$, וגם את אפייה של פונקציה הפוכה זו נסיק בנקל מתוך הציור 23. לשם כך מספיק כמעט להסיב את הציור (או את העמוד שבו נמצא הציור) ב 90^0; ציר ה y ייהפך אפוא ל„אָפקי". בעשותנו סיבוב זה לפי המגמה החיובית, כך שציר ה x יכּון כלפי מעלה, נקבל תמונת הפונקציה ההפוכה בליקוי קל, והוא: שכוון הציר האפקי נוטה שמאלה ולא, כרגיל, ימינה. נסלק ליקוי זה, בהשקיפנו על פני הציור (במצבו החדש) מעבר לדף, היינו מן העמוד השני; או דרך אחרת: בהרביצנו את הציור כולו סביב הציר „הזקוף" ב 180^0.



ציור 23

באור אחר במקצת נראה את היחס שבין תמונת הפונקציה $y=f(x)$ ותמונת הפונקציה ההפוכה $x=\varphi(y)$, בסמננו גם אצל φ את הגורם ב x ואת המשתנה התלוי ב y, ובתארנו את שתי הפונקציות $y=f(x)$ ו $y=\varphi(x)$ ע"י עקומים באותה מערכת־הקואורדינטות. שני העקומים האלה נמצאים במצב סימֶטרי [1] כלפי הישר, החוצה את הזוית שבין צירי ה x וה y בכווניהם החיוביים. (עיין בציור 24; לקחנו כ $f(x)$ את החזקה e^x [2], ולכן — כמבואר להלן ב § 3 — תהיה $\varphi(x)=\log_e x$.) לשון אחר: את העקום האחד נקבל מן השני, בהרביצנו את כל



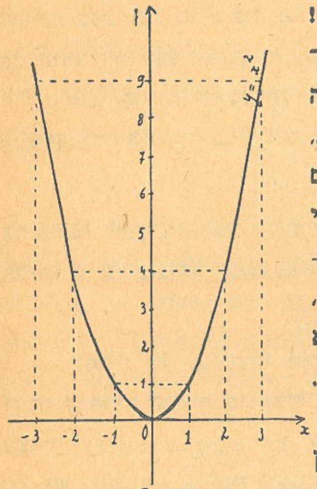
ציור 24

1. זוהי מסקנה מן העובדה הבאה: אם במישור־הצירים קשורות שתי נקודות A ו B כך, שהפסוק של A ישווה לפוסק של B והפוסק של A לפסוק של B, נמצאות שתי הנקודות במצב סימטרי כלפי חוצה־הזוית הנ"ל.

2. e מסמן כאן את „בסיס הלוגריתמים הטבעיים", שהוא מספר בין 2 ו 3; עיין בפרק י"א (§ 2).

המישור סביב חוצה־הזוית הנ"ל ב 180^0, ע"י „השתקפות" בחוצה־הזוית. במצב החדש, אחרי הרבצה זו, יענה הציור על השאלה: מהו ערכו של x המתאים ל y נתון? הציור 23 מראה, שבצאתנו מפונקציה חד־ערכית $y=f(x)$ יכולים להמצא ערכים שונים של x כנגד אותו הערך של y.

נצייר גם את העקום $y=x^2$ (ציור 25)! פונקציה זו מוגדרת אצל כל x ממשי; היא חד־ערכית, וכל ערכי y חיוביים, פרט לנקודה היחידה $(x=0, y=0)$. הפונקציה ההפוכה $x=\sqrt{y}$ מוגדרת, כפי שמראה גם הציור, רק אצל ערכי y החיוביים ו $y=0$; פרט לערך $y=0$ מתאימים לכל ערכי הגורם y שני ערכי x השונים זה מזה בסימן (+ או —). מצב דומה קיים בשביל כל העקומים $y=x^n$, אם n מספר זוגי. ואולם אם n אי־זוגי, תהיה לא רק x^n אלא גם הפונקציה ההפוכה חד־ערכית. (השוה בציור 26, המתאר את $y=x^3$.)

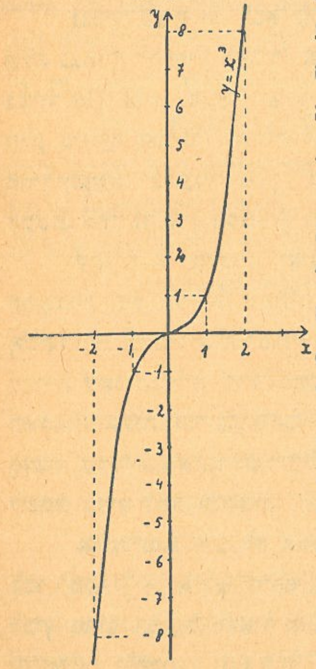


ציור 25

יש לציין סוג מיוחד של פונקציות, שאצלן לא יקרה לעולם כי הפונקציה ההפוכה (לפונקציה חד־ערכית) תהיה רב־ערכית. הכוונה לפונקציות בעלות תכונה זו: בְּגדול ערכי הפסוק, יעלה העקום תמיד, או ירד תמיד. בלשון־נוסחה אומרת תכונה זו: $x_1<x_2$ גורר אחריו או תמיד $f(x_1)<f(x_2)$, או תמיד $f(x_1)>f(x_2)$.

כל פונקציה מסוג זה נקראת פונקציה „מוֹנוֹטוֹנית" [1], וביתר דיוק: „פונקציה מונוטונית עולה" או „מונוטונית יורדת". $y=x^3$ למשל (ציור 26) היא מונוטונית עולה. אצל פונקציה (חד־ערכית) מונוטונית $y=f(x)$ לא יותאם לערך אחד של y יותר מערך יחיד של x; לכן חד־ערכית גם הפונקציה ההפוכה.

לבסוף נכניס מונח כללי לגבי פונקציות, המכוון לנוחיות ולהקלת הביטוי. נקח את הפונקציה: (1) $y=\sin\sqrt{1-x^2}\cdot\log\sqrt{1-x^2}$. נוח יותר לתאר את הפונקציה הזאת לא כמו שהיא, אלא באמצעות משתנה „מתַוֵּך" שלישי, המוגדר (כתלוי ב x) ע"י



ציור 26

1. השם לקוח מן המלים היווניות $\mu\acute{o}\nu o\varsigma$ שמובנה „לבד", „יחיד", ו $\tau\acute{o}\nu o\varsigma$ שמובנה „מיתוח", „גוון". משמעות המלה בערך „חד־גווני".

היחס: $u=\sqrt{1-x^2}$ (2). לפי זה תקבל הפונקציה הנתונה את הצורה הפשוטה: $y=\sin u\cdot\log u$ (3). וחילופו: בהנתן היחסים (2) ו(3) לפי התנאי, שהגורם u של (3) יתלכד עם המשתנה u המוגדר ע״י (2), נדבר על „פונקציה מורכבת״; היא הפונקציה (1) המוגדרת כהרכב משתי הפונקציות (2) ו(3) במובן הנ״ל. לא הכנסנו בזה סוג חדש של פונקציות שנוכל לכנותן בשם „פונקציות מורכבות״; אך תחת תאֵר את הפונקציה y של x בבת אחת, הפרדנו את התיאור לשתי דרגות.

אם, במקום הפונקציה המיוחדת ששימשה לנו דוגמה, נתכוון לפונקציות כלשהן, הרי התיאור כפונקציה מורכבת מופיע בשני יחסים בעלי הצורות:

$$(2')\quad u=\varphi(x)\,,\qquad (3')\quad y=\psi(u)\,.$$

בהכניסנו לתוך (3') את ערכו של u לפי (2'), נקבל: $y=\psi(\varphi(x))$ (1'). פונקציה חדשה זו של x נוכל לבטא כמובן גם ע״י סימן פונקציונָלי אחד, למשל f, כך שיהיה:

$$y=f(x)=\psi(\varphi(x)). \tag{1'}$$

במונח של פונקציה מורכבת יש להשתמש גם במקרים כלליים יותר. יתכן שנוח להפריד הגדרת פונקציה לא רק לשתי דרגות אלא לשלוש או יותר; למשל בצורה: $u=\varphi(x)$, $v=\psi(u)$, $y=\chi(v)$. נקבל כך את הפונקציה: $y=\chi(\psi(\varphi(x)))$. וכן יש להשתמש בסימון הפונקציה המורכבת גם כלפי פונקציות של גורמים אחדים.

נגמור סעיף זה, הבא כהכנה לסעיפים הבאים, בהערה לגבי ענין פרוט, כדי שלא נצטרך להפסיק בעבורו את מהלך המחשבה אחר־כך (ב §3). בעמ׳ 230 (עיין בציור 18) צויין הקשר $s=C\cdot r\cdot\alpha$ שבין מחוג־המעגל r, אורך־הקשת s (ז״א חלק מהיקף המעגל) והזווית המרכזית α המתאימה ל s (C מסמן ערך קבוע); אורך־הקשת במעגל נתון מתכונתי אפוא לזווית המרכזית הקובעת את הקשת. לפי זה אין המנה $\frac{s}{r}$ תלויה בr, אלא רק בזווית α.

עובדה זו תלמדנו, איך לצאת ידי אי־נעימות כפולה, הקשורה בשיטה המקובלת של מדידת זויות (השוה גם בעמ׳ 147/8). ראשית, המידה הרגילה (למשל, 90 בשביל זוית ישרה) מתיחסת לא למידת־אורך (ס״מ וכו׳) ולחזקותיה, כמידת שאר הגדלים שבגיאומטריה, אלא ל„מעלות״; ע״י זה נכנס גורם זר לתוך הנוסחות. שנית, הרי נמוקיהם של אנשי בבל, שבחרו ב 360^0 כדי לסמן סיבוב שלם (השוה בעמ׳ 3), אינם יכולים לטשטש את הזרות שבהכנסת מספר כה שרירותי, הבא לשמש בסיס ליחידת־הזוית.

אי־נעימות זו בטלה אם נחליט למדוד את הזויות לא לפי מעלות כי אם לפי המנה $\frac{s}{r}$, ז״א לפי היחס בין הקשת, המתאימה לזוית הנתונה במעגל מסויים, לבין מחוג המעגל. הואיל ומנה זו איננה תלויה בr, נוכל לשים $r=1$ („מעגל־יחידה״) ולקבוע: הקשת φ במעגל־היחידה תשמש מידה לזוית המתאימה. והרי הקשת קובעת אורך כשאר הגדלים שבגיאומטריה; לכן יהיה גם ליחידה אופי „טבעי״: לסיבוב שלם יתאים היקף מעגל־היחידה, שהוא כידוע 2π.

לפי זה יש התאמה חד־חד־ערכית בין מידות־הזוית לפי שתי השיטות הנ״ל, המדידה במעלות (α) והמדידה בקשתות („המידה המעגלית״ φ). הקשר ביניהן מתבטא במתכונת $\alpha : \varphi = 360 : 2\pi$, הנותנת:

$$\varphi=\frac{\alpha\cdot\pi}{180}\,,\qquad \alpha=\frac{\varphi\cdot 180}{\pi}.\qquad (\pi=3{,}14159\ldots)$$

לפיכך נסמן מעתה זוית ישרה ב $\frac{\pi}{2}$ $\left(=\frac{90\cdot\pi}{180}\right)$, זוית שטוחה ($180^0$) ב π, זוית של 30^0 ב $\frac{\pi}{6}$ וכו׳. לזוית חדה מתאים אי־השויון $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. מאידך מתאימה ל $\varphi=1$ הזוית $\alpha=\frac{180^0}{\pi}=57^0{,}29\ldots$ — בזויות בנות מידה שלילית יש להשתמש באותו המובן כרגיל (השוה בעמ׳ 148).

בשביל מטרות מעשיות עדיף בדרך כלל להשאיר את המידה במעלות; השימוש במספר האירציונלי π (עיין בעמ׳ 181) היה מביא לידי כמה סיבוכים בחשבון־ממש. לעומת זאת נראה בפרקים הבאים, מה רבה תועלתו של השימוש במידה המעגלית במתימטיקה, וכהתעמקנו יותר באנליזה כן נראה תועלת זו הולכת וגדלה. לכן נשתמש מעתה אך ורק במידתה המעגלית של כל זוית.

§ 2. הגדרות יסודיות ביחס לפונקציות.

אחרי שהתוודענו פנים אל פנים אל המושגים היסודיים שעליהם בנויה תורת הפונקציות, ננסח ביתר דיוק את ההגדרות (עד הנה ניתנו רק הסברות), שקשה היה להבינן בצורתן המופשטת לולא הקדמנו דוגמות שונות. אך על תיאורן הגרָפי של פונקציות לא נחזור, אלא נסתפק במה שנתבאר ב § 1.

הגדרה I: אם סימן ידוע מסמן בתוך נושא מתימטי גודל, שערכו קבוע במשך כל הנושא, נאמר: הסימן מסמן (גודל) קבוע. במקרים רבים מסומן הקבוע ע״י אות (a, b, ...); בזה יצויין שהגודל אמנם קבוע (מספר, נקודה וכו׳), אבל לא איכפת מהו הערך הקבוע הנידון (המוגבל פעמים לשדה מסויים וכו׳).

הגדרה II: אם סימן ידוע (x, y, ...) משמש בתוך נושא מתימטי ציון לשם קבלת ערכים משתנים, נאמר: הסימן מסמן משתנה.

הגדרה III: קבוצת כל הערכים, שמשתנה מסויים יוכל לקבלם במשך הנושא הנידון, תיקרא תחום־ההשתנות של המשתנה. תחום־ההשתנות הנו על־פי רוב קבוצת מספרים או נקודות. כל ערך מתוך תחום־ההשתנות יכונה „ערך פרוט״ של המשתנה או (בהתאם לתיאור הגיאומטרי) „מקום בתחום־ההשתנות״.

אם תחום־ההשתנות של x מכיל את כל המספרים הממשיים בין שני המספרים הממשיים a ו b ($a<b$), ואת שניהם בכלל, נדבר על הריוח הסגור מ a עד b, או על הריוח $\{a,b\}$; נסמנו גם ב $a\leq x\leq b$. אם המספרים a וb בעצמם לא יוכללו בתוך התחום, ייקרא הריוח ריוח פתוח, ויסומן ב (a,b) או ב $a<x<b$.

תחום־ההשתנות יכול להכיל אף את המספרים הממשיים כולם; גם תחום זה יכונה „ריוח פתוח". פעמים מסתכלים גם בריוח, הפתוח מצד אחד וסגור מצדו השני; למשל: ריוח בעל הצורה $(a,b]$, כלומר $a<x\leq b$.

לפי תיאור המספרים הממשיים בקו־המספרים (פרק ששי) ידובר גם על „הנקודות שבין a ו b". ולכן על ריוח של נקודות. לפיכך קוראים ל a ול b גם „קצות הריוח" (קצה שמאלי a וקצה ימני b, אם $a<b$); כל ערך „בין" a ו b יכונה: נקודה פנימית של הריוח.

ריוח פתוח כלשהו המכיל את הנקודה הפנימית a ייקרא סביבה של a. במקרה המיוחד שבו נמצאת a באמצע הריוח, כך שלריוח יש הצורה $(a-\delta, a+\delta)$ שבה $\delta>0$, יכונה הריוח בשם „סביבת־δ של a. יש ומשתמשים גם בסביבה חד־צדדית (שמאלית או ימנית) של a, היינו בריוח בעל אחת הצורות: $a-\delta<x\leq a$, $a\leq x<a+\delta$.

הגדרה IV: אם המשתנים x, y וכו׳ תלויים ביניהם, כך שישנו קשר מסויים בין ערכיהם האפשריים של המשתנים, ידובר על יחס פּוּנְקְצִיוֹנָלִי בין המשתנים. אם בפרט מייצג היחס הנידון אחד חמשתנים, למשל y, בצורת ביטוי שבו לא יימצא עוד y והמכיל אפוא, מלבד קבועים, רק את שאר המשתנים, ייקרא y פונקציה מפורשת או בקיצור פונקציה של שאר המשתנים. במקרה זה יכונה y בשם המשתנה התלוי, שאר המשתנים משתנים לא־תלויים, או גורמי הפונקציה. בכל מקרה אחר תכונה הפונקציה פונקציה סתומה.

ביתר דיוק: פונקציה מפורשת מתאימה לערכי הגורמים x, u וכו׳ ערך מסויים y, כערך־הפונקציה.

המקרה הפשוט ביותר של פונקציה מפורשת נתון בהיות המשתנה התלוי y פונקציה $f(x)$ של גורם יחיד x. במקרה זה ייקרא תחום־ההשתנות של x גם תחום־ההגדרה של הפונקציה. קבוצת הערכים אשר יקבלם y, בעבור הגורם x על כל הערכים שבתחום־השתנותו, נקראת אוצר־הערכים של הפונקציה. אם כנגד $x=a$ יש ל $y=f(x)$ הערך היחיד b, אומרים: הפונקציה מקבלת במקום (או: אצל) $x=a$ את הערך b; כותבים $f(a)=b$. כיוצא בו במקרה של ערכים שונים ל y כנגד $x=a$.

בניסוח דומה נשתמש, בהנתן y כפונקציה מפורשת של שני גורמים x ו u. במקרה זה יהיה תחום־ההגדרה של הפונקציה קבוצת זוגות, ואיברי כל זוג הנם ערך של x וערך של u. וכן במקרה של יותר משני גורמים.

כמו שיש לתאר את תחום־השתנותו של משתנה אחד במימד אחד (למשל: כריוח בקו ישר; עיין בהגדרה III), כך יש לתאר את תחום־הגדרתה של פונקציה של שני גורמים x ו u בשני ממדים: במישור (x,u). אם למשל מוגבלים הגורמים x ו u ע״י היחס $x^2+u^2<1$, יהיה תחום־הגדרתה של הפונקציה

התחום הפנימי של העיגול (בלי קו־המעגל עצמו), שמרכזו בנקודת־הראשית ושמחוגו 1.[1]

לא תמיד יוחלף באמת ערך המשתנה התלוי, בהשתנות ערך הגורם או הגורמים. לכן יש אשר יופיע בביטוי הפונקציה המשתנה התלוי בלבד. צורת הפונקציה אז $y=c$, לאמור: ערך הפונקציה y קבוע ושווה ל c, ואינו משתנה אפוא בעבור הגורם או הגורמים על תחום־השתנותם.

הגדרה V: אם לכל ערך הגורם x בתחום־השתנותו מתאים לפי היחס $y=f(x)$ ערך יחיד y (התלוי ב x), נקראת $f(x)$ פונקציה חד־ערכית. אם, לעומת זאת, לערך מסויים של הגורם x יכולים להתאים ערכים שונים של y (בפרט: לכל היותר[2] שני ערכים), נקראת הפונקציה פונקציה רב־ערכית (בפרט: דו־ערכית). בדרך זו יש להגדיר גם בהנתן פונקציה של משתנים אחדים $y=f(x,u)$, וכו׳.

הגדרה VI: תהי $y=f(x)$ פונקציה כך, שבשביל שני ערכים כלשהם של x מתחום־ההגדרה, x_1 ו x_2, גורר $x_1<x_2$ תמיד $f(x_1)<f(x_2)$ או תמיד $f(x_1)>f(x_2)$. אז תיקרא $f(x)$ פונקציה מונוטונית; ביתר דיוק: במקרה הראשון פונקציה מונוטונית עולה, במקרה השני פונקציה מונוטונית יורדת.

הגדרה VII: אם בפונקציה $y=\psi(u)$ מיוצג הגורם u מצדו כפונקציה של גורם אחר x, ז״א בצורה $u=\varphi(x)$, יש לכנות בשם פונקציה מורכבת את הפונקציה $y=\psi(\varphi(x))=\chi(x)$, שנקבלנה בהכניסנו לתוך $\psi(u)$ את הערך $\varphi(x)$ במקום u.

הגדרה VIII: תהי $y=f(x)$ פונקציה חד־ערכית מונוטונית בתחום־השתנות מסויים של x, ולכן גם להיפך מתאים לכל ערך של y מתוך אוצר־ערכיה של $f(x)$ ערך יחיד של x. היחס הפונקציונלי הנתון בין x ל y קובע אפוא במקרה זה לא רק y כפונקציה חד־ערכית של x אלא גם x כפונקציה חד־ערכית (ומונוטונית גם היא) של y. ($x=\varphi(y)$) פונקציה זו $x=\varphi(y)$ נקראת הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y=f(x)$. — כאשר $f(x)$ איננה מונוטונית, אין צורך שהפונקציה ההפוכה גם היא חד־ערכית, אם ישנה פונקציה הפוכה בכלל (עיין בעמ׳ 240/1).

§3. מִיוּן הפונקציות לסוגים שונים.

א) הפונקציות הרציונליות והאלגבריות.

בשם ארבע פעולות־החשבון הָרַצִיוֹנָלִיוֹת מכנים את ארבע פעולות־החשבון הרגילות באריתמטיקה: חיבור, חיסור, כפל וחילוק. פעולת ההעלאה

---

1. רבים מן הקוראים יודעים בוודאי שבגיאומטריה האנליטית מסמנת המשואה $x^2+y^2=r^2$ במישור הצירים (x,y) את המעגל בעל המחוג r סביב נקודת־הראשית. אבל גם בלי ידיעה זו קל להסיק זאת ממה שלמדנו בעמ׳ 153/4. — דוגמה אחרת ניתנה בעמ׳ 236 (ציור 22).

2. ההוספה „לכל היותר" נחוצה, מפני שפונקציה דו־ערכית תוכל לקבל ערך יחיד אצל ערכים מיוחדים של הגורם. למשל, הפונקציה $y=\sqrt{x}$ היא פונקציה דו־ערכית בתחום־הגדרתה, בקבלה אצל כל x חיובי את הערכים $+\sqrt{x}$ ו $-\sqrt{x}$. ברם אצל $x=0$ יש ל y הערך היחיד 0.

לחזקה תימצא אפוא בין הפעולות הרציונליות רק אם המעריך שלם (חיובי או שלילי)[1].

בהתאם לניסוח זה קוראים לפונקציה[2] של x בשם פונקציה רציונלית של x אם, בצאתנו מערכים קבועים ומן הגורם x, נוכל להגדירה ע״י הפעולות הרציונליות. מובן שמספר הערכים הקבועים, בהם נשתמש להגדרת הפונקציה, הוא סופי; כמו־כן נפעל על x ועל הקבועים במספר סופי את הפעולות הרציונליות. לפי זה תהיינה פונקציות רציונליות למשל

$$3x+2, \qquad \frac{-5x^3+7x+9}{x^5-1+\frac{1}{x^4}}, \qquad ax+b\,\frac{(cx+d)^3\,e\,x}{x^2+f}.$$

גם קבוע כמו 6 או a מהווה פונקציה רציונלית של x: פונקציה קבועה.

על הקורא להבדיל היטב בין משמעות המלה „רציונלי" במונחים „מספר רציונלי" ו„פונקציה רציונלית". במונח האחרון מדובר על אפייה הרציונלי של יצירת הפונקציה מקבועים ומהגורם, ברם הקבועים בעצמם אינם צריכים להיות רציונליים דוקא.

בין הפונקציות הרציונליות של x יש להדגיש במיוחד אלה שלשם יצירתן אין צורך להשתמש בחילוק[3]; לאמור: הפונקציות הנוצרות מקבועים ומx ע״י חיבור וכפל בלבד; כי את החיסור אין לראות כפעולה בפני עצמה, בהתלכד חיסורו של A עם חיבורו של $-A$. כל ביטוי הנוצר מקבועים $a, b, c, \dots$ והמשתנה x ע״י חיבור וכפל, נהפך בנקל לצורה $a+bx+cx^2+\dots+kx^n$; או לפי הסימון והסדר שנהגנו בם בעמ׳ 173:

$$(1) \qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n. \qquad (a_0\neq 0)$$

כדי לקבל צורה זו, עלינו להפעיל את החוק הדיסטריבוטיבי, ולצרף את המחוברים שבהם מופיעה אותה החזקה של x. כל פונקציה רציונלית מסוג זה, כלומר כל פונקציה שיש לתארה בצורה (1), תיקרא **פונקציה רציונלית שלמה**, או בקיצור: פונקציה שלמה[4] של x, או **פולינום** (השוה בעמ׳ 174)[5]. המספר השלם n נקרא, כמו

---

1. כרגיל מגדירים $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. גם המעריך 0 נכלל ע״פ ההגדרה: $a^0=1$ (אם $a\neq 0$).
2. בכל הסעיף הזה מדובר רק על פונקציות של גורם אחד, שנסמנו ב x.
3. גם כאן כמובן אין הכוונה לחילוק בקבועים; בין $\frac{ax+b}{c}$ ל $ax+b$ אין הבדל מהשקפתנו, שהרי ע״י הסימון $\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=\frac{b}{c}$ יעבור $\frac{ax+b}{c}$ אל הצורה $\alpha x+\beta$.
4. במתימטיקה הגבוהה מופיעות גם פונקציות שלמות שאינן רציונליות (פונקציות טרַנסצֶנְדֶנטיות שלמות). לא נוכל לבאר כאן את טיב הפונקציות האלה, ולמה הן נקראות „שלמות".
5. (הערה למתקדמים) אף כי לפונקציות שלמות אלו יש אותו הפרצוף החיצוני כאשר לפולינומים שבפרק השמיני, קיים הבדל עקרוני בין הביטויים האלגבריים והפונקציות; הבדל שבלט בבהירות רק בתקופתה החדישה של המתימטיקה. תכונת **הפונקציות** היא שהגורם או הגורמים ישתנו, כמו שמדגיש

בעמ׳ 174. **מעלת** $f(x)$. אם $n=0$, הרי לפנינו פונקציה קבועה. (רק לפונקציה הקבועה $f(x)=0$ אין מיחסים מעלה מסויימת, אלא „מעלה הקטנה מכל מעלה אחרת".)

פונקציה שלמה בעלת המעלה 1 נקראת גם פונקציה „ליניארית" או קווית; הלוא ראינו בעמ׳ 232 שביטויו האנליטי של כל ישר במישור ה x ו y (פרט לישרים המקבילים לציר ה y) הוא: $y=ax+b$, או בפרט $y=b$.

בבדקנו את האפשרויות ליצור פונקציה רציונלית כלשהי, ז״א להשתמש גם בחילוק, מתברר: **אפשר לתאר כל פונקציה רציונלית כמנה של שתי פונקציות שלמות**, בדיוק כמו שיש לתאר כל **מספר רציונלי** כמנה של שני מספרים שלמים. למשל, בשובנו אל הדוגמות של פונקציות רציונליות שהובאו בעמוד הקודם, נקבל את התיאורים הבאים כמנות:

$$\frac{-5x^3+7x+9}{x^5-1+\frac{1}{x^4}}=\frac{(-5)x^7+7x^5+9x^4}{x^9+(-1)x^4+1};$$

$$ax+b\,\frac{(cx+d)^3ex}{x^2+f}=\frac{(bc^3e)x^4+(3bc^2de+a)x^3+3bcd^2ex^2+(af+bd^3e)x}{x^2+f}.$$

אמנם התיאור כמנה של פונקציות שלמות איננו **חד־ערכי** כל עוד לא נקבע הגבלות נוספות; למשל, אפשר לכתוב את $\frac{3x^2-3}{x^3+2x+1}$ גם בצורה $\frac{3x-3}{x+1}$.

באשר לתחום־ההשתנות האפשרי יש הבדל בולט בין פונקציות שלמות לרציונליות שאינן שלמות. הגורם בפונקציה שלמה יוכל להשתנות בתחום כל המספרים הממשיים (או המרוכבים) בלי הגבלה, ואילו על פונקציות רציונליות שאינן שלמות חלה ההגבלה, כי המשתנה לא יקבל ערכים שאצלן מתאפס הפולינום אשר במכנה הפונקציה.

מערכת כל הפונקציות הרציונליות של x היא שדה (עמ׳ 111/2) בתנאי שהקבועים — ז״א המקדמים שבפולינומים — עוברים על שדה מסויים (למשל, על שדה המספרים הממשיים או המרוכבים), ושנגדיר את החיבור ואת הכפל כנהוג (השוה בעמ׳ 175/6 ו 217). באמת נותן חיבורן או כפלן של שתי פונקציות רציונליות שוב פונקציה רציונלית; הפעולות הן אסוציאטיביות וקומוטטיביות וקשורות ביניהן

המונח „משתנה"; תשומת־לבנו נתונה להשתנותה של הפונקציה כנגד ערכיו השונים של הגורם או הגורמים. בניגוד לכך **באלגברה** (למשל אצל הפולינום (1)) אין אנחנו מעוניינים באפשרות ש x ישתנה, ז״א שיבואו ערכים מספריים שונים במקום x; על־כל־פנים יש לאפשרות זו רק חשיבות צדדית. העיקר כאן **הביטוי החשבוני** המופיע בצורת פולינום, והביטויים החשבוניים שיש לקבלם ע״י צירופי ביטויים שונים, בעזרת פעולות־חשבון בין פולינומים, או בעזרת הכנסת ביטויים חשבוניים אחרים במקום x. לכן מתאים יותר באלגברה לקרוא ל x (או ל x, y וכו׳) לא בשם „משתנה", כי אם בשם „**לא־מסויים**", ויש להבינו כך: לא רק שהערך לא נקבע, אלא אסור בעקרון לקבעו. אם בכל זאת מדברים באלגברה על פונקציות שלמות, פונקציות רציונליות וכו׳, הרי זה רק „עירוב פרשיות" לשם ביטוי קצר ונוח, שאין להבינו במובן המדוייק של „פונקציה של משתנים". (השוה בעמ׳ 215.)

בניגוד ללשון המשוואות תהיה להבא כוונת היחס $f(x)=0$ לא הדרישה למצוא ערך $x=a$ שבשבילו $f(a)=0$ (כמו בפרק השמיני), אלא האימרה: $f(x)$ היא הפונקציה הקבועה 0.

ע״י החוק הדיסטריבוטיבי, כאשר קל לראות. האיבר הניטרלי של החיבור הוא 0, האיבר הניטרלי של הכפל 1; הכוונה לפונקציות הקבועות $f(x)=a_0$ שבהן $a_0=0$ או $a_0=1$. נוסף על כך אפשר להפוך באופן חד־ערכי את החיבור והכפל, פרט לחילוק ב 0; זה נופק ממציאות הפונקציות $-f(x)$ ו $\frac{1}{f(x)}$, המוגדרות ע״י היחסים $f(x)+(-f(x))=0$, $f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=1$ (אם $f(x)\neq 0$).

לכל מסקנות אלו יש מובן מדוייק רק אחרי הגדירנו את ה ש ו י ו ן בין שתי פונקציות רציונליות. ההגדרה כלפי פולינומים ידועה לנו מעמ׳ 176; לפי זה — ז״א במובן הזֶהות[1] — נגדיר גם כלפי פונקציות רציונליות כלשהן, המתוארות כמנות של פולינומים, בתנאי כי הפולינומים שבמונה ובמכנה „זרים״ ביניהם[2].

מן המשפט 2 בעמ׳ 177 נופק שפונקציה שלמה מתאפסת רק אצל מספר ס ו פ י של ערכי x. זה גורר שתחום־ההגדרה של פונקציה רציונלית מקיף את כל ערכי x הממשיים (או המרוכבים), פרט למספר סופי לכל היותר[3].

כאן המקום לדון בבעיה החשובה גם במדעי־הטבע: כנגד מספר סופי של ערכי המשתנה x, כגון $x_1, x_2, \ldots, x_n$, יהיו נתונים — למשל לפי מדידות פיסיקליות או סטטיסטיות — ערכים מסויימים $y_1, y_2, \ldots, y_n$, שאינם צריכים להיות דוקא שונים. נשאל: היש במציאות פונקציה שלמה $f(x)$, המקבלת במקום $x=x_k$ את הערך y_k (בשביל $k=1,2,\ldots,n$), כך שיהיה $f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n$? ואם כן הדבר, היש פונקציה שהיא „הפשוטה״ ביותר במובן ידוע? אם התשובה חיובית, הרי זאת אומרת שישנה פונקציה הנותנת ש י ר ב ו ב (אינטֶרפּוֹלַציה[4]) בין הערכים הנתונים y_k באופן פשוט (מפני שמדובר על פונקציה ש ל מ ה).

נקח כדוגמה את התמותה כפונקצית הגיל! יש חומר סטטיסטי רב בענין זה, ומספרי החומר הזה שונים ביניהם לפי חוג בני־האדם הנבדקים: לפי המין (רק זכרים, או רק נקבות, או שניהם יחד), לפי הזמן שבו נתקבלו המספרים (התקדמות ההיגיינה והשפעת מלחמות וכו׳), וכן הלאה. נקח כדוגמה מספרים

---

1. הקורא ינסה להסביר לו שהגדרה זו לשויון בין פונקציות שלמות ורציונליות שקולה כנגד ההגדרה הבאה, שכחה יפה כלפי כל הפונקציות: $f(x)=g(x)$, אם יש ל f ול g אותו תחום־ההגדרה, ואם בשביל כל ערך $x=a$ מן התחום קיים $f(a)=g(a)$. (וכן אצל פונקציות של גורמים אחדים.)

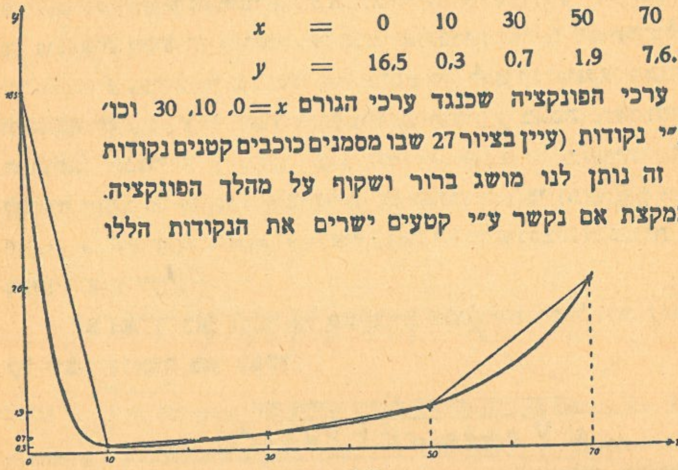
2. את מושג „ההתחלקות״ בין פולינומים בכלל ואת המושג „פולינומים זרים״ בפרט מגדירים כמו בעמ׳ 176; „זרים״ ר״ל: בלי מחלק משותף בעל מעלה חיובית. מובן שקיום היחס „$f(x)$ מתחלק ב $g(x)$״ אינו תלוי בטיב הקבועים והתחלקותם אלא בצורה שבה מופיע הגורם x; למשל x^2-1 מתחלק ב $3x+3$, בהיות המנה $\frac{x^2-1}{3x+3}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ גם היא פולינום. — אפשר לדרוש עוד כי בפולינום שבמכנה יהיה $a_0=1$.

3. הפונקציה $\frac{f(x)}{(g(x))^2+1}$, למשל, שבה מסמנים $f(x)$ ו $g(x)$ פולינומים כלשהם בעלי מקדמים ממשיים, מוגדרת בשביל כל ערכי x הממשיים בלי יוצא מן הכלל.

4. מן המלה הרומית interpolare = תקן, הַכנס.

המגידים, לפי חומר ידוע[1], כמה (y) מתוך 100 זכרים, החיים ביום הולדתם ה x, מתים במשך השנה הבאה, כלומר בגיל בין x ל $x+1$. המספרים הם בערך:

$$\begin{array}{cccccccc} x & = & 0 & 10 & 30 & 50 & 70 \\ y & = & 16{,}5 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1{,}9 & 7{,}6. \end{array}$$



ציור 27

אם נסמן את ערכי הפונקציה שכנגד ערכי הגורם $x=0$, 10, 30 וכו׳ באופן גרָפי ע״י נקודות (עיין בציור 27 שבו מסמנים כוכבים קטנים נקודות אלו), הרי אין זה נותן לנו מושג ברור ושקוף על מהלך הפונקציה. המצב יוטב במקצת אם נקשר ע״י קטעים ישרים את הנקודות הללו (עיין בציור). ואולם החֻדים, הנוצרים כך בין קטע לקטע, מעידים על כך שהפונקציה המתבטאת במערכת הקטעים איננה „טבעית״, ואינה עולה בד בבד עם פונקצית־התמותה האמיתית. כאן תבוא שיטת השירבוב ותגיד לנו שישנה, למשל, פונקציה שלמה של x בעלת המעלה 4, שתיאורה הגרפי עובר דרך חמש הנקודות הנתונות מתוך החומר הסטטיסטי הנ״ל. הואיל והפונקציה הנידונה היא שלמה, בטוחים אנו שיש לה אופי „טבעי״ במובן ידוע (השוה בפרקים י׳ וי״ב), ושלא יווצרו חודים בנקודות המסומנות או במקומות אחרים של העקום המתאר את הפונקציה. — אם נקח מן החומר הסטטיסטי את מספרי התמותה שכנגד הגיל בכל שנה ושנה (ולא כנגד הגילים 0, 10, 30 וכו׳ בלבד), יוסיף השירבוב להביא תועלת: הפונקציה המתקבלת ע״י שירבוב מתאים תציין את מהלך התמותה גם בגילים הנמצאים בין השנים השלמות[2].

במלואים לחלק השלישי (בסוף הספר) נוכיח שיש תשובה חיובית פשוטה למדי על השאלות הנ״ל: נצליח למצוא נוסחת־שירבוב בין כל n ערכים נתונים, המתארת פונקציה ש ל מ ה שמעלתה קטנה מ n.

לא כל פונקציה היא רציונלית. נקח למשל את הפונקציה של הגורם x המוגדרת ע״י $y^2-x=0$; או בצורה מפורשת: $y=\sqrt{x}$. פונקציה זו איננה רציונלית, דבר שקל להוכיחו[3]: אילו היתה $\sqrt{x}$ שוה ל $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($f(x)$ ו $g(x)$ פולינומים), כי אז תתן ההעלאה לריבוע: $x=\frac{(f(x))^2}{(g(x))^2}$, ז״א $x\cdot(g(x))^2=(f(x))^2$. והרי שויון

---

1. השוה בספרו של FUETER המצוטט בתחלת הפרק י״ב (שם p. 17).

2. אפשר לבחור גם בשיטות־שירבוב ג י א ו מ ט ר י ו ת. לפי שיטה מסוג זה שורטט העקום, המקשר בציור 27 (מלבד סדרת־הקטעים הנ״ל) את חמש הנקודות המצויינות.

3. הפונקציה היא דו־ערכית. אבל בזה לא נשתמש כאן.

זה אינו אפשרי, הואיל ומעלת הפולינום $(f(x))^2$ היא זוגית, בו בזמן שמעלת $x\cdot(g(x))^2$ אי־זוגית ! לא יקשה להוכיח באופן דומה: אם n מספר טבעי גדול מ 1, ו $f(x)$ פולינום שמעלתו אינה מתחלקת ב n, לא תהיה לעולם $y=\sqrt[n]{f(x)}$ פונקציה רציונלית. כל פונקציה מסוג זה נקראת „פונקציה אלגברית של x". וביתר כלליות מגדירים: יהי $F(x,y)$ „פולינום" של שני הגורמים x וy, לאמור: פונקציה הנוצרת מקבועים ומהמשתנים x וy ע"י חיבור וכפל (ושבה מופיע y באמת); אז תיקרא הפונקציה הסתומה, המגדירה y כתלוי ב x לפי $F(x,y)=0$, פונקציה אלגברית של x. לפי זה תהיה כל פונקציה רציונלית גם אלגברית; כי תחת $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ נוכל לכתוב $y\cdot g(x)-f(x)=F(x,y)=0$. לעומת זאת לא כל פונקציה אלגברית היא רציונלית, כאשר ראינו לעיל.

לא נאריך כאן לדבר על פונקציות אלגבריות הואיל ולא נרבה לעסוק בהן. קל ליצור דוגמות כמו למשל:

$$\sqrt[5]{\sqrt[7]{a+bx+cx^2}+\sqrt[3]{d+ex^5}},$$

ובדרך־כלל: פונקציות הנוצרות מ x וקבועים ע"י הפעולות הרציונליות והוצאת־שרשים. ברם לא כל פונקציה אלגברית של x נוצרת כך. נרמוז על הוכחת הטענה השלילית הזאת: אם תוגדר פונקציה אלגברית של x ע"י $F(x,y)=0$, נסדר את הפולינום $F(x,y)$ לפי החזקות של y בלבד:

$$F(x,y)=A_0(x)\cdot y^n+A_1(x)\cdot y^{n-1}+\dots+A_{n-1}(x)\cdot y+A\ (x). \qquad (2)$$

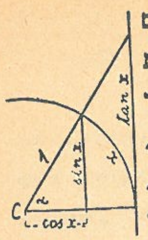
ה„מקדמים" $A_k(x)$ כאן פולינומים. והנה בעמ' 190 העירונו שאי־אפשר בדרך־כלל לפתור דרך **אלגברית** משואות שמעלתן עולה על 4. כיוצא בו אין לייצג בדרך־כלל y במפורש ע"י הוצאת־שרשים ופעולות רציונליות מתוך x, אם $n>4$.

ב) פונקציות טרנסצנדנטיות. רב־ערכיותו של הלוגריתמוס.

בהכניסנו את הפונקציות האלגבריות, הרחבנו אמנם בהרבה את מושג־הפונקציה בהשואה לפונקציות הרציונליות, אבל לא מצינו מושג זה כל עיקר: רבות הן הפונקציות שאינן אלגבריות. כל פונקציה שאיננה אלגברית תיקרא פונקציה טרנסצנדנטית (השוה בעמ' 181).

נציין קודם כל שישנן במציאות **פונקציות טרנסצנדנטיות**. כדוגמה נקח את $\sin x$; במלואים תובא הוכחה לכך שהפונקציה $\sin x$ איננה אלגברית. כמו־כן גם שאר הפונקציות **הטריגונומטריות**[1] $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ הנן טרנסצנדנטיות, דבר שקל להסיקו מן ההוכחה לגבי $\sin x$.

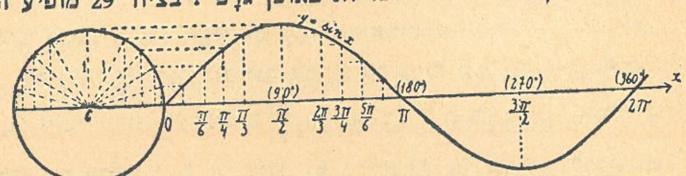
1. לפי המלה היוונית τρίγωνον = משולש; המובן אפוא: פונקציות המודדות את המשולש. מבטאים כידוע: sinus, cosinus, tangens, cotangens. (יש הכותבים tg תחת tan).



ציור 28

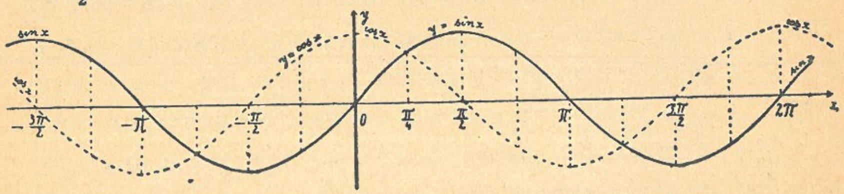
בציור 28 נזכיר לקורא, בעזרת משולשים ישרי־זוית המסתמכים על מעגל בעל המחוג 1, את הגדרת הפונקציות האלה כנגד זוית חדה, לרבות 0^0 ו 90^0: אם α זוית חדה במשולש ישר־זוית, מוגדר $\sin\alpha$ כיחס הניצב שמול α ליתר, $\cos\alpha$ כיחס הניצב שעל־יד α ליתר, $\tan\alpha$ כיחס הניצב הראשון לשני. במקום α נכניס, בהתאם לעמ' 243, את הקשת x המתאימה. — הפונקציות נמשכות מעֵבר ל 90^0 או $\frac{\pi}{2}$, וכן כנגד x שלילי, לפי הנוסחות (3) עד (5) (עיין בעמ' 252).

נתאר את הפונקציות הטריגונומטריות באופן גרָפי ! בציור 29 מופיע העקום

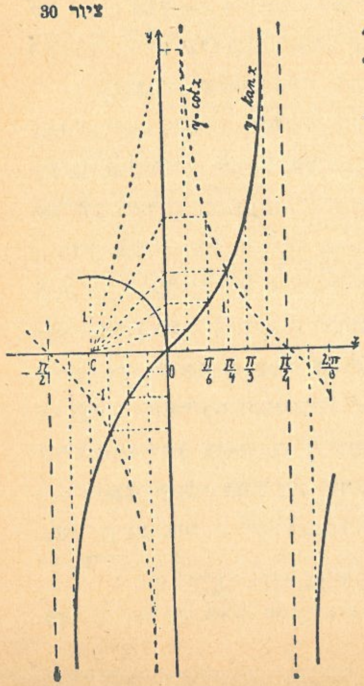


ציור 29

$y=\sin x$ בריוח $0\leq x\leq 2\pi$. רמז מספיק לבנין ערכיו של $\sin x$ בריוח $\{0,\pi\}$ נמצא בחצי־המעגל בעל המרכז C (השוה לזה ציור 28). העקומים $y=\sin x$ ו $y=\cos x$ יחד (האחרון בצורת קו מרוסק) מופיעים בציור 30 בריוח $-\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$;



ציור 30



הקורא ישים לב בייחוד לחלק שמימין ציר הy, ז"א כנגד $x>0$. מתוך הציור ברור איך נוצר עקום ה cos מעקום ה sin: לפי „הקדמה" ב $\frac{\pi}{2}$, המתאימה לנוסחה $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$.

בציור 31 מתוארות בריוח $\{-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\}$ הפונקציות $y=\tan x$ ו $y=\cot x$, המקיימות את היחסים $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\tan x\cdot\cot x=1$, ע"י עקומים (השני מרוסק); כמו בציור 29 רומז רבע־המעגל (משמאל) בעזרת קוי־עזר מרוסקים על בנין ערכיו של $\tan x$. אי־אפשר לשרטט עקומים אלו בשלֵמותם, בהתרחקם למעלה ולמטה בלי סוף.

הקורא יבין עד כמה תלויה צורת העקומים הנ"ל בכך, שמדדנו את הגורם x לפי המידה המעגלית.

השבונן וציורן של הפונקציות הטריגונומטריות יוקל בהרבה ע"י הנוסחות הבאות, הידועות לרבים מבית־הספר:

(3) $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x;$

(4) $\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x;$

(5) $\sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x.$

לפי (3) מוגדרים sin ו cos לא רק בין 0 ל 2π, כי אם אצל כל x ממשי (גם שלילי). ביתר דיוק: הנוסחות (3) מגידות ששתי פונקציות אלו הן מחזוריות ובעלות המחזור 2π; כלומר, בהוסיפנו 2π, או גם $n \cdot 2\pi$ (n מספר שלם), על ערך מסויים x, תקבל הפונקציה אותו הערך כמו אצל x בעצמו. לכן מספיק לקבוע את ערכי $\sin x$ ו $\cos x$ (או לשרטט את העקומים המתאימים) בריוח $\{0, 2\pi\}$; מימין ומשמאל לחלק זה של העקומים נקבל המשכים שווים.

הנוסחות (4) ו (5) מקילות את קביעת ערכי ה sin וה cos אף בריוח $\{0, 2\pi\}$: לפי (4) נקבל מתוך הערכים ב $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ את הערכים ב $\{0, \pi\}$, ומתוך אלה לפי (5) את הערכים בריוח $\{0, 2\pi\}$ כולו. גם בריוח $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ מספיק לדעת אחת משתי הפונקציות; אל אחותה נעבור לפי הנוסחות הידועות

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

גם $\tan x$ ו $\cot x$ הן פונקציות מחזוריות. אלא שמחזורן (הקטן ביותר) איננו 2π כי אם π. לשון אחר: קיימים היחסים $\tan(x + n\pi) = \tan x$, $\cot(x + n\pi) = \cot x$, שבהם n מספר שלם כלשהו; קל להוכיחם על־סמך הנוסחות הקודמות. לכן חוזר חלילה מהלך הפונקציות האלה כבר אחרי תום ריוח שרחבו π. אכן הפונקציה $\tan x$ אינה מוגדרת אצל $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, בהתאפס שם המכנה של $\frac{\sin x}{\cos x}$; וכן לא $\cot x$ אצל $x = 0 + n\pi$. לפני ערכי x אלו ואחריהם מקבלות הפונקציות $\tan x$ ו $\cot x$ ערכים שערכם המוחלט גדול מאד. (עיין בציור 31.)

העובדה שהפונקציות הטריגונומטריות הן מחזוריות נותנת להן, ובפרט ל sin ול cos, חשיבות מיוחדת לגבי תיאור אותם התהליכים בטבע שהם בעיקר מחזוריים; למשל, על־סמך תלותם בתנועת כדור־הארץ סביב צירו (חילוף של יום ולילה), בתנועת הירח (מחזור חדשי), בתנועת כדור־הארץ סביב השמש (מחזור שנתי), וכו׳. הזכרנו בעמ׳ 248 את בעית השירבוב, והראינו איך אפשר לתאר ע״י פולינום כל פונקציה שרק מספר סופי של ערכיה נתונים לנו. ואולם אם לפי הנסיון ישנו לפונקציה הנתונה אופי מחזורי, כמו למשל למהלך הטֶמפרטורה במשך יום או במשך שנה, או למהלך לחץ האויר, או לחילוף בין גאות הים ושפלו, אז עדיף לתאר את הפונקציה לא ע״י פולינום, כי אם ע״י תרכובת של פונקציות טריגונומטריות. ביאור ברור יותר של שיטה זו ינתן בסוף ה § 4 של הפרק י״א.

בפונקציות ההפוכות (עמ׳ 239 ו 245) לפונקציות הטריגונומטרית לא נעסוק כאן. הן נקראות ציקלוֹמֶטריות[1], ומסומנות ב $\arcsin x$, $\arccos x$ וכו׳. קל

1. מן המלים היווניות $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma$ = מעגל, $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$ = מידה. באמת מודדות פונקציות אלו את הקשת x, ז״א חלק מהיקף המעגל, כפונקציה של $\sin x$ וכו׳. $\arcsin x$ ר״ל: הקשת שהסינוס שלה x.

להסיק מעמ׳ 240 בקשר עם מחזוריות הפונקציות הטריגונומטריות, שהפונקציות הציקלומטרית הן רב־ערכיות לאינסוף (השוה הדוגמה 2 בעמ׳ 238).

אולי יש המתפלאים על כך שבמשך מיון זה של הפונקציות לא דובר על פונקציה אחת הידועה לכל, והיא: החֶזקה. בפנותנו עתה אל פונקציה זו, עלינו להבדיל בין שני מקרים: גורם הפונקציה יוכל להופיע או כבסיס החזקה או כמעריך. במקרה הראשון לפנינו הפונקציה x^r, במקרה השני a^x; r ו a הם קבועים.

מה שנוגע ל x^r, הרי פשוט המקרה שבו הקבוע r הוא מספר שלם, חיובי או שלילי[1]. אז x^r פונקציה שלמה, אם $r > 0$; וכן נופק מן ההגדרה $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, כי x^r פונקציה רציונלית, אם $r < 0$.

נניח עתה כי r איננו שלם אבל רציונלי: $r = \frac{s}{t}$ לפי ההגדרה הרגילה של $a^{\frac{1}{t}}$ כ $\sqrt[t]{a}$ הנה $x^{\frac{s}{t}}$ רק ביטוי אחר ל $\sqrt[t]{x^s}$. לשם פשטות נניח כי תחום־ההשתנות של x יהיה תחום כל המספרים החיוביים[2], ונסתפק גם באותם ערכי־הפונקציה שהם ממשיים וחיוביים; אז מתאר $y = x^{\frac{s}{t}}$ פונקציה חד־ערכית. כדי לעמוד על טיבה נציין שקיים $\left(x^{\frac{s}{t}}\right)^t - x^s = 0$; לשון אחר: $y^t - x^s = 0$. לכן, לפי מה שהוגדר בעמ׳ 250, יש לפנינו פונקציה אלגברית y של x. קבלנו כך את המסקנה[3]:

אם r רציונלי, תהיה $y = x^r$ פונקציה אלגברית של x; בפרט היא פונקציה רציונלית אם r מספר שלם.

אופי הפונקציה x^r בשביל r אירציונלי יתברר בעמ׳ 257.

נפנה עתה אל המקרה השני של חזקה שצויין לעיל: אל $y = a^x$. כדי שנשאר בתחום הממשי, נניח כאן שהקבוע a יהיה חיובי. (אחרת מופיעים קשיים כבר בשביל $x = \frac{1}{2}$.) פונקציה זו, הנקראת פונקצית־המעריך, הוכנסה למתימטיקה בסוף המאה הי״ז; יש לה חשיבות מיוחדת (עיין בפרקים הבאים). גם פונקציה זו

1. את החזקה a^0 מגדירים כמספר 1, אם $a \neq 0$. (הגדרה זו נובעת, למשל, מעקרון היציבות [עמ׳ 70] כלפי החוק $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, בהתחשב עם המקרה $c = -b$.) לכן הפונקציה $y = x^0$ היא הפונקציה הקבועה $y = 1$, פרט למקום $x = 0$ ששם אינה מוגדרת.

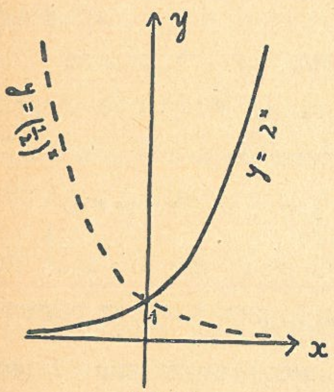
2. אם $x < 0$, כבר לא יהיה מובן לפונקציה $x^{\frac{1}{2}}$ (בתחום הממשי), מפני שאין ערך ממשי לשורש הריבועי ממספר שלילי.

3. הכוונה להגבלות הנ״ל ($x > 0$, $y > 0$). המסקנה נשארת אמנם נכונה גם בלי הגבלות אלה, רק שאז בדרך־כלל לא תהיה הפונקציה ממשית ולא חד־ערכית. שאלות אלו הנן מחוץ למסגרת הספר הזה.

טרנסצנדנטית, עובדה שלא נוכל להוכיחה כאן, מפני שההוכחה דורשת ידיעות קודמות מתורת־הפונקציות.

נתאר לנו את פונקצית־המעריך באופן הסתכלותי! קודם־כל נוציא מן הכלל את המקרה $a=1$, הנותן לא פונקציה חדשה כי אם את הפונקציה הקבועה $y=1$. שונים ביניהם שני המקרים שישארו: $a>1$, $0<a<1$.

אם $a>1$, הרי לפי הגדרת החזקה הולכת הפונקציה וגדלה באופן מונוטוני החל מ $x=0$ (ששם $y=a^0=1$), בגדול ערכו של x. מידת הגידול תלויה בערך הקבוע a; כבר אם $a=2$ (ציור 32), יגדל $y=2^x$ „מהר מאד". כנגד ערכי x ההולכים וקטנים מ 0 והלאה נקבל התקטנות מונוטונית ואטית של y, שקצבתה ניכרת מ $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$; קיים אפוא $0<a^x<1$ בשביל $x<0$.



ציור 32

את האופי ההפוך מראה a^x, אם $0<a<1$. כאשר נופק מ $\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$, ילך ויקטן $y=a^x$ החל מ $y=1$, בגדול x מ 0 והלאה; לעומת זאת יגדל a^x מעל לכל ערך חיובי, ברדת x מתחת ל 0. (השוה את הקו המרוסק בציור 32; שם $a=\frac{1}{2}$.)

למדנו בעמ׳ 241 ו 245 שהיפוך פונקציה חד־ערכית מונוטונית נותן שוב פונקציה חד־ערכית, שאצלה מתחלפים תפקידי המשתנים (הלא־תלוי והתלוי) בהשואה לפונקציה המקורית. נכתוב לפי זה את פונקצית־המעריך בצורה $x=a^y$ $(a>0)$, ונשאל לפונקציה ההופכת אותה; לאמור: לפונקציה המתארת את y כתלוי בגורם x. לשון אחר: תחת שאלנו לערך החזקה, אם הבסיס קבוע והמעריך משתנה, נשאל לערך המעריך (לגבי הבסיס הקבוע a). בראותנו את ערך החזקה כגורם הפונקציה. למדנו בבית־הספר שבמקרה זה קוראים למעריך y בשם הלוגריתמוס של x לפי הבסיס a; בקיצור: (פונקצית־)הלוגריתמוס, ובנוסחה: $y=\log_a x$. ברור שפונקציה זו הפוכה לפונקציה $y=a^x$; גם היא טרנסצנדנטית[1].

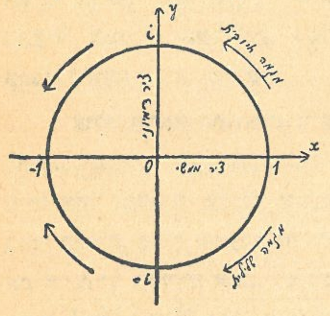
אולי ישאל הקורא: למה נוכל לבנות לוגריתמים רק למספרים החיוביים ולא לשליליים? בדרגה הראשונה יש לענות: אם בסיס הלוגריתמים a חיובי ו $a\neq 1$ (הנחה שנחוץ לשמור עליה מנימוקים שנזכרו לעיל), הרי $y=a^x$ מתואר ע״י עקום בעל אחד הסוגים שבציור 32, ז״א ערך החזקה חיובי כנגד כל x; לכן כל מספר ממשי, יהי ערכו חיובי או שלילי או 0, הוא לוגריתמוס של מספר חיובי.

1. קל להוכיח זאת בסמכנו על כך שפונקצית־המעריך היא טרנסצנדנטית (עיין לעיל). אילו קיים בין x ובין $y=\log_a x$ יחס $F(x,y)=0$ שבו F פולינום ב x וב y, כי אז נקבל, הואיל ו $x=a^y$, את הנוסחה $F(a^y,y)=0$. ואולם זאת אומרת כי a^y פונקציה אלגברית של y, בניגוד להנחתנו דלעיל.

ואולם, מלבד מה שיש אולי לטעון נגד דייוקו של ביאור זה כשלעצמו[1], נוכל לעורר את שאלתנו גם מהשקפה כללית יותר, כדלקמן. (הנוסח פסיכולוגי יותר מהגיוני.)

אין זה מפתיע אם פונקציה מסויימת אינה מוגדרת אצל מקומות בודדים, כמו הפונקציה $\frac{x^2-4}{x^2-1}$ אצל $x=1$ ו $x=-1$, ז״א במקומות המאפסים את המכנה. אבל למה תהיה פונקציה, פשוטה באופן יחסי, חסרת הגדרה אצל הערכים השליליים כולם, ז״א ב„חצי" האוצר של ערכי x כביכול? (אמנם גם אצל $\sqrt{x}$ המצב דומה, אבל שם הנימוק ברור.) התשובה האמיתית על שאלה זו מתבססת על „תורת הפונקציות המרוכבות" וניתנת למשל בעזרת „אינטגרציה מרוכבת" (פרק י״ב) — נושאים שלא נוכל לבארם בספר זה. בכל זאת נרמוז על טיב הביאור האמיתי בצורה שתתן לפחות לחלק מן הקוראים הסברת־מה.

את אפייה האמיתי של פונקצית־הלוגריתמוס נבין רק בהסתכלנו בה לא אצל הערכים הממשיים בלבד, כי אם אצל כל ערכי x המרוכבים. בעשותנו כך, נוכל לשרטט במישור של גאוס (עמ׳ 164) למשל מעגלים סביב נקודת־הראשית 0 (השוה בציור 33). נצא מערך הלוגריתמוס אצל נקודת־החיתוך בין מעגל כזה ובין הציר הממשי החיובי (ז״א אצל מספר ממשי חיובי), ונעקוב אחרי ערכי הלוגריתמוס, בצעדנו לאורך המעגל (למשל במגמה החיובית)! כך נגיע, אחרי עברנו חצי־המעגל, אל הציר הממשי השלילי, כלומר אל הלוגריתמוס של מספר שלילי. באמת נקבל כך לוגריתמים למספרים השליליים; הם אמנם מרוכבים ולא ממשיים. אכן אילו נשארנו בציר הממשי — אף בהרשותנו לפונקצית־הלוגריתמוס לקבל ערכים מרוכבים — לא היינו משיגים לעולם מטרתנו זו. ומדוע? מטעם פשוט מאד: מפני שבנקודה הבודדת $x=0$ באמת אין הלוגריתמוס במציאות, מטעמים שלא נוכל לבארם כאן. והלוא אם נסתפק בציר הממשי, ז״א במימד אחד, אין מַעבר מן המספרים החיוביים אל השליליים אלא דרך הנקודה 0! (השוה בציור 33.) המצב משתנה מיד אם נוכל — בלכתנו בציר הממשי החיובי לקראת 0 — לנטות הצדה מציר זה ימינה או שמאלה אל המימד השני, ז״א אל מישור־גאוס מחוץ לציר הממשי; אז נגיע אל המספרים השליליים בלי עבור את „נקודת־המעצור" 0.



ציור 33

1. נוכל להגות מחשבה כזו: נסמן ב a מספר חיובי כלשהו, ונשים $x=\log(-a)$; אז מתקבל: $\log\left[(-a)^2\right]=\log(a^2)=2\log a$, ומאידך: $\log\left[(-a)^2\right]=2\log(-a)=2x$. לפי זה היינו מסיקים $\log(-a)=\log a$, ובפרט: $\log(-1)=0$, מסקנה שבוודאי אין לקבלה. היסק מתמיה זה עומד בקשר עם העובדה שהפונקציה $\log x$ איננה חד־ערכית אלא רב־ערכית, אם נרשה לגורם x ולערכי ה $\log$ לעבור גם על המספרים המרוכבים (השוה להלן). — כל זה לגבי בסיס כלשהו.

משל למה הדבר דומה? למטייל ההולך בשביל צר העובר בין שני אגמים, והרואה פתאום את הדרך סגורה בעדו, למשל ע״י חומה. אם לא ידע לשחות, לא יוכל לתור את התחום שמעבר לחומה. ואולם אם למד לשחות, יקפוץ לתוך המים ימינה או שמאלה ויעבור בשחיה עד הגיעו אל המשך השביל מעבר לחומה.

דוגמת הלוגריתמוס מאלפת, בהראותה איך יוכל להתעלם מעינינו אפייה האמיתי של פונקציה מתוך הגבלת הגורם לערכים הממשיים. לבדוק את הפונקציה כנגד כל ערכי הגורם המרוכבים, זוהי במקרים רבים הדרך היחידה להבנת תכונותיה.

על־סמך הרחבה זו של ערכי הגורם מתגלה פונקצית־הלוגריתמוס כפונקציה לא חד־ערכית — כמו שהתרגלנו לראותה במתמיטיקה האלמנטרית — כי אם כפונקציה רב־ערכית, ואף רב־ערכית לאינסוף (השוה הפונקציות הציקלומטריות, עמ׳ 252/3). לאמור: לכל ערך נתון x (פרט ל 0) מתאימים אינסוף ערכים שונים של $\log_a x$. בקחתנו $x=1$, נצא מערך מסויים של $\log_a 1$, למשל מן הערך הידוע לנו $\log_a 1=0$. בהמשיכנו באופן רציף את הפונקציה $\log_a x$ לאורך המעגל בעל המחוג 1 סביב המרכז 0 במגמה החיובית (עיין בציור 33, עמ׳ 255), דרך הנקודות i, -1, $-i$, עד שובנו אל $x=1$, נגיע לערך חדש של $\log_a 1$, שונה מ 0 (דבר שלא נוכל להוכיחו כאן). נוכל לשנות ולהמשיך משם באותו המעגל, עד הגיענו אחרי הסיבוב השני אל ערך שלישי של $\log_a 1$; וכן הלאה בלי סוף. מאידך: בהמשיכנו, מן הערך $\log_a 1=0$, את הפונקציה באותו המעגל במגמה השלילית, נקבל שוב ערך חדש ל $\log_a 1$; וכך חוזר חלילה, בסבבנו פעם שניה, שלישית,... במגמה השלילית.

אולי תֵראה התנהגות זו של הלוגריתמוס מוזרה בעיני הקורא. ברם יש לקרבה להסתכלות ע״י דוגמה מעשית. כל עם ועם מחליף את התאריך, במובן המעבר מיום אחד למחרתו, על־פי תופעה אסטרונומית מסויימת; למשל בצאת הכוכבים, או בחצי הלילה. מובן שמעבר זה מסופו של יום לתחילת יום מחר, עם היותו משנה את התאריך ביחידה אחת, לא יוכל להחשב כהפסקת רציפותו של הזמן. ואולם אם תקום לנסיעת טיול סביב כדור־הארץ, ואם תרצה לאחוז בכלל: לשנות את התאריך ביחידה אחת בכל יום בצאת הכוכבים, זה לא יצלח: בנסעך מזרחה, דרך אסיה והאוקינוס השקט, ובשובך הביתה ביום שבני תל־אביב חוגגים בו פורים דפרזי, יהיה אותו יום לפי חשבונך שושן פורים, כלומר מחרת פורים דפרזי. מאידך, אם נסעת מערבה, דרך אירופה ואמריקה, ותשוב הביתה כמו בדוגמה הקודמת, יהיה היום לפי חשבונך תענית אסתר (ערב פורים); שהרי נסעת אחרי השמש, ולא לקראתה כמקודם. למעשה מבטלים אמנם קושי זה לפי המנהג המקובל, לשנות את התאריך ביום אחד, לפנים או לאחור כעבור האניה את קו־האורך ה 180. שינוי מלאכותי זה של התאריך במקום גיאוגרפי שאין לו כל הצטיינות

טבעית [1], אינו מתאים בוודאי לשיטה המתימטית, הממשיכה ככל האפשר פונקציה נתונה ברציפות ולא בקפיצה. ואולם אם נקבע את התאריך באופן רציף בלי הגבלה לחופש התנועה על כדור הארץ, לא ייקבע התאריך באופן חד־ערכי, כי אם באופן רב־ערכי — אף בהקבע תחילת חשבונו באופן אחיד: מי שנשאר במקומו או לא סיבב את כדור הארץ, יש לו תאריך אחר מאשר למי שנסע סביב כדור הארץ מזרחה פעם אחת; וזה אוחז בתאריך השונה מתאריכו של מי שסיבב פעמיים, או שסיבב מערבה, וכו׳. אלה מן הקוראים שהתוודעו אל תורת הפונקציות המרוכבות, יבינו בנקל שאין דמיון חיצוני בלבד אלא קשר פנימי ועקרוני בין הדוגמה שלפנינו לרב־ערכיותה של פונקצית הלוגריתמוס ב„מישור של גאוס״ — או ביתר דיוק: על „כדור המספרים המרוכבים״. כמו בדוגמה הנ״ל, נוכל להפוך את $\log_a x$ לפונקציה חד־ערכית (פרט לקטבי הכדור), בקבענו במישור (או על הכדור) חָתָך מפריד כרצוננו, כנגד החתך שבקו־האורך ה 180. (בסביבת קטבי הארץ באמת אין לקבוע תאריך „הגיוני״ באופן חד־ערכי.)

הלוגריתמים הרגילים במתימטיקה האלמנטרית, והנוחים לחשבונות במספרים, מיוסדים על הבסיס $a=10$, בהתאם לשיטה העשרונית הרגילה (עיין בעמ׳ 2—4). בפרק י״א (§2) נתוודע אל בסיס אחר e ללוגריתמים, שיש לראותו כבסיס „הטבעי״. לפי מה שנאמר בעמ׳ 253/4 על הפונקציה $y=a^x$, למשל $y=10^x$, תהיה הפונקציה (ההפוכה לה) $y=\log_{10} x$ מוגדרת אצל כל x חיובי, וערכה אצל $x=1$ הוא 0. (זה קיים בשביל כל a חיובי השונה מ 1.) כנגד $x>1$ עובר $\log_{10} x$ על כל הערכים החיוביים, כנגד $0<x<1$ על כל הערכים השליליים. (השוה בציור 24, עמ׳ 240; שם אמנם בסיס הלוגריתמים e ולא 10, אבל אין זה משנה כלום באיכות העקום) ואולם אם הבסיס החיובי a קטן מ 1, יתחלפו היחסים האלה — דבר שקל להסיקו ממה שלמדנו על a^x (השוה גם את הציור 32 בעמ׳ 254).

עד הנה לא טפלנו בפונקציה $y=x^r$, אם r קבוע אירציונלי. והנה אם $x>0$, נוכל לתאר x בצורה $x=a^{\log_a x}$, אחרי שבחרנו בבסיס חיובי כלשהו a $(a \neq 1)$[2]. לפי החוק הידוע $(a^b)^c=a^{bc}$ נקבל: $x^r=a^{r\cdot\log_a x}$. בזה הכנסנו את הפונקציה x^r לתוך המסגרת של פונקצית־המעריך, בעזרת „פונקציה מורכבת״ (עמ׳ 245).

נעורר עוד שאלה זו: יצאנו לעיל (עמ׳ 253) מן החזקה a^r ושאלנו: איזו פונקציה נקבל, בתתנו לבסיס או למעריך שישתנה; כלומר, מה טיבן של הפונקציות x^r ו a^x, או גם של $(f(x))^r$ ו $a^{f(x)}$? נשאל עתה: מה יהיה אם ישתנו גם

---

1. לשאלה זו, לרבות את החתך ההופך את התאריך לפונקציה חד־ערכית (עיין לקמן), יש גם חשיבות מצד ההלכה, בקשר עם קביעת השבת והמועדים; השוה ש. י. זווין בעתון „הצופה״ (תל־אביב) מיום י״ג באלול תש״א: מ. מ. כשר ב„תלפיות״ (ניו־יורק) א/ב (תש״ד/ו).

2. זה נופק מהגדרת $y=\log_a x$, שלפיה y הוא המעריך, היוצר בעזרת הבסיס a את החזקה $x=a^y$.

הבסיס גם המעריך, כך שנקבל x^x, וביתר כלליות $f(x)^{g(x)}$? גם על שאלה זו עונה הלוגריתמוס; שהרי בעזרת בסיס חיובי a $(\neq 1)$, ובתנאי $x>0$ או $f(x)>0$, יקבל x^x את הצורה $a^{x\log_a x}$, ו $f(x)^{g(x)}$ את הצורה $a^{g(x)\cdot\log_a f(x)}$. המקרים האלה נכנסים אפוא למסגרת של פונקצית־המעריך.

נגמור פרק זה בהערה שהיא עקרונית והיסטורית גם יחד. את כל הפונקציות שהופיעו בסעיף הזה תארנו בעזרת נוסחות. דבר זה איננו כה טבעי כאשר נדמה אולי למי שרגיל בפונקציות האלה. אמנם סימון הפונקציות הרציונליות מובן מעצמו; שהרי רגילים אנו לבטא ולכתוב לפי פעולות החיבור והחיסור, הכפל והחילוק. יתכן להמשיך לאמור: החזקה a^n היא, אם n טבעי, רק ביטוי מקוצר למכפלה $a\cdot a\cdots a$; ועל־סמך הכללת מושג־החזקה מתקבל על הדעת לסמן גם את x^r ו a^x בצורות האלה. ואולם מדוע זכו הפונקציות הטריגונומטריות או הלוגריתמוס בסימון מיוחד? הרי כאן הכנסנו באופן מלאכותי את הסימונים sin, cos, tan, cot, $\log_a$. יש רק הצדקה אחת לכך, והיא: התועלת הרבה שבפונקציות הללו, הן במקצועות מתימטיים שונים הן במדעי־הטבע. משום כך התרגלנו לסמן פונקציות אלו בסימנים מיוחדים, בצורת „נוסחות חשבוניות". את מערכת כל הפונקציות הנ"ל, לרבות את הציקלוֹמֶטריות (עמ' 252) ואת ה„מורכבות" הנוצרות ע"י צירוף הפונקציות הנ"ל (במספר סופי של צעדי צירוף; עמ' 245), מכנים בשם הפונקציות האלמֶנטריות. ביטוי זה הָטבע אפוא מתוך שרירות לבנו, ואין סיבה אחרת לכנותן כך אלא הנוחיות והתועלת.

בתקופת עליתה של המתימטיקה החדשה, במאה הי"ז והי"ח, בעיקר מניוטן[1] וליבניץ עד אוילר והנלוים עליו, הבינו את מושג־הפונקציה כפונקציה מתוארת ע"י נוסחה חשבונית כנ"ל. הסיבה הפסיכולוגית והמעשית לכך היתה, שע"י החשבון הדיפרֶנציאלי, ובמידת־מה גם ע"י החשבון האינטֶגרלי (עיין בפרקים הבאים), אפשר לטפל בפונקציות הללו בהצלחה יוצאת מהכלל, הצלחה אשר הסיגה אחור את השאלות ההגיוניות הקשורות במושג הפונקציה, הנגזרת וכו׳[2]. רק בתחילת המאה הי"ט, בייחוד בהשפעת דיריקלה, עברו החוקרים ממושג מצומצם זה למושג־הפונקציה הכללי שתארנוהו ב §§1 ו 2, כיחס או התאמה כלשהי בין משתנים: פונקציה רצונית. (השוה גם בסוף הפרק י"א.) את המעבר הזה יש לראות כהתקדמות משתי השקפות.

ראשית, נכלול כך גם פונקציות שאין אנו רגילים לבטאן בסימנים מיוחדים. למשל: א) פונקציות מתורת־המספרים, כמו הדוגמות מעמ' 233/4; ב) פונקציות אלגבריות של x, שאי־אפשר לבטאן כמפורשות בעזרת הוצאת שרשים (עיין בעמ' 250); ג) פונקציות המוגדרות ע"י אינטֶגרלים של פונקציות אלמנטריות, במקרה שהאינטגרל איננו פונקציה אלמנטרית (עיין בפרק י"ב, סוף ה §2).

1. I. Newton
2. השוה אמרתו של d'Alembert: צעדו קדימה, והבטחון בוא יבוא!

ואולם חשיבות המושג „פונקציה רצונית" אינה בולטת כל צרכה על־סמך זה; הרי נוכל להכניס סימונים מיוחדים בשביל כל סוגי הפונקציות הנ"ל. העיקר הוא, שעל־פי מושג הפונקציה הרצונית יש לאל ידנו להגדיר פונקציות באופן חפשי לגמרי; למשל, בהגדירנו פונקציה ברווחים שונים לפי נוסחות שונות שאינן תלויות זו בזו. המעבר אל מושג זה של פונקציה, המסתמך על המושג המקיף של התאמה כלשהי, דומה בעקרונו למעבר אל המושג של „מספר ממשי כלשהו" (פרק ששי).

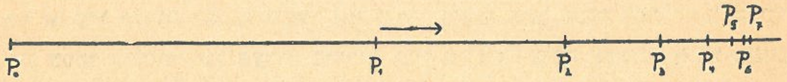
אפשר לטעון טענות הגיוניות בעלות משקל נגד המושג של פונקציה רצונית; אבל חשיבותו ותועלתו בלטו בהתפתחותה החדישה של המתימטיקה עד־כדי־כך שאין סכנה שמא נוכרח לוותר על מושג זה על־סמך בקורת עיונית. אגב: במתימטיקה היוונית לא היתה אמנם למושג־הפונקציה חשיבות כבמתימטיקה החדישה; ואולם מושג־הפונקציה שבידי היוונים היה דומה למושג הפונקציה הרצונית, ולא לפונקציה לפי נוסחה חשבונית.

פרק עשירי: דוגמות לשיטה האינפיניטֶסימָלית.

§1. דוגמות של סדרות וטוּרים אינסופיים.

כפרק זה לא נתן הגדרות מדוייקות ולא נוכיח משפטים; תפקידם של הסעיפים הבאים הוא: להכשיר את הקרקע לקראת המושגים, השיטות והמשפטים שנבארם בפרקים י"א וי"ב. לולא ההכשרה הזאת, יקשה על הקורא להבין למה יש צורך במושגים מופשטים מן הסוג המופיע בפרקים הבאים.

בתקופת הפריחה של הפילוסופיה היוונית עורר צינון[1] מאֱלֶאָה בעיה זו: מארגנים התחרות־ריצה בין הגבור אֲכִלֶס ובין הצב. מכיוון שממילא ירוץ אכילס במהירות, הגדולה בהרבה ממהירות הצב, יהיה מנימוסי דרך־ארץ לתת לצב „קדימה"



ציור 34

לעומת אכילס, כלומר הזכות שריצת הצב תתחיל ממקום הנמצא לפני אכילס בכוון המרוץ. תהי מידת הקדימה ק"מ אחד, ונניח לשם פשטות שמהירותו של אכילס תהיה פי 10 ממהירות הצב. (בציור 34 הנחנו שמהירות אכילס רק פי 2 ממהירות הצב, כדי להתאים את הציור למקום העומד לרשותנו.) נסמן את נקודת־המוצא של אכילס ב P_0 ואת נקודת־המוצא של הצב ב P_1, כך שאורך הקטע $\overline{P_0P_1}$ ישוה לק"מ! קודם כל יצטרך אכילס להגיע אל הנקודה P_1. במשך הזמן הנחוץ לו לשם כך, ירוץ הצב

1. Zenon

מ P_1 בכוון הקבוע מראש ויגיע עד נקודה מסויימת P_2. בהגיע אכילס אל P_1 יראה אפוא את הצב לפניו ב P_2 וירוץ אל נקודה זו והנה במשך הזמן הזה לא ישקוט גם הצב, וישיג נקודה אחרת P_3 בהגיע אכילס אל P_2. בבוא אכילס אל P_3 יגיע הצב לנקודה חדשה P_4, וכן יימשך התהליך בלי סוף. ראינו אפוא, כך מסיק צינון, שלעולם לא ישיג אכילס את הצב; הצב מוכרח לנצח בהתחרות משונה זו.

ע״י מסקנה פָּרדוֹכּסָלית זו, הנמצאת בסתירה גלויה למציאות, לא השתדל בעצם צינון להשיג מטרה מתימטית. שאיפתו ושאיפת חבריו מאסכולת אלאה היתה לחקור את מהות התנועה במרחב, ולהשוות את אפייה הרציף של התנועה אל אפיים השונה כל־כך של המספרים השלמים. לפי מונחי ימינו היינו יכולים לומר: צינון וחבריו היו הראשונים שעסקו לפי שיטה מדעית בבעיה העמוקה של התהום בין קבוצת בודדים (למשל, קבוצת המספרים הטבעיים) ובין קבוצה רציפה (למשל, קבוצת כל הנקודות הנמצאות בקו ישר או בקטע). נבדוק עתה אפייה המתימטי של דוגמת צינון, בהתעלמנו ממטרתו הפיסיקלית!

נניח שמהירות אכילס, וכן זו של הצב, תהיה קבועה, ונסמן ב t את הזמן הנחוץ לאכילס כדי להגיע אל נקודת־המוצא של הצב, היינו אל P_1. מכיון שהרוחק $\overline{P_1P_2}$ שיעברנו הצב, כעבור אכילס את הרוחק $\overline{P_0P_1}$, שווה לעשירית $\overline{P_0P_1}$, יגיע אכילס אל P_2 אחרי הזמן הנוסף $\frac{t}{10}$, ז״א אחרי הזמן $t+\frac{t}{10}$ מראשית ריצתו. ברגע ההוא הגיע הצב אל P_3. כך מתברר שאחרי הצעד הnי של התהליך, ז״א אחרי עבור הזמן הכולל

$$t+\frac{t}{10}+\frac{t}{10^2}+\cdots+\frac{t}{10^{n-1}},$$

יגיע אכילס אל הנקודה P_n, והצב אל P_{n+1}. אין גבול למספר n של צעדים אלו בהמשך התהליך.

שני פרצופים יש לשאלה, אם יוכלו אכילס והצב להשלים אינסוף צעדים ממין זה ע״י תנועה רציפה במשך זמן סופי. פרצוף אחד מכוון לסתירה העקרונית שבין מספר אינסופי של צעדים בודדים ובין תנועה רציפה שבנינה איננו מתמצה בחלקים בודדים. לשאלה זו יש אופי פילוסופי ופיסיקלי כאחד, ולא נטפל בה כאן, כאמור לעיל. השאלה השניה אך ורק מתימטית: האם מצטרפים רווחי־הזמן, שארכיהם $t, \frac{t}{10}, \frac{t}{10^2}, \ldots, \frac{t}{10^n}, \ldots$, ל„סכום" שנוכל לראותו כגודל סופי קבוע, היינו כריוח־זמן סופי T? אם כך, נאמר שאחרי עבור הזמן T מתחילת המרוץ ישיג אכילס את הצב, ומאז והלאה ירוץ מלפניו.

שאלה אחרונה זו, שאליה בלבד נשא את עינינו כאן, דו־פרצופית גם־היא: יש לה צד מושגי וצד מעשי־חשבוני. הצד המושגי מכוון להגדרת סכומם של אינסוף מחוברים. בחלקים הקודמים של ספר זה, ביחוד בפרקים ב׳ ו ד׳ עד ז׳, דברנו על פעולת־החיבור בין מספרים או עצמים מופשטים בכמה מובנים שונים.

הצד השוה שבכל פעולות־החיבור האלה היה, שהגדרנו את הסכום לשני מחוברים, ומזה הגענו בעזרת החוק האסוציאטיבי אל הסכום של מספר סופי כלשהו של מחוברים. ברור כי תהום עמוקה מבדילה בין המושג המוגדר היטב „סכום למספר סופי של מחוברים", ובין מה שנחוץ לנו כאן: „סכום של אינסוף מחוברים". כדי לעבור תהום זו יש צורך לא בחשבונות ובמשפטים כי אם בהגדרה חדשה, המרשה את צירופם של אינסוף מחוברים ע״י פעולה הדומה במקצת לפעולת־החיבור. הגדרה מדוייקת בכוון זה תנתן בפרק הבא (§ 1); הקורא יקבל רמז עליה מתוך הדוגמות הבאות.

ברם, בהניחנו שיש לנו כבר הגדרה מדוייקת, נתגבר על הקושי החשבוני־מעשי בנקל. יהי ערכו של ריוח־הזמן t בדוגמה הקודמת מה שיהיה, הסכום

$$t+\frac{t}{10}+\frac{t}{10^2}+\ldots+\frac{t}{10^n}=t\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right)$$

לא יוכל לגדול בלי קץ, בגדול n; בקחתנו מספר כלשהו n של מחוברים, נקבל סכום הנשאר מתחת לערך (חֶסֶם) קבוע, שאיננו תלוי ב n. הקורא שעסק פעם ב„טורים גיאומטריים", ידע לבחור ב $t+\frac{t}{9}$ כחסם במובן הנ״ל. מאידך מראה חשבון קל שהסכום הנידון מתקרב אל הערך $t+\frac{t}{9}$ בכל דייוק הרצוי לנו, אם רק נקח מספר מספיק של מחוברים. בהתעלמנו מכל הקשיים הקשורים בצד הפילוסופי־פיסיקלי ובצורך להגדרה מתימטית מדוייקת, נקבל אפוא את המסקנה המעשית שהיתה ידועה גם ליוונים: אכילס ישיג את הצב אחרי עבור הזמן $T=t+\frac{t}{9}$.[1]

נעיין עתה בכמה דוגמות דומות המופיעות בבגד מתימטי טהור! נשתמש מעתה במלה טור (אינסופי) בשביל הצירוף של אינסוף איברים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ בצורת סכום כביכול: $a_1+a_2+a_3+\ldots$, כפי שיוגדר בפרק הבא.

1) האיבר הnי של הטור יהיה $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$; הטור יהיה אפוא

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

רואים מיד כי סכומם של n האיברים הראשונים לא יעלה על הערך 2; מאידך נקרב סכום זה אל 2 בכל מידה הרצויה לנו, בהגדילנו את n למדי.

2) יהי $a_n=\frac{1}{n}$, כך שנקבל את הטור „ההַרמוֹני" $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$. כדי לרכוש לנו מושג על מידת גידולו של טור זה, נרשום לפנינו

---

1. לגבי דוגמה מפורסמת זו של צינון, אשר גדולה חשיבותה בדברי־ימי־המדע, השוה למשל את הספר B. Russell: The Principles of Mathematics I (Cambridge 1903) ואת הספר H. Hasse u. H. Scholz: Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik (Charlottenburg 1928; הופיע גם ב *Kantstudien* כרך 33). כדאי לציין גם את הביטוי המופשט והחדיש כביכול, אשר נתן לדוגמה זו אריסטו בפרק הששי של ה„פיסיקה" (φυσικὴ ἀκρόασις).

את סכומם של האיבר השלישי והרביעי: $a_3+a_4=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

" " " 4 האיברים העוקבים ל a_4: $a_5+a_6+a_7+a_8=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

" " " 8 " " ל a_8: $a_9+a_{10}+\dots+a_{16}=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16}$

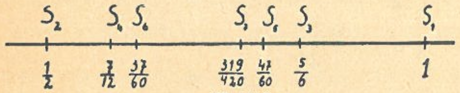
" " " 2^n " " a_{2^n}: $\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}$

והנה כל אחד מן הסכומים האלה גדול מ $\frac{1}{2}$. כי הלוא בשורה הראשונה נמצא, מלבד $\frac{1}{4}$, עוד $\frac{1}{3}$ הגדול מ $\frac{1}{4}$, ולכן הסכום גדול מ $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. כמו־כן בשורה השניה: כל אחד מארבעת המחוברים שבשורה השניה, פרט לאחרון $\frac{1}{8}$, גדול מ $\frac{1}{8}$, ולכן הסכום גדול מ $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. וכן הלאה. בשורה „הכללית" (האחרונה) יש 2^n איברים שכל אחד מהם, פרט לאחרון $\frac{1}{2^{n+1}}$, גדול מאחרון זה, ולכן הסכום גדול מ $\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$. כללו של דבר: בצרפנו, צעד אחרי צעד, את איברי הטור האינסופי כמו שעשינו[1], ובהוסיפנו בראש את שני האיברים 1 ו $\frac{1}{2}$, נקבל צורה חדשה לטור שלפנינו, והיא: $1+\frac{1}{2}+c_1+c_2+c_3+\dots$, שבה כל מחובר c_n גדול מ $\frac{1}{2}$.

אם בדוגמות הקודמות יכולנו לדבר (בלי דייוק בביטוי) על סכום סופי לטור האינסופי, הרי הפעם יש לַיַחֵס לטור האינסופי גם סכום אינסופי — מושג הטעון אמנם ליבון.

3) נשנה את הדוגמה הקודמת, בתתנו לאיברי הטור לסירוגין את הסימנים + ו −; נשים אפוא $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. כך נקבל את הטור: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$.

סכום שני האיברים הראשונים יהיה לפי זה $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, סכום שלושת הראשונים $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, וכו'. נסמן את סכומם של n האיברים הראשונים ע"י s_n. אז כל „הסכומים החלקיים" s_n שאחרי s_3 נמצאים בין s_2 לs_3, היינו בין $\frac{1}{2}$ ל $\frac{5}{6}$. נוכיח זאת בהעזרנו בציור 35, המתאר את ההוכחה בקו־המספרים. לשם נוחיות



ציור 35

נכנה את הנקודות s_n בעלות n זוגי בשם „נקודות שמאליות". את הנקודות s_n בעלות n אי־זוגי בשם „נקודות ימניות". אחרי s_2, ובדרך כלל אחרי כל נקודה שמאלית s_{2m}, עלינו להוסיף (כדי להגיע לסכום העוקב s_3 או s_{2m+1}) את האיבר $a_{2m+1}=(-1)^{2m}\cdot\frac{1}{2m+1}=\frac{1}{2m+1}$, שהוא חיובי; הנקודה

1. אמנם לא ברור עד כאן, אם מותר להשתמש אצל טורים אינסופיים בחוק האסוציאטיבי, ז"א לצרף את איברי הטור קבוצות־קבוצות בעזרת סוגריים (עיין בפרק הבא). על כל פנים ברור, כי אין לטעון (כמו בדוגמה הקודמת) שלעולם לא נעבור על גבול סופי מסויים, בחברנו את n האיברים הראשונים של הטור, יהי n מה שיהיה; אדרבה, ע"י כך נגיע אל סכומים העולים על כל מספר חיובי נתון, בגדול n במידה מספיקה.

s_{2m+1} תימצא אפוא מימין הנקודה השמאלית s_{2m}. לעומת זאת, ברצותנו לעבור מן הנקודה הימנית s_{2m-1} לנקודה העוקבת s_{2m}, עלינו להוסיף את האיבר $a_{2m}=(-1)^{2m-1}\frac{1}{2m}=-\frac{1}{2m}$, היינו מספר שלילי; אחרי כל נקודה ימנית נעבור אפוא לנקודה עוקבת הנמצאת משמאלה. ואולם ערכיהם המוחלטים של המחוברים העוקבים $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2m-1}, -\frac{1}{2m}, \dots$ הולכים וקטנים; קל להוכיח על־סמך זה, בקחתנו ריוח מסויים (s_{2m}, s_{2m-1}), שנשאר בצעד העוקב ובכל הבאים אחריו תמיד בתוך אותו ריוח. ברור אפוא שדוגמה זו דומה לא לדוגמה הקודמת כי אם לדוגמה 1), לפחות בזה כי סכומיו החלקיים של הטור הנידון לא יעלו מעלה מעלה, אלא יימצאו בין שני חסמים קבועים שאפשר להגדירם באופנים שונים.

לא יקשה להראות (עיין במלואים לחלק השלישי) שהדוגמה הזאת דומה לדוגמה 1) גם בזה, כי בחברנו מספר מספיק של איברים a_n נתקרב בכל דייוק רצוי אל ערך קבוע, שאיננו תלוי במספר המחוברים. ואולם ערך קבוע זה יוכל להשתנות, כאשר יוחלף סדרם של איברי הטור — דבר שלא יקרה בדוגמה 1). את הסיבה להבדל זה קל לנחש: שם איברי הטור כולם חיוביים, וכאן יש איברים חיוביים ושליליים. (ברם הבדל זה בלבד אינו מכריע; עיין כ§3 של הפרק י"א.)

4) אולי תמהו אחדים מן הקוראים בשמעם זה עתה על הצורך להוכיח עוד כי הטור מתקרב אל גבול מסויים, נוסף על העובדה הידועה כבר: כי הסכומים החלקיים נמצאים בין חסמים קבועים (כלומר לא יעלו מעל לכל ערך חיובי ולא ירדו למטה מכל ערך שלילי). בקיצור: תכונת הטור, להיות „חסום", אינה גוררת אחריה את התכונה, להתקרב אל ערך מסויים. לכך ישמש דוגמה הטור $1-1+1-1+\dots$, שבשבילו $a_n=(-1)^{n-1}$. מה שנוגע לסכומים החלקיים, הרי $s_n=1$ אם n אי־זוגי, ו $s_n=0$ אם n זוגי. נופק שהסכומים החלקיים נמצאים בין החסמים 0 ו 1 (והחסמים בכלל). בכל זאת אינם מתקרבים אל ערך מסויים אחד; הלוא את כל סכום חלקי יעקבו גם סכומים חלקיים השווים ל 1 וגם כאלה השווים ל 0. באמת היו בדברי ימי המתימטיקה חילוקי־דעות רציניים: היש לַיַחֵס סכום מסויים לטור זה, ובמקרה החיובי — איזה סכום? (אולי $\frac{1}{2}$?)[1] בוודאי התרגל הקורא כבר לדרכה העיונית של המתימטיקה עד כדי הבינו, מהו שרשם של חילוקי־דעות אלו: חוסר הגדרה מדוייקת הקובעת, מה עלינו לראות כ„סכומו של טור אינסופי" (פרק י"א, §3).

5) לקחנו עד כאן כדוגמות טורים אינסופיים. תחתם נוכל לקחת — מהשקפה עקרונית אף ביתר פשטות — סדרות אינסופיות $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$; השוה

1. אוילר המפורסם נימק את טענתו, כי סכום הטור הנ"ל הוא $\frac{1}{2}$, כדלקמן: לטור הגיאומטרי $1+x+x^2+x^3+\dots$ יש הסכום $\frac{1}{1-x}$, אם $|x|<1$. אם ב $\frac{1}{1-x}$ נשים $x=-1$, נקבל $\frac{1}{2}$. לכן $1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\dots=1-1+1-1+\dots$ שווה ל $\frac{1}{2}$. — מן ההגדרות שבפרק הבא יתברר שמסקנה זו אינה מבוססת כל עיקר.

בעמ׳ 29. בשימנו למשל $a_n = \frac{1}{n}$, נקבל את הסדרה $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ ה„שואפת" כביכול אל 0, היינו אל „גבול" סופי. ואולם 0 איננו בעצמו איבר של הסדרה; הרי כל אחד מאיברי הסדרה חיובי. עוד בתחלת המאה הי״ח טען יוחנן ברנולי[1]: „אם יש לסדרה 10 איברים, הרי ישנו במציאות האיבר העשירי; אם יש 100, קיים האיבר המאה, וכו׳; לכן אם יש אינסוף איברים בסדרה, יימצא האיבר האינסופי, וזה צריך להיות קטן־לאינסוף." ואולם כנגד זה כתב לייבניץ: „ממציאותם של כל איברי הסדרה אי־אפשר להסיק שישנו איבר קטן־לאינסוף, אלא רק שישנם איברים, סופיים אמנם, אבל קטנים מכל שבר חיובי — קטן כאשר יהיה — הנתון מראש."

6) הסדרה שבה $a_n = n$, היא סדרת כל המספרים הטבעיים. כל איבר שבה הנהו מספר סופי מסויים, אף כי האיברים יעלו מעל לכל גבול נתון בהמשך הסדרה. ברם יש הבדל בין דוגמה זו לקודמת בזה, כי אין במציאות מספר שאליו יתקרבו איברי הסדרה כאל „גבול" הסדרה.

7) בשימנו $a_n = (-1)^n$, נקבל את הסדרה $(-1, +1, -1, +1, \ldots)$. הצד השוה שבדוגמה זו ובקודמת: גם כאן אין גבול שאליו „שואפת" הסדרה. אעפ״י־כן יש הבדל גדול בין שתי הדוגמות. מכיון שטרם קבענו הגדרות המאפשרות לבטא את ההבדל באופן מדוייק, נסתפק באמרנו: הסדרה שב 6) מוליכה „לקראת מטרה ידועה" (עד למעלה מכל מספר חיובי), ואילו הסדרה 7) מתנודדת, בהפכה את פניה בכל צעד וצעד; אין כאן „גבול" מסויים אלא שתי שאיפות מתחרות.

מן ההשקפה העקרונית אין כמעט הבדל בין טורים אינסופיים וסדרות אינסופיות: כל טור ממציא לנו סדרה אינסופית, היא סדרת סכומיו החלקיים $(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ של הטור. למשל כנגד הטור $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ נקבל את הסדרה $(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots)$. מאידך נוכל לראות כל סדרה $(a_1, a_2, \ldots)$ כסדרת סכומיו החלקיים של טור אינסופי ידוע; הלוא הוא הטור שאיבריו ההפרשים של כל שני איברים עוקבים: $a_n - a_{n-1}$. למשל הסדרה $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ היא סדרת סכומיו החלקיים של הטור $1 + (\frac{1}{2} - 1) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) + \ldots$, ז״א של $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \ldots$.

2§. דוגמות לחשבון הדיפֶרֶנציאלי (חשבון הגזירה).

נביא כאן שתי דוגמות לתהליכו היסודי של החשבון הדיפרנציאלי; אחת מהן לקוחה מן הפיסיקה והשניה מן הגיאומטריה. יתברר שאין זה קשה להבין את תפקידו של החשבון הדיפרנציאלי, בלי כל שאון של הגדרות ונוסחות. אל פיתוחו השיטתי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (3§) נתוודע יותר בפרק י״ב, ואת ההגדרה היסודית ננסח כבר בפרק י״א.

1. Johann Bernoulli

ידוע מן המיכָניקה מושג מהירותה של תנועה מסויימת, למשל של נקודה נעה. מגדירים בדרך־כלל: המהירות היא המנה $\frac{s}{t}$ של הדרך s והזמן t. ביתר דייוק: נסתכל בנקודה הנעה מזמן מסויים t_0 עד לזמן אחר t (מאוחר מ t_0). אם s מידת־הדרך שהנקודה תעבור בין t_0 ו t, נקבעת מהירותה v של התנועה כ $v = \frac{s}{t-t_0}$.[1]

הגדרת־מהירות זו אינה נתקלת בקושי בהיות התנועה „שוות־מהירות" (קצובה); כלומר, אם הנקודה עוברת במשך זמנים שווים דרכים שוות (למשל במשך כל רבע־שעה אותו הרוחק). תנאי זה מתמלא בדייוק מספיק כלפי רכבת הנוסעת בקו ישר ואָפקי בלי להעצר. לא איכפת אז אם נקבע ריוח זמני קטן או גדול, או החל מאיזה רגע נסתכל בתנועה: תמיד נקבל אותה המהירות. אבל לא נוכל להסתפק בהגדרת־המהירות הנ״ל, אם התנועה אינה שוות־מהירות, כבמקרה של רכבת בקו עקום או הררי, או אם תעצר הרכבת במשך התנועה. כדוגמה פשוטה לתנועה שאיננה שוות־מהירות נקח את הנפילה החפשית; היינו תנועתו של גוף „כבד" הנופל ארצה. במקרה זה נוכל אמנם לשמור על הגדרת המהירות דלעיל $v = \frac{s}{t-t_0}$, אבל ערכה תלוי אז בזמנים t_0 ו t; כלומר, ברגע של התחלת התנועה ובאורך זמן התנועה. לכן יש לסמן אז את המהירות ע״י ציונים, המורים על ריוח־הזמן שבחרנו בו: $v = v_{t_0, t}$. למהירות במובן זה נקרא בשם המהירות הממוצעת בין הזמנים t_0 ו t, או בריוח הזמני (t_0, t).

ברור שמושג זה אינו מספיק בדרך־כלל. בשבתנו ברכבת העולה בקו הררי, נאמר „תנועת הרכבת אטית עתה משהיתה לפני זמן־מה"; או בשימנו לב לאבן הנופלת ממגדל גבוה, נאמר „האבן ממהרת לנפול ברגע זה ממה שנפלה לפני 5 שניות". באמרנו כך נתכוון למושג של מהירות, השונה מן המהירות הממוצעת הנ״ל: כוונתנו למושג שנכנה אותו בשם „מהירות מוּמֶנטָנית" או „מהירות־ברגע". איך נגדיר מהירות זו? לפעמים אתה פוגש נסיון־הגדרה כזה: מהירותה של נקודה נעה ברגע t_0 היא המהירות הממוצעת שהיתה לנקודה, אילו המשיכה את דרכה, הָחֵל מ t_0, „בתנועה שוות־מהירות" — או „לולא שינתה הנקודה את מהירותה החל מ t_0". ברור שהגדרה כזו מסתמכת על תהליך הגיוני מעגלי (הגדרת מהירות ע״י מהירות), או על תהליך פיסיקלי שלא תמיד אפשר להגשימו; כל עוד לא נדע את מהירותה־ברגע של אבן הנופלת ארצה בזמן t_0, איך נוכל לקבוע דרכה המדומה של האבן מ t_0 והלאה „אילו שמרה מאז על מהירותה"? לכן, אב נרצה לקבוע את מהירות האבן הנופלת ברגע מסויים, הקושי העיקרי איננו „לקבוע", היינו לחַשב, את ערך המהירות (על־סמך נוסחת הדרך, למשל), אלא הקושי הוא להגדיר מהי מהירות זו שבאנו לקבעה.

1. לא נשים לב ליחידות של מדידת הזמן והדרך; נהוג בפיסיקה למדוד את הזמן בשניות ואת הדרך בס״מ. אנו מתכוונים כאן רק למספרים סתם ולא למספרים „מכֻנים".
האות v לקוחה מן המלה הרומית velocitas = מהירות; בדבר t ו s. השוה בעמ׳ 226.

נחפש אפוא שיטה בה נגדיר את המהירות־ברגע; על־פי ההגדרה יהיה קל גם לקבוע את ערך המהירות. לשם פשטות נניח שהאבן תתחיל לנפול בלי כל מהירות התחלתית; למשל, שתפול מידי בלי דחיפה מצדי. לפי הנסיונות המפורסמים שעשה גליליי [1] בזמנו, ושאפשר לחזור עליהם בעזרת „מכונת־נפילה", התברר כי דרכה s של האבן הנופלת מ $t=0$ (התחלת הנפילה) עד הזמן t מתכַּנתית לריבוע הזמן; ביתר דיוק: $s=\frac{g}{2}t^2$, וכאן מסמן g גודל קבוע, את „התאוצה ע"י כדור־הארץ" (בערך 981 ס"מ לשניה). הבעיה שלפנינו היא: לקבוע את מהירות האבן ברגע t, על־סמך הנוסחה הנ"ל ל s; לשם כך נחוץ לחפש הגדרה למהירות הזאת.

נקח ערך מסויים t (כגון $t=3$, ז"א כעבור 3 שניות מהתחלת הנפילה). בעקבנו אחרי התנועה מ t עד $t+1$ (עד סוף השניה הרביעית), נחשב את המהירות הממוצעת $v_{t,t+1}$ בין הזמנים t ו $t+1$. אין זו מהירות־ברגע; שהרי האבן תמהר לנפול בסוף השניה הנידונה יותר מבראשיתה. סטיה זו של המהירות הממוצעת נוכל להקטין, בעקבנו לא במשך שניה שלמה כי אם במשך חצי־שניה; נקבע אפוא את המהירות הממוצעת בין t ל $t+\frac{1}{2}$: $v_{t,t+\frac{1}{2}}$. גם ערך זה איננו מהירות־ברגע; נקטין עוד את הסטיה בקבענו את המהירויות הממוצעות בין הזמנים t ו $t+\frac{1}{3}$, t ו $t+\frac{1}{4}$, ..., t ו $t+\frac{1}{n}$. אם התנועה מסוג „נורמלי", נוכל לקוות שערך המהירות הממוצעת בין הזמנים t ו $t+\frac{1}{n}$ שונה מעט מאד מן ה„מהירות־ברגע" שאליה נשואות עינינו, אם רק n גדול למדי.

עסקנו כאן ברווחי־זמן המתחילים ברגע t ונמשכים עד זמנים מאוחרים מ t. ואולם לגבי המהירות ברגע t עצמו אין סיבה לבַכר את הזמנים שאחרי t על הזמנים שלפני t. לכן נחשב גם את המהירויות הממוצעות המתאימות לרווחי־הזמן $(t-1,t)$, $\left(t-\frac{1}{2},t\right)$, $\left(t-\frac{1}{3},t\right)$ וכו'. גם אז מתקבל על הדעת, שערכים אלו הולכים ומתקרבים אל ערך מסויים, אשר יבטא מה שנתאר לנו כ„מהירות ברגע t".

לכל תהליך־מחשבה זה קבענו לעיל את ההגבלה „אם התנועה מסוג נורמלי". נחיצות התנאי הזה מתבררת, בקחתנו כדוגמה תנועת כדור־ביליארד, ובסמננו ב t את הרגע שבו יתנגש עם כדור אחר. ערכי המהירות הממוצעת, המתאימים לרווחי הזמן $(t-1,t)$, $\left(t-\frac{1}{2},t\right)$, $\left(t-\frac{1}{3},t\right)$, ..., אחרים כאן מבמקרה של נפילה חפשית, אבל גם הם שואפים אל ערך מסויים. עם זאת לא נוכל לכנות ערך מסויים זה בשם „המהירות ברגע זה". זה נופק כבר מן העובדה שערך זה שונה בדרך־כלל מן הגבול שאליו שואפות המהירויות הממוצעות המתאימות לרווחים $(t,t+1)$, $\left(t,t+\frac{1}{2}\right)$, $\left(t,t+\frac{1}{3}\right)$ וכו': והרי גבול אחרון זה זכאי לא פחות להחשב מהירות ברגע t. הסיבה למצב זה גלויה למדי: ע"י ההתנגשות תשתנה פתאום מהירותו, וגם כוונו, של הכדור, ובהתחשבנו באי־רציפותו של

---

1. G. Galilei

שינוי זה נאָלץ ליחֵס לכדור את המהירות 0 ברגע ההתנגשות — או לא ליחס לו מהירות כל עיקר ברגע זה.

דוגמה אחרת לצד „אי־נורמלי" של תנועה יוכל לשמש מצב האבן הנופלת ברגע t שבו תגיע ארצה. במקרה זה נקבל כגבול המהירויות הממוצעות, המתאימות ל $(t-1,t)$, $\left(t-\frac{1}{2},t\right)$, ..., ערך חיובי מסויים; ואילו המהירויות הממוצעות, המתאימות לרווחים $(t,t+1)$, $\left(t,t+\frac{1}{2}\right)$, ..., כולן שוות ל 0, מכיון שהאבן לא תמשיך לנפול אחרי הַגיעה ארצה. לכן היינו יכולים להגדיר את המהירות ברגע t כ 0, באותה הזכות שבה נגדירנה כערך החיובי הנידון.

עתה גמרנו להכין את החומר הנחוץ לנו כדי להגדיר את המהירות של תנועה נתונה ברגע t, וזה ניסוחה:

נקבע את ערכי המהירות הממוצעת של התנועה: v_1, v_2, ..., v_n, ..., המתאימים לרווחי־הזמן מ t עד $t+1$, מ t עד $t+\frac{1}{2}$, ..., מ t עד $t+\frac{1}{n}$, ... כמו־כן יהיו $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., $\bar{v}_n$, ... ערכי המהירות הממוצעת של אותה התנועה, המתאימים לרווחים מ $t-1$ עד t, מ $t-\frac{1}{2}$ עד t, ..., מ $t-\frac{1}{n}$ עד t, ...[1] יוכל להיות שישנו במציאות ערך (מספר ממשי) v, כך שגם הערכים v_n גם הערכים $\bar{v}_n$ ישאפו אל v. ביתר דיוק: יוכל להיות שישנו מספר ממשי v (במקרה שלפנינו $v \geqq 0$), כך שגם $|v-v_n|$ גם $|v-\bar{v}_n|$ יקטנו „ממידת־דיוק" שנוכל לבחור בה כפי רצוננו, בגדול הציון n עד מעל למספר טבעי גדול למדי. אם קיים ערך v כנ"ל, ייקרא v „מהירות התנועה ברגע t" (לגבי הסדרה $\left(\pm\frac{1}{n}\right)$).

נקרב להסתכלותנו הגדרה עיונית זו, בהשתמשנו בה כדי לקבוע (לחַשב) את המהירות. נקח כדוגמה את התנועה דלעיל: הנפילה החפשית לפי החוק $s=\frac{1}{2}gt^2$. נקח t כלשהו בין התחלת הנפילה לסופה, פרט לשתי הקצוות. לפי הגדרת המהירות הממוצעת כמנה של הדרך וריוח־הזמן, מתקבלים בשביל רווחי־הזמן[2] מ t עד $t+1$, מ t עד $t+\frac{1}{2}$, ..., מ t עד $t+\frac{1}{n}$, ... הערכים הבאים למהירות הממוצעת:

$$v_1=\frac{s(t+1)-s(t)}{(t+1)-t}\,,\ v_2=\frac{s(t+\frac{1}{2})-s(t)}{(t+\frac{1}{2})-t}\,,\ \ldots\,,\ v_n=\frac{s(t+\frac{1}{n})-s(t)}{(t+\frac{1}{n})-t}\,,\ \ldots.$$

(ב $s(t)$, $s(t+1)$ וכו' סימַנו כאן את דרך הגוף הנופל מתחלת התנועה עד הזמן t, $t+1$, וכו'.) בטרם נערוך חשבון מתאים גם כנגד רווחי־הזמן שלפני t (הנגמרים

---

1. אין צורך לקחת כרווחי־הזמן דוקא את הרווחים הנ"ל, ובפרט אין צורך לקבוע שריוח־הזמן המתאים ל v_n ישוה לריוח־הזמן המתאים ל $\bar{v}_n$; רק לשם נוחיות בטאנו את התנאי כנ"ל. השוה בעמ' 270.

2. אם הרגע t נמצא פחות משניה אחת לפני סוף התנועה (ז"א לפני הגיע הגוף ארצה), עלינו לוותר על המהירות הממוצעת v_1, וכמו־כן אולי על אחדים מן הערכים v_2, v_3, ... המצב דומה אצל $\bar{v}_1$ וכו', אם t נמצא זמן קצר אחרי התחלת התנועה.

ב t), נקיל מעלינו את החשבון, בסמננו את תוספת־הזמן הקובעת את הריוח הזמני (ז"א את ערכי־התוספת $1, +\frac{1}{2}, \ldots, +\frac{1}{n}, \ldots$) תמיד בסימן h; h יסמן אפוא גודל משתנה. אין צורך לדרוש שערכי h יהיו דווקא הערכים הבודדים הנ"ל; נרשה ביתר כלליות כי h ישתנה בין כל הערכים החיוביים שמתחת לערך מסויים, למשל מתחת ל 1; ז"א $0<h<1$.

ועתה מיותר לדבר לחוד על רווחי־זמן שסופם ב t. לשם צירופם די להרשות שהמשתנה h יעבור גם על ערכים שליליים מתאימים, למשל על ערכי הריוח $-1<h<0$. [1] לפי זה עלינו להסתכל בריוח $(t, t+h)$; h מסמן ערך חיובי או שלילי „מתאים", כלומר: קטן למדי, רק לא את הערך 0. המהירות הממוצעת $v_{t,t+h}$ שכנגד התנועה בין t ו $t+h$ שווה ל $\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{s(t+h)-s(t)}{(t+h)-t}$. בתתנו כאן ל h, למשל, את הערכים $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$, נקבל $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

לפי הגדרת המהירות־ברגע עלינו לבדוק, אם ישנו ערך v שאליו ישאפו הערכים $v_{t,t+h}$, כאשר ערכי $|h|$ הולכים וקטנים לקראת 0 [2]. בהכניסנו את הפונקציה $s=\frac{g}{2}t^2$ המתאימה לנפילה החפשית (עמ' 266), נקבל:

$$v_{t,t+h} = \frac{\frac{g}{2}(t+h)^2 - \frac{g}{2}t^2}{h} = \frac{g}{2}\,\frac{t^2+2th+h^2-t^2}{h} = gt+\frac{g}{2}h.$$

ואמנם, בשאוף h אל 0 (דרך ערכים חיוביים או שליליים), ישאף $\frac{g}{2}h$ אל 0, והסכום $gt+\frac{g}{2}h$ אל gt [3]. ביתר דיוק: ברצותנו שההפרש המוחלט בין $v_{t,t+h}$ ובין הקבוע gt (t נתון) יקטן במידה ידועה — למשל: יקטן ממספר חיובי ε שנוכל לבחור בו כרצוננו — נשיג זאת בהגבילנו את התוספת h בין גבולות הצרים במידה מספיקה [4]. לכן מתמלא לגבי התנועה שלפנינו התנאי שבטאנוהו בהגדרת המהירות, וישנה אפוא מהירות בכל רגע של התנועה, פרט לרגע שבסופה [5].

---

1. אם h שלילי, נכתוב $(t+h, t)$, או נזכור שהריוח $(t, t+h)$ משתרע מימין שמאלה (ממספר גדול למספר קטן ממנו).

2. מציאותו של מספר v לפי הגדרה זו נותנת יותר ממה שדרשנו בהגדרתנו דלעיל; הלוא כאן הסתמכנו לא רק על שתי סדרות של ערכי $t+h$, כי אם על כל הערכים מסוג ידוע. לא נוכל לבאר כאן את היחס בין שתי ההגדרות.

3. אולי ישאל הקורא: למה לנו הרפתקאות אלו כדי לעמוד על התנהגות הביטוי $gt+\frac{g}{2}h$, אם h ישאף ל 0? נשים $h=0$ ונקבל את המטרה הדרושה שהמהירות gt! ואולם שיטה זו, לקחת את הערך 0 בעצמו, לא רק שאיננה נכונה אלא אין לה מובן כל עיקר, הן מהשקפה פיסיקלית הן מהשקפה מתימטית. מהראשונה: הרי יצאנו מן המהירות הממוצעת, המתאימה לריוח זמני ידוע; אם $h=0$, אין כאן ריוח $(t, t+h)$ כי אם רק הרגע t בעצמו. הוא הדין מהשקפה מתימטית: אם $h=0$, תעבור הנוסחה דלעיל לצורה $\frac{0}{0} = \frac{\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t^2}{0} = v_{t,t+h}$, והרי ידוע שלמנה בעלת המכנה 0 אין כל משמעות.

4. במקרה זה נשיג את מטרתנו, בהגבילנו את ערכי h לפי $0<|h|<\frac{2\varepsilon}{g}$.

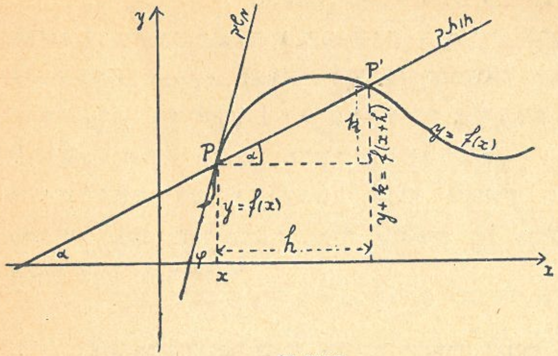
5. אפשר לשנות את ההגדרה כך, שגם לסוף התנועה תתאים מהירות מסויימת.

והנה השגנו ע"י החשבון הקל שלפנינו אף יותר ממה ששמנו לנו למטרה. מצאנו לא רק כי ישנה במציאות המהירות ברגע t, אלא קבענו גם את ערכה, והוא: $v=gt$. הגענו אפוא אל המסקנה: לתנועה הקבועה ע"י נוסחת־הדרך $s=\frac{g}{2}t^2$ יש בכל רגע t, הנמצא בין תחלת התנועה לסופה, מהירות מסויימת v, וערכה $v=gt$. אל מסקנה זו הגענו בבדקנו מנות־הפרשים ידועות, שבהן מתחלק הפרש־דרכים בהפרש־זמנים מתאים; מצאנו שכל המנות האלה שואפות אל גבול מסויים, הוא gt, בקטון הפרש־הזמן יותר ויותר.

נציג עתה דוגמה שניה, השונה לכאורה לגמרי מן הקודמת. יתברר שעצם התהליך המתימטי שבדוגמה הבאה, היא בעית־המַשיק, מזדהה עם זה שבדוגמה הקודמת. שתי הבעיות, של המהירות ושל המשיק, שימשו בעיות יסודיות בתקופת יצירתו של החשבון הדיפרנציאלי.

נסתכל בקו העקום, המתאים לפונקציה חד־ערכית נתונה $y=f(x)$, שהוגדרה בריוח $a\leq x\leq b$. מטרתנו לקבוע את משיק העקום בנקודה שכנגד ערך x בפנים הריוח, למשל בנקודה P של העקום. כדי לפתור את הבעיה, עלינו לברר שני מונחים שהשתמשנו בהם: „לקבוע" ו„משיק". קל לברר את המונח הראשון: הלוא המשיק הוא קו ישר, ונקודה אחת שבישר ידועה לנו, היא הנקודה P. נוכל לקבוע קו ישר ע"י שתים מנקודותיו, או ע"י אחת מנקודותיו וע"י כוונו. נאחז בשיטה השניה, שלפיה מוטל עלינו למצוא עוד את כוון המשיק הנידון. כוון זה נוכל לקבוע בעזרת הזוית שבין הכוון „הנורמלי" של ציר ה x (עמ' 147 ו 232) וכוון המשיק. לפי זה, „קבוע" את המשיק ר"ל: קבוע את הזוית φ בין הכוון הנורמלי וכוון המשיק. (עיין בציור 36, עמ' 270.)

קשה יותר להגדיר את המונח „משיק" בעצמו, אעפ"י שעל־סמך ההסתכלות לכאורה מונח זה ברור. נברר קודם את המושג חוֹתֵך, הוא ישר החותך את העקום; למשל, העובר דרך שתים מנקודות העקום, P ו P'. יש המתימרים להגדיר את המשיק בנקודה P על־סמך החותך כדלקמן: בהתלכד הנקודה השניה עם הראשונה, ז"א במקרה $P'=P$, נקבל את המשיק ב P, תחת החותך העובר את שתי הנקודות. ברור שהגדרה זו מחוסרת מובן. כי אמנם החותך דרך P ו P' מוגדר, מכיון ששתי נקודות קובעות קו ישר אחד ויחיד העובר דרכן. אבל בהתלכד P' עם P, הרי לפנינו נקודה יחידה הקובעת לא ישר אחד כי אם אינסוף ישרים העוברים דרך הנקודה. „הגדרה" אחרת כביכול אומרת: המשיק הוא המקרה המיוחד של חותך דרך הנקודות P ו P' של העקום, אם P' „שכנה לאינסוף" ל P. אבל מה זאת אומרת „שכנה לאינסוף"? או שהנקודות P ו P' שונות זו מזו, הרי יש ביניהן רוחק מסויים ואינן שכנות לאינסוף! מאידך, אם אין רוחק סופי ביניהן, הרוחק צריך להיות 0, וחזרנו אל המקרה הקודם המופרך כבר!



ציור 36

באמת קשה במקצת לתת הגדרה מדוייקת של המשיק ע״י תנאי סטָטי (תנאי של „ישנו״). ולכן עדיף שנשים את פנינו אל תנאי דינָמי (תנאי של „מתהווה״). נבחר, מלבד הנקודה הקבועה P, בנקודה שניה P' של העקום, הנמצאת באחד מחצאי העקום שמשני עברי הנקודה P. נקרב את הנקודה P'—בהשארה בעקום—יותר ויותר אל P, ואולם בלי לכדה עם P. יוכל להיות שבתהליך זה ישאף כוונו של החותך PP' אל כוון מסויים, ושכוון זה אינו תלוי בכך אם תתקרב P' אל P מזה או מזה. אם ישנו כוון מסויים כזה, נכנה את הישר בעל אותו כוון, העובר דרך הנקודה P, בשם משיק העקום בנקודה P. (השוה הגדרת המהירות בעמ׳ 267.)

עפ״י הגדרה זו למשיק נוכל לגשת אל חשבון כוונו של משיק העקום $y=f(x)$ בנקודה P. נקח נקודה שניה P' בעקום ונסמן את הפסוק של P ב x, של P' ב $x+h$; לפי זה $h>0$ או $h<0$, אבל $h\neq 0$. כמו־כן נסמן את הפוסק של P ב y, של P' ב $y+k$; לאמור: $y=f(x)$ ו $y+k=f(x+h)$. הזוית α שבין החותך PP' ובין ציר ה x (ציור 36) ממלאה את היחס $\tan\alpha=\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. כדי לעבור מן החותך PP' אל המשיק ב P, עלינו להשאיף $|h|$ (ולכן גם h) אל 0, בהתאם למה שהוגדר לעיל. לכן, אם ישנו גבול מסויים למנה $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ בשאוף h אל 0, כך שערכי המנה — אצל ערכי h (חיוביים או שליליים) בעלי ערך מוחלט קטן למדי — יסטו מן הגבול מעט כרצוננו, הרי הגבול קובע את ה tan לזוית φ שכנגד כוון המשיק ב P[1]. ביתר דיוק: הישר העובר דרך P והיוצר עם כוון ה x החיובי את הזוית φ[2], הוא משיק העקום $y=f(x)$ בנקודה P.

הקורא מרגיש בוודאי שתהליך זה שווה באפייו המתימטי לתהליך שבו הגדרנו את המהירות ברגע מסויים. הצד השווה שבהם: יצרנו את מנת־ההפרשים לערכי הפונקציה ולערכי הגורם המתאימים, ושמנו לב לגבול המנה בשאוף ההפרש

1. אפשר להפוך יחס זה: כוון המשיק קובע את הגבול הנ״ל — פרט למקרה שבו המשיק מקביל לציר ה y, שהרי אז φ זוית ישרה, ואין גבול למנה (בהתאם לכך כי $\tan\frac{\pi}{2}$ איננו מוגדר).

2. זוית זו נבין, כמו תמיד, לפי המגמה החיובית (עמ׳ 147). למשל: אם ציר ה x החיובי יועבר ע״י סיבוב של 135^0 לפי המגמה החיובית אל המשיק, הרי $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ (או $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, בשימנו לב להמשך המשיק למטה). באמת $\tan\frac{3\pi}{4}=\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$, בהתאם למחזוריות ה tan (עמ׳ 252).

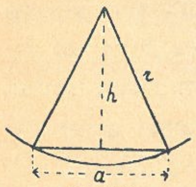
השני אל 0. קבוע לחוק־תנועה נתון את המהירות ברגע מסויים, וקבוע לפונקציה חד־ערכית, המגדירה קו עקום, את כוון המשיק לעקום בנקודה בעלת פסוק מסויים — היינו הך מהשקפה מתימטית. פעולה משותפת זו נקראת גזירה או דיפֶרֶנציאציה (של חוק־התנועה או של הפונקציה).

נבאר עוד את הסימון המקובל לתהליך הגזירה! בצאתנו מ $y=f(x)$ ובבנותנו את מנת־ההפרשים $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$, נסמן ב Δx את המכנה h, שהוא ההפרש בין שני ערכי x (Δ כרמז למלה דיפֶרֶנציה = הפרש). במונה נמצא ההפרש בין שני ערכיו המתאימים של $y=f(x)$, ולכן יסומן המונה ב $\Delta f(x)$ או Δy. לפי זה המנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ היא מנת־ההפרשים הנ״ל, שבה קבוע כוון הישר החותך את העקום $y=f(x)$ בנקודות שכנגד x ו $x+\Delta x$. אמנם הגבול שהתכוונו אליו — הקובע את כוון המשיק, או את המהירות — איננו המנה הנ״ל, כי אם הערך שאליו שואפת המנה (אם ישנו ערך כזה). בכל זאת כותבים גם ערך זה בצורה החיצונית כאילו של מנה, רק שמחליפים את הסימן היווני Δ בסימן הרומי d, כדי להבליט את המעבר אל הגבול. כך יוצא הסימן $\frac{dy}{dx}$ לערך הגבול; הסימן מתבטא: dy לפי dx. הצדקת הסימון המיוחד הזה היא התועלת שבו, ענין שעליו נייחד את הדיבור בפרק י״ב.

§3. דוגמה מן החשבון האינטֶגרלי (חשבון הסכימה).

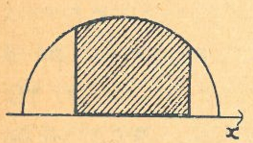
בסעיף הזה נסתכל בדוגמה מסוג אחר לגמרי. רק בסוף יתברר שישנו קשר אמיץ בין הדוגמות שב §2 ובין הדוגמה הבאה.

נצא מבעיה הידועה מבית־הספר: חישוב שטחו של עיגול שמחוגו שווה ל r; וקודם כל: הגדרת השטח הזה. רגילים ללכת בדרך זו: במשכנו מחוגים ממרכז העיגול, ניצור גזרות רבות (סֶקְטוֹרים). כל גיזרה מתקרבת כביכול לצורת משולש, במידה שבה נקטין את הזוית המרכזית שבין המחוגים הקובעים את הגיזרה (ציור 37); ביתר דיוק: בהחליפנו את הקשת המעגלית הקטנה, המשמשת בסיס הגיזרה, במיתר המקשר את קצות הקשת, נחליף גיזרה במשולש. אם a אורך המיתר, שונה שטח המשולש באופן יחסי מעט מאד מ $\frac{ar}{2}$, מכיון שגובה המשולש h מתקרב אל r כהתקרב הזוית המרכזית אל 0. בשביל סכום שטחיהם של כל המשולשים שכנגד הגזרות כולן, נקבל אפוא מכפלה שבה הגורם האחד $\frac{r}{2}$; ואילו הגורם השני שוה לסכום ארכיהם של כל המיתרים, סכום השונה מעט מאד מסכום כל הקשתות המתאימות, ז״א מהיקף המעגל. נניח שכבר ידוע לנו — למשל מתוך השואה אל היקף מצולע משוכלל בעל צלעות רבות, המוקף במעגל — שהיקף המעגל בעל המחוג r שווה ל $2r\pi$. אז נוכל להסיק: בהקטיננו במידה מספיקה את הזויות המרכזיות הקובעות את הגזרות, וע״י זה גם את המיתרים והקשתות המתאימות, נקרב את סכום בסיסיהם של כל המשולשים אל היקף המעגל; כך נגיע לערך $\frac{r}{2}\cdot 2r\pi=r^2\pi$ כמידת שטחו של העיגול.



ציור 37

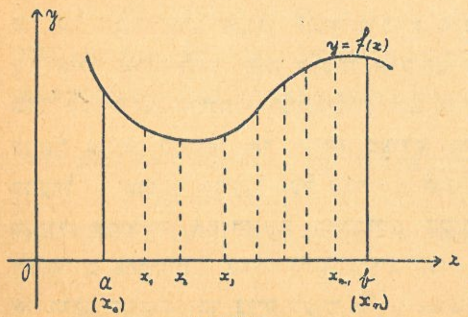
מלבד כמה נקודות של חוסר־דיוק בתיאור זה, ומלבד חוסר־ההגיוניות שבהעמדת שטח העיגול על היקף המעגל, הנה לקוי התיאור שלפנינו גם בגישתו הכללית. השיטה בנויה לפי תכונותיו המיוחדות של המעגל; ברצותנו לטפל בשאלה המתאימה כלפי אליפסה (הקרובה כל־כך למעגל!) נצטרך להמציא שיטה אחרת. לכן יהיה תפקידנו כאן: להגדיר ולקבוע שטחו של תחום, המוגבל כולו או בחלקו ע״י עקומים, ולא רק ע״י ישרים; שהרי במקרה האחרון נחלק את התחום למספר סופי של משולשים, ושטחיהם אנו יודעים להגדיר בדרך אלמנטרית. כדי למלא את התפקיד הנ״ל, נחפש שיטה שבעזרתה נצליח בכל המקרים, ולא שיטה לחוד לגבי כל עקום.



ציור 38

כדי להציג את הבעיה בצורה נוחה, נתאר לנו (ציור 38) חצי־עיגול, הנמצא למשל מעל ציר ה x, כך שהקוטר מופיע כקטע בציר ה x עצמו. לא נשאל לשטח חצי־העיגול כולו אלא, בהכלילנו את הבעיה, לשטחו של תחום, המוגבל ע״י חלק מחצי־המעגל (קשת), ע״י האנכים היורדים מקצות הקשת עד ציר ה x וע״י קטע־הביניים שבציר ה x. גבולות התחום, פרט לקשת הנ״ל, הם אפוא ישרים. בוותרנו על כך שהחלק העקום בין גבולות התחום יהיה דוקא קשת של מעגל, ננסח את הבעיה באופן כללי!

תהי נתונה פונקציה חד־ערכית $y=f(x)$ המוגדרת (לפחות) בריוח הסגור $\{a,b\}$. נניח לשם פשטות כי $a<b$ (כלומר שנעבור על הריוח משמאל ימינה) וכי $f(x)\geqq 0$ ב $\{a,b\}$. בנקודות $x=a$ ו $x=b$ של ציר ה x נעלה אנכים עד חיתוכם בעקום $y=f(x)$. כך יווצר (ציור 39) תחום $\mathfrak{A}$ המוגבל ע״י חלק של ציר ה x (בין $x=a$ ו $x=b$), ע״י שני האנכים הנ״ל וע״י החלק המתאים של העקום $y=f(x)$. (האנכים, או אחד מהם, יוכל להצטמצם לנקודה, כאשר מראה הדוגמה של חצי־עיגול, ציור 38.) נבנה שיטה כדי להגדיר את שטח התחום הזה! אחרי הצליחנו בזאת נוכל בדרך־כלל להגדיר שטחו של תחום המוגבל ע״י מספר סופי של קוים ישרים ועקומים, בחלקנו את התחום למספר סופי של תחומים חלקיים; למשל במקרה של עיגול או אליפסה שלמה: בחלקנו את התחום לשני חצאים.



ציור 39

אם ננסה לקבוע את שטח התחום $\mathfrak{A}$ הנ״ל, הרינו יוצאים מן ההנחה שישנו בכלל שטח לתחום. לא נתווכח על־כך הטבעית ההנחה הזאת אם לאו. הנבנתה על משפט קדום שאפשר לנמקו אולי ע״י ההסתכלות (אם לא ע״י ההגיון). בוודאי לא נוכל להוכיח מראש את מציאות השטח, כל עוד לא הוגד

מושג השטח לגבי תחום המוגבל בחלקו ע״י עקומים, אלא רק לגבי מַלבן (כמכפלת ארכיהן של שתי צלעות המלבן; הגדרה שממנה קל לעבור אל שטחו של משולש ושל כל תחום המוגבל אך ע״י ישרים).

כדי להגיע אל ההגדרה הדרושה, נחלק את הריוח $\{a,b\}$ בציר ה x (ציור 39) ל n רווחים חלקיים $\{a,x_1\}$, $\{x_1,x_2\}$, ..., $\{x_{n-1},b\}$; בסמננו a גם ב x_0 ו b ב x_n, נכתוב את הריוח הראשון והאחרון גם כ $\{x_0,x_1\}$ ו $\{x_{n-1},x_n\}$, ולכן בדרך־כלל $\{x_{k-1},x_k\}$, אם $k=1,2,\ldots,n$. בכל אחת מהנקודות $x_1,\ldots,x_{n-1}$ בציר ה x נעלה אנך, עד חתכו את העקום $y=f(x)$, ונקבל כך n עמודים בעלי אותו האופי (בנוגע לגבולות) כמו $\mathfrak{A}$ בעצמו, רק שבסיסי העמודים צרים יותר. העמודים יחד מציגים את התחום $\mathfrak{A}$; ואם בכלל נגדיר שטח לגבי כל תחום בעל האופי הנידון, הרי טבעי לקבוע כי סכום שטחי העמודים ישוה לשטח התחום $\mathfrak{A}$ — כמו שטבעי לראות שטחו של מצולע כסכום שטחי המשולשים שלהם נחלק את המצולע.

ובכן, מה הרווחנו בחלקנו כך את $\mathfrak{A}$, אחרי שלכל אחד מהחלקים יש אותו האופי כמו ל $\mathfrak{A}$? היתרון הוא בזה שנגיע לידי הגדרה טבעית, בהקטיננו בלי קץ את בסיסי העמודים; כלומר, בחלקנו את הריוח הנתון $\{a,b\}$ ל n חלקים ובדאגנו לכך, ש n יגדל, ושהגדול בין הרווחים $\{x_{k-1},x_k\}$ יקטן במידה מספיקה[1]. לפי חלוקה מסוג זה ישוה סכום רחביהם של הרווחים החלקיים לרוחב הריוח $\{a,b\}$, ז״א ל $b-a$. הדרך הפשוטה למילוי התנאים הנ״ל היא: לחלק את הריוח $\{a,b\}$ ל n חלקים שווים, ולהגדיל את n; אז יקטנו ממילא החלקים. כך נעשה להלן.

הואיל והנחנו כי $f(x)\geqq 0$ ב $\{a,b\}$, יימצאו כל העמודים מעל לציר ה x[2]. כל עמוד בעל הרוחב $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ יוגבל אפוא מלמעלה ע״י חלק של העקום $y=f(x)$. נניח הלאה שבין כל ערכי $f(x)$ שבריוח $\{x_{k-1},x_k\}$ ישנו ערך קטן ביותר (שֵׁפל) $\underline{f}_k$[3], וערך גדול ביותר (שיא) $\bar{f}_k$ (השוה בציור 40, עמ׳ 274). הנחה זו מתקבלת בוודאי על הדעת; ואולם שתי הדוגמות שבסוף הסעיף הבא (עמ׳ 282) מראות שלא תמיד מתמלאת ההנחה[4].

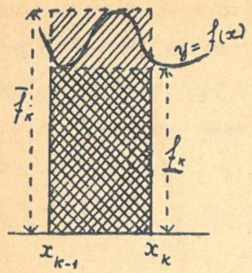
---

1. אולי יחשוב הקורא: הרי תנאי שני זה הוא מסקנה מן התנאי הראשון, הקובע כי n יגדל. ברם אין הדבר כך! אם למשל x_1 האמצע בין a ל b, x_2 האמצע בין x_1 ל b, x_3 האמצע בין x_2 ל b וכו׳, x_n האמצע בין x_{n-1} ל b, יגדל מספר החלקים כגדול n; אבל הגדול בין הרווחים נשאר בעל הרוחב הקבוע $\frac{b-a}{2}$.

2. פרט לעמודים שאין להם גובה כל עיקר, בהתלכדם עם הריוח הנידון בציר ה x בעצמו; זה יקרה אם $f(x)=0$ בכל הריוח החלקי.

3. אין זאת אומרת כי למשל הערך המינימלי קטן דוקא מכל שאר ערכי $f(x)$ שבאותו הריוח, אלא רק שלא יימצא שם ערך קטן ממנו; את הערך המינימלי תוכל הפונקציה לקבל בנקודות שונות.

4. ואמנם במקרים ידועים אין במציאות שיא, אבל — אם $f(x)$ „חסומה" — על־כל־פנים „חֶסם עליון" $\bar{f}$, וקיים $f(x)<\bar{f}$ בריוח הנידון (עיין בעמ׳ 274 ו 284); אז יש להשתמש בחסם זה. וכן לגבי שפל וחסם „תחתון".



ציור 40

נצייר עתה כנגד כל עמוד את שני המלבנים, שנקבלם בצרפנו לאותו הבסיס $\{x_{k-1}, x_k\}$ פעם את הגובה $\underline{f_k}$ ופעם את הגובה $\bar{f}_k$ (עיין בציור 40). בהסתמכנו באופן טבעי מאד על ההסתכלות, נקבע לפי הנ״ל: שטח העמוד הנידון נמצא בין שטחי שני המלבנים האלה, לאמור: בין $(x_k - x_{k-1}) \cdot \underline{f_k}$ ו $(x_k - x_{k-1}) \cdot \bar{f}_k$, לרבות את הגבולות. בעשותנו כך לגבי כל עמוד, ובזכרנו ששטחו F של התחום $\mathfrak{A}$ כולו שוה לסכום שטחי העמודים, נקבל את המסקנה: השטח F שוה או גדול מן הסכום $\underline{F}$ של שטחי כל המלבנים הקטנים בעלי הגבָהים $\underline{f_k}$, ושוה או קטן מן הסכום $\bar{F}$ של שטחי כל המלבנים הגדולים בעלי הגבהים $\bar{f}_k$; ז״א:

$$\underline{F} = (x_1 - x_0)\underline{f_1} + \dots + (x_n - x_{n-1})\underline{f_n} \leq F \leq (x_1 - x_0)\bar{f}_1 + \dots +$$
$$+ (x_n - x_{n-1})\bar{f}_n = \bar{F}.$$

שיטה זו, הקובעת „חֶסם מלרע" „וחסם מלעיל" לשטח המבוקש, דומה בעקרונה לשיטה הידועה, הקובעת את שטח העיגול ע״י השואה לשטחי מצולעים משוכללים המוקפים במעגל והמקיפים אותו.

אמנם טרם הגדרנו שטחו F של התחום $\mathfrak{A}$, אלא רק קבענו חסמים מלרע ומלעיל. באמת אי־אפשר להגיע אל הגדרת השטח בלי הטלת תנאים על הפונקציה $y = f(x)$. נציין לשם דוגמה שני מקרים שבהם תתקל ההגדרה בקשיים. אם נתבונן אל $y = \frac{1}{x}$ ב $\{0,1\}$[1], הרי בכל חלוקה לרווחים חלקיים אין שיא (ואף אין חסם מלעיל [עמ׳ 284]) לערכי הפונקציה בריוח החלקי הראשון (השמאלי), הואיל וערכיה שם עולים מעל לכל מספר; לכן שיטתנו בטלה במקרה זה. דוגמה מסוג אחר נקבל, בהגדירנו $f(x)$ בריוח $\{0,1\}$ כך: $f(x) = 1$ אצל כל x רציונלי, $f(x) = 2$ אצל כל x אירציונלי. במקרה זה קיימים אמנם בכל ריוח חלקי $\{x_{k-1}, x_k\}$ השפל והשיא: $\underline{f_k} = 1$, $\bar{f}_k = 2$. ואולם דוקא יחסים אלו מבטלים כל תקוה לקרב את $\underline{f_k}$ אל $\bar{f}_k$ (עיין לקמן) ע״י הגדלת n והקטנת רחבי הרווחים.

נוציא מן הכלל מקרים כאלה ע״י הדרישות הבאות:

א) לפונקציה $f(x)$ יש חסם מלעיל[2] M בריוח $\{a,b\}$ כולו, ולכן גם בכל אחד מן הרווחים החלקיים; כלומר, $f(x)$ „חסומה" (מלעיל): $f(x) \leq M$.

ב) נוסף על כך: ההפרש המַכסימלי בין ערכי $f(x)$ בכל ריוח חלקי הולך ושואף אל 0 יחד עם רוחב הריוח; כלומר, ההפרשים $\bar{f}_k - \underline{f_k}$ ישארו למטה

1. הוצאנו את הקצה השמאלי $x = 0$ מאין מובן אצלו לפונקציה $\frac{1}{x}$.

2. השוה בהגדרה III, עמ׳ 284. — בעצם יש לדרוש גם חסם מלרע. אבל הרי הנחנו מראש כי $f(x) \geq 0$ ב $\{a,b\}$; לפי זה ישנו בוודאי חסם מלרע, למשל 0.

ממספר חיובי כלשהו נתון, אם נקטין את רחבי הרווחים החלקיים במידה מספיקה. (תכונה זו מבטאת בערך „רציפותה של פונקציה"; עיין ב §4 ובפרק י״א, §4.)

אם מתמלאים התנאים א) ו ב) — אמנם לא ר ק אז — אפשר (השוה בפרק י״ב, §1) לקרב את הערכים $\bar{F}$ ו $\underline{F}$ זה לזה במידה ה ר צ ו י ה לנו, בהקטינו במידה מ ס פ י ק ה את הרווחים החלקיים, כלומר: בהדיקנו למדי את חלוקת הריוח $\{a,b\}$ לרווחים חלקיים. כך נקבע לשטח המבוקש לא רק חסמים מלרע ומלעיל, אלא נקרב חסמים אלו זה לזה עד שההפרש יקטן כרצוננו. לכן נ ג ד י ר א ת ה ע ר ך ה מ ש ו ת ף, ש א ל י ו ש ו א פ י ם ש נ י ה ח ס מ י ם, כ ש ט ח ה ת ח ו ם $\mathfrak{A}$, המצויין ע״י $y = f(x)$ בריוח $\{a,b\}$. יחד עם ה ג ד ר ה זו מצאנו גם ש י ט ה כדי לחשב את השטח: שיטת האינטגרציה או הסכימה.

לבסוף יש לשאול: איך נסַמן את תהליך האינטגרציה, שבעזרתו הגדרנו את השטח? יצאנו מסכום ידוע, שכל מחובר שלו היה בקירוב שטחו של מלבן. נקח כגובה המלבן ערך כלשהו בין השפל והשיא של ערכי $f(x)$ בריוח הנידון (לרבות השפל והשיא), כרוחב המלבן אחד ההפרשים $x_k - x_{k-1}$. אם נסמן (השוה בעמ׳ 271) ב Δx_k או Δx את ההפרש בין שני ערכי x, יקבל שטח המלבן, כמכפלת גבהו ברחבו, צורה מעין $f(x) \cdot \Delta x$. עלינו לבנות סכומן של כל המכפלות הללו, ולמצוא את הגבול (אם ישנו) שאליו שואף הסכום, בשאוף המכסימום של Δx אל 0. כדי לרמוז לתהליך זה של שאיפה־אל־גבול, נהפוך ראשית את הסימן Δ ל d (השוה בעמ׳ 271), ושנית את האות S, המשמשת קיצור למלה „סכום" או „סֶכם" (summa), לצורה הלא־רגילה $\int$; לאמור: במקום $S f(x) \Delta x$ נכתוב $\int f(x)\, dx$, ברמזנו ע״י השינויים הנ״ל ל ג ב ו ל הסכום.

בסוף נציין את „ריוח־הסכימה" $\{a,b\}$, שמעליו נמצא השטח המבוקש, בהוסיפנו a בקצהו התחתון של הסימן $\int$ ו b בקצהו העליון. כך נגיע לסימון המתבטא: $\int_a^b f(x)\, dx$ אינטגרל (או סֶכם[1]) מ a עד b של $f(x)\, dx$. סכם זה הנהו מספר מסויים, הקובע את שטח התחום שבין ציר ה x, העקום $y = f(x)$ ושני הפוסקים כנגד $x = a$ ו $x = b$ — אם ישנו במציאות שטח זה לפי הגדרתנו. הפונקציה $f(x)$ נקראת מסתכֶמת, a ו b קצות הסכם[2].

במקרים ידועים השתמש כבר א ר כ י מֶ ד ס בשיטה המתלכדת בעיקרה עם שיטה זו; למשל כדי למצוא את שטחי האֶליפסה וההיפרבולה. רק במאה הי״ז שָבו החוקרים לעסוק בבעיות מסוג זה; השיטה בכלליותה הומצאה ב 1670 בערך

1. אנו מבדילים אפוא בין ס כ ו ם (של מחוברים במספר סופי, או של טור אינסופי) ל ס ֶ כ ם (גבול של סכום במובן האינטֶגרָל). המלה הרומית integrale מובנה: לא־לקוי, שלם (בניגוד להפרש Δx).

2. מדובר כאן על סכימה במובנו של B. RIEMANN. ישנם מושגי־סכם עמוקים וגם מקיפים יותר, אבל לא נוכל לדון בהם בכרך זה. השוה J. DOUGLAS ב Galois Lectures (*Scripta Mathematica Library*, No. V), ניו יורק 1941, וגם בכרך השני, פרק ה׳.

ע״י ניוטון וכמעט באותו הזמן, ללא תלות בו, ע״י לייבניץ. שני אלה המציאו אז גם את שיטת הגזירה שדברנו עליה בסעיף הקודם. בפרט נתן לייבניץ דחיפה חזקה להתפשטות השיטות האלה, בהמציאו את הסימונים שבארנום כאן ובסוף ה-§2. ככנוי משותף לחשבון־הגזירה וחשבון־הסכימה משתמשים בשם חשבון אינפיניטֶסימלי (מן המלה הרומית **infinitus**=אינסופי).

מהגדרת הסֶכם נופקות מיד הנוסחות הבאות, שגם כלפיהן נניח עוד כי $f(x) \geqq 0$ בריוח $\{a, b\}$, וכן לגבי כל הפונקציות הנידונות.

א) $\int_a^b C\,dx = C(b-a)$, ז״א אם המסתכמת $f(x)$ קבועה ($=C$) ב $\{a, b\}$, ישוה הסכם ל $C(b-a)$, בהתאם לכך שהשטח אז מלבן בעל הגובה C.

ב) אם $f_1(x) \leqq f_2(x)$ ב $\{a, b\}$, קיים $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_c^b f_2(x)\,dx$.
שהרי אי־שויון מתאים קיים בשביל אותם הסכומים, אשר כגבולותיהם מוגדרים הסכָמים שלפנינו. (השוה משפט 2 בעמ׳ 284.)

ג) אם קיים $\int_a^b f(x)\,dx$, קיים גם $\int_a^b C f(x)\,dx$ ושוה ל $C \int_a^b f(x)\,dx$.

ד) $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$,

אם קיימים שני הסכמים שבאגף הימני. את הנוסחות שב ג) ו ד) נאחד לצורה:

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))\,dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

ה) מהגדרת הסֶכם נסיק נוסחה המכוונת למקרה, שלא נסכום את $f(x)$ בבת אחת מ $x=a$ עד $x=b$, אלא שנחלק את הריוח $\{a, b\}$, בעזרת נקודה $x=c$ שבין a ל b, לשני רווחים חלקיים $\{a, c\}$ ו $\{c, b\}$. לפי הגדרתנו לא יקשה לקבל:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

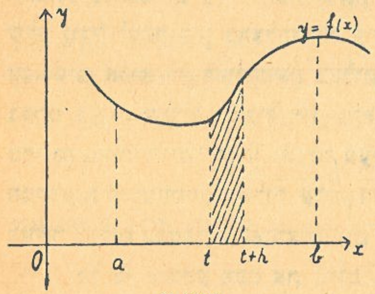
שהרי נוכל לבחור ב $x=c$ כנקודת־חלוקה. נוסחה מתאימה נקבל בחלקנו את $\{a, b\}$ לא לשני חלקים, אלא למספר סופי כלשהו של רווחים חלקיים.

ועתה נשתחרר מן התנאים $f(x)>0$ ו $a<b$! אם קיים $f(x)<0$ בריוח $\{a, b\}$ כולו, תוליכנו הדרך שהלכנו בה לאותן המסקנות, רק שכל מכפלה $f_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(x)\Delta x$ תהיה בעלת ערך שלילי; יופיע אפוא השטח המתאים כשסימנו שלילי. נניח עתה כי $f(x)$ תהיה ב $\{a, b\}$ פעמים חיובית ופעמים שלילית, בהחליפה את סימנה מ $+$ ל $-$ ולהיפך מספר־מונים סופי. לפי ה) נפָרד אז את הסכם למספר סופי של מחוברים כך, שכל מחובר יתאים לריוח חלקי שבו סימנה של $f(x)$ קבוע. נופק כי ערכו של $\int_a^b f(x)\,dx$ שוה לסכום השטחים שבהם $f(x)>0$, פחות סכום השטחים ששם $f(x)<0$. אם $a<b$, ישתנה רק הסימן (בסכום ובגבולו), ו $a=b$ יתן את הסֶכם 0.

לא יקשה להווכח שגם אחרי הרחבה זו של פעולת הסכימה נשארים בתקפם המשפטים א) עד ה); וכן שקיים ה) גם אם $b<a<c$ או $a<b<c$.

בסקירה הקצרה הזאת על הבעיות היסודיות של החשבון הדיפרנציאלי והחשבון האינטגרלי תחסר החוליה המרכזית, אם לא נגע עוד בקשר שבין שניהם. לכאורה שונות גם מטרותיהן של שתי השיטות (קביעת המשיק וכו׳ וקביעת השטח) גם תהליכי החשבון שהוליכונו אל המטרות הנ״ל, ולא נראה גשר וקשר ביניהם. ואעפ״י כן ישנו קשר אמיץ! כדי לבררו נשוב לבעיה שעסקנו בה באחרונה: קביעת שטח לפי הפונקציה $y=f(x)$. עד הנה עסקנו בתחום שבין $x=a$ ובין $x=b$. תחת הקבוע $x=b$ נכניס עתה ערך $x=t$ המשתנה בריוח $\{a, b\}$.

שטח התחום שבין $x=a$ ו $x=t$, אשר יסומן לפי הנ״ל, אם $f(x) \geqq 0$, ב $\int_a^t f(x)\,dx$, לא יהיה מספר קבוע כמו $\int_a^b f(x)\,dx$, אלא יהיה פונקציה של המשתנה t[1]; שהרי גודל השטח תלוי בערכו של t (למשל: יגדל בהגדילנו את t). נסמן את הפונקציה שהגדרנוה כך ב $F(t)$; $F(t)$ מסמן אפוא את שטח התחום שבין ציר ה x, העקום $y=f(x)$ והפוסקים שכנגד $x=a$ (קבוע) ו $x=t$ (משתנה).


ציור 41

על הפונקציה $F(t)$ נפעיל את פעולת הגזירה (§2). נתבונן אל שני ערכים שונים t ו $t+h$ של x[2]; ערכי F המתאימים הם $F(t)$ ו $F(t+h)$. אם ניצור, בהתאם לפעולת הגזירה לפי הסעיף הקודם, את ההפרש $F(t+h) - F(t)$, הרי יש לו משמעות הסתכלותית פשוטה: $F(t+h)$ מסמן את השטח הנ״ל בין a ו $t+h$, ו $F(t)$ אותו השטח בין a ו t; לכן מסמן ההפרש לפי ה) את השטח בין t ו $t+h$ (עיין בציור 41). שטח זה מופיע כעמוד צר אם h (חיובי) קטן. כמו שעשינו ב §2, נחלק את ההפרש הזה בהפרש המתאים של הגורם, ז״א ב $h=(t+h)-t$, וכך נקבל את „מנת־ההפרשים" $\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$. נניח ש $f(x)$ תהיה מן הסוג הנורמלי שרמזנו לו בעמ׳ 274/5, כך ש $f(t+h)$ ישאף אל הערך $f(t)$ בשאוף h אל 0. אז יתקרב שטח העמוד הצר הנ״ל, שערכו $F(t+h)-F(t)$, אל שטח המלבן שרחבו h ושגבהו $f(t)$; ביתר דיוק:

---

1. גם בביטוי $\int_a^b f(x)\,dx$ גם ב $\int_a^t f(x)\,dx$ משמשת האות x רק כאות עוזרת או כמשתנה־עזר („משתנה מדומה" באנגלית, „משתנה קשור" בגרמנית), שאיננו מופיע בתוצאת החשבון כל עיקר. לכן לא איכפת באיזו אות נסמן משתנה־עזר זה: תחת x אפשר להכניס אות אחרת (עיין בעמ׳ 287).

2. לשם פשטות הנחנו $h>0$, ז״א $t+h>t$; אבל אין צורך להניח כך. נחוץ רק שימצא גם $t+h$, כמו t, בריוח $\{a, b\}$ שבו מוגדרת $f(x)$ (ולכן גם $F(x)$).

היחס בין שטח העמוד ובסיסו h יתקרב אל $f(t)$ כרצוננו, אם נקטין למדי את h. לפי זה תתקרב מנת־ההפרשים $\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$ אל $f(t)$, בשאוף h אל 0. בשפת ה§ 2 ננסח עובדה זו כך: ע״י גזירה נקבל מן הפונקציה F את הפונקציה f. (הסתפקנו כאן בהסבר הסתכלותי. לא יקשה ביותר לתת הוכחה עיונית בעזרת המשפט על ערך־ביניים; עיין בעמ׳ 353).

מסקנא דמלתא: את הפונקציה F קבלנו מן הפונקציה f ע״י תהליך הסכימה, ותהליך הגזירה השיב אותנו מ F אל f שיצאנו ממנה. מצאנו כך: אם נתונה פונקציה בעלת אופי „נורמלי״ במקצת (השוה בעמ׳ 274/5), ואם ניצור ממנה פונקציה חדשה ע״י סכימה עד קצה עליון, המשמש גורם לפונקציה החדשה, נקבל ע״י גזירתה (גזירת הסָכם לפי קצהו העליון) שוב את הפונקציה שיצאנו ממנה. בקיצור: **הגזירה והסכימה הן פעולות ההופכות זו את זו.** העובדה הזאת היא חוט־השדרה של החשבון האינפיניטֶסימלי.

§4. דוגמות לאָפיין של פונקציות.

ב §§ 1—3 נתַנו דוגמות שתפקידן: להכין ניתוח שיטתי של מושג „הגבול״ והמושגים הבנויים עליו. הבה נראה עתה שיש גם כמה סוגים של **פונקציות**, שלא נוכל לטפל בהן בהצלחה כל עוד לא נקרא לעזרתנו את מושג הגבול! בסעיף זה נשים אפוא לב לפונקציות בעלות אופי לא־רגיל במקצת; אם בפרק התשיעי, בפרט ב § 3, למדנו כביכול את „האנַטומיה הנורמלית״ של הפונקציות, נגלה כאן טפח מן „הפַתולוגיה״ שלהן. ואמנם, אעפ״י שהפונקציות הנורמליות חשובות יותר ברוב המקצעות המתימטיים, עולות עליהן הפונקציות הפתולוגיות במובן כמותי עד־בלי־די, כאשר עולים המספרים האירציונליים על הרציונליים; עיין בחלק הרביעי (כרך שני).

כל מי ששמע פעם את השם „פונקציה רציפה״, יחשוב בוודאי שהבין את ההבדל בין פונקציה רציפה ללא־רציפה. סוג הפונקציות הרציפות בריוח מסויים $\{a,b\}$ מכיל לכאורה את אלה שאפשר לתארן בין a ו b ע״י עקום בלתי פוסק; תכונה זו יש לרוב הפונקציות שהכרנו לדעת אותן בפרק הקודם. לעומת זאת הפונקציות שהוגדרו בעמ׳ 233/4 על־סמך תורת המספרים, ה„קופצות״ אצל כל ערך שלם של הגורם או מוגדרות רק שם, אינן רציפות; המשכו הרציף של העקום המתאים, אם ישנו, פוסק בנקודות הנידונות. פונקציות רבות מעין זו מופיעות בחיים; למשל: חוב הלוֶה (כפונקצית הזמן), אם המַלוה התנה שבמועדי תשלום הרבית תתווסף הרבית על הקרן. גם את $y=\frac{1}{x}$ נכיר מיד כפונקציה שאיננה רציפה אצל $x=0$, אפילו אחרי תתנו לה ערך מסויים במקום הזה שבו איננה מוגדרת. אמנם במקרה זה יקשה כבר במקצת לבאר, **מדוע** איננה רציפה; נוכל להסביר את הדבר, בעקבנו אחרי העקום $y=\frac{1}{x}$ (עמ׳ 281) מערכי x שליליים לחיוביים; מתברר כי העקום מתרחק מציר ה x לקראת ערכי y שליליים שערכם המוחלט הולך וגדל, ואילו אחרי $x=0$ הוא מתקרב שוב אל אותו ציר בבואו מערכי y חיוביים גדולים.

אולם יש דוגמות שבהן יקשה מאד להכריע אם הפונקציה רציפה אם לאו, הואיל וההסתכלות לא תעזור לנו במידה הדרושה. נגדיר למשל $g(x)$ ב $\{0,1\}$ כך: אצל כל x רציונלי $g(x)=1$; אצל כל x אירציונלי $g(x)=0$. אין לתאר פונקציה זו ע״י עקום; שהרי בכל ריוח, תהיה מידתו אשר תהיה, יש לפונקציה קפיצות, ואף אינסוף קפיצות. לכן לא נהסס לראות פונקציה זו כלא־רציפה. ברם המצב יעורפל אם נגדיר כך: אצל כל x אירציונלי יהיה $h(x)=0$; אבל אצל $x=\frac{m}{n}$, אם m שלם, n טבעי, m ו n זרים, יהיה $h(x)=h(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}$. בדוגמה זו נפקפק אם אין לפחות מקומות ידועים שאצלם יש לראות $f(x)$ כרציפה; כי הלוא הערכים $\frac{1}{n}$ מתקרבים אל 0 בגדול מכנה הגורם $x=\frac{m}{n}$, וכך נתקרב אל ערך הפונקציה במקומות האירציונליים. (השערה זו תתגלה כמבוססת; השוה בפרק י״א, § 4.)

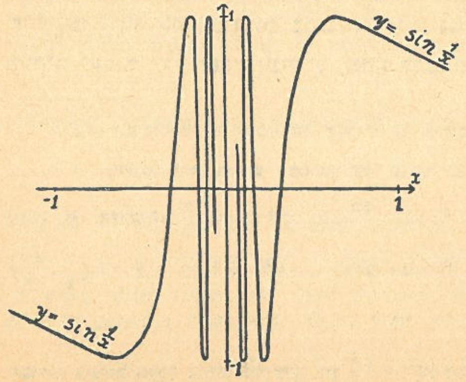
נתבונן אל הפונקציה הטריגונומטרית $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ ב $\{-1,+1\}$! היא מוגדרת בכל הריוח הזה, פרט ל $x=0$; נגדירנה שם בקבענו: $g(0)=0$. לפי זה מוגדרת $g(x)$ בכל הריוח; הרציפה היא במקום $x=0$? נבדוק את מהלכה בסביבת $x=0$! אם $x=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ (n מספר טבעי), הרי $\frac{1}{x}=(4n+1)\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, ולכן $\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{\pi}{2}=1$. בגדול n מתקרב $\frac{2}{(4n+1)\pi}$ אל 0; כלומר, מימין הנקודה $x=0$ בציר ה x נמצאים בכל סביבה אינסוף ערכים $\frac{2}{(4n+1)\pi}$. לכן מקבלת $g(x)$ את הערך $+1$ אינסוף מונים בכל סביבה של $x=0$. מטעם דומה תקבל $g(x)$ את הערך -1 אצל אינסוף המקומות $x=\frac{2}{(4n+3)\pi}$ בסביבת $x=0$, בהיות שם:

$$\sin\frac{1}{x}=\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1.$$

לעומת זאת, אצל $x=\frac{1}{n\pi}$ יהיה: $\sin\frac{1}{x}=\sin n\pi=0$. גם הנקודות מסוג זה נמצאות במספר אינסופי בכל סביבה ימנית של $x=0$.

ומהו המצב משמאל לנקודה זו $(x<0)$? הואיל והיחס $\sin(-x)=-\sin x$ (עמ׳ 252) גורר $\sin\left(-\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}$, עלינו רק להחליף כל ערך שלפונקציה בערך הנגדי, כאשר נעבור מ x אל $-x$.

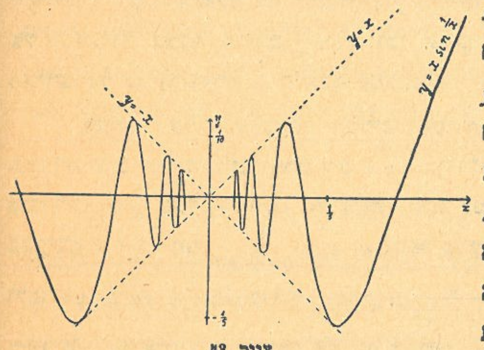
בנסותנו לתאר את הפונקציה ע״י עקום — נסיון המצליח רק מעָבר לסביבה קטנה של $x=0$ ימינה ושמאלה — רואים אנו (השוה ציור 42) שהעקום מתנודד בין הערכים $y=-1$ ו $y=+1$; אורך הגל, כלומר הרוחק בין כל שתי נקודות־שיא (או נקודות־שפל) עוקבות, ילך ויקטן לקראת 0, כהתקרב העקום משמאל או מימין אל 0. בסביבת 0 מזה ומזה נמצאות אינסוף תנודות, ולכן אי־אפשר לשרטט סביבה זו



ציור 42

בציור. אמנם בנקודה $x=0$ עצמה הוגדרה $g(x)$ ע"י $g(0)=0$; אבל מול השאלה, אם הפונקציה מתקרבת אל ערך זה באופן רציף, אפסה עזרת ההסתכלות, ורק מושג־הגבול יוכל לשמש לנו מורה־דרך. התשובה תהיה שלילית (השוה בפרק י"א, 4§).

שאלת הרציפות נראת לנו עדינה עוד יותר, בקחתנו כדוגמה, תחת $\sin\frac{1}{x}$, את הפונקציה $h(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$, $h(0)=0$. אמנם גם במקרה זה יש בסביבת $x=0$ אינסוף תנודות שאורך־גליהן הולך וקטן. אבל מכיון ש $\sin\frac{1}{x}$ נכפל כאן ב x, יקטן ההפרש בין שיא הגל ושפלו מן ההפרש שבדוגמה הקודמת, אם $+1>x>-1$; ההפרש מתקרב אל 0 בשאוף x עצמו אל 0. (עיין בציור 43[1]; שם הוכנסו גם הישרים $y=x$ ו $y=-x$ [השוה בעמ' 232], החוסמים ביניהם את העקום $(y=h(x)$.) לכן בסביבת $x=0$ מתקרבים הגלים אל ציר ה x, אעפ"י שבכל גל וגל נמצא השיא למעלה מציר זה והשפל למטה ממנו. הנהיה ראשים. מפני התקרבות זו לציר ה x מצד אחד, ומפני $h(0)=0$ מצד שני, לראות את $h(x)$ כרציפה אצל $x=0$? גם על שאלה זו עונה מושג־הגבול, והתשובה הפעם חיובית.



ציור 43

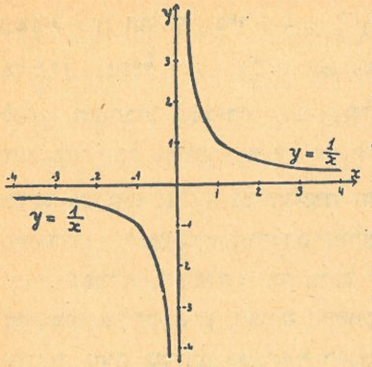
נציג שאלה מסוג אחר! יהי $x_1<x_2$, וערכי $y=f(x)$ בשני מקומות אלו יהיו $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$; האם תקבל הפונקציה $f(x)$ בין x_1 ו x_2 גם את כל „ערכי־הביניים", כלומר, את כל הערכים הממשיים שבין y_1 ו y_2? ברור שאין לצפות לכך אם יש ל $f(x)$ קפיצות. למשל: הפונקציה $y=[x]$ (עמ' 234) מקבלת את הערכים 0 ו 1, ולא את הערך $\frac{1}{2}$ שבין 0 ל 1. גם הפונקציה $g(x)$ שהגדרנוה בעמ' 279 למעלה לא תקבל כל ערך בין 0 ל 1. אבל איך המצב אם אין קפיצות ל $f(x)$? לכאורה מגידה לנו ההסתכלות שבמקרה זה תקבל $f(x)$ את כל ערכי־הביניים בין y_1 ל y_2; שהרי מתקבל על הדעת כי $f(x)$ מתוארת ע"י קו עקום שאינו פוסק, ומכיון שהעקום עובר את הנקודות בנות הקואורדינטות (x_1, y_1) ו (x_2, y_2), יתכן להסיק[2]: העקום יעבור בלי הפסק מנקודה אחת לחברתה וישיג במעבר זה את כל ערכי y

---

1. קנה־המידה כאן שונה מזה שבציור 42, מטעם שקל להבינו.

2. כדוגמה יוכל הקורא להסתמך על הציור 29 (עמ' 251) המתאר את $y=\sin x$, ולקחת למשל את הערכים: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $y_1=1$; $x_2=\frac{3\pi}{2}$, $y_2=-1$. לפי זה תקבל הפונקציה $\sin x$ בריוח $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ כל ערך בין $+1$ ל -1. ואולם הנקודות (x_1, y_1) ו (x_2, y_2) אינן צריכות להמצא בריוח של מונוטוניות דוקא; אפשר לקחת, למשל, בדוגמה הנ"ל $x_1=\frac{\pi}{6}$ ו $x_2=\frac{2\pi}{3}$, ולהסיק שבריוח ביניהם תקבל $\sin x$ כל ערך בין $\frac{1}{2}$ $(=\sin 30^0)$ לבין $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(=\sin 120^0)$.

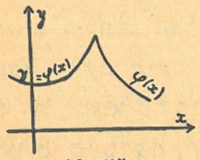
בין y_1 ל y_2[1]. ברם בטחוננו בתשובה חיובית זו יתרושש במקצת, אם נעיין בדוגמת ההיפֶרבולה שוות־השוקיים $y=\frac{1}{x}$ (ציור 44), המקבלת אצל $x=-1$ את הערך $y=-1$ ואצל $x=+1$ את הערך $y=+1$; הלא היא אינה משיגה בשום מקום את הערך $y=0$ הנמצא בין -1 ל $+1$! ולא עוד אלא את שאר ערכי־הביניים בין -1 ו $+1$ היא מקבלת לא בריוח $(-1, +1)$ אלא דוקא מחוצה לו! במקרה זה יש לבאר את המצב ב„אי־רציפותה" של הפונקציה — אעפ"י שאין לה קפיצה במובן הרגיל; ואולם תירוץ זה מצריך הגדרה מדוייקת למושג הרציפות.



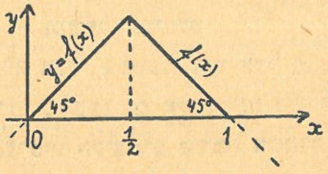
ציור 44

בהשערתנו דלעיל הסתמכנו על תיאורה של כל פונקציה „רציפה" בעזרת עקום. תיאור זה מפתה אותנו להוציא אף מסקנה המרחיקה לכת יותר: בעמ' 270 ראינו שהערך המתקבל ע"י גזירת $f(x)$ במקום $x=a$, קובע את כוון המשיק לעקום $y=f(x)$ במקום a. לכאורה נוכל להפוך את כוון ההיסק ולטעון: הואיל ולכל עקום יש משיק בכל נקודה, אפשר לגזור את הפונקציה $f(x)$ בכל מקום x שבו היא רציפה; לאמור: אצל כל x כזה קיים הגבול המגדיר את הנגזרת[2].

בוודאי אין הדבר כך. כדוגמה ישמש משולש ישר־זוית ושווה־שוקיים, המתרומם מעל לקטע־היחידה בציר ה x, כך שקטע זה יוצר את היֶתר במשולש (ציור 45). בראותנו את שתי הצלעות האחרות (וביתר כלליות: את הצלעות עם המשכיהן למטה מציר ה x, כלומר בשביל $x<0$ ו $x>1$) כ„עקום" אחד, המתאר פונקציה רציפה $y=f(x)$ (השוה בעמ' 259), נסיק שיש משיק לעקום הזה בכל נקודותיו. והלוא בקדקוד־המשולש שממול לבסיס אין משיק לעקום! (בכל שאר הנקודות מתלכד המשיק עם העקום; כי קו ישר הנהו משיק לעצמו בכל מקום.)



ציור 46



ציור 45

במקרה זה אמנם ברורה סיבת אי־מציאותו של משיק: בהתקרבנו

---

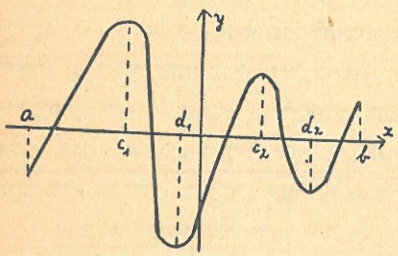
1. בעיה דומה לזו העסיקתנו בעמ' 118, כאשר שאלנו אם כל מעגל סביב נקודת־הראשית יחתוך את ציר ה x; הגדרנו שם את מושג המספר הממשי כך, שלא ינתן פתחון־פה לחלוק ולטעון שהמעגל „יקפוץ" כביכול מעל לציר ה x אל תחתיו בלי חתכו. מושג המספר הממשי מכריע גם בבעיה שעוררנוה כאן.

2. אמנם פרט למקומות שבהם המשיק מקביל לציר ה y; עיין בעמ' 270, הערה 1.

אל הקדקוד הנ"ל (המתאים ל $x=\frac{1}{2}$) משמאל, ז"א מערכי x הקטנים מ $\frac{1}{2}$, נקבל בשביל כוון החותך תמיד $\tan 45^0 = \tan\frac{\pi}{4} = +1$; ואילו בהתקרבנו אל $x=\frac{1}{2}$ מימין, נקבל $\tan 135^0 = \tan(-45^0) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$. לכן אין גבול מסויים לכווני החותכים בסביבת $x=\frac{1}{2}$, אלא רק „גבול משמאל" השונה מן „הגבול מימין". מצב כזה יוכל להווצר גם על־ידי חיתוך עקומים כלשהם (עיין העקום $y=\varphi(x)$ בציור 46, עמ' 281); גם במקרה זה אפשר לראות את שני העקומים כיחידה המוגדרת ע"י פונקציה חד־ערכית ורציפה, ובכל זאת אין לה נגזרת במקום מסויים.

נשאלת השאלה: מה נוכל לטעון על קיום הנגזרת לפונקציה רציפה במקומות שלהם אין הצורה ההסתכלותית הזאת? בפרק י"ב (§1) יתברר שגם אז לא נהיה בטוחים במציאות הנגזרת; לאמור: ישנן פונקציות רציפות מחוסרות־נגזרת בכל מקום, או „עקומים מחוסרי משיק".

לבסוף נעורר שאלה זו: תהי $f(x)$ פונקציה חד־ערכית בריוח $\{a,b\}$. איפה בריוח תקבל $f(x)$ את השיא (המַכסימום) ואיפה את השפל (המינימום), ומהו המצב לגבי שיאים (שפלים) יחסיים, כלומר, לגבי מקומות שבהם על־כל־פנים ערכה של $f(x)$ גדול (קטן) מכל ערכי $f(x)$ בסביבה ידועה של המקום? (בציור 47 יש, מלבד השיא המוחלט אצל c_1 והשפל המוחלט אצל d_1, עוד שיא יחסי אצל c_2 ושפל יחסי אצל d_2.) בפרק השנים־עשר (§3) נראה כי קל למצוא ערכים קיצונים אלו (מונח הכולל שיא ושפל) ע"י גזירת $f(x)$. ואולם לקביעת הערכים הקיצונים קודמת השאלה, אם ישנם ערכים קיצונים. מן ההסתכלות, המבטיחה לכאורה תשובה ברורה על שאלה זו, נתאכזב בראותנו דוגמות כמו שתי אלה:



ציור 47

1) $f(x)=\tan x$ בריוח $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. (השוה עמ' 251 והציור 31 שם.)

2) הפונקציה $g(x)$ המוגדרת ב $(0,1)$ ע"י הכללים (השוה עמ' 259 למעלה):
א) $g(x)=x$ ב $(0,\frac{1}{2})$; ב) $g(\frac{1}{2})=0$; ג) $g(x)=1-x$ ב $(\frac{1}{2},1)$.

בדוגמה 1) אין ל $f(x)$ לא שיא ולא שפל, עם היותה רציפה בריוח $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ כולו. בדוגמה 2) יש ל $g(x)$ שפל אצל $x=\frac{1}{2}$, וערך השפל 0. אבל אין לה שיא; ערכי $g(x)$ מתקרבים אמנם אל $\frac{1}{2}$ בסביבת $x=\frac{1}{2}$ (השוה בציור 45), אבל אינם משיגים את $\frac{1}{2}$. פונקציה זו איננה רציפה. לעומת זה יש לה היתרון להיות „חסומה", כלומר, שערכיה ב $(0,1)$ נמצאים בין שני חסמים, למשל בין 0 ו $\frac{1}{2}$ (לרבות 0); ואילו $f(x)$ שבדוגמה 1) איננה חסומה ב $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$.

פרק אחד עשר: מושגי הגבול והרציפות. טורים אינסופיים.

בפרק זה, פרט ל § 2 (בסיס הלוגריתמים הטבעיים) בחלקו וכן לסוף הפרק (טורים טריגונומטריים), נסתפק בתתנו עפ"י רוב הגדרות ודוגמות בלי פירושים ומשפטים בלי הוכחות, כלומר רק חוט־השדרה של הענין. הנימוקים לכך רבים: הנושא קשור בחשבונות ואינו קרוב למי שלומד מתימטיקה בעבור ערכה העקרוני והפילוסופי; יש ספרות רבה (בלועזית), הן בספרי־הלימוד הרצינים של החשבון הדיפרֶנציאלי (השוה בראש הפרק י"ב) הן בספרים בעלי דרגה נמוכה יותר; הענין דורש הרגל מתימטי יותר מרוב חלקי הספר הזה, וגם ההיקף יעלה על שאר הפרקים. (ואולם המחבר הכין את החומר כולו כנגד חוט־השדרה המופיע כאן, ויהיה מוכן לפרסמו לחוד כשיורגש צורך בכך.)

§ 1. מושג הגבול לגבי סדרות ולגבי פונקציות.

הגדרה I: תהי נתונה סדרה (עמ' 125/6) $(a_n)=(a_1,a_2,a_3,\dots)$ של מספרים (ממשיים)[1]; המספרים a_n („איברי הסדרה") אינם צריכים להיות כולם שונים זה מזה. יכול להיות שקיים מספר (ממשי) A אשר אליו מתקרבים המספרים a_n אם הציון n הולך וגדל; כלומר, שכל המספרים $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ קרובים ל A כפי רצוננו[2], אם דאגנו לכך שהציון k גדול במידה מספיקה. במקרה זה תיקרא (a_n) סדרה מתכנסת (של מספרים), והמספר A יכונה הגבול (limes) של הסדרה (a_n). אומרים, שהסדרה שואפת אל הגבול A, וכותבים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ובקיצור $\lim a_n = A$.

הערה. אל יחשוב הקורא שע"י הסמל ∞, המופיע בסוף ההגדרה, הכנסנו איזו „אינסופיות" לתוך הענין, מלבד זה כי הסדרה (כמו הסדרות בפרקים א', ב', ו' וכו') מכילה אינסוף איברים. ∞ משמש רק כסימון קצר, הרומז לתנאי ההגדרה.

דוגמות: 1) הסדרה $(a,a,a,\dots)$ מתכנסת, וגבולה a.

2) הסדרה $(\frac{1}{n})$ מתכנסת (עיין בעמ' 127), ו $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. אותם הדברים קיימים אצל הסדרה $(\pm\frac{1}{n})=(1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\dots)$.

3) $(\pm\frac{n-1}{n})$, ז"א הסדרה $(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\dots)$, איננה מתכנסת. ואילו $(\frac{n-1}{n})$ מתכנסת, וגבולה 1.

4) לפי הסימון של עמ' 126 ו 132 קיים: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n = A$.

5) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ וכל a_n חיובי, קיים: $\lim a_n^{b_n} = A^B$. (השוה בעמ' 133.) זהו משפט אם מוגדרות החזקות המופיעות כאן; מאידך אפשר להגדיר A^B כך, אם ידוע מֻשג־החזקה כלפי a_n ו b_n רציונליים.

1. פעמים נוח להתחיל ב $n=0$ תחת $n=1$; למשל ב § 3.
2. למשל לפי בחירת מספר ממשי חיובי ε הקטן כפי רצוננו, ושביחס אליו נדרוש: $|A-a_n|<\varepsilon$ אם $n \geq k$. גודל הציון k תלוי ב ε.

6) הסדרה $(\dots,1,1,-1,1,-1) = ((-1)^n)$ איננה מתכנסת.

הגדרה II: תהי (a_n) סדרת מספרים כך שכנגד כל מספר חיובי נתון G קיים $a_{k+m} > G$, אם k גדול במידה מספיקה, ו m מספר טבעי כלשהו או 0. אז כותבים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{ו} \quad \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty.$$

גם הסמלים $+\infty$ ו $-\infty$ המופיעים כאן משמשים רק לשם קיצור, ואינם מוסיפים על המספרים „הסופיים" מספרים „אינסופיים" כביכול.

הגדרה III: הסדרה (a_n) נקראת חסומה מלרע, אם ישנו מספר B_1 כך שכנגד כל n קיים $a_n \geqq B_1$; חסומה מלעיל, אם ישנו מספר B_2 כך שכנגד כל n קיים $a_n \leqq B_2$. כל B_1 מן הסוג הנ"ל נקרא **חֶסֶם מלרע**, כל B_2 **חסם מלעיל**. (a_n) נקראת חסומה אם היא חסומה גם מלרע גם מלעיל.

לפי זה חסומות כל הסדרות שבדוגמות 1)—6), אבל לא למשל הסדרה (2^n).

הערה: (a_n) חסומה אפוא, אם ישנו B חיובי כך שכנגד כל n קיים: $|a_n| \leqq B$. כל B כזה נקרא חסם לסדרה.

משפט 1: לכל סדרה חסומה מלעיל (מלרע) יש חסם מלעיל קטן ביותר (חסם מלרע גדול ביותר), הנקרא החסם **העליון** (**התחתון**) של הסדרה.

אם החסם העליון בעצמו איבר של הסדרה, הריהו המכסימום (השיא); וכן לגבי מינימום (שפל). מובן שלא בכל סדרה נמצא שיא או שפל; עיין בדוגמות 2) ו 3).

משפט 2: כל סדרת־מספרים מתכנסת (a_n) היא גם חסומה, וקיום היחסים $G_1 \leqq a_n \leqq G_2$ (כנגד כל n) גורר אז $G_1 \leqq \lim_{n\to\infty} a_n \leqq G_2$. (מובן שלא כל סדרה חסומה מתכנסת; עיין בדוגמות 3) ו 6).)

הגדרה IV: סדרות „עולות" ו„יורדות" (עמ' 126) מכנים בשם הכולל „סדרות **מונוטוניות**" (השוה בעמ' 241/5).

משפט 3: כל סדרה עולה החסומה מלעיל וכל סדרה יורדת החסומה מלרע מתכנסת. בנוסח משותף: כל סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת.

משפט 4 (מבחן־ההתכנסות של **קושי**): הסדרה (a_n) מתכנסת אם, ורק אם, ההפרש בין כל שני איברי הסדרה, שציוניהם גדולים למדי, קטן כפי רצוננו; כלומר: אם לכל ε חיובי („מידת־הדיוק") אפשר להתאים ציון k כך, שלגבי כל שני ציונים n ו m הגדולים מ k קיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

נעבור עתה למושג־הגבול אצל **פונקציות**!

הגדרה V: תהי $f(x)$ פונקציה[1] המוגדרת אצל כל $x > A$. יכול להיות כי ישנו מספר L, שאליו מתקרבים ערכי $f(x)$ בגדול x במידה מספיקה; כלומר שקיים, כנגד כל מידת־דיוק $\varepsilon > 0$, מספר חיובי g כך, ש $x > g$ גורר $|L - f(x)| < \varepsilon$.

---

1. בכל הפרק נצטמצם בפונקציות של גורם אחד, אף כי רוב ההגדרות והמסקנות נשארות בתקפן במקרה של גורמים אחדים.

במקרה זה ייקרא L הגבול (limes) של הפונקציה $f(x)$ כנגד ערכי x **ההולכים וגדלים**; בנוסחה: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

כמו־כן: אם $f(x)$ מוגדרת אצל כל $x < B$, ואם קיים M שאליו מתקרבים ערכי $f(x)$ בקטון x במידה מספיקה, ייקרא M הגבול של $f(x)$ כנגד ערכי x **ההולכים וקטנים**; בנוסחה: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$.

הגדרה VI: תהי $f(x)$ מוגדרת **בסביבה ידועה** של $x = a$ (עמ' 244), פרט אולי ל $x = a$ בעצמו. יכול להיות כי ישנו מספר L, שאליו מתקרבים ערכי $f(x)$ בהתקרב x במידה מספיקה (משמאל או מימין) אל $x = a$. ביתר דיוק: יכול להיות שישנו מספר L, המקיים כנגד כל $\varepsilon > 0$ את אי־השויון $|L - f(x)| < \varepsilon$, אם $|a - x|$ קטן במידה מספיקה (התלויה ב ε) ובתנאי $x \neq a$. במקרה זה ייקרא L הגבול של $f(x)$ אצל a; בנוסחה: $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

הגדרה VII: בהנחת ההגדרה VI יכול להיות, שערכי $f(x)$ יגדלו מעל לכל חסם G $(f(x) > G)$ בהתקרב x אל a. במקרה זה אומרים שאצל a יש ל $f(x)$ הגבול $+\infty$; בנוסחה: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. — באופן מתאים (השוה ההגדרה V) מגדירים $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ו $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

את ההגדרה בשביל **הגבול** $-\infty$ ינסח הקורא בעצמו!

נדגיש עוד פעם, שבכל המקרים האלה משמשים $+\infty$ ו $-\infty$ רק קיצורי־סימון; הלוא למעשה היו כל הערכים שהופיעו מספרים סופיים.

יתכן לשאול: מהו הקשר ההגיוני והמתימטי בין מושגי הגבול לסדרות ולפונקציות? על זה עונה המשפט הבא: אם $y = f(x)$ מוגדרת אצל כל $x > a$, קיים $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (הגדרה V) אם, ורק אם, מתכנסת הסדרה $(y_n) = (f(x_n))$ בשביל כל סדרה (x_n), המקיימת את התנאים $x_n > a$ ו $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (הגדרות I ו II). אז נכון גם $\lim_{n\to\infty} y_n = L$. (משפטים מתאימים קיימים בשאר המקרים הנ"ל.)

דוגמות: 1) $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ ו $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, אם $a > 1$.

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ו $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (השוה הציור 44 בעמ' 281).

3) $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, אם P ו Q פולינומים, ואם $Q(a) \neq 0$.

4) ל $\sin \frac{1}{x}$ אין גבול אצל $x = 0$ (השוה הציור 42 בעמ' 279); כמו־כן אין גבול ל $\cot x$ אצל $x = n\pi$ אם n שלם (השוה הציור 31 בעמ' 251), ואין גבול ל $[x]$ אם $x = k$ שלם (השוה הציור 21 בעמ' 234)[1].

---

1. אמנם בשני המקרים האחרונים (לא בראשון!) ישנו „גבול חד־צדדי", בהתקרב x אל המקום הנידון רק „משמאל" או „מימין"; וזהו ה„גבול" סתם אם נתבונן אל הפונקציה בריוח שאחד מקצותיו למשל π או 1, כך שעלינו להבין „סביבה" בהגדרה VI כסביבה חד־צדדית.

5) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0$ (השוה הציור 43 בעמ׳ 280).

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.   7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. לשם ביאור קצר ליחס זה, שנשתמש בו בפרק י״ב (§2), נקדים כי $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{(-x)}$ (עמ׳ 252). לכן די לקחת $x>0$. נסתמך על הציור 28 (עמ׳ 251)! נשוה את שטחי המשולשים בעלי הקדקוד C והזוית α שכנגד הקשת x, אם כצלע מול α משמש פעם המיתר שכנגד הקשת x (לא צוייר שם) ופעם המשיק בעל האורך $\tan x$, אל שטחה של גזרת־העיגול המתאימה; נקבל:

$\frac{\tan x}{2}>$ (שטח הגזרה) $>\frac{x}{2}>\frac{\sin x}{2}$, ולכן (לפי חשבון קל) $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$.

והנה קיים $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. לפי זה קל להסיק כי $\frac{\sin x}{x}$ שואף אל 1 בשאוף x אל 0, מש״ל.

בשביל הגבולות — של סדרות ושל פונקציות — קיימים משפטים בעלי חשיבות מרובה לחשבון, הקובעים למשל ערך־גבולה של פונקציה, המופיעה כסכום של פונקציות, בתנאי שידוע לנו כבר קיום הגבולות למחוברים וערכיהם. לאמור: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ו $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ יחד גוררים $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L\pm M$ ו $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$. משפט מתאים קיים גם בשביל המנה אם המכנה שונה מאפס. משפטים אלו מאפשרים להחליף את הסדר בין פעולת המעבר־לגבול ובין פעולות־החשבון הרגילות. אבל יש לדייק בהבנת הנוסחות האלה! הן רוצות לומר: אם ישנם גבולות המחוברים וכו׳, ישנו גם גבול הסכום וכו׳, והוא שוה לסכומם של גבולות המחוברים וכו׳. ברם מציאותו של גבול הסכום אינה גוררת מציאותם של גבולות המחוברים, וכו׳. נקח דוגמה לכך מן הסדרות: $(-1)^n+(-1)^{n+1}=(-1)^n(1-1)=0$. כלומר: אף כי הסדרות $(a_n)=((-1)^n)$ ו $(b_n)=((-1)^{n+1})$ אינן מתכנסות (עיין 6 עמ׳ 284), מתכנס „סכומם" $(a_n)+(b_n)=(0,0,0,\ldots)$.

גם אצל הפונקציות כמו אצל הסדרות קיים מבחן כללי, המאפשר לבדוק לא רק אם הגבול הוא מספר נתון, אלא אם יש בכלל גבול. המבחן אומר: $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ קיים אם, ורק אם, ישנה כנגד כל $\varepsilon>0$ סביבה של $x=a$ כך, שתמיד $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, אם x_1 ו x_2 $(\neq a)$ בסביבה ההיא. וכן לגבי $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

נבטא, בשפה שהכנסנוה כאן, את מושגי הנגזרת והסכם (פרק עשירי)! בשם הנגזרת של $y=f(x)$ במקום מסויים x נקרא לגבול (עיין בעמ׳ 271)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

כאמור שם, תיקן לייבניץ בשביל גבול זה של „מנת־ההפרשים" את הסימון $\frac{dy}{dx}$. אכן אל נשכח שעומד כאן גבול של מנה, ולא מנה של גבולות!

מה שנוגע לסכם מ a עד b, הרי חילקנו את הריוח $\{x_0,x_n\}=\{a,b\}$ ל n רווחים חלקיים $\{x_{k-1},x_k\}$, ושמנו $x_k-x_{k-1}=\Delta x_k$ (עמ׳ 273/5). אם יסמן $\bar{x}_k$ ערך כלשהו מן הריוח $\{x_{k-1},x_k\}$, נעמיד לדיון את הסכום:

$$f(\bar{x}_1)\Delta x_1+f(\bar{x}_2)\Delta x_2+\cdots+f(\bar{x}_n)\Delta x_n=\sum_1^n{}^k f(\bar{x}_k)\Delta x_k.$$

(הסימן $\sum_1^n{}^k$, שבו האות היוונית Σ (סִיגְמָה) רומזת למלה סכום (summa), בא לצוותנו, שניצור סכום כנגד כל ערכי k מ 1 עד n.) לכן קיים, אם הסכם במציאות:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum_1^n{}^k f(\bar{x}_k)\Delta x_k.$$

אכן כאן עלינו לבאר את התהליך של המעבר־לגבול במלים: המעבר יהיה כך, שהמכסימום של Δx_k ישאף אל 0, ולפי זה ישאף n (מספר המחוברים) אל ∞, בתנאי שהסכום $\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n=b-a$ ישאר קבוע.

כדאי לציין שבביטוי הסמלי הנ״ל לסכום משמש ציון־הסכום k רק אות־קיצור, ואינו מופיע בתוצאת הסיכום. לכן נוכל לסמנו כפי רצוננו וכפי הנוחיות בכל מקרה; כלומר, $\sum_1^n{}^k a_k=\sum_1^n{}^i a_i$, וכו׳. בהתאם לכך גם סימונו של משתנה־הסכימה אינו מעלה ואינו מוריד; קיים למשל: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$.

§2. המספר e. הלוגריתמים הטבעיים.

נתֵן לרעיונות הבאים צורה הסתכלותית, בהלבישנו אותם בגד מתוך התחום של רבית דרבית! נדבר על מַלוה הנותן את הסכום 1 (למשל: לא״י אחת) לשנה אחת ברבית של p אחוזים המשתלמת בסוף. אם נשים $\frac{p}{100}=q$, תגדל תביעת המלוה בסוף השנה עד $1+q$. המלוה ירויח בהתנותו שיקבל כנגד הקרן 1, במקום הרבית q בסוף השנה, את הרבית $\frac{q}{2}$ בסוף כל חצי־שנה; ע״י כך יוכל להלוות למחצית־השנה השניה את הקרן $1+\frac{q}{2}$ ויקבל בסוף השנה, מלבד הקרן $1+\frac{q}{2}$, עוד $\frac{q}{2}(1+\frac{q}{2})$ כרבית על $1+\frac{q}{2}$ לחצי־שנה. סה״כ יתבע אפוא בסוף השנה את הסכום $(1+\frac{q}{2})^2=(1+\frac{q}{2})(1+\frac{q}{2})$. בהתנותו שיקבל אחרי כל שליש־שנה את החלק המתאים של הרבית, היינו מכפלת הקרן ב $\frac{q}{3}$, יקבל המלוה בסוף השנה את הסכום $(1+\frac{q}{3})^3=(1+\frac{q}{3})(1+\frac{q}{3})(1+\frac{q}{3})$; סכום זה גדול ממה שהיה מקבל לפי הלואה לחצאי־שנה, הואיל והוספת הרבית אל הקרן אחרי כל שליש־שנה עדיפה לטובת המלוה (דבר, שאפשר לאשרו ע״י חשבון). קבלנו אפוא:

$$1+q<\left(1+\frac{q}{2}\right)^2<\left(1+\frac{q}{3}\right)^3$$

נוכל להמשיך תהליך זה, בהוסיפנו את הרבית על הקרן אחרי כל חודש, כל שבוע, כל יום, וכו'. כך נקבל, אם n מסמן מספר טבעי כלשהו:

$$1+q<\left(1+\frac{q}{2}\right)^2<\ldots<\left(1+\frac{q}{n}\right)^n<\left(1+\frac{q}{n+1}\right)^{n+1}<\ldots \qquad (1)$$

ובכן, מה יהיה אם יגדל n בלי קץ; כלומר, אם יַתנה המלוה שבכל רגע, ז"א באופן רציף, יוסיף הלווה את הרבית על הקרן וישלם באופן רציף רבית דרבית? התגדל אז הקרן 1 במשך שנה בקצב אינסופי — או בקצב סופי, ועד איזה סכום בסוף השנה?

מתימטיקן חריף של דורנו אמר: יש תמיד שפע של דרכים שבהן אין מצליחים להוכיח משפט מתימטי נתון. נעיין בשתי דרכים שאינן נותנות לנו תשובה על שאלתנו, ואמנם נוכל לנחש משתיהן יחד את כוון התשובה הנכונה. לפי ההגדרה 1 בעמ' 283 עלינו לסמן את הערך המבוקש — הוא הסכום המתקבל מן הקרן 1 במשך שנה לפי רבית־דרבית רציפה — ב $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$. הקושי נמצא בכך שהציון n, הגדֵל בלי סוף, מופיע פעמיים, פעם כמעריך ופעם בבסיס־החזקה.

בהגדילנו את ערכי n רק בבסיס, ישאף $\frac{1}{n}$ אל 0, ולכן הבסיס כולו אל $\lim\left(1+\frac{q}{n}\right)=1+q\cdot\lim\frac{1}{n}=1$. והנה 1^n ישאר תמיד 1, בלי תלות במידה בה יגדל n; לכן היינו מקבלים כך את הגבול 1 בשביל כל החזקה הנידונה! מאידך: אם נגדיל רק את המעריך n, הרי עומדת לפנינו חזקה (בעלת מעריך טבעי) של $1+\frac{q}{n}$, ז"א של מספר הגדול מ 1; כל חזקה כזו תגדל בלי קץ בגדול המעריך n. לפי זה יש לשער שהחזקה תשאף אל $+\infty$. לא נטעה אם ננחש, כי ערכו האמיתי של הגבול המבוקש יימצא בין הקצוות האלה, בין 1 ו $+\infty$.

הקורא היודע את „המשפט הבינוֹמי" ימצא בלי קושי את התשובה הנכונה. אבל גם בלעדי זאת נשיג את מטרתנו בהשתמשנו שוב ברעיונות של רבית דרבית. הלא עד הנה דנו ברבית „המשתלם בסוף" (פוסט־נומרַנדו). יש והלווה משלם את הרבית בראש כל תקופה (פרי־נומרנדו). בעברנו על החשבונות דלעיל לפי ההנחה הזאת, נגיע במקרה של תשלום „רציף" לידי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}$; עיין במלואים בסוף הספר. צירוף שתי המסקנות יחד לפי החשבונות שם נותן:

משפט 1: אם $q>0$, מתכנסות שתי הסדרות[1] $\left(\left(1+\frac{q}{n}\right)^n\right)$ ו $\left(\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}\right)$ ושואפות אל אותו הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$. קיימים לכל n אי־השויונות:

$$\left(1+\frac{q}{n}\right)^n<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n<\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}$$ (השוה במלואים).

בפרט ($q=1$, ז"א $p=100$) ישנו במציאות $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; את הקבוע הזה מסמנים תמיד בסימן e (שהכניסו אוילר ב 1748).

1. בסדרה הראשונה יעבור n על כל המספרים הטבעיים, בשניה על הגדולים מ q.

הגדדה זו ל e מאפשרת לקבוע את ערכו בכל דיוק רצוי (אף כי שיטה זו לחשבון e נוחה פחות משיטות ידועות אחרות). כלומר: נתַנו לא רק הוכחת מציאותו של e כי אם גם שיטת־בניה למספר הזה. בשימנו למשל $n=3$, נקבל: $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3<e<\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, ולכן נמצא e בין $2\frac{10}{27}$ ו $3\frac{3}{8}$. חשבון מדוייק יותר מראה כי פיתוחו של e לשבר עשרוני מתחיל ב $e=2{,}71828\ldots$.

נזכיר באופן היסטורי, בלי הביא את ההוכחות שהן עמוקות: אחרי שב 1815 מצא פוריֶה[1] כי e אירציונלי, הוכיח ליאוּביל ב 1840 כי e איננו שורש למשואה ריבועית בעלת מקדמים שלמים; אבל רק ב 1874 הצליח אֶרמיט להוכיח בעזרת אינטגרלים כי e מספר טרַנסצנדנטי (השוה בעמ' 181/2).

באותה הדרך שבה קבלנו מתוך $q=1$ את ערכו של e, יש לחשב מתוך ערך חיובי כלשהו של q לפי המשפט 1 את המספר $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$. דרך זו מתאימה לשיטה שבה הגדרנו בעמ' 126 את המספרים הממשיים בעזרת שתי סדרות (השוה הדוגמה 4 בעמ' 283); איברי הסדרות הם $\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$, ו $\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}$ בתנאי $n>q$ (השוה (I) ו (II) במלואים כנ"ל).

נביא בלי הוכחה את ההכללה הבאה לתיאורו של e לפי המשפט 1:

משפט 2: תהי (a_n) סדרת מספרים ממשיים כך שקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

$a_n\neq0$, ו $a_n>-1$ כנגד כל n; אז $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$.

שני המקרים הפרוטים $a_n=\frac{1}{n}$, $a_n=-\frac{1}{n}$ ידועים לנו כבר מן המשפט 1. על־סמך הקשר בין גבול־סדרה וגבול־פונקציה (עמ' 285) קל לתת למשפט 2 את הצורה המוכללת: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ קיים תמיד (בתנאי $x\neq0$) ושווה ל e.

מן המשפט 2 נופק:

משפט 3: כנגד כל מספר ממשי q קיים $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$, והוא שווה ל e^q. (אם $q<0$ יש להתנות $n>-q$.) כמו־כן $\lim\left(1+\frac{q}{y}\right)^y=e^q$, אם $y\to\pm\infty$.

משפט זה, המתכוון לכל ערכי q, נותן (הן ברישא הן בסיפא) הגדרה חדשה לפונקצית־המעריך a^x (עמ' 253) במקרה הפרוט $a=e$, אם נראה q כמשתנה הלא־תלוי; הצד האפייני שבהגדרת הרישא הנהו, שמוגדרת כאן פונקציה כגבול של סדרה, אשר איבריה מכילים באופן רציונלי (ואף שלם) את הגורם x; עם זאת מייצג הגבול את הפונקציה e^x, הקשורה ע"י העלאה־לחזקה במספר האירציונלי e. לפי זה, וכבר לפי הגדרת e במשפט 1, מתקבל על הדעת שיש ל e איזה קשר פנימי לפעולת ההעלאה־לחזקה; קשר זה יבלוט יותר בפרק י"ב.

נפיק גם מסקנה כלפי היפוך הפונקציה e^x! בעמ' 254 הגדרנו את פונקצית־הלוגריתמוס, בהשתמשנו כנהוג ב 10 כבסיס. הלוגריתמוס „הרגיל" או „העשרוני"

1. J. B. Fourier

או „של בריגס"[1] $\log a$ הוא אפוא המעריך x שבשבילו $10^x = a$ (בתנאי $a > 0$). התברר, ויתברר עוד יותר להלן, שיש לחזקה e^x יתרונות על שאר החזקות c^x $(c > 0)$, ולכן גם על 10^x; לפיכך מתקבל על הדעת להכניס גם את הלוגריתמים שבסיסם לא 10 כי אם e. הם מכונים בשם לוגריתמים טבעיים ויסומנו, כקיצור לסימן $\log_e a$, ב $\ln a$[2]. $x = \ln y$ מהווה אפוא רק ביטוי אחר ל $y = e^x$.

קיימים כרגיל לגבי a ו b חיוביים היחסים (שצורתם אינה תלויה בבסיס):

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b,\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,\ \ln a^b = b \ln a.$$

אמנם אין ללוגריתמים הטבעיים יתרונם המעשי של הלוגריתמים הרגילים: שנוכל לקבוע מיד, בלי חשבון, את ה„מציין"[3]. כנגד זה עומדים יתרונות מדעיים חשובים לטובת הלוגריתמים הטבעיים. קל המעבר מן הלוגריתמים הטבעיים אל הרגילים וחילופו, על־סמך תיאורו של x בעמ׳ 257 למטה. לפי־זה נקבל:

$$\log x = \ln x \cdot \log e = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10}.$$

למספר $M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots$ קוראים בשם מודול של מערכת הלוגריתמים הרגילים. מתקבלים אפוא הלוגריתמים הרגילים מן הטבעיים ע"י כפל האחרונים במודול M, והלוגריתמים הטבעיים מן הרגילים ע"י כפלם ב $\frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots$.

§3. טורים אינסופיים של מספרים ושל פונקציות. התכנסות במידה שווה.[4]

נעסוק קודם כל בטורי־מספרים אינסופיים, שכמה דוגמות להם הובאו בעמ׳ 261/3. על־סמך ההגדרה לגבול־סדרה קל להגדיר מהו סְכומו של טור (אינסופי).

הגדרה I: יהי נתון הטור[5] $\sum_0^\infty a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, ז"א ביטוי המקשר את אבריה של סדרת־המספרים (a_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ע"י הסימן +[6]. נכנה בשם סכומים חלקיים של הטור את הסכומים „הסופיים"

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1, \ldots, s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots.$$

---

1. H. Briggs
2. הסימן בספרות המתימטית איננו אחיד. יש שכותבים lg או log nat במקום ln; ln הנהו קיצור לשם הרומי logarithmus naturalis (=לוגריתמוס טבעי).
3. המספר השלם שלפני הפסיק ב $\log a$, מספר המתקבל על־פי תיאורו העשרוני של a.
4. פרקים על סדרות וטורים אינסופיים נמצאים בכל ספרי־תלמוד של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (עיין בעמ׳ 305). בין התיאורים המיוחדים, שמספרם גם הוא גדול, נזכיר: T. J. I'a BROMWICH: An introduction to the theory of infinite series. Revised ed. London 1926. K. KNOPP: Theory and application of infinite series. London 1938. 572 pp. J. M. HYSLOP: Infinite series. 3rd ed. 1947. 133 pp.
5. גם כאן כמובן אין הסמל ∞ מתכוון למספר „אינסופי". — פעמים נוח להתחיל ב $n = 1$.
6. לביטוי זה אין משמעות בחשבון, מכיון שהחיבור מוגדר שם רק למספר סופי של מחוברים.

אם, ורק אם, מתכנסת הסדרה (s_n), ייקרא הטור טור מתכנס; המספר $S = \lim s_n$ ייקרא אז סכום הטור, וכותבים: $\sum_0^\infty a_n = S$[1].

הואיל ואין לפנינו סכום במובן החיבור בחשבון, אלא גבול־סדרה, אין להשתמש מסתם בחוקי־החשבון הפורמליים (עמ׳ 18/20). בלי הוכחה נביא כאן חוקים אחדים שהנם תחליפי־מה לחוקים הפורמליים ההם.

$$\text{(I)}\qquad \sum a_n = \sum_0^k a_n + \sum_{k+1}^\infty a_n. \qquad (k \text{ מספר טבעי כלשהו})$$

$$\text{(II)}\qquad \sum a_n = (a_0 + \ldots + a_{k_1 - 1}) + (a_{k_1} + \ldots + a_{k_1 + k_2 - 1}) + (a_{k_1 + k_2} + \ldots) + \ldots.$$

שני החוקים האלה הנם במידת־מה תחליפים לחוק האסוציאטיבי. ואולם רק את הראשון יש להבין כמו שהוא. את השני יש לקרוא אך בכוון משמאל ימינה; לאמור: מותר להכניס סוגריים, במספר סופי או אינסופי, בטור מתכנס, אבל בדרך־כלל אסור להשמיד סוגריים. דוגמה פשוטה לאיסור זה ישמש הטור $0 = (1-1) + (1-1) + \ldots$, שאינו מתכנס בהישמד הסוגריים (דוגמה 4 לקמן).

(III) אם $\sum a_n = S$ ו $\sum b_n = T$, אז $\sum(a_n \pm b_n) = S \pm T$.

(IV) אם $\sum a_n = S$ ו c קבוע, אז $\sum(c a_n) = cS$.

(V) אם $\sum a_n = S$, $\sum b_n = T$, $a_n > 0$ ו $b_n > 0$ לכל n, ואם יוגדר $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, אז $\sum c_n = S \cdot T$.

את (III) (חיבור טורים) אפשר לראות כתחליף חלש מאד לחוק הקומוטטיבי, שאיננו קיים בדרך־כלל בתוך טורים; (IV) מתאים לחוק הדיסטריבוטיבי (עמ׳ 20). (V) מאפשר בתנאים ידועים (שאפשר להרחיבם) את הכפל בטורים.

הבה נבדוק לאור ההגדרה I את הדוגמות 1) עד 4) בעמ׳ 261/3 $(n \geq 1)$!

1) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$; הטור $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ מתכנס, וסכומו 2.

2) $a_n = \frac{1}{n}$; הטור ההַרמוני $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ איננו מתכנס.

3) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$. במלואים לעמ׳ 263 מבואר שהטור $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ מתכנס.

4) $a_n = (-1)^{n-1}$. הטור $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ איננו מתכנס, בהיות $s_{2m} = 0$, $s_{2m+1} = 1$. שונה דוגמה זו מ 2); שם ה s_n הולכים וגדלים בהתאם להגדרה II בעמ׳ 284, ואילו כאן הם מתנודדים אחת הֵנה ואחת הֵנה. (יש המכנים טורים מן הסוג הראשון „מתבדרים"[2], טורים מן הסוג השני „מתנודדים".)

---

1. אם הכוונה כי n יעבור על 0 וכל המספרים הטבעיים, נשמיט את הפרטים ונכתוב Σ סתם.
2. ברומית divergens = מתרחק, בניגוד ל convergens = מתקרב, מתכנס.

5) הטור $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$ מתכנס, וסכומו 1.
כי $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ גורר $s_n=1-\frac{1}{n+1}$.

6) בהכלילנו את 1) נמצא: הטור „הגיאומטרי" $1+q+q^2+\dots=\Sigma q^n$ מתכנס אם $|q|<1$, וסכומו $\frac{1}{1-q}$. מאידך ברור שהטור הגיאומטרי אינו מתכנס, אם $q=1$ או אם $|q|>1$; אף לא אם $q=-1$ (דוגמה 4)).

התכנסותו של הטור הגיאומטרי במקרה $|q|<1$ פותרת גם את הצד הכמותי שבמרוץ בין אכילס והצב (עמ' 260), אבל לא את הצד העקרוני שבו.

7) נוכל לראות עתה את השבר העשרוני החיובי „האינסופי" (עמ' 37;

$$m, a_1 a_2 \dots a_n \dots = m+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots=m+\sum_1^\infty n\frac{a_n}{10^n}$$

כטור מתכנס, אם הוגדר מראש מושג המספר הממשי (השוה המשפט 3 בעמ' 284).

בנִינו את הטור האינסופי על הסדרה האינסופית. אפשר ללכת גם בדרך ההפוכה; סדרות אינסופיות וטורים אינסופיים הם מושגים שקולים זה כנגד זה. אפשר להגדיר על־סמך הטורים האינסופיים, או בהתאמה כמעט שלמה להם, גם מכפלות אינסופיות. באמת יש בתוך האנליזה הגבוהה בעיות אשר נוח לגשת אליהן בכמשיר של מכפלות אינסופיות מאשר בעזרת טורים.

נצרף כאן הערה על התפתחות עמדתם של המתימטיקנים אל הטורים האינסופיים. בתקופה הראשונה של המתימטיקה החדשה, בערך עם סוף המאה השבע־עשרה, ניסו החוקרים לראות את התהליכים האינסופיים הנחוצים להם—בתוכם את הטורים האינסופיים—כהכללה פשוטה לתהליכים סופיים מתאימים; למשל את המעגל כמצולע (משוכלל) בעל אינסוף צלעות, את הטור האינסופי כסכומם של אינסוף מחוברים. (חוקרי יוון לא העיזו מעולם לגשור גשר כזה בין הסופי והאינסוף, והעדיפו להסתפק במועט מהלכד בפחים ובמוקשים הטמונים במעבר זה אל האינסוף.)

יותר מן הצורך העיוני לדייק בתהליכים ההגיוניים־מתימטיים, השפיע לשנוי־עמדה הנסיון המר שהראה כי גישה נאיבית אל האינסוף מולידה סתירות; ע"י שימוש נאיבי בטורים לא־מתכנסים אפשר להוכיח כל טענת־כזב במתימטיקה. במשך מאה שנה ויותר טרחו ובנו שיטות מדוייקות בעזרת מושג־הגבול, כדי לבסס את החשבון האינפיניטֶסימלי ואת תורת הטורים והפונקציות על יסוד מוצק. בתחילת המאה התשע־עשרה שיכלל בייחוד קושי את השיטה הזאת, שבמרכזה עומדת הסדרה המתכנסת; וַיֶירשטרַס וחבריו ירו את אבן־הפינה ע"י תורת המספרים הממשיים. אך לפני יובל שנים נעשו צעדים, המחזירים כביכול את גלגל ההתפתחות אל התקופה הקודמת, בלי הנקש בשגיאותיה.

השקפתנו היום היא זאת: הרי טור מתכנס דומה בזה לטור שאינו מתכנס, ששניהם אינם סכומים במובן הרגיל! ובכן מה עשינו כדי לתת משמעות לטורים

המתכנסים? התאמנו להם תהליך מסויים המגדיר בשבילם „סכום", והוא: סדרת הסכומים החלקיים, המתכנסת במקרה זה. והלוא בכוון זה נוכל לגשת גם אל הטורים שאינם מתכנסים, ולשאול: האפשר להתאים גם להם, או לחלק מהם, תהליך המגדיר מספר, אשר נוכל להתאימו בדרך טבעית לטור לא־מתכנס כ„סכומו"? באמת יש היום כבר תורה שלמה לטורים שאינם מתכנסים. צד מענין הוא, שהושגו בדרך זו לא משפטים עיוניים בלבד אלא גם תוצאות „מעשיות", כלומר תוצאות בעלי ערך בשביל מדעי־הטבע. מקום בראש גם במובן זה תופס משפט ידוע של פייר[1] בתורת הטורים הטריגונומטריים, שבהם נגע ב § 4.

כדי לתת לקורא מושג, אנה מועדות השיטות האלה, נציין דוגמה פשוטה ביותר: בסמננו שוב את סכומיו החלקיים של הטור ב s_n, ניצור כנגד כל ערך n את הממוצע החשבוני של $n+1$ הסכומים הראשונים:

$$\sigma_0=s_0,\ \sigma_1=\frac{s_0+s_1}{2},\dots,\ \sigma_n=\frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n+1}.$$

יש והסדרה (σ_n) מתכנסת, בו בזמן שהסדרה (s_n) אינה מתכנסת. במקרה זה יתכן להתאים לטור „הלא־מתכנס" Σa_n את המספר $\lim \sigma_n$ כ„סכום" במובן חדש.

נגסח עתה (בלי הוכחות) כמה תנאים להתכנסותו של טור!

משפט 1: טור שכל איבריו חיוביים (או כולם שליליים) מתכנס אם, ורק אם, סכומיו החלקיים מהווים סדרה חסומה (השוה משפט 3 בעמ' 284).

דוגמות: 1) הטור הגיאומטרי; 2) הטור ההרמוני (עמ' 261; אינו מתכנס) 3) הטור $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$ (מתכנס, השוה הדוגמה 5) בעמ' 292).

המשפט 1 נותן תנאי (הכרחי ומספיק) רק אם יש אותו הסימן לכל איברי הטור. תנאי כללי ניתן (השוה המשפט 4 בעמ' 284) על־ידי

משפט 2 (מבחן־ההתכנסות הכללי): הטור Σa_n מתכנס אם, ורק אם, לכל ε חיובי מתאים m כך, שכנגד כל k טבעי קיים $|a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_{m+k}|<\varepsilon$.

משפט 3: טור מתכנס יתכנס גם אם נשמיט — או נוסיף, או נשנה — מספר סופי של איברים. (השוה (I) בעמ' 291.)

משפט זה, הנובע ישר מן הקודם, מראה בעליל את הקפיצה הענקית שבמעבר מסכום סופי לטור אינסופי; כדי לתהות על קנקנו של טור, אין כל תועלת בבדיקת מספר סופי כלשהו של איבריו אלא רק התנהגות האיברים ב„אינסוף" מעידה על טיב הטור.

משפט 4: יהי Σb_n טור מתכנס שכל איבריו חיוביים. אם כנגד כל n קיים $|a_n|\leq c b_n$ (c קבוע חיובי), מתכנס גם Σa_n, ואף „בהחלט" (עמ' 294).

למשפט 4 יש תועלת רבה, בתתו לבדוק התכנסותו של טור נתון ע"י השואה אל טור שהתכנסותו ידועה. בהשוותנו טור כלשהו אל הטור הגיאומטרי נקבל:

---

1. L. Fejér

מ ש פ ט 5: Σa_n מתכנס אם בשביל כל ערכי n הגדולים למדי מתמלא התנאי $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq a<1$. (השימוש ב a נחוץ; השוה הטור ההרמוני.)

ד ו ג מ ה: הטור $\Sigma\frac{c^n}{n!}$ מתכנס בשביל כל c. (עיין בעמ׳ 32; מגדירים $0!=1$.)

מ ש פ ט 6: אם הטור Σa_n מתכנס, קיים: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

בניגוד למשפט 5, הנותן תנאי מ ס פ י ק שאינו הכרחי, הרי תנאי המשפט 6 הוא רק ה כ ר ח י. בטור ההַרמוני למשל $\lim a_n=0$, ואעפ״י כן מתבדר הטור.

בסעיף זה שמנו לב בעיקר לטורים בעלי איברים ח י ו ב י י ם. ברם הדוגמות 2) ו 3) בעמ׳ 291 הראו שיש חשיבות לסימני האיברים. לא נוכל לגולל כאן את פרשת הטורים בעלי איברים כלשהם במלואה, ונציין אך שלש עובדות:

א) יהי Σa_n טור מתכנס, בו בזמן ש $\Sigma|a_n|$ איננו מתכנס. אז אפשר להחליף את סדר האיברים ב Σa_n כך, שהטור החדש איננו מתכנס; כמו־כן קיים כנגד כל מספר נתון S שינוי בסדר האיברים כך ש S סכומו של הטור החדש. — משפט מפתיע זה מעיד על אפייו הלא־קומוטטיבי לגמרי של הטור.

ב) מ א) מתברר שיש חשיבות יתרה לתכונתו של טור, כי טור ערכיו המוחלטים $\Sigma|a_n|$ מתכנס; טור כזה נקרא „טור מתכנס בהחלט״. כל טור כזה מתכנס גם כאשר יוחלף סדר איבריו, ותמיד מתקבל אותו הסכום.

ג) אם $\Sigma|a_n|$ מתכנס, מתכנס גם Σa_n; ז״א כל טור המתכנס בהחלט, מתכנס. אם $\Sigma a_n=S$ ו $\Sigma|a_n|=S^*$, קיים $|S|\leq S^*$. את סוף המשפט הזה יש לראות כהכללת הנוסחה מעמ׳ 162 למעלה אל המקרה של „אינסוף מחוברים״.

ועתה נכניס טורי־פונקציות!

ה ג ד ר ה II: תהי $(f_0(x), f_1(x), \ldots)$ סדרת־פונקציות, ותהי כל $f_n(x)$ מוגדרת (לפחות) בתחום (ריוח) המשותף $\mathfrak{A}$. הביטוי $\Sigma f_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots$ נקרא טור־פונקציות המוגדר ב $\mathfrak{A}$. אם B תחום חלקי (ריוח חלקי) של $\mathfrak{A}$, לרבות $\mathfrak{A}=$B, כך שאצל כל ערך ξ מ B מתכנס טור־המספרים $\Sigma f_n(\xi)=f_0(\xi)+f_1(\xi)+\cdots$, נכנה B בשם „תחום־התכנסות״ („ריוח־התכנסות״) של הטור; בפרט בשם תחום־(ריוח־)ההתכנסות בה״א הידיעה, אם $\Sigma f_n(\xi)$ מתכנס אצל ערכי ξ מ B בלבד. כל ξ מ B נקרא מקום־התכנסות של הטור. — לכל ξ מ B מתאים לפי זה המספר $\Sigma f_n(\xi)$; לכן מוגדרת ב B ה פ ו נ ק צ י ה $F(x)=\Sigma f_n(x)$, כסכומו של טור־פונקציות.

ד ו ג מ ו ת: 1) תחום־התכנסותו של הטור הגיאומטרי $1+x+x^2+\ldots$ הוא $(-1,+1)$, וסכומו $F(x)=\frac{1}{1-x}$ (השוה הדוגמה 6) בעמ׳ 292).

2) תחום־התכנסותו של הטור $x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\ldots$ הוא קו־המספרים כולו, וסכומו $G(x)=\frac{1+x^2}{x}=x+\frac{1}{x}$ אם $x\neq 0$; $G(0)=0$. (השוה הציור 48 בעמ׳ 296.)

בין טורי־הפונקציות יש שני סוגים חשובים ביותר: „טורי־החזקות״ (לקמן) והטורים „הטריגונוֹמֶטריים״ (§ 4).

הטור $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ נקרא טור־חזקות. כאן $f_n(x)=a_nx^n$. (כך קוראים לטור גם אם $f_n(x)=a_n(x-c)^n$, אבל להלן נסתפק בצורה הקודמת.)

מ ש פ ט 7: לכל טור־חזקות מתאים כתחום־ההתכנסות ריוח $\mathfrak{J}=(-r,r)$, הסימֶטרי לגבי $x=0$[1]; קצות־הריוח $x=\pm r$ או אחת מהן יכולות — אבל אינן צריכות — להשתייך ל $\mathfrak{J}$[2]. אפשריים גם המקרים הקיצונים מזה ומזה, כי $\mathfrak{J}$ מצטמצם לנקודה $x=0$ (ז״א $r=0$) או יקיף את קו־המספרים כולו (כביכול $r=\infty$).

ד ו ג מ ו ת: 1) $\Sigma\frac{x^n}{n!}$ מתכנס בכל מקום (עיין בעמ׳ 294).

2) $\Sigma n!\,x^n$ אינו מתכנס בשום מקום, פרט ל $x=0$. (השוה המשפט 6 בעמ׳ 294.)

3) Σx^n מתכנס ב $(-1,+1)$ אבל לא אצל $x=\pm 1$. (עיין 6) בעמ׳ 292.)

4) $\Sigma\frac{x^n}{n^2}$ מתכנס בריוח הסגור $\{-1,+1\}$. (השוה הדוגמה 3) בעמ׳ 293.)

5) $\Sigma\frac{x^n}{n}$ מתכנס ב $\{-1,+1)$, ז״א עוד אצל $x=-1$, אבל לא אצל $x=+1$. (השוה 3) ו 2) בעמ׳ 291.) — בדוגמות 4) ו 5) מתחיל הסיכום מ $n=1$.

נעבור עתה לבעיה כללית מסויימת בקשר עם טורי־פונקציות כלשהם!

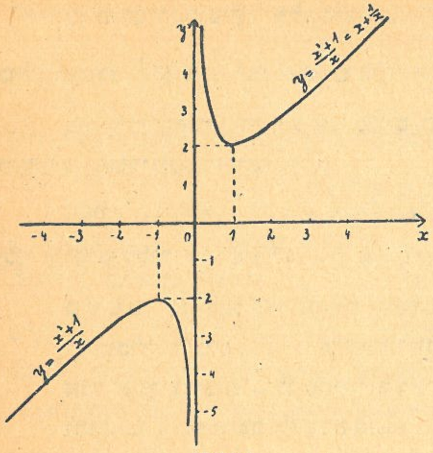
כמו שהטור הגיאומטרי Σx^n מייצג ב $(-1,+1)$ את הפונקציה הרציונלית $\frac{1}{1-x}$ (עמ׳ 294), כך מייצג למשל הטור שבדוגמה 1) לעיל כנגד כל x את e^x, והטור $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ ב $(-1,+1\}$ את $\ln(1+x)$. דוגמות אלו מלמדות שיש אשר טור־פונקציות יתאר פונקציה פשוטה למדי. אמנם לא תמיד הוא מתאר פונקציה שצורתה ידועה לנו כבר; אולם לכאורה יש לשער שטור מתכנס $F(x)=\Sigma f_n(x)$ מייצג פונקציה בעלת תכונות נורמליות, למשל רציפה (השוה בפרק העשירי, § 4; ביתר דיוק בסעיף הבא), בתנאי שהאיברים $f_n(x)$ בעצמם פונקציות נורמליות.

---

1. r נקרא מ ח ו ג - ה ה ת כ נ ס ו ת של טור־החזקות; השוה בהערה הבאה.

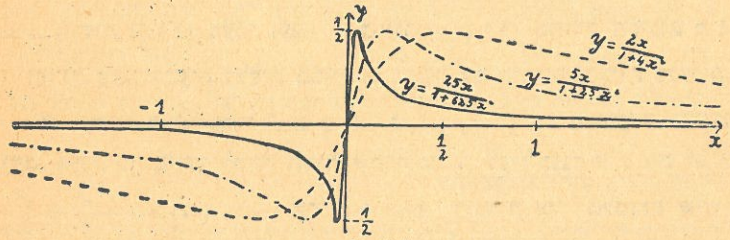
2. בהרשותנו ש x יקבל ערכים לא רק ממשיים כי אם מרוכבים כלשהם, נגיע למסקנה דומה: ה ר י ו ח הסימטרי לגבי נקודת־האפס יוחלף אז בתחום המתאים בשני ממדים, והוא: ע י ג ו ל סביב נקודת־האפס במישור של ג א ו ס. הטור מתכנס בכל מקום בפנים העיגול, ולא בשום מקום מחוצה לו; ב„מעגל־ההתכנסות״ עצמו יכולים להמצא הן מקומות־התכנסות הן מקומות של אי־התכנסות. גם כאן יש והעיגול מצטמצם לנקודה אחת (0), או מכסה את כל המישור.

חבל שאין הדבר כך! טור מתכנס של פונקציות נורמליות (למשל: רציפות) יכול לתאר פונקציה „פתולוגית" בהחלט (לא־רציפה). ב 2) בעמ' 295 למעלה היו איברי הטור הפונקציות הרציפות $f_n(x)=\frac{x}{(1+x^2)^n}$, ואילו סכום הטור לא־רציף בהחלט אצל $x=0$ (ציור 48). נתבונן אל שתי דוגמות נוספות שבהן נצא לא מן האיבר הה' $f_n(x)$ אלא מיד מן הסכום החלקי $s_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\dots+f_n(x)$.



ציור 48

יהי $s_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$. אם $x\neq 0$, קיים $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2}=\frac{0}{0+x^2}=0$; ואם $x=0$, הרי $s_n(0)=0$ כנגד כל n, ולכן גם $\lim s_n(0)=0$. לפיכך תמיד $F(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0$. והנה איך זה אפשרי שביטוי כמו $y=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ יתקרב עם $n\to\infty$ אל הפונקציה הקבועה $y=0$? רמז לדבר נותן הציור 49 שבו מופיעים, כנגד



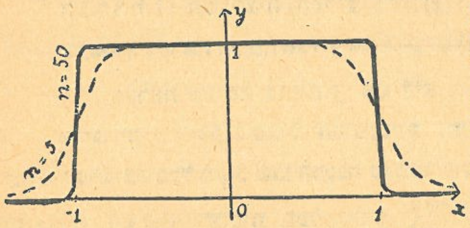
ציור 49

שלשה ערכי n (2, 5, 25), העקומים $y=\frac{nx}{1+n^2x^2}$. הצד השוה שבעקומים אלו כנגד n כלשהו: א) $y>0$ אם $x>0$, $y<0$ אם $x<0$. ב) $y(0)=0$, ז"א כל העקומים עוברים דרך נקודת־הראשית. ג) בגדול $|x|$ מתקרב העקום אל ציר ה x, ז"א אל $y=0$; ואולם לכל אחד מן העקומים יש אותו השיא $y=\frac12$ ואותו השפל $y=-\frac12$, רק שמקומותיהם x מתקרבים אל ציר ה y כגדול ערכו של n (השיא מתקבל אצל $x=\frac1n$ והשפל אצל $x=-\frac1n$). ובכן איך „שואפים" העקומים הללו, המשרכים דרכיהם, אל תכלית־הפשטות: אל קו ישר?

התשובה מפתיעה. כנגד כל $x=x_0\neq 0$ (אף אם $|x|$ קטן מאד) ישנו n כך, שבעקום $y=s_n(x)$ יימצא x_0 כבר מימין ל $\frac1n$ או משמאל ל $-\frac1n$, והפוסק

$s_n(x_0)$ כבר קרוב ל 0. כך מתבארת העובדה כי $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0$ אצל כל $x\neq0$. אם כך, ישאל אולי הקורא, היתנקם בנו העקום $y=s_n(x)$, על שהכרחנוהו לקרב את שיאו ושפלו לציר ה y, ויתקרב אל $y=\pm\frac12$ אצל $x=0$? לא ולא; שהרי אצל $x=0$ לא יזוז y ממקומו כל עיקר בהשתנות n, אלא $s_n(0)=0$ כנגד כל n. נוכל לסכם כך: התכנסות הטור אל סכומו 0 תהיה מהירה למדי אם $|x|$ גדול; היא נעשית איטית יותר ויותר במידה בה יתקרב x אל 0, כלומר: אז נהיה זקוקים ל n ההולך וגדול, ז"א ליותר ויותר מאיברי הטור. אך אין להסיק מזה שאצל $x=0$ עצמו תורע ההתכנסות עד „איטית לאינסוף", או שלא תהיה שם התכנסות כל עיקר; להיפך: דוקא שם ההתכנסות היא מעולה[1].

כדוגמה שניה נקח $s_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$. לפי זה יהיה: $F(x)=\lim s_n(x)=0$, אם $|x|>1$; $F(x)=1$, אם $|x|<1$; $F(x)=\frac12$, אם $x=\pm1$. סכום הטור אפוא הפונקציה הלא־רציפה, השוה ל 1 ב $(-1,1)$, שוה ל 0 משמאל ל -1 ומימין ל $+1$, ושוה ל $\frac12$ במקומות־המעבר ±1. והלא איברי הטור, שהם $f_0(x)=1$, $f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}-\frac{1}{1+x^{2n-2}}$, כולם פונקציות רציפות! מקור הניגוד הזה דומה למקור שבדוגמה הקודמת; עיין בציור 50, שבו מופיעים העקומים $y=s_n(x)$ כנגד שני ערכי n (5 ו 50). גם כאן אמנם מתכנס הטור בכל מקום, אבל מידת־ההתכנסות נעשית בסביבות המקומות $x=+1$ ו $x=-1$ איטית יותר ויותר; ואילו במקומות $x=\pm1$ בעצמם ההתכנסות מעולה, בהיות שם $s_n(x)=\frac12$ כנגד כל n.



ציור 50

הצד השוה שבכל הדוגמות הנ"ל הוא, שהטור מתכנס אמנם בכל מקום, אבל לא תמיד „במידה שוה"; לאמור: יש ערכי x, שבסביבתם נחוץ לקחת יותר ויותר מאיברי הטור כדי להגיע אל סכום הטור בדיוק הרצוי. אין אפוא ציון אחד k הממלא כנגד ε נתון את תנאי־ההתכנסות $|F(x)-s_k(x)|<\varepsilon$ בכל הריוח הנידון — אע"פ שלכל מקום x מתוך הריוח מתאים k המקיים את התנאי הזה; k תלוי גם במקום x, מלבד ב ε. בין כל הערכים האלה של הציון k (אשר יכול לשמש מודד ל„מהירות־ההתכנסות") אין מכסימום שכחו יפה כלפי הריוח כולו.

כדי להוציא מקרים מטרידים כאלה, נגדיר את ההתכנסות „הנורמלית" ע"י

1. שונה המצב למשל בטור הגיאומטרי $\frac{1}{1-(x+1)}=1+(x+1)+(x+1)^2+\dots$, המתכנס ב $(-2,0)$. אם נתקרב משמאל אל $x=0$, יש תמיד התכנסות, רק שתהיה איטית יותר ויותר. אין זה מפתיע; כי במקום $x=0$ אין התכנסות כל עיקר, ולכן טבעי שבסביבתו תורע מידת ההתכנסות.

הגדרה III: יהי $\Sigma f_n(x)=F(x)$ טור־פונקציות המתכנס בריוח $\mathfrak{J}$; סכומיו החלקיים יסומנו ב $s_k(x)$. אם כנגד כל מידת־דיוק ε ישנו ציון N כך שקיים $|F(x)-s_m(x)|<\varepsilon$ כנגד כל ציון $m>N$ וכל x מ $\mathfrak{J}$, נאמר שהטור מתכנס במידה שוה ב $\mathfrak{J}$.[1]

אמצעי מועיל הבודק אם טור־פונקציות מתכנס במידה שוה, נותן **משפט 8:** אם $|f_n(x)|\leq c_n$ בריוח $\mathfrak{J}$ בשביל כל n, ואם טור־המספרים Σc_n מתכנס, מתכנס טור־הפונקציות $\Sigma f_n(x)$ במידה שוה (ובהחלט) ב $\mathfrak{J}$.

§ 4. פונקציות רציפות. פיתוח פונקציה רצונית לפי מערכת של פונקציות נתונות.

ננתח ונבאר להלן כמה נושאים שנתעוררו ב § 4 של הפרק העשירי; בראשם תכונתה של פונקציה $f(x)$, להיות „רציפה" במקום מסויים $x=a$. הדוגמה שבציור 42 (עמ׳ 279) מראה, שעלינו לדרוש מ $f(x)$ גבול אצל a. אין זה מספיק, כאשר מראה הפונקציה $g(x)$ שהוגדרה בעמ׳ 282 בריוח $(0,1)$. בשבילה קיים $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=\frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2})=0$, ז"א גבולה אצל $\frac{1}{2}$ שונה מֵערכה שם.[2] נגדיר אפוא:

הגדרה I: הפונקציה (החד־ערכית) $f(x)$, המוגדרת בסביבת $x=a$ (לרבות a בעצמו), נקראת רציפה אצל a אם א) קיים $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, וב) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.[3]

$f(x)$ נקראת רציפה בריוח $\mathfrak{J}$ אם היא רציפה בכל מקום של $\mathfrak{J}$.[4]

מהגדרה זו נופק בשביל הפונקציות האלמנטריות (עמ׳ 258): כל פונקציה רציונלית רציפה בכל מקום שבו המכנה שונה מ 0. פונקצית־המעריך e^x (או a^x, $a>0$), וכן $\sin x$ ו $\cos x$ רציפות בכל מקום ($\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ רק אם המכנה שונה מ 0). $\log_a x$ $(a>0)$ ו x^b רציפות אצל כל $x>0$. גם כל פונקציה רציפה של פונקציה רציפה של x היא פונקציה רציפה של x.[5]

דוגמות מיוחדות: 1) $[x]$ רציפה אם $x=a$ איננו שלם (עמ׳ 234). 2) $\sin\frac{1}{x}$ איננה רציפה אצל $x=0$, רציפה בכל מקום אחר. ואולם $h(x)=x\sin\frac{1}{x}$ רציפה בכל מקום, אם נגדיר $h(0)=0$ (עמ׳ 280).[6]

1. N תלוי אפוא רק ב ε ולא במקום x מתוך $\mathfrak{J}$; משום כך נקראת מידת־ההתכנסות „שוה" (בכל הריוח). מדברים גם על „התכנסות־בריוח". — מושג זה נתגלה רק באמצע המאה ה 19.
2. דומה המצב באחדות מן הדוגמות חקודמות, אם המקום הנידון אחד מקצות הריוח (עיין בהערה בעמ׳ 285 למטה). למשל $[x]$ בריוח $\{0,1\}$ (עמ׳ 234); $\lim\limits_{x\to 1}[x]=0$, אבל $[1]=1$. או $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ ב $\{0,1\}$ (עמ׳ 297); $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=1$, אבל $F(1)=\frac{1}{2}$.
3. לפי זה לא תוכל $f(x)$ להיות רציפה במקום שבו גבולה $\pm\infty$.
4. אם הריוח $\mathfrak{J}$ סגור, השוה לגבי קצותיו ההערה בעמ׳ 285 למטה.
5. חלק זה של המשפט טעון דיוק נוסף לשם הבנתו השלמה. השוה ההגדרה VII בעמ׳ 245.
6. במקרה זה לא נוכל להסיק את הרציפות ב 0 מן ההסתכלות, אלא רק מהגדרותיהם

3) הפונקציה $h(x)$ שהוגדרה בעמ׳ 279 למעלה רציפה אצל כל x אירציונלי, לא־רציפה אצל כל x רציונלי.

4) $F(x)=\lim\frac{1}{1+x^{2n}}$ רציפה בכל מקום, פרט ל $x=\pm 1$ (עמ׳ 297).

נציין בלי הוכחות את המשפטים הבאים על פונקציות רציפות:

משפט 1: תהי $f(x)$ רציפה בריוח $\{a,b\}$, ויהי $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$. אם C ערך כלשהו בין A ו B, ישנו בתוך $\{a,b\}$ לפחות מקום אחד c כך שקיים $f(c)=C$.

משפט זה[1] מביע מה שנוטים לראות לאור ההסתכלות כתכונתה האפיינית של הרציפות: כי פונקציה רציפה אינה מדלגת על שום ערך מ„ערכי־הביניים".[2]

בעמ׳ 282 למטה הגדרנו שתי פונקציות ברווחים ידועים, והאחת ($\tan x$) אף רציפה בריוח הפתוח $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$; אף־על־פי־כן אין לפונקציות האלה שיא (מכסימום) בריוח הנידון. המשפט הבא קובע שתופעה כזו, היינו אי־מציאותם של שיא ושפל, לא תוכל לקרות אצל פונקציות רציפות בריוח סגור. מאידך, אם הריוח פתוח, תוכל $f(x)$ להיות אפילו לא־חסומה עם היותה רציפה.

משפט 2: אם $f(x)$ רציפה ב $\{a,b\}$, יש לה שם שיא מוחלט ושפל מוחלט.

משפט 3: אם $f(x)$ רציפה בריוח הסגור $\{a,b\}$, היא גם רציפה־במידה־שוה ב $\{a,b\}$; כלומר, לכל $\varepsilon>0$ מתאים $\delta>0$ כך, ש $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ אם x_1 ו x_2 שייכים ל $\{a,b\}$ ו $|x_1-x_2|<\delta$. (δ תלוי רק ב ε ולא במקום הנידון x_1; השוה ההגדרה III בעמ׳ 298.)

משפט 4: אם הפונקציות $f_n(x)$ רציפות בריוח מסויים $\mathfrak{J}$, ואם הטור $\Sigma f_n(x)=F(x)$ מתכנס במידה שוה ב $\mathfrak{J}$, רציפה גם $F(x)$ ב $\mathfrak{J}$.

הדוגמות מעמ׳ 296/7 מראות: אם הטור רק מתכנס „סתם", איננו צריך לייצג פונקציה רציפה. אם $f_n(x)=a_n x^n$ ו $\mathfrak{J}$ סגור, מתמלאים תנאֵי המשפט 4. לכן מתאר טור־חזקות פונקציה רציפה בכל מקום בפנים[3] ריוח־התכנסותו.

במשפט 4, וכן ב § 3, יצאנו מטור־פונקציות ובדקנו את סכומו. נוכל לגשת

המדוייקות של מושגי הגבול והרציפות. — כללו של דבר: אם $f(x)$ איננה רציפה אצל a, אבל קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ו A סופי, נוכל „לעשותה רציפה" בהגדירנו: $f(a)=A$.

1. המשפט פורסם ב 1817 ע"י B. Bolzano ולא זכה אז בהבנת בני דורו.
2. אריסטו בחר בתכונה זו כדי להגדיר את הרציפות. בספרו „פיסיקה" (עיין לעיל עמ׳ 261) הגדיר את „התנועה הרציפה" כאותה התנועה שאינה מדלגת על שום ריוח (פרט לריוח „הקטן ביותר"). כדוגמה לתנועות לא־רציפות מביא אריסטו את התנועה בתחום הטונים שבו טון גבוה יכול לעקוב טון נמוך ללא מעבר רציף. לעומת משפט זה השוה הדוגמה $y=\frac{1}{x}$ שבעמ׳ 281.
3. באמת קיימת הרציפות אפילו בכל קצה של ריוח־ההתכנסות, אם הטור מתכנס שם בכלל. ואולם הוכחת העובדה הזאת מסובכת במקצת ודורשת משפט מפורסם ידוע של אבל.

אל היחס $\Sigma f_n(x) = F(x)$ גם מן הבחינה ההפוכה; לאמור, נצא מפונקציה נתונה $F(x)$ וננסה לתארה כטור של פונקציות, שבהן נבחר בהתאם לבעיה המתימטית או הפיסיקלית שנדון בה. זה יביאנו לידי אחד הנושאים המפורסמים במתימטיקה ובמדעי־הטבע. נרמוז עליו כאן, אף־על־פי שאיננו מוגבל לפונקציות רציפות.

מצד אחד עסקנו בכמה פונקציות פשוטות, כגון 1 (קבוע), x, x^n, $\sin x$ וכו׳. קל לבדקן לכל פרטיהן ודקדוקיהן. מצד שני מעמידים אותנו מדעי־הטבע בפני כמה פונקציות — ברובן הגדול רציפות — שאינן כה פשוטות ושקיפות, כך שקשה לטפל בהן לפי שיטות־החשבון השונות (בכללן גזירה וסכימה). פונקציות כאלה מכנים בשם „פונקציות אֶמפיריות" או „רצוניות" (עמ׳ 258); כלומר, הן נתונות כפי רצוננו או רצון הטבע והטכניקה, ולא כפי מה ש„פשוט" במובן המתימטי. מתעוררת השאלה: האפשר לתאר פונקציות רצוניות בעזרת פונקציות פשוטות, הנתונות מראש? ברור מלכתחילה, שאם הכוונה לתיאור בעזרת מספר סופי קבוע מראש של הפונקציות הנתונות, נהיה כבולים עד בלי נשוא; נצא אפוא מסדרה של פונקציות, נכפול אותן במקדמים קבועים ונצרפן כך לטורים. הגענו כך אל הבעיה של פיתוח פונקציות רצוניות לפי סדרות של פונקציות נתונות.

לבעיה זו יש שני פרצופים: א) לתאר את הפונקציה הרצונית בדיוק כטור בעזרת פונקציות נתונות; ב) לקחת מספר סופי בלבד של מחוברים אשר סכומם רק יתקרב אל הפונקציה הרצונית; למשל כך שההפרש יקטן כרצוננו.

דוגמה לכך יוכל לשמש (עמ׳ 295) פיתוחה של פונקציה, אף פשוטה באופן יחסי, לטור־חזקות. הסדרה הנתונה היא אז $(1, x, x^2, \ldots)$. יש תפקיד חשוב לתיאור זה; משפט מפורסם מן החשבון האינפיניטֶסימלי, המכונה משפט טילור[1], מאפשר פיתוחן של פונקציות רבות לטורי־חזקות. נביא בלי הוכחה מקרים אחדים:

1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots, \quad a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1} + \frac{(x\ln a)^2}{1\cdot 2} + \cdots \quad (a>0)$$

2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

3) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq +1)$$

4) $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

(m חיובי, $|x| \leq 1$; m ממשי, $|x| < 1$)

בפרט $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

בהכניסנו ערך מסויים ל x, נקבל נוסחות כגון $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \cdots.$$

---

1. B. Taylor

חשיבות יתרה נודעת לפיתוח פונקציות לטורי־חזקות (או מהשקפה אחרת: להגדרת פונקציות ע״י טורי־חזקות) בתורת הפונקציות המרוכבות „האנליטיות" של גורם מרוכב, אחת התורות המשוכללות והיפות ביותר של האנליזה; אפשר לבססה כולה על טורי־חזקות (וַיֶרשטרַס). מאידך יש חסרונות לטורי־החזקות: כמו שאנשים מפונקים המתרחקים מכל סכנה אינם עשויים לכבוש מדינה פראית, כך טורי־החזקות הנם מכשיר מסודר ותקין כל כך, שאין תקוה לתאר על־ידם פונקציות „משתוללות". זה מתבטא בשני כוונים:

א) בכל ריוח סגור שבפנים תחום־התכנסותו מתכנס טור־חזקות במידה שוה, ולכן מייצג הוא פונקציה רציפה (עמ׳ 299), ואף גזירה. אין לפתח אפוא פונקציה חסרת התכונות האלה לטור־חזקות.

ב) ריוח־התכנסותו של טור־חזקות הנהו ריוח סימטרי לגבי $x=0$ (או ציר ה x כולו). לא תמיד יש לפונקציה, שהטור מתארה, זיקה מיוחדת דוקא לריוח כזה. הפונקציה $\frac{1}{1-x}$ למשל, סכום הטור Σx^n ב $(-1, 1)$, הריהי מוגדרת אצל כל $x \neq 1$, ולכן למשל אצל כל x שלילי! לפיכך ההגבלה $x > -1$ מלאכותית. כמו־כן מתכנס הפיתוח של $\ln(1+x)$ (עמ׳ 300) רק ב $(-1, 1\}$, אף כי פונקציה זו מוגדרת אצל כל x חיובי. אשמה בשני המקרים תכונת הסימטריה לריוח־ההתכנסות, המתגלית כמיטת־סדום ממש.

יש שיטות מעשיות יותר (ו„מפנקות" פחות) לפיתוח פונקציה רצונית $f(x)$, למשל פונקציה לא־גזירה, לפי מערכת של פונקציות נתונות.

אם $f(x)$ לפחות רציפה ב $\{a, b\}$, יש לקחת, תחת הפולינומים המיוחדים $1, x, x^2, \ldots$ (טור־חזקות), פולינומים כלשהם $p_n(x)$. אפשר לתאר $f(x)$ כטור $\Sigma p_n(x)$ המתכנס במידה שוה ב $\{a, b\}$. השתחררנו כך מן ההגבלה ב) הנ״ל.

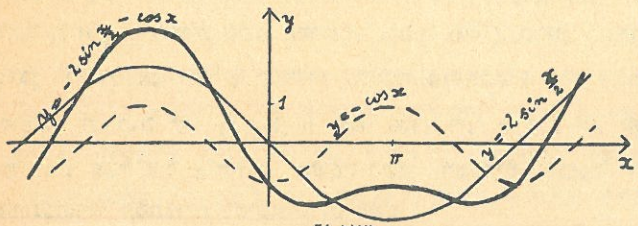
מקום דרָמטי בדברי־ימי־המתימטיקה יש לשיטה אחרת, אשר יצרה אחד המכשירים המועילים ביותר לעבודה פיסיקלית, טכנית ואף ביולוגית: הכוונה לפיתוח ל טור טריגונומטרי, ובפרט ל„טור של פוּרִיֵה".

התנועה המייצגת את הדרך y כפונקצית הזמן x בצורה $y = C\sin(\omega x + a)$ (C, ω, a מסמנים קבועים), נקראת תנודה פשוטה (או „הַרמונית"). דוגמה תשמש סטיית נקודה נעה ממרכז מסויים לצד אחד („חיובי") ולצד שכנגד („שלילי"); למשל תנועת מטולטלת־השעון, תנודות־האויר הנשמעות כטונים פשוטים, תנודות הנראות לעין כאור „חד־צבעי", וְכו׳. הואיל ושיא ה $\sin$ הוא $+1$ ושפלו -1, ערכי y הקיצונים הנם $\pm C$; לכן מכונה $|C|$ בשם „גובה־הגל". $T = \frac{2\pi}{\omega}$ נקרא „מחזור־התנודה" (או „תקופתה"); שהרי בתתנו לזמן x את התוספת $\frac{2\pi}{\omega}$, נקבל $\sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + a\right) = \sin(\omega x + a)$, ז״א את ערך־המוצא של ה $\sin$. את הערך ההפוך $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ מכנים בשם „תדירות".

בתנודה אחרת, שמחזורה מחצית המחזור של התנודה הקודמת $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$, יופיע בתיאור ל y הערך 2ω במקום ω. (C ו a יוכלו לקבל ערכים אחרים.) לכן נכתוב את החוק הראשון כ $y_1 = C_1 \sin(\omega x + a_1)$, ואת השני (בעל חצי המחזור) כ $y_2 = C_2 \sin(2\omega x + a_2)$. לתנודה השניה אמנם המחזור $\frac{T}{2}$, אבל למשל גם המחזור T, בהיות לפונקציה $\sin x$ לא המחזור 2π בלבד כי אם גם 4π וכו׳ (עמ׳ 252). כמו־כן נקבל בשביל התנודה y_n שמחזורה $\frac{T}{n}$ (השוה עמ׳ 155 למטה):

$$C_n \sin(n\omega x + a_n) = C_n(\sin a_n \cos n\omega x + \cos a_n \sin n\omega x) = k_n \cos n\omega x + l_n \sin n\omega x.$$

לכל אחת מתנודות אלו יש גם המחזור $T = \frac{2\pi}{\omega}$; לכן יש המחזור T גם לתנועה המוגדרת ע״י הסכום $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. תנועה המורכבת כך מתנודות פשוטות נקראת **תנודה מורכבת**.



ציור 51

עד כמה יכול הרכב מפונקציות סינוס וקוסינוס להרחיק צורתו מן הצורה „הטריגונו־מטרית" (עמ׳251), מראה דוגמה פשוטה כגון $y = -2\sin\frac{x}{2} - \cos x$ (ציור 51).

לפי התורה הפיסיקלית של מיתר מתנודד מתאימה התנודה „המקורית" y_1 ל„טון היסודי" של המיתר, התנודות $y_2, y_3, \ldots$ ל„טונים העליונים"; הרכב כל הטונים האלה, המתאים לסכום $y_1 + y_2 + \ldots$, יוצר את הצליל הנקלט בבת־אחת ע״י האוזן [1]. אם n יעבור על כל המספרים הטבעיים כולם, ביָצרו כך טור אינסופי, ישאר הכל בתקפו מהשקפה מתימטית, ו T ישאר מחזור — כמובן בתנאי שהטור מתכנס. (אמנם לרגלי הגבלת חוש־השמיעה לא תקלוט האוזן אלא את הראשונים בין הטונים העליונים, ופחות מהם כפי שהטון היסודי גבוה יותר. משום כך אין להבחין אצל טונים, שגבהם קרוב לגבול השמיעה, בין כלי־נגינה שונים, הואיל והגוון, הנקבע ע״י הטונים העליונים, אינו נקלט.)

נגש עתה אל התהליך בכוון ההפוך; לאמור: ננסח לפרד צליל נתון לטונים הפשוטים שהרכיבוהו, היינו לטון היסודי ולטונים העליונים. כלומר, אם נתון מיתר בעל התנודות $\sin(n\omega x + a_n)$, האפשר להרכיב כל מצב אפשרי של המיתר ממספר סופי או אינסופי של התנודות הנ״ל? בלשון המתימטיקה: האפשר לתאר

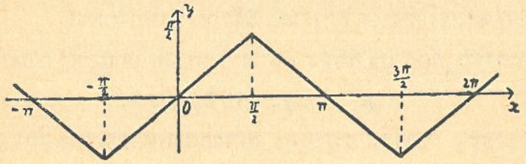
1. מכיון שאנו מרגישים באוזן את הטון גבוה יותר במידה בה יקטן מחזור־התנודה, גבוהים הטונים העליונים מן הטון היסודי (שגבהו מודד את גובה הצליל כולו). ההרכב המיוחד בין הטון היסודי והטונים העליונים נקרא „גוון־הצליל"; הוא תלוי בכלי־הנגינה.

כל פונקציה מחזורית נתונה $y = f(x)$, בעלת המחזור $T = 2\pi$ למשל (המתאים ל $\omega = 1$), כטור סופי או אינסופי $\Sigma f_n(x)$, שבו $f_n(x) = k_n \cos nx + l_n \sin nx$ (לכן $f_0(x) = k_0$), והקבועים k_n ו l_n תלויים בטיבה של $f(x)$? בזה השגנו את הקשר עם הבעיה הכללית של פיתוח פונקציה רצונית $f(x)$ לפי מערכת של פונקציות נתונות; המערכת מכילה במקרה זה, במקום חזקות של x או פולינומים, את הפונקציות

$$\cos(0 \cdot x) = 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots.$$

בענין זה התגלעה מחלוקת הריפה במחצית השניה של המאה ה 18 בין גדולי המתימטיקנים. אחרי התקרבם אל מושג ה„פונקציה הרצונית" במקום „החשבונית" (עמ׳ 258) הציגו **אוילר** וחבריו את הבעיה בצורה הנ״ל; אבל יחד עם זה טענו, שאי־שפשר לפתח פונקציה רצונית לטור טריגונומטרי: כל הרכב ע״י sin ו cos יתן לסכום אופי כה חוקי ותקין, שאין לצפות לתיאורה של פונקציה משתוללת במקצת, למשל בעלת „פינות", וכל־שכן של פונקציה לא־רציפה. ראש הטוענים נגדם היה דניאל ברנולי [1] שחייב אפשרות הפיתוח, בהסתמכו אמנם על נימוקים פיסיקליים ולא מתימטיים. רק ב 1820 בערך הצליח **פוריֶה** להסביר לבני דורו כי צדק ברנולי, וכי אפשרי הדבר אשר נראה פרדוכסלי כל־כך לקודמיו: **לפתח פונקציות רצוניות**, במובן רחב מאד של המלה (אף משתוללות למדי), **לטורים טריגונומטריים**. פוריה הסביר את טענתו בדוגמות כלליות למדי; אך **דיריקלה** נתן ב 1829 הוכחה מדוייקת (וקשה), בתנאים רכים ל $f(x)$ [2], והבאים אחריו (בראשם **רימן**) הרחיבו את מסקנתו בכוונים שונים.

דוגמות: 1) הטור $G(x) = \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots$ מתכנס תמיד (במידה שוה, השוה המשפט 8 בעמ׳ 298) ומייצג פונקציה **רציפה** בעלת המחזור 2π, השוה ל $\frac{x\pi}{4}$ ב $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, ל $\frac{\pi(\pi - x)}{4}$ ב $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ (עיין בציור 52). יש לה פינות אצל $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.



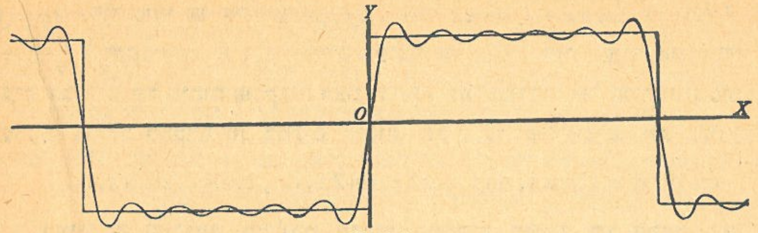
ציור 52

2) $F(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$ מתכנס תמיד ומייצג פונקציה בעלת המחזור 2π, השוה ל $+1$ ב $(0, \pi)$, ל -1 ב $(\pi, 2\pi)$, ל 0 אצל 0 ו π. $F(x)$ רציפה, פרט למקומות־**הקפיצה** $x = n\pi$. בציור 53 מופיע, מלבד העקום

1. Daniel Bernoulli

2. מספיק למשל כי הריוח $\{0, 2\pi\}$ מתפרד למספר סופי של רווחים חלקיים כך, שבכל ריוח חלקי תהיה $f(x)$ רציפה ומונוטונית. זה נותן מקום למספר סופי של קפיצות ותנודות.

$y=F(x)$ בעצמו, גם עקום $y=F_k(x)$ המציין את הסכום החלקי בעל 6 איברים:



ציור 53

עקום זה רומז איך הטור הנ"ל של פונקציות נורמליות מגיע (ע"י $k\to\infty$) לידי התנהגות פתולוגית כל־כך! נציין כי כאן — וכמו־כן בכל מקרה דומה — ערך הטור בנקודות אי־הרציפות בעצמן שוה לממוצע האריתמיטי בין „הגבול משמאל" ו„הגבול מימין"; במקרה זה שוה אפוא ל 0.

לבסוף נציין תופעה, מוזרה הן כשלעצמה הן לפי הדרך שבה נתגלתה, הנקראת על שמו של גיבס [1]. מפני חשיבותו המרובה של פיתוח פונקציות רצוניות לטורים טריגונומטריים, הומצאו מכשירים המחשבים באופן מיכני את מקדמיו של טור כזה מתוך הפונקציה הנתונה $f(x)$, ואשר בעזרתם יקל גם לשרטט את העקומים, המתארים את סכומיו החלקיים של הטור, עד 20 איבר ויותר. בהתבוננו אל תמונות גרפיות כאלה מצא גיבס, שהטור הטריגונומטרי משלם גמול־נקמה כביכול על שהכרחנוהו להתקרב אל פונקציה לא־רציפה. הטור מגדיל את קפיצותיה של $f(x)$ באחוז ידוע של גובה־הקפיצה; כך בדוגמה דלעיל עולה $F_k(x)$ קצת מעל 1 משמאל למקום $x=\pi$, ויורדת קצת למטה מ -1 מימינו; כלומר, הטור מפריז במובן מסויים על מידת אי־רציפותה של $f(x)$. מידת־ההפרזה היחסית אינה תלויה בציון k ונשארת בגדלה אף אם נקח מספר עצום של איברי הטור.

הואיל והטור מתכנס במידה־לא־שוה (עמ׳ 297/8), לא תמנע הפרזת הקפיצה מן הטור האינסופי את התלכדותו השלמה עם $f(x)$. מקומות־ההפרזה בציר ה x מתקרבים, בגדול k, למקום־הקפיצה בעצמו; אפשר לתאר כאילו, בהשאיפנו k אל ∞, נדחק את מקומות־ההפרזה עד מקום־הקפיצה בעצמו — אבל שם מקבל הטור את ערכו, שהוא הממוצע בין הגבולות מזה ומזה, בלי כל קשר עם ההתנהגות בסביבה. (השוה גם בדוגמה של ציור 49, עמ׳ 296, שבה $F(x)$ רציפה אצל $x=0$.)

תופעת גיבס יכלה להתעלם מעיני המתימטיקנים זמן ממושך, הואיל והם רגילים לשים לב לטור האינסופי יותר מאשר לסכומיו החלקיים — בניגוד לחוקרי הטבע והטכניקה, שבעבורם חשוב תיאור מקורב דוקא.

1. J. W. Gibbs. הוא גילה את התופעה בסוף המאה ה 19.

פרק שנים עשר: בעיות מן החשבון האינפיניטֶסימלי [1].

§1. מציאות הנגזרת והסֶכם. משפטים על ערכי־ביניים.

הגדרנו בעמ׳ 271 ו 286 את הנגזרת (או „מנה דיפרֶנציאלית") $\frac{df(x)}{dx}$ של הפונקציה $f(x)$, והיא תסומן מעתה עפ"י רוב ב $f'(x)$; ערכה במקום $x=a$ אפוא $f'(a)$.[2] יש לשאול מַהם התנאים (ההכרחיים והמספיקים) אשר על $f(x)$ למלאם אצל a ובסביבתו, כדי שתהיה במציאות הנגזרת.

מה שנוגע לתנאי מספיק (וכל־שכן לתנאי הכרחי ומספיק גם יחד, כמו במשפט 4, עמ׳ 284), הנה אין אנו מכירים תכונה פשוטה המבטיחה את קיום הנגזרת. לפי זה יתכן לראות את תכונת $f(x)$ להיות „גזירה" כתכונה מקורית וראשונית, כמו

1. גדול מאד מספר ספרי־הלימוד לחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (באנגלית בקיצור: calculus) בשפות השונות, הן הספרים הפונים אל תלמיד המתימטיקה ממש, הן המתכוונים אל שימושי המתימטיקה במדעי־הטבע, הטכניקה וכו׳. נקרא כאן בשם אחדים; חלק מהם מכיל גם פרקים על גיאומטריה אנליטית, משואות דיפרנציאליות (§ 4) וכו׳.

FREDERICK G. W. BROWN: Higher mathematics for students of engineering and science. London 1926. (2nd ed. 1938.) 498 pp.
ABRAHAM COHEN: Differential and integral calculus. London 1926. 572 pp.
R. COURANT: Differential and integral calculus. London. Vol. I (2nd ed., 1937), 552 pp; Vol. II (1938), 682 pp. (הופיע מקודם בגרמנית)
C. V. DURELL and R. M. WRIGHT: An introduction to the calculus. London 1927. 111 pp.
H. W. MARCH and H. C. WOLFF: Calculus. New York and London 1937. 424 pp.
C. B. BOYER: The concepts of the calculus. New York 1939. (זהו תיאור היסטורי ובקורתי)
R. P. GILLESPIE: Integration. 1947. 140 pp.
J. L. BOUCHARLAT: Éléments de calcul différentiel etc. Paris 1926. 448 pp.
E. GOURSAT: Cours d'analyse mathématique. 3 Vols. Paris (4e édition 1925). 674+685+702 pp.
R. FUETER: Das mathematische Werkzeug des Chemikers, Biologen und Statistikers. Zürich 1926. 303 pp.
E. LANDAU: Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Groningen-Batavia 1934. 368 pp.
H. von MANGOLDT — K. KNOPP: Einführung in die höhere Mathematik. 3 Bdde. 5./6. Aufl. Leipzig 1931—1933. 585+634+617 pp.
ספרים מתאימים ללימוד בביה„ס התיכוני: י. לדיז'נסקי, חשבון דיפרנציאלי וחשבון אינטגרלי. תל־אביב תרצ"ח. — ש סטרנין, 2 כרכים, ת"א תרצ"ח/ת"ש.

2. כמו בהגדרת הרציפות (I בעמ׳ 298) נאמר „$f(x)$ היא גזירה בריוח J", אם קיימת הנגזרת $f'(x)$ בכל מקום של J. אם $x=a$ אחד מקצות הריוח (הסגור), מביעה מציאות הנגזרת אצל $x=a$ את מציאותו של הגבול החד־צדדי (עמ׳ 285). — „גזיר" ר"ל „ניתן לגזירה".

תכונות הרציפות, המונוטוניה וכו׳. ואולם ב-§2 נראה כי הפונקציות הפשוטות, שהופיעו ב-§3 של הפרק התשיעי, כולן גזירות בתחום־הגדרתן.

מאידך ינתן תנאי הכרחי למציאות הנגזרת על־ידי

משפט 1: תנאי הכרחי לכך, ש-$f(x)$ גזירה אצל $x=a$, הוא רציפותה שם. לשון אחר: אם $f(x)$ גזירה במקום מסויים, $f(x)$ גם רציפה שם.

הוכחה: המשפט הנהו מסקנה ישרה מהגדרות הרציפות והגזירות. רציפותה של $f(x)$ במקום a אומרת: הגבול $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ קיים ושווה ל-$f(a)$ (עמ׳ 298), או $\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))=0$. מציאות הנגזרת אומרת: קיים $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. והנה לפי עמ׳ 286 קיים גבולה של מכפלת פונקציות וישוה למכפלת גבולותיהם של הגורמים, אם הגבולות האלה קיימים. לכן גורר קיום הנגזרת $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=f'(a)\cdot 0=0,$$
מש״ל [1].

המשפט 1 מתחוור באופן הסתכלותי לפי הדוגמות שבהן הכנסנו את מושג הנגזרת (עמ׳ 265-70): תנאי קודם למציאות המהירות ברגע מסויים יהיה, כי מידת הדרך לנקודה הנעה תשתנה באופן רציף בסביבת הרגע. כמו־כן יהיה הכרחי למציאות המשיק בנקודה מסויימת של עקום, שהעקום לא יקפוץ שם מערך לערך.

הזכרנו בעמ׳ 281 את הדעה שרווחה בתקופות קודמות, כי לכל פונקציה רציפה יש נגזרת (בריוח־הרציפות), „שהרי לכל עקום יש משיק". ראינו שם, שכבר העקומים בעלי פינות סותרים את הדבר, הואיל ולעקום כזה, המתאים לפונקציה רציפה, אין משיק מסויים במקום הפינה[2]. יש לטעון נגד דוגמה זו: ראשית, אעפ״י שהגבול אינו קיים, הרי קיימים לפחות גבול־משמאל וגבול־מימין (ולכן משיקים משמאל ומימין), רק שאינם שוים; שנית, הנגזרת חסרה רק במקום אחד (או במקומות בודדים; השוה הציורים 45/6 בעמ׳ 281). ויתכן לשער כי לפונקציה, הרציפה בריוח ידוע, תהיה נגזרת לפחות כמעט בכל מקום שבריוח.

מה שנוגע לטענה הראשונה, הנה התוודענו גם אל פונקציה שאין לה, עם היותה רציפה, אפילו נגזרת מצד אחד: היא $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ אצל $x=0$, אם

---

1. נסביר לעצמנו חשבון זה: אם אין גבול למונה $f(x+h)-f(x)$ של המנה אשר גבולה הנגזרת, או אם יש למונה גבול שונה מ-0, אי־אפשר שיהיה גבול למנה, המתקבלת בהוסיפנו את המכנה h השואף אל 0. — אל יטען הקורא, שעברנו בחשבון זה על ה„לאו" האוסר את החילוק ב-0. היינו עוברים על לאו זה אילו יצרנו את גבול המונה $f(x+h)-f(x)$ וחילקנוהו ב-$\lim h=0$. אכן יצרנו את גבול־המנה, הקיים לפי הנחתנו, וכפלנוהו ב-$\lim h$; והרי מותר לכפול ב-0.

2. דוגמה דומה: תנועת כדור־ביליארד ברגע התנגשותו עם כדור אחר; ברגע זה אין ליחס לכדור מהירות מסויימת.

נגדיר $f(0)=0$ (עמ׳ 280). אמנם יש כאן ל-$f(x)$ אינסוף תנודות, אבל גבהן הולך וקטן לקראת 0. לפיכך $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; ואילו כוון העקום $y=f(x)$ אינו שואף כל עיקר אל גבול מסויים, אלא מתנודד אנה ואנה (השוה הציור 43 בעמ׳ 280). ביתר דיוק: הנגזרת מתנודדת בין מספרים חיוביים ומספרים שליליים בעלי ערכים מוחלטים שאינם שואפים ל-0. אין לקוות לנגזרת אצל 0. באמת קיים:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\sin\frac{1}{h},$$

והרי ראינו בעמ׳ 279 שאין גבול ל-$\sin\frac{1}{h}$ אם $h\to 0$. אין למנה אפילו גבול מימין או משמאל לחוד, אף כי $f(x)$ רציפה! רק אם נצמיד את העקום עוד יותר אל ציר ה-x, בהוסיפנו עוד גורם x (כלומר: אם נקח את $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, בקבענו $g(0)=0$), אז יש גם נגזרת אצל $x=0$; כי אז נקבל:

$$\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=h\sin\frac{1}{h}\to 0$$ (עיין 5 בעמ׳ 286).

פירוש הדבר במובן הסתכלותי: אף כוון התנודות מתקרב כאן אל הכוון האפקי.

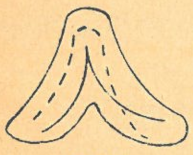
ל-$x\sin\frac{1}{x}$ יש רק מקום בודד של אי־גזירות. ואילם פונקציה זו, אשר יצאה מכלל הפונקציות שהן רציפות וגזירות יחד, לא ללמד על עצמה יצאה אלא ללמד על הכלל כולו יצאה: ישנן פונקציות הרציפות בכל מקום ושאינן גזירות בשום מקום. דוגמה לכך, שהפתיעה מאד את המתימטיקנים, נתן וירשטרס בשנות הששים של המאה התשע־עשרה. רק לפני כעשרים שנה התברר שכבר דור אחד ויותר לפני וירשטרס נתן בולצנו דוגמה של פונקציה, הרציפה ואי־גזירה בכל מקום. נרמוז לדוגמה מעין אלה במלואים (עמ׳ 349); $x\sin\frac{1}{x}$ משמשת להן בנין־אב. מעידות הן כי ההסתכלות, המבטיחה לכאורה נגזרת לכל פונקציה רציפה, אינה מסוגלת לשמש מכשיר־הוכחה מתימטי, עם היותה מכשיר־הדרכה מועיל.

כאן המקום להערה המכוונת לשימושי המתימטיקה. מכיון שיש פונקציות חסרות־נגזרות (במקומות מסויימים או בכל מקום), מהיכן למדעי־הטבע הזכות להניח כמעט תמיד כי הפונקציות המופיעות בטבע הן גזירות (אף בסדרים שונים, עיין בסוף ה-§3) — ואפילו פונקציות נעלמות שיש לחפשן?

קודם כל נוכל לראות את הקבועים המופיעים בטבע למשל כגדלים רציונליים — אף כי למתימטיקה דרושים כבר גדלים אירציונליים, כדי לאפשר פעולות גיאומטריות פשוטות (עמ׳ 119)! אמנם אין כמן סתירה. הלוא כנגד כל מספר אירציונלי α יש סדרות של מספרים רציונלים השואפים אל α, כגון הסדרה של שברים עשרוניים סופיים הקשורה בפיתוחו של α לשבר עשרוני אינסופי (עמ׳ 140) והנה כל גודל שבטבע נקבע רק בדיוק מוגבל ויחסי; שהרי ראשית, כל מדידה יוצאת לפועל בשגיאות התלויות בחסרונות חושינו ומכשירינו; שנית, גם הגדרתן

של יחידות־המדידה בעצמן, למשל המטר או השניה, נותנת מקום לסטיות קטנטנות. לכן נוכל לספק ע״י שברים פשוטים למדי דרישות־דיוק במידה המרחיקה לכת מתנאֵי־המדידה בהווה ובעתיד [1].

ועתה נפנה לעצם השאלה שעוררנוה. אם הוגדרה הפונקציה $y=f(x)$ ע״י מדידות בטבע, הרי כל פוסק y נקבע רק בדיוק מוגבל, ולכן „הנקודות" שבעקום המתאים אינן נקודות מתימטיות אלא יש להן „גובה" מסויים. לפיכך מתוארת הפונקציה בעצם לא ע״י קו (עקום) אלא ע״י פַּס (רצועה), המכיל בתוכו את העקום האידיאלי. הפונקציה הדרושה נקבעה אפוא רק באי־הדיוק המתאים לגובה הפס. והנה אי־דיוק זה מאפשר תמיד להגדיר את הפונקציה הדרושה כבעלת התכונות (רציפות, גזירות וכו׳) [2] הרצויות לנו כדי שנוכל להשתמש לגביה בפעולות המתימטיות המועילות. כך אפשר להחליף עקום רציף בעל חוד (ציור 54) בעקום מחוסר חוד (ולפי עמ׳ 301 אף בעקום המתאר פולינום); ואפילו אם הרציפות הופסקה ע״י קפיצה, יש בתוך הפס תיאורים ע״י עקומים בעלי ירידה או עליה תלולה אבל רציפה (השוה הציור 50 בעמ׳ 297).


ציור 54

בעברנו ממציאות הנגזרת אל מציאות הסֶכֶם, נמצא מצב שונה מכמה בחינות. אם לפי מושג הסכם המבואר בעמ׳ 273/4 או לפי זה של עמ׳ 287 (המעבר בין שניהם איננו קשה), קל באופן יחסי להגיע אל תכונה שמילויה ע״י $f(x)$—נוסף על החסימות — מכרעת האם $f(x)$ סכימה אם לאו (השוה במלואים, עמ׳ 350). שנית, הסכימה היא פעולה „צנועה" בהרבה מן הגזירה; לאמור: היא דורשת פחות מהפונקציה. לשון אחר: הרבה יותר פונקציות נתונות לסכימה מאשר לגזירה. מערכת הפונקציות הרציפות „עומדת באמצע". כלומר, כל פונקציה גזירה היא רציפה (לעיל משפט 1), וכל פונקציה רציפה היא סכימה (משפט 2). מאידך יש פונקציות סכימות שאינן רציפות, ויש פונקציות רציפות שאינן גזירות (עיין בעמ׳ 306). באמת נראה בעמ׳ 350/1:

משפט 2: כל פונקציה הרציפה ב $\{a,b\}$ היא גם סכימה שם; הרציפות אפוא תנאי מספיק למציאות הסֶכם. ואולם יש גם פונקציות לא־רציפות שהן סכימות.

אפשר להרחיב את מושג הסכם למקרים ידועים שבהם הפונקציה הנידונה איננה חסומה (למשל כך שיש לה במקום ידוע הגבול $+\infty$ או $-\infty$), וכמו־כן למקרים שבהם ישתרע ריוח־הסכימה בלי־קץ ימינה או שמאלה (עמ׳ 342/3).

הניגוד שבין המשפטים 1 ו 2, מקורו באפיין השונה־מיסודו של הגזירה והסכימה. הסכימה הריהי פעולה הנותנת ערכי־ממוצע; התנהגותו של עקום

1. הגבלת הדיוק שבמדידות בולטת עוד יותר אם נתחשב בממדי האטומים אשר למטה מהם אין לרדת. ואולם אין צורך לחדור עד עומק הרעיון הזה הואיל וההגבלות הנ״ל קודמות בהרבה.

2. מה שנאמר כאן על רציפות התהליכים אינו בא כמובן לסתור את אי־הרציפות העקרונית שבתהליכי הטבע לפי הפיסיקה החדישה (תורת הקְוַנטים), כמו שהרֶצֶף בתחום־הגדרתן של הפונקציות אינו בא לסתור את בנינו האטומי של החומר.

בכל חלק קטנטן אינה משפיעה הרבה על השטח המותאם, בתנאי שרוחק העקום מציר ה x בריוח הנידון לא ישתנה במידה ניכרת. (למשל: בשביל הסכם של $y=x\sin\frac{1}{x}$ בסביבת $x=0$ [עמ׳ 280] מכריעה העובדה כי $|y|$ קטן, וריבוי התנודות אינו משפיע.) יש להשוות אפוא את פעולת הסכימה להצגות הראינוע שבהן יש חשיבות לא לתמונה הבודדת שאין העין קולטתה, כי אם לצירופי התמונות.

לעומת־זאת עוקבת הגזירה אחרי תנועותיה הדקות־מן־הדקות של הפונקציה (או העקום). תנודות — ז״א שינויי־הכוון — שאינן משנות את השטח, עשויות להפוך בעיקרו את כוון המשיק ואת „ארכה" של קשת־עקום (מושג התלוי גם הוא בנגזרת); בדוגמה הנ״ל של $x\sin\frac{1}{x}$ נמנעת הגזירות מחמת התנודות אשר הסֶכם לא ירגישן כביכול. משל למה הדבר דומה? לצילום־לרגע, המגלה פנים שישתנו אחרי הרף־עין.

הן מבחינה עקרונית הן לשם השימושים חשוב לקבוע קשר בין ערכיה של פונקציה ובין ערכי הנגזרת או הסכם בצורת „שימה": כלומר, של אומדנה או אי־שויון. מטעם שיתברר מיד נקראים הקשרים הללו „משפטים על ערכי־ביניים".

את המשפט הנידון שבתחום הגזירה נבסס על ההסתכלות. (במלואים תנתן הוכחה בדרך עיונית.) תהי $y=f(x)$ גזירה ב $\{a,b\}$, כך שלעקום המתאים יש משיקים בריוח הזה. נקח בעקום (השוה בציור 36, עמ׳ 270) שתי נקודות שונות P ו P', למשל ברביע הראשון כמו בציור שם, ונסמן את הקואורדינטות של P ב (x,y), של P' ב $(x+h,y+k)$; קיים אפוא $y=f(x)$, $y+k=f(x+h)$. ההסתכלות נותנת, כי בהשתנות כוון המשיק לעקום הנ״ל בין P ו P' תושג פעם (אחת לפחות) נקודה R בין P ו P' שבה המשיק מקביל למיתר (חותך) PP'. (בציור 36 לא סומנה R; היא נמצאת בעקום $y=f(x)$ קרובה לאמצע בין P ו P'.) הפסוק של R נמצא אפוא בין x ו $x+h$; נסמנו ב $\xi=x+\theta h$ (θ מספר ממשי בין 0 ו 1 שעל ערכו לא נדע יותר).

הבה נבטא ע״י נוסחה את העובדה שהמשיק ב R מקביל למיתר PP' (בכוונו מ P ל P')! אם α הזוית בין כוונו של ציר ה x לכוון המיתר (ציור 36), קיים $\tan\alpha=\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. מאידך, אם ψ הזוית בין ציר ה x ומשיק העקום ב R, הרי $\tan\psi=f'(\xi)$ (עמ׳ 270). הואיל והמשיק מקביל למיתר, שוות שתי הזויות, ז״א $f'(x+\theta h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. נבטא זאת כך, בסמננו את הפוסק הקבוע x ב x_0:

משפט 3 (משפט־ערך־הביניים של החשבון הדיפרנציאלי): אם $f(x)$ גזירה בריוח $\{x_0,x_0+h\}$, ישנו בפנים הריוח לפחות ערך־ביניים אחד $\xi=x_0+\theta h$ $(0<\theta<1)$ כך שקיים, אם $f'(x)$ כרגיל הנגזרת של $f(x)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,;\quad\text{או}\quad f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(\xi).$$

משפט זה מאפשר לשפוט על ההפרש (הסטיה) בין שני ערכי $f(x)$ על־סמך הנגזרת של f. בלשון הגיאומטריה הוא אומר: אם נחליף בריוח $\{x_0,x_0+h\}$ את

העקום $y=f(x)$ בישר (המקביל לציר ה x) $y=f(x_0)$, לא תעלה השגיאה (ז"א הסטיה בין העקום והישר) על המכפלה של h בשיא של $|f'(x)|$ בריוח ההוא. אם לא נשים לב לשגיאות במידה זו, נוכל אפוא לקחת את הישר במקום העקום.

אם תאמר „מה מועילה שימה זו, בהעלם ערכו של ξ?" יש לומר: הרי אין בכוונתנו לחשב בדיוק את $f(x_0+h)$. חשיבות המשפט 3 בולטת דוקא כשלא נוכל (או נרצה) לחשב את ערכה של $f(x)$, הידוע אצל x_0, גם אצל x_0+h; אז נסתפק בשימה (אומדנה) של $f(x_0+h)$ בעזרת השגיאה המכסימלית הצפויה לנו בהחליפנו $f(x_0+h)$ ב $f(x_0)$.

ד ו ג מ ה: יהי $f(x)=\sqrt{x}$ [1], $x_0=1$, $h=\pm\frac{1}{100}$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, כאשר נראה בעמ' 319. אם $0{,}99<x<1{,}01$, הרי $\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{10}{\sqrt{99}}<1{,}006$; לכן נותן המשפט 3 בשביל כל h הממלא את אי־השויון $|h|\leq\frac{1}{100}$ [2]:

$$f(x_0+h)=\sqrt{1+h}=1+\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta h}}\cdot\quad\left(\left|\frac{1}{\sqrt{1+\theta h}}\right|<1{,}006\right)$$

בריוח מ 0,99 עד 1,01 מותר אפוא להחליף את הפונקציה $y=\sqrt{x}$ בפונקציה הקבועה $y=1$, אם לא נשים לב לשגיאות הקטנות מ $0{,}00503=\frac{1{,}006}{2}\cdot\frac{1}{100}$.

על יערבב הקורא את הנוסחה $f'(\xi)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (משפט 3) בהגדרת הנגזרת $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (עיין בעמ' 286). נקודת הכובד בהגדרה זו היא כי $h\to 0$, ואילו במשפט 3 הרי h ערך כלשהו. בכל זאת יש קשר פנימי בין המשפט וההגדרה, המתברר אם בנוסחת המשפט ישאף h אל 0.

אם (בסימון המשפט 3) קיים $f(x_0)=f(x_0+h)=0$, נקבל גם $f'(\xi)=0$. כלומר: אם עקום „בעל משיק" חותך את ציר ה x בשתי נקודות x_0 ו x_0+h, אז יש ב י נ י ה ן (ז"א כנגד $x=\xi$, $x_0<\xi<x_0+h$) לפחות נקודה אחת בעקום שאצלה המשיק מקביל לציר ה x. אם $f(x)$ בפרט פולינום, הרי לפנינו משפטו של ר ו ל ה (עמ' 191); אז אפשר להוכיח את המשפט לפי שיטה אריתמיטית טהורה.

מ ש פ ט 4: תהי $f(x)$ גזירה ב $\{a,b\}$, ויהי שם ת מ י ד $f'(x)=0$. אז $f(x)$ פונקציה ק ב ו ע ה. לכן, אם קיים ב $\{a,b\}$ השויון $f_1'(x)=f_2'(x)$, נקבל שם את היחס $f_2(x)=f_1(x)+c$ שבו c קבוע.

---

1. הכוונה לערכו ה ח י ו ב י של השורש הריבועי.
2. השארנו h במקום הערך הקבוע $\frac{1}{100}$, מפני שהכל נשאר בתקפו אם יקטן h יותר. ז"א אם x ערך כלשהו מתוך $\left\{1-\frac{1}{100},1+\frac{1}{100}\right\}$.

ה ו כ ח ה: באשר לרישא, אם נמצאים x_0 ו x_0+h ב $\{a,b\}$, נותן המשפט 3:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0+\theta h)=f(x_0)+h\cdot 0=f(x_0)\cdot$$

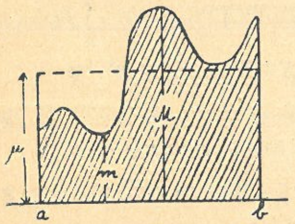
נופק שבכל מקום מתוך $\{a,b\}$ יש ל $f(x)$ אותו הערך כמו אצל x_0, מש"ל. — את הסיפא נקבל בהסתכלנו בפונקציה $f_2(x)-f_1(x)$, על־סמך (2) בעמ' 313.

גם בחשבון ה ס כ י מ ה יש משפט יסודי על „ערך־ביניים". קודם־כל נופק מיד מהגדרת הסכם (עמ' 275/6): אם $f(x)$ סכימה כנגד ב $a\leq x\leq b$ וממלאת שם את התנאי $m\leq f(x)\leq M$, קיים

$$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b M\,dx\cdot$$

לכן נמצא הסֶכם של $f(x)$ בין המספרים $m(b-a)$ ו $M(b-a)$, לרבות אלה בעצמם; הוא שוה אפוא ל $\mu(b-a)$, אם μ מסמן ערך ידוע מ $M\leq\mu\leq m$.

למסקנה זו יש משמעות הסתכלותית פשוטה. הלוא אם $f(x)\geq 0$, קובע $\int_a^b f(x)\,dx$ את שטחו של תחום, המוגבל משלשה צדדים כצורת מַלבן, ורק בצד הרביעי יוגבל ע"י העקום $y=f(x)$ בין $x=a$ ו $x=b$ (עיין בעמ' 272 ובציור 55). המסקנה שקבלנוה „הופכת" שטח זה לשטח מלבן בעל אותו הבסיס $b-a$. לפי ההסתכלות ברור שגבהו μ של מלבן זה נמצא בין גבהו המכסימלי והמינימלי של העקום מעל ציר ה x; והרי זה מה שקבלנו.



ציור 55

נניח בפרט כי $f(x)$ תהיה לא רק סכימה אלא גם רציפה ב $\{a,b\}$. אז נופק מן $M\leq\mu\leq m$ [1] לפי המשפט 1 בעמ' 299, שיש לפחות ξ אחד בין a ו b, אשר אצלו מקבלת $f(x)$ את הערך μ, ז"א $f(\xi)=\mu$; לכן קיים $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi)$. קבלנו לפי זה:

מ ש פ ט 5 (משפט ראשון [2] על ערך־ביניים מן החשבון האינטגרלי): תהי $f(x)$ סכימה בריוח $\{a,b\}$, ויהיו m חסם מלרע ו M חסם מלעיל ל $f(x)$ ב $\{a,b\}$, כך שקיים שם $m\leq f(x)\leq M$; למשל: m החסם התחתון ו M החסם העליון (עמ' 273 ו 284). אז ישנו ערך־ביניים μ $(m\leq\mu\leq M)$ שבשבילו

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,\mu\cdot$$

---

1. במקרה זה נקח את שיאה ואת שפלה של $f(x)$ בריוח כ M ו m; אפשר אז לדייק ולכתוב $m<\mu<M$ (אם אין $f(x)$ קבועה). ואולם אם $f(x)$ לא־רציפה, יוכל להיות μ שוה ל m או ל M.
2. קיימים גם משפטי־ערך־ביניים אחרים, חמרחיקים לכת יותר.

אם $f(x)$ גם רציפה, ישנו לפחות ערך אחד ξ בין a ו b, כך שקיים $\mu = f(\xi)$,

ולכן $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

הערה: במשפט 3, וכן בסיפת המשפט 5, אין ערך־הביניים ξ קבוע באופן חד־ערכי; שם למשל יש ונמצאות נקודות שונות בקשת העקום, שבהן המשיק מקביל למיתר הנתון. לעומת זאת הערך μ כאן הוא ערך מסויים, הנקרא הערך הממוצע של $f(x)$ ב$\{a,b\}$, למשל במובן של גובה המלבן שוה־השטח כמבואר לעיל (ציור 55). בטכניקה ואף בחיי יום־יום אנו משתמשים בביטוי זה, למשל בדברנו על ה„לחץ הברומטרי הממוצע" במשך חודש או על „מידת־החום הממוצעת" במשך יום או על „הצריכה הממוצעת של זרם חשמלי בתל־אביב במשך יום". כללו של דבר: „הממוצע" בין גדלים בודדים, כלומר בין ערכי־הפונקציה שכנגד מספר סופי של ערכי־הגורם, הוא הממוצע האריתמטי $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ (למשל כמות־הגשמים השנתית הממוצעת בירושלם במשך 20 השנים האחרונות); אכן אם הגורם יקבל אינסוף ערכים עקב השתנותו הרציפה בריוח $\{a,b\}$, למשל בכל רגע או בכל מקום על קו ישר, אז „הממוצע" מוגדר כמנה שבה משמש מונה הסכם $\int_a^b f(x)\,dx$, ומכנה אורך־הריוח $b-a$.

קל להגיע מן המשפט 5 אל המשפט 3 ולמצוא ע"י כך קשר בין שני המשפטים על ערכי־ביניים; קשר זה מבוסס על הקשר שבין פעולות הסכימה והגזירה.

אחרי סיימו את הסעיף הזה, נוכח הקורא בוודאי כי בחשבון האינפיניטסימלי אין מופיעים גדלים „קטנים לאינסוף" או „גדולים לאינסוף", וכל־שכן שחשבון זה אינו מתבסס על גדלים כאלה — למרות השם "infinitesimal" והמשפטים הקדומים הנתלים בו. בעצם אין סתירה במושג של גדלים כאלה, ואמנם בחלק הרביעי (כרך שני) נכיר לדעת את חשיבות הצעד, המכניס אל המתימטיקה מספרים גדולים לאינסוף. ואולם כל נסיונות מתימטיים (ופילוסופיים) בתקופות קדומות וחדישות, לבסס את החשבון האינפיניטסימלי על גדלים כנ"ל, נכשלו במלואם; איש לא הצליח, למשל, להוכיח בשיטות כגון אלה את המשפט 3. לכן עלו בתהו גם נסיונות האסכולה „הניאו־קנטית" (עיין ב§5) להשתמש בפילוסופיה (בייחוד בתורת־ההגיון הטרנסצנדנטלית) בשורש מדומה זה של האנליזה המתימטית כאבן־פינה פילוסופית. תורת־הגבול (פרק י"א) היא אשר שימשה באמונה קרקע ממנה צמחו ורבו כל ענפי האנליזה הנידונים בפרק הזה.

§2. הגזירה והסכימה בתחום הפונקציות האלמנטריות.

בפרק העשירי הרחבנו את הדבור על חשיבותן העקרונית ומובנן הגיאומטרי והפיסיקלי של פעולות הגזירה והסכימה. עתה נפנה אל השאלה המעשית איך למצוא את הנגזרת ואת הנסכמת של פונקציה נתונה $f(x)$ בלי הזדקק בכל מקרה

להגדרת הפעולות ולחשבונות הכרוכים בהן. כבר עשרות שנים לפני ניוטון חישבו המתימטיקנים בחריפות את הנסכמת ואת הנגזרת לגבי כמה פונקציות שנזדמנו להם בטפלם בבעיות שונות. אחד הצעדים המכריעים שבהם התקדמו לעומתם ניוטון ולייבניץ, הוא המצאת נוסחות שתהיינה מן המוכן לשם גזירתן וסכימתן של הפונקיות הפשוטות. חלק מהן נביא להלן.

נעיר מראש: באופן עקרוני התברר שהסכימה פשוטה מן הגזירה. ראשית, הסכם הוא גבולו של סכום והנגזרת גבולה של מנה, והרי החיבור פשוט מן החילוק. שנית, מצאנו ב§1 שהסכם קיים לגבי הרבה יותר פונקציות מהנגזרת. לעומת זאת קל לגזור את הפונקציות „האלמנטריות" (במובן של עמ' 258), וקשה יותר לסכמן. כאן בולטת חשיבות צעדם של ניוטון ולייבניץ, בעברם מן הפונקציות „הרצוניות" — אשר כלפיהן אין ברירה אלא לחזור להגדרות הגזירה והסכימה בעצמן — אל הפונקציות „הפשוטות" הנתונות ע"י נוסחות־חשבון.

נוסחות־גזירה: מהגדרת הנגזרת נופק על־סמך המשפטים מעמ' 286[1]:

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x). \tag{1}$$

$$(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x), \text{ ולכן } (c_1\cdot f_1 + c_2\cdot f_2)' = c_1\cdot f_1' + c_2\cdot f_2'. \tag{2}$$

בשביל הנגזרת של הפונקציה הקבועה $f(x)=c$ נקבל[2]:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \tag{3}$$

את הנוסחות (1) עד (3) נבטא במלים כך: נגזרת המכפלה של $f(x)$ בקבוע שוה למכפלת הנגזרת $f'(x)$ בקבוע; הנגזרת של סכום שוה לסכום הנגזרות של המחוברים; הנגזרת של כל פונקציה קבועה שוה ל0[3].

הנוסחה (3), וכמו־כן הנוסחות הבאות שבהן מופיעות פונקציות מסויימות, כחן יפה גם לגבי פונקציה אחרת $\varphi(x)$ בכל ריוח, שבו $\varphi(x)$ מתנהגת כמו הפונקציה הנידונה; למשל, קיים (3) גם לגבי $\varphi(x)=[x]$ (עמ' 234) אצל כל x שאיננו שלם.

---

1. נעיר לגבי הסימון: בa, b, c, c_k נסמן קבועים, ב$f(x)$, $g(x)$, $u(x)$, $v(x)$ וכו' פונקציות; הסימן $'$ מסמן תמיד את הנגזרת. מכיון שאין חשש שמא נבין f, f_1 וכו' כקבועים (במקום סמלי־פונקציות), נשמיט במקרים רבים את הגורם x מסימוני הפונקציות (עיין ב(2)). — הנוסחה (2) כוחה יפה כמובן גם כלפי מספר סופי כלשהו של מחוברים.

את כל הנוסחות דלקמן יש להבין תמיד לגבי מקום x שבו ובסביבתו מוגדרות הפונקציות הנידונות; ביתר דיוק: נוסחה כמו $(f_1+f_2)'=f_1'+f_2'$ ר"ל (בהתאם למה שנאמר בעמ' 286): אם קיימות הנגזרות f_1' ו f_2', אז קיימת גם $\frac{d(f_1+f_2)}{dx}=(f_1+f_2)'$ ושוה ל $f_1'+f_2'$.

2. כאן ובהוכחת (4) מדובר על יצירת הגבול ($h\to 0$) של פונקציה קבועה c. מכיון שאיננה תלויה בh כל עיקר, שוה גם „הגבול" לc. כיוצא בו גם לגבי פונקציה $\varphi(x)$ שאיננה קבועה, רק שאין מופיע בה h: $\lim_{h\to 0}\varphi(x)=\varphi(x)$ (עיין בהוכחת (4) ו(5)).

כמובן זה נכון לא במקרה $h\to 0$ בלבד אלא בכל מעבר אל גבול כגון $h\to a$.

3. זה בהתאם לכך שמשיקו של ישר, המקביל לציר הx, מקביל גם הוא לציר הx. הקורא יסביר לעצמו גם משמעותן החסתכלותית של אחדות מן הנוסחות הבאות.

כדי לגזור את הפונקציה $f(x)=x$, נחשב:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

קבלנו אפוא:

$$x'=\frac{dx}{dx}=1. \tag{4}$$

מ $f(x)=x$ נעבור אל המקרה הכללי $f(x)=x^n$ (n מספר טבעי). גם מי שאיננו יודע את ה„משפט הבינומי", הנותן את פיתוח החזקה $(x+h)^n$ בעזרת החזקות של x ו h[1], רואה מיד שהכפל של n גורמים השווים ל $x+h$ נותן מחוברים שבכולם מופיע הגורם h^2, פרט למחובר x^n ול n מחוברים השווים ל $h\cdot x^{n-1}$. לפי זה נקבל $(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+h^2(\dots)$, ולא איכפת ערך הפולינום (של x ו h) שבתוך $(\dots)$; נסמנו ב $\psi(x,h)$. לפי המשפטים מעמ׳ 286 נקבל:[2]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+h^2\psi(x,h)-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+h\psi(x,h))=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1})+\lim_{h\to 0}(h\,\psi(x,h))=$$

$$=nx^{n-1}+0\cdot\lim_{h\to 0}\psi(x,h)=nx^{n-1}+0,$$ (הואיל וישנו $\lim\psi$)

ז"א כנגד כל מספר טבעי n:

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{5}$$

יש לראות לא רק את (4) כי אם גם את (3) כמקרים פרוטים של (5), הואיל ו $x^0=1$.

בניגוד לפשטות המשפט על גבול מכפלה (עמ׳ 286) אין הנוסחה לנגזרת של מכפלה $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ כה פשוטה, ואיננה דומה לנוסחה (2) על נגזרת סכום. לפני חשבון הנגזרת נבאר תכסיס מסויים שבו נשתמש, והוא:

$$u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)=u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)$$
$$-u(x)v(x)=(u(x+h)-u(x))\,v(x+h)+(v(x+h)-v(x))\,u(x).$$

בחסרנו ובחברנו כך את $u(x)v(x+h)$, החלשנו את קשי המעבר מֵערכה של $u(x)v(x)$ אצל $x+h$ לערכה אצל x; המעבר לא יֵעשה בבת־אחת כלפי שני הגורמים אלא בשתי דרגות, כלפי גורם אחד כל פעם. לפי זה נקבל:

---

1. הפיתוח (אשר קל להוכיחו מתוך הנוסחה (5)) הוא:

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2+\dots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n-1)}x\,h^{n-1}+h^n.$$

2. אל אותה המסקנה נגיע על־סמך הזהות המתקבלת ע"י חילוק:

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}. \quad (n>1)$$

בשימנו כאן $a=x+h$, $b=x$, ולכן $a-b=h$, נקבל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\dots+x^{n-1}\right]=$$
$$=\lim\,(x+h)^{n-1}+x\lim\,(x+h)^{n-2}+\dots+\lim x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}u(x)\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}v(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}u(x).$$

כמו בנוסחות (1) ו(2) נניח כי $u(x)$ ו $v(x)$ גזירות במקום הנידון x; לא־כל־שכן שהן רציפות שם (עמ׳ 306). לכן $\lim_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ (עמ׳ 298). בסמננו, כרגיל, את הנגזרות של $u(x)$ ו $v(x)$ ב u' ו v', נכתוב:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u. \tag{6}$$

כדאי לקרוא נוסחה זו בקול רם עד שתִקָלט בזכרון באופן מיכני!

בדבר הכללת הנוסחה ליותר משני גורמים עיין במלואים.

בטרם נגש אל גזירת מ נ ה של פונקציות, נקדים את המקרה המיוחד שבו המונה 1, כלומר $f(x)=\frac{1}{v(x)}$. נקבל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)\,v(x)}.$$

עלינו להניח, כמובן, כי $v(x)\neq 0$ במקום הנידון x. לעומת זאת אין צורך להוסיף הנחה כזו כלפי המקום $x+h$; שהרי $v(x)$ היא גזירה ולכן רציפה אצל x, ולפיכך $\lim_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$. נוכל אפוא להצטמצם בערכי h קטנים כל־כך שגם $v(x+h)$, כמו $v(x)$, שונה מ 0. לכן ישאף המונה אל $v'(x)$, המכנה אל $(v(x))^2$, ונקבל:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}. \tag{7}$$

לפי זה נחשב את הנגזרת של $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}=u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}$ על־פי (6), ונקבל:

$$\left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)'=u'(x)\frac{1}{v(x)}-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}u(x)=\frac{u'(x)\frac{1}{v(x)}(v(x))^2-v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2},$$

או בקיצור:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \qquad (v(x)\neq 0) \tag{8}$$

הנוסחה (8) מכילה את (7) כמקרה פרוט. כדאי לציין אף מקרה פרוט של (7), והוא: $v(x)=x^m$, אם m מספר טבעי ו $x\neq 0$. נקבל מ (7) על־סמך (5), אם נשים $n=-m$:

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=\frac{-m}{x^{m+1}}=nx^{n-1}.$$

לאמור: (5) קיים בשביל כל n שלם, ולא רק בשביל n טבעי ו 0.

הנוסחות שקבלנון עד הנה מאפשרות לנו לחשב בדרך מיכנית וקלה את הנגזרת של כל פונקציה **ר צ י ו נ ל י ת** של x. נסתפק בדוגמה:

$$\left(\frac{x^2+ax+b}{x^3+c}\right)' = \frac{(x^2+ax+b)'\cdot(x^3+c)-(x^3+c)'\cdot(x^2+ax+b)}{(x^3+c)^2} = \text{(לפי (2), (3), (5))}$$

$$= \frac{(2x+a)(x^3+c)-(3x^2)(x^2+ax+b)}{(x^3+c)^2} = \frac{-x^4-2ax^3-3bx^2+2cx+ac}{x^6+2cx^3+c^2}.$$

אחרי גזרנו את הפונקציות הרציונליות, נדלג לע"ע על שאר הפונקציות האלגבריות ונפנה אל שני סוגים של פונקציות **ט ר נ ס צ נ ד נ ט י ו ת**.

ראשית נעסוק **ב ל ו ג ר י ת מ ו ס**. $a>0$ ישמש בסיס ללוגריתמים. לפי כללי־החשבון הידועים (עמ' 290) קיים, אם $x>0$ ו $x+h>0$:

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right).$$

בראותנו — כרגיל בסעיף זה — x כקבוע ו h כמשתנה השואף אל 0, נכניס משתנה חדש z ע"י ההגדרה $z=\frac{h}{x}$; לפי זה יעבור האגף הימני אל $\frac{1}{x}\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}$. הואיל ו $h\to 0$ גורר $z\to 0$, ו $\frac{1}{x}$ איננו תלוי ב h, נקבל כנגד $h\to 0$ את התוצאה $\frac{1}{x}\lim\limits_{z\to 0}\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}$. וכאן יזכור הקורא את היחס $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (עמ' 289), הנשאר כמובן בתקפו בהחליפנו את הסימן x ב z.

אולם תהיה זאת שגיאה גסה אם נכתוב באופן מיכני $\log_a e$ במקום $\lim\limits_{z\to 0}\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}$; כי הלוא עלינו ליצור את **ג ב ו ל ־ ה ל ו ג ר י ת מ ו ס** של החזקה $(1+z)^{\frac{1}{z}}$, ולא את **ה ל ו ג ר י ת מ ו ס ש ל ג ב ו ל ־ ה ח ז ק ה** $(1+z)^{\frac{1}{z}}$. בדרך־כלל זהו חטא פלילי במתימטיקה להחליף את הסדר בין שני תהליכים שונים. ואעפ"י כן במקרה שלפנינו מותר להחליף את הסדר בין יצירת הלוגריתמוס ובין המעבר לגבול — על־סמך העובדה שפונקצית־הלוגריתמוס היא **ר צ י פ ה** (עמ' 298).

כי אם נשים $u=(1+z)^{\frac{1}{z}}$, יהיה $\lim\limits_{z\to 0}u=e$; רציפות הלוגריתמוס אצל $u=e$ מתבטאת אפוא ע"י $\lim\limits_{z\to 0}\log_a u=\log_a e$ (הגדרה I, עמ' 298). לכן נקבל סוף־סוף:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{x}\lim_{z\to 0}\left[\log\ (1+z)^{\frac{1}{z}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e.$$

אם בפרט $a=e$, נקבל את הלוגריתמים „הטבעיים", ולפי הגדרתם (עמ' 290) קיים: $\ln e=\log_e e=1$. הגענו כן אל הנוסחות:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{9}$$

מצאנו בזה נימוק חדש להעדפת הלוגריתמים בני הבסיס e ולהכתרתם בתואר

„לוגריתמים טבעיים": ביצירת הנגזרת עלינו להוסיף, לגבי כל בסיס (חיובי) אחר a ($\neq 1$), על הערך $\frac{1}{x}$ עוד גורם קבוע, השווה ל 1 רק אם $a=e$.

נפנה עתה אל הפונקציות **ה ט ר י ג ו נ ו מ ט ר י ו ת**! אם $f(x)=\sin x$, נקבל[1]:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

לפי הנוסחה $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (עמ' 286) תשאף המנה העומדת מימין אל 1, אם $h\to 0$; שהרי $h\to 0$ שקול כנגד $\frac{h}{2}\to 0$, ותחת $\frac{h}{2}$ נוכל לכתוב אות אחת. מאידך מביעה רציפותו של $\cos x$ (השוה בעמ' 298) כי $\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$. לכן נקבל:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{10}$$

באופן דומה מתקבל בשביל $f(x)=\cos x$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

ז"א

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{11}$$

הבה נתן דוגמות אחדות לשימוש בנוסחות שמצאנו!

I: $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; $f'(x)=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

(בתנאי $\cos x\neq 0$, ז"א במקומות שבהם $\tan x$ מוגדר; הגבלות מתאימות יש להלן.)

II: $f(x)=\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{\ln x}$; $f'(x)=\frac{1\cdot(x+a)-1\cdot(x-a)}{(x+a)^2}+\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2a}{(x+a)^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

III: $f(x)=x^2\cos x\ln x$; $f'(x)=2x\cos x\ln x-x^2\sin x\ln x+x\cos x$.

נביא כאן שני משפטים כלליים, החשובים הן במובן עיוני הן לשם גזירת כמה פונקציות פשוטות. (ההוכחות נמצאות במלואים, עמ' 352/3.)

מ ש פ ט 1: תהי $u=\varphi(x)$ גזירה אצל $x=x_0$, ויהי $\varphi(x_0)=u_0$; כמו־כן תהי $y=\psi(u)$ גזירה אצל $u=u_0$. אם נראה את הגורם u של ψ כמשתנה התלוי אשר ב $u=\varphi(x)$, יופיע על־סמך „הצבה" זו y כפונקציה מסויימת $f(x)=\psi(\varphi(x))$, ז"א כפונקציה מורכבת של x (עמ' 245). בהנחות האלה יש גם ל $y=f(x)$ נגזרת אצל $x=x_0$: $(f'(x))_{x=x_0}=(\psi'(u))_{u=u_0}\cdot(\varphi'(x))_{x=x_0}$, או בקיצור: $f'(x)=\psi'(u)\cdot\varphi'(x)$. אחרי חישוב הנגזרות $\psi'(u)$ ו $\varphi'(x)$ עלינו לשים $u=u_0$ ו $x=x_0$, כדי לקבל ערכה של $f'(x)$ אצל $x=x_0$.

1. לפי הנוסחה הידועה: $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. כמו־כן נשתמש להוכחת (11) בנוסחה $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, וב I ביחס $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

הערה: לפי מה שסומנה הנגזרת עד עתה, אין לוותר על הכנסת סימן מיוחד f בשביל הפונקציה המורכבת $\psi(\varphi(x))$. כי למשל לסימון $\psi'(\varphi(x))$ אין משמעות ברורה די־צרכה: יתכן לחשוב על הנגזרת של $\psi(u)$ שבה יוכנס אחרי הגזירה $\varphi(x)$ תחת u; וגם אפשר לטעות ולהתכוון לנגזרת של הפונקציה המורכבת של x: $\psi(\varphi(x))$. את הקשיים נסלק בסמננו את הנגזרת של $y=f(x)$ לא ב y' או $f'(x)$ אלא ב $\frac{dy}{dx}$ או $\frac{df(x)}{dx}$ (עמ׳ 286). המשפט 1 אומר לפי זה $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, ולנוסחה זו יש גם מעלת החיסכון, שנוכל לוותר על סימני הפונקציות φ, ψ, f. בסימון $\frac{dy}{dx}$ מזדקר לעינים בבת אחת מהו המשתנה התלוי (y) שעלינו לגזרו, ומהו הגורם (המשתנה הלא־תלוי x) שלפיו עלינו לגזור את y. כך בולט מיד ההבדל שבין $\frac{dy}{du}$ ל $\frac{dy}{dx}$. ואמנם אין לדבר סתם על ה„נגזרת״ של פונקציה y, כי אם אך על הנגזרת לפי משתנה (גורם) מסויים; רק אם אין כל ספק, כמו במקרה $y=f(x)$, אפשר לוותר על ההוספה „לפי״.—על־פי הסימון הזה יקל להכליל את המשפט 1 אל המקרה שבין המשתנה התלוי ה„ראשון״ y ובין הגורם ה„אחרון״ x יהיה יותר ממשתנה „מתַווך״ אחד: אם למשל y פונקציה של u, u פונקציה של v, v פונקציה של x, נקבל באופן עקבי: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$. אחרי חישוב הנגזרות נכניס כאן את הערכים ה„מתאימים״; היינו, בצאתנו מ $x=x_0$, את ערכו של v המתאים ל x_0, וכו׳.

משפט 2: תהי $y=f(x)$ פונקציה (חד־ערכית) רציפה ומוֹנוֹטוֹנית בריוח $\mathfrak{J}$, כך שהפונקציה ההפוכה $x=g(y)$ תהיה גם היא חד־ערכית ורציפה בריוח המתאים $\bar{\mathfrak{J}}$ (ריוח של ערכי y; עיין בעמ׳ 240/5). אם במקום $x=x_0$ שב $\mathfrak{J}$ יש ל$f(x)$ נגזרת $f'(x_0)$ השונה מ 0, אז יש גם ל $x=g(y)$ נגזרת $g'(y)$ במקום המתאים (היינו אצל $y=y_0=f(x_0)$), וערכה: $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

הערה: בהשתמשנו גם כאן בסימון $\frac{dy}{dx}$, נתן למשפט 2 את הצורה: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. נוסחה זו יחד עם נוסחת המשפט 1 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ מבליטה, באיזו מידה מקיל סימונו זה של לייבניץ את לימוד החשבון הדיפרנציאלי. במקרים הללו, וכמו־כן בנוסחה $\frac{dx}{dx}=1$ ((4) בעמ׳ 314), מתנהגים ה„מונה״ וה„מכנה״ של הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ כאילו היו בריות בפני עצמן, עם היותם לאמיתו של דבר אך חלקים, מחוסרי משמעות בפני עצמם, של הביטוי $\frac{dy}{dx}$.[1]

המשפטים 1 ו 2 מאפשרים לנו לגזור אותן הפונקציות האלמנטריות שגזירתן אינה נכללת ב (1)—(11). ראשית (בדוגמות IV ו V) נשתמש במשפט 2.

---

1. בהמשך החשבון הדיפרנציאלי, מעבר לגבולות שבספר זה, יש לראות אל אילו שגיאות נגיע, בטפלנו באופן מיכני ב $\frac{dy}{dx}$ כבמנה רגילה בעלת מונה ומכנה.

IV: בעמ׳ 253/4 הגדרנו כנגד $a>0$ את הפונקציה a^x; לכן בפרט את $f(x)=e^x$. לפי הגדרת הלוגריתמוס הפוכה $y=e^x$ ל $x=\ln y$ (עמ׳ 254 ו 289); אין כאן הגבלה להשתנותו של x, אבל תמיד $y=e^x>0$. לכן נותן המשפט 2, אחרי החליפנו y ב x:

$$y'=(e^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x,$$

וקיים אפוא

$$(e^x)'=e^x. \tag{12}$$

כלומר, הנגזרת של e^x היא e^x עצמה. — באותה הדרך מתברר כי $(a^x)'=a^x\ln a$, נוסחה הכוללת בתוכה את (12). גם זה מראה את יתרונו של e על כל בסיס אחר ללוגריתמים, ולכן גם על כל בסיס אחר a לפונקצית־המעריך a^x.

V: $y=\sqrt{x}$. אם נקבע $x>0$ ו $y>0$, תהיה הפונקציה חד־ערכית, מונוטונית ורציפה. מכיון ש $y=\sqrt{x}$ הפוכה ל $x=y^2$, נקבל:

$$y'=(\sqrt{x})'=\frac{1}{(y^2)'}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

נוכל לכתוב זאת גם בצורה $(x^p)'=p\,x^{p-1}$, אם נשים $p=\frac{1}{2}$. באותה הדרך מתברר כנגד m ו n שלמים ו $n\neq 0$, כי קיים בשביל $x>0$: $(x^{\frac{1}{m}})'=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$, וכמו־כן (בעזרת המשפט 1) $(x^{\frac{m}{n}})'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. לאמור: (5) נכון אף לכל n רציונלי.

VI: גם את הפונקציות הציקלוֹמֶטריות, ההופכות את הטריגונומטריות, אפשר לגזור על־סמך המשפט 2, אם תוגבלנה כך שתהיינה חד־ערכיות.

מה שנוגע למשפט 1 (עמ׳ 317), הריהו נחוץ לשם גזירת פונקציות „מורכבות״ $f(x)=\psi(\varphi(x))$, אם כבר למדנו לגזור את הפונקציות φ ו ψ. $u=\varphi(x)$ גורר $f(x)=\psi(u)$. כדי לגזור $f(x)$, עלינו לגזור את ψ לפי הגורם u, להכניס בנגזרת תחת u את $\varphi(x)$ ולכפול עוד בנגזרת של u לפי x. על תהליך זה של פילוג הגזירה לחלקים אפשר לחזור כמה פעמים (עיין בדוגמות IX ו X). כך נצליח לגזור גם פונקציות מסוג חדש לכאורה: חזקה, שבסיסה ומעריכה כאחד תלויים ב x.

דוגמות. (את התנאים למציאות הנגזרת לא נפרש בכל מקרה.)

VII: $f(x)=x^x$. מכיון ש $x=e^{\ln x}$, נכתוב: $f(x)=e^{x\ln x}$ ונקבל:

$$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=e^{x\ln x}(1\cdot\ln x+\frac{x}{x})=x^x(\ln x+1).$$

VIII: $f(x)=x^n$ (n אירציונלי). נשתמש שוב ב $x=e^{\ln x}$ ונקבל:

$$(x^n)'=(e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}\,(n\ln x)'=x^n\frac{n}{x}=n\,x^{n-1}.$$

מצאנו כך כי (5) קיים אפילו לגבי כל n ממשי אם $x>0$.

אין זה מקרה שטרחנו ארבע פעמים כדי להוכיח את (5) ולהרחיבו עד לתחום הממשי כולו; שהרי בביטוי x^n נכללים ארבעה סוגי פונקציות: שלמות, רציונליות, אלגבריות וטרַנסצנדנטיות, לפי ערכיו של n.

IX: $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. כאן נכניס לא רק משתנה מתַוך אחד, שהוא $u=x+\sqrt{x^2-1}$, אלא גם את המשתנה $v=x^2-1$, על־מנת להסתמך על V.

$$f'(x)=\frac{x'+(\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

X: $f(x)=\ln\cos e^x$. נשים $u=\cos e^x$, $v=e^x$, ונקבל:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos e^x}\,(\cos e^x)'=\frac{1}{\cos e^x}\,(-\sin e^x)\,(e^x)'=-e^x\tan e^x\,.$$

אין לפני הקורא, ברצותו לרכוש נסיון בגזירת פונקציות, דרך אחרת מחישוב דוגמות רבות עד שתהיה הגזירה בשבילו תרגיל קל כמו הכפל.

מצאנו שהנגזרת של פונקציה אלמנטרית גם היא פונקציה אלמנטרית, וקל לחַשבה. מסובך יותר המצב בחשבון האינטגרלי. לא נוכל להכניס את ראשנו לתוך הבעיה הקשה של סכימת הפונקציות, אף הפשוטות ביותר — הדורשת דרך־אגב גם חשבונות ארוכים. אך נציין קווים אפייניים אחדים, ולשם כך נשוב אל עצם השאלה (השוה עמ׳ 8—272): מהו האינטגרל של פונקציה נתונה?

מצד אחד מצאנו שם שהסָכם $\int_a^b f(x)\,dx$ הוא מספר הקובע, לפחות אם $f(x)\geqq 0$, שטחו של תחום מסויים במישור. מספר זה תלוי כמובן בקצוות a ו b. מצד שני מצאנו (עמ׳ 277/8): אם נכניס כקצהו העליון[1] של האינטגרל $\int_a^b f(x)\,dx$ משתנה תחת הקבוע b, יתאר האינטגרל פונקציה של אותו משתנה, והנגזרת של הפונקציה תהיה f. ננסח „משפט יסודי" זה כך: (בדבר הוכחתו עיין במלואים.)

משפט 3: אם $f(\xi)$[2] רציפה בריוח $a\leqq\xi\leqq b$, תהיה $F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ פונקציה גזירה — וכל־שכן רציפה — של הקצה העליון x. אם x נמצא בפנים הריוח; היא נקראת „פונקציה קדומה" או „נסכמת" של $f(x)$, ונגזרתה היא $F'(x)=f(x)$.

נרחיב עתה את הדיבור על מקרה זה! $F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ היא אמנם פונקציה של הקצה העליון x, ותלויה כמובן בפונקציה „המסתכמת" f. אבל מלבד זה משפיע על ערכיה גם הקצה התחתון a. משום כך לא יכולנו לקרוא $F(x)$

1. מצב דומה לזה יווצר כאשר ישאר הקצה העליון קבוע וישתנה התחתון.

2. מכיון שלא איכפת איך יסומן משתנה־הסכימה (עמ׳ 277) נסמנו כאן ב ξ, כדי שהאות x תשאר לרשותנו בשביל גורם הפונקציה המוגדרת ע"י תהליך הסכימה.

„הנסכמת" בה"א הידיעה, ולפי זה מכנים $F(x)$ גם בשם „האינטגרל הלא־מסויים של $f(x)$", שם הרומז על החופש בבחירת הקצה התחתון a. הפונקציות השונות המופיעות כנסכמת והמבטאות את השטח המתאים ל $f(x)$ עד הפוסק המשתנה x (עמ׳ 277), שונות ביניהן לגבי הערך $x=a$ שממנו נתחיל לחשב את השטח. בהתחילנו אצל ערך אחר $x=b$ נקבל את הנסכמת $\int_b^x f(\xi)\,d\xi$; ההפרש בינה ובין $F(x)$ שוה לקבוע $\int_b^a f(\xi)\,d\xi$, על־סמך ה) בעמ׳ 276.

הסכימה הלא־מסויימת הופכת, כפי שראינו, את פעולת הגזירה, בהגדירה פונקציה $\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ שנגזרתה היא $f(x)$. ואולם טרם הוברר אם מצאנו בזאת את כל הפונקציות שנגזרותיהן שוות ל $f(x)$. נקח למשל את הפונקציה הקבועה $f(x)=0$. כנגד כל קבוע a וכנגד כל x נקבל את הערך $\int_a^x f(\xi)\,d\xi=\int_a^x 0\,d\xi=0$, מכיון שהסָכם מגדיר שטח מלבן שגבהו 0; ואעפ"כ יש מלבד $F(x)=0$ עוד אינסוף פונקציות אחרות $F(x)$, שנגזרותיהן הן $F'(x)=f(x)=0$. שהרי בהתאם ל (3) בעמ׳ 313 נוכל לבחור בכל פונקציה קבועה $F(x)=c$, ולאו דוקא ב $F(x)=0$. למסקנה זו יש משמעות פשוטה: התכונה, שהמשיק מקביל בכל נקודה לציר ה x, שייכת לא לציר ה x ($y=0$) בלבד כי אם לכל ישר $y=c$ המקביל לציר ה x.

אחרי הכנה זו לא יפתיענו הפתרון הבא לבעיה הנ"ל:

משפט 4: אם $F_1(x)$ ו $F_2(x)$ פונקציות בעלות אותה הנגזרת (הרציפה) $f(x)$, אז ההפרש ביניהן קבוע: $F_1(x)-F_2(x)=C$. מפונקציה אחת כזו $F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ נקבל אפוא את כל חברותיה בעלות אותה הנגזרת $f(x)$ בצורה: $F(x)+C$. מאידך יש כמובן לכל פונקציה בעלת הצורה $F(x)+C$ הנגזרת $f(x)$.

הוכחת המשפט נובעת מיד ממסקנות שקבלנון כבר. אם בריוח $\{a,b\}$ קיים $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$, הרי זאת אומרת לפי (2) בעמ׳ 313: $(F_1(x)-F_2(x))'=0$. לשון אחר: אם נשים $F_1(x)-F_2(x)=F(x)$, נקבל $F'(x)=0$ ב $\{a,b\}$. והנה זה גורר אחריו, לפי המשפט 4 בעמ׳ 310, $F(x)=C$, לאמור $F_1(x)=F_2(x)+C$.

סיפת המשפט נובעת במישרין מ (2) ו (3) בעמ׳ 313.

בהתאם למשפט 4 נכנה $\int_a^x f(\xi)\,d\xi+C$ האינטגרל הלא־מסויים או הנסכמת של $f(x)$. הנסכמת גם היא פונקציה של x, וביתר דיוק: מסגרת לאינסוף פונקציות של x, המתקבלות מאחת מהן ע"י הוספת מחוברים קבועים[1]. מכיון שהביטוי

1. לכאורה מופיעים כאן שני גדלים לא־מסויים: a ו C. אבל אין כל חשיבות לערכו של a; כי בקחתנו קצה תחתון אחר a^*, נוסיף רק מחובר קבוע, הואיל וקיים $\int_a^x f(\xi)\,d\xi=\int_a^{a^*} f(\xi)\,d\xi+\int_{a^*}^x f(\xi)\,d\xi$; והרי $\int_a^{a^*} f(\xi)\,d\xi$ הנהו קבוע. המחובר C בלבד כולל אפוא את כל אפייה הלא־מסויים של הנסכמת.

$\int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi + C$ מסובך במקצת ומכניס את הקבוע a שלא־לצורך. רגילים לסמן את הנסכמת בסימן $\int f(x)\,dx$ בלבד, עם או בלי ההוספה $+C$; האות x המופיעה כאן משמשת גורם לפונקציה שהוגדרה כנסכמת. כל ערך מסויים של הנסכמת — כלומר, ערך הנסכמת כנגד C מסויים — נקרא גם „פונקציה קדומה" של $f(x)$ (עיין בעמ׳ 320); בשם הזה תכוּנה אפוא כל פונקציה שנגזרתה $f(x)$.

נבאר את הקשר בין הסֶכֶם (שהוא קבוע אם קצותיו קבועים) ובין הנסכמת (שהיא פונקציה) בדרך נוספת, החשובה לשם חישוב סכמים. נניח שבדעתנו לחשב את הסכם $\int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi$. תהי $F(x)$ פונקציה קדומה כלשהי של $f(x)$; לפי מה שלמדנו לעיל ישנו קבוע C כך ש $\int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) + C$. קל לקבוע את C: על־פי הגדרת הסֶכֶם (השוה גם עמ׳ 311) קיים $\int\limits_a^a f(\xi)\,d\xi = 0$, ולכן $F(a) + C = 0$, ז״א $C = -F(a)$, או $\int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) - F(a)$. בתתנו ל x את הערך הקבוע b, נקבל:

משפט 5: תהי $F(x)$ פונקציה קדומה כלשהי של הפונקציה $f(x)$, הרציפה בריוח $\{a, b\}$, כך שקיים $f(x) = F'(x)$. אז קיים:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

שויון היוצר קשר נוח בין הסֶכם (האינטגרל המסויים) והנסכמת.

אחרי השיגנו מסקנות עקרוניות לגבי אופי האינטגרל ודרך חשבונו, נחפש נוסחות המאפשרות למעשה את סכימת הפונקציות הפשוטות ביותר. ברוב המקרים קשה לחשב את הגבול אשר בעזרתו הגדרנו את הסכם בפרק העשירי; לכן עדיף להסתמך על הגדרת הסכימה כהיפוך הגזירה. נחפש אפוא את הנסכמת (פונקציה קדומה), המאפשרת לפי המשפט 5 גם את חישוב הסכם. והנה נקבל את הנסכמות של כמה פונקציות פשוטות על־סמך הנוסחות (1)—(12) בעמ׳ 19—313, אם נסתכל בהן לאור זה: הלוא היחס $F'(x) = f(x)$ מלמד אותנו כי $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. לכן מתקבלות הנוסחות הבאות, שבהן נוותר על הוספת המחובר הרצוני $(+C)$ וגם על ציון התנאים המובנים מאליהם (כמו $x > 0$ בנוסחה [5]):

[1] $\int c\,g(x)\,dx = c\int g(x)\,dx.$ (לפי (1); השוה גם בעמ׳ 276)

[2] $\int (c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x))\,dx = c_1\int g_1(x)\,dx + c_2\int g_2(x)\,dx.$ (לפי (2))

[3] $\int c\,dx = cx.$ (לפי (4) ו [1])

[4] $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$ (m ממשי ושונה מ -1) (לפי (5) ועמ׳ 319/20)

[5] $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$ (לפי (9); זה משלים את [4] במקרה $m = -1$)

[6] $\int \sin x\,dx = -\cos x,\ \int \cos x\,dx = \sin x.$ (לפי (11) ו (10))

[7] $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x.$ (לפי I בעמ׳ 317)

[8] $\int e^x\,dx = e^x.$ (לפי (12))

[9] $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$ (לפי IX בעמ׳ 320)

אילו היתה כוונת הספר הזה להדריך את הקורא לקראת החשבונות הבאים לפתור שאלות ממדעי־הטבע והטכניקה לפי שיטות מתימטיות, כי אז היה צורך להוסיף על הנוסחות [1]—[9] נוסחות מסובכות יותר, ומלבד זה שיטות כלליות המאפשרות את הסכימה, בדיוק (פעמים) או בקירוב (תמיד). אבל מכיון שמטרתנו לתת סקירה עקרונית יותר ממעשית על הבעיות הנידונות, נסתפק בהערות אחדות.

הגזירה של פונקציה נתנה ברוב המקרים פונקציה פשוטה יותר. כנגד זה יש לסכימה אופי כמעט הפוך: מן הקבוע c מגיעים דרך הסכימה לפונקציה cx, מן הפונקציה הרציונלית $\frac{1}{x}$ לפונקציה הטרנסצנדנטית $\ln x$. הנוסחה [9] נתנה כנסכמת של $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ פונקציה, שאמנם אינה מסובכת ביותר; אבל קשה לראות איך יכולנו לקבלה, לולא הדוגמה IX [1]. וכך המצב גם במסגרת כללית: נציין בלי הוכחה כי הנסכמת של פונקציה רציונלית בדרך־כלל פונקציה טרנסצנדנטית, ואילו הנגזרת של פונקציה רציונלית הריהי תמיד רציונלית (עמ׳ 316). ולא עוד אלא אצל רוב הפונקציות האלגבריות של x — ביניהן פונקציות פשוטות למדי [2] — מתברר שהנסכמת איננה פונקציה אלגברית, ואף לא תימצא בין הפונקציות הטרנסצנדנטיות הידועות לנו מן הפרק התשיעי („פונקציות אלמנטריות")! מכיון שכך, לא נתפלא בשמענו כי לרוב הפונקציות הטרנסצנדנטיות אין נסכמת בצורת פונקציה אלמנטרית; ביניהן נמצאות פונקציות רגילות למדי כמו $\frac{1}{\ln x}$ או $\frac{\sin x}{x}$ [3]. כל זה מעיד על הבדל עקרוני בין פעולות הגזירה והסכימה: הנגזרת של פונקציה „פשוטה" גם היא תמיד פונקציה פשוטה; ואילו הנסכמת של פונקציה פשוטה איננה פונקציה אלמנטרית בדרך־כלל — פרט לפונקציות מסוג פשוט ביותר, כגון הפונקציות הרציונליות ומחלקות ידועות של פונקציות אלגבריות וטרנסצנדנטיות.

הבדל זה מבאר למה נהגו ללמד בתחילה את החשבון הדיפרנציאלי ורק אחריו את החשבון האינטגרלי — אעפ״י שבעקרון הסכימה פשוטה מן הגזירה, ואפשרית לגבי חוג רחב הרבה יותר של פונקציות (עמ׳ 308). מהשקפה

---

1. כמו־כן קיים למשל: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$, מכיון ש $(x\ln x - x)' = \ln x$. אמנם יש גם דרכים שיטתיות כדי למצוא נסכמת כזו או כ [9].

2. למשל, בדרך־כלל הפונקציות המכילות שורש ריבועי מפולינום בעל מעלה גדולה מ 2, או המכילות שורש מעוקב (או שורש גבוה יותר) מפולינום לא־ליניארי. למשל $\frac{1}{\sqrt{x^3+ax+b}}$.

3. אין זה דבר קל להוכיח אי־אפשרות כזאת: אי־האפשרות להציג כפונקציה אלמנטרית את הנסכמת של פונקציה אלמנטרית נתונה.

הגיונית מגיעה זכות־הבכורה לסכימה. מהשקפת החשבון לגזירה; מן הצד הפדגוגי כדאי ללמד את הנושאים דרך מזיגה ידועה, ולא זה אחר זה.

בקשר עם מה שלמדנו בסעיף זה יבין הקורא למה היה זה מכריע, ואפילו הכרחי, להצלחתו המעשית של החשבון האינפיניטסימלי, כי העדיפו ניוטון ולייבניץ והנלווים עליהם את מושג „הפונקציה החשבונית" על „הפונקציה הרצונית". חשיבות יתרה נודעת באמת לפונקציות „האלמנטריות".

נסיים בהזכירנו שתי בעיות, אחת עקרונית ואחת מעשית, הנובעות מאי־מציאות הנסכמות של כמה פונקציות אלמנטריות בתחום הפונקציות האלמנטריות.

א) הואיל וקיים סכם לכל פונקציה רציפה, ומכיון שהפונקציות האלמנטריות רציפות (או בכל מקום או ברווחים ידועים), נופק שיש במציאות גם נסכמת לכל פונקציה אלמנטרית (בריוח חד־ערכיותה ורציפותה). לכן אפשר ליצור מכמה פונקציות פשוטות דרך הסכימה פונקציות חדשות שאינן אלמנטריות. פעולת הסכימה הנָה מכשיר פורה ורב־גווני להגדרת פונקציות חדשות שאינן בין האלמנטריות. באמת הוקדש חלק הגון של התפתחות המתימטיקה במאה התשע־עשרה לחקירת פונקציות מוגדרות ע"י אינטגרלים, הן בתחום הממשי הן בתחום המרוכב; ונוסף על הפונקציות האלה נחקרו ההפוכות להן. לפונקציות מסוג זה יש, מלבד חשיבותן העיונית, גם כמה שימושים במתימטיקה ובפיסיקה. נקרא בשם רק את הסוג המפורסם של הפונקציות האֶלִפְּטִיוֹת שהומצאו בתחילת המאה התשע־עשרה ע"י גאוס, אבל ויעקובי[1]; הן ההפוכות לאינטגרלים בעלי הצורה $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}}$ ודומיהם, הקשורים בחשבון היקף האֶליפסה — באופן דומה לזה שבו קשורות הפונקציות הציקלומטריות בחשבון היקף־המעגל.

ב) חשבון ערכיהם של סכמים חשוב מאד במספר עצום של בעיות מתוך המתימטיקה, מדעי־הטבע, הטכניקה ואף הכלכלה — ולאו דוקא סכמי פונקציות שנסכמותיהן פונקציות אלמנטריות, כך שהסכם יוכל להקבע לפי המשפט 5. משום כך יש צורך הכרחי בשיטות אחרות של חשבון סכמים, אשר אינן נשענות על הנסכמת. חשבון הגבול שבו הגדרנו את הסכם בעמ' 287, מסובך מדי בדרך־כלל בעבור מטרות מעשיות. ואולם ישנן שיטות שונות לחישובם המקורב של סכמים: הן ע"י חשבונות במספרים (פעמים בעזרת לוחות), הן שיטות גרָפיות (המסתמכות על תיאורה המקורב של הפונקציה הנידונה ע"י עקום פשוט יותר, השונה רק מעט מן העקום המתאר את הפונקציה הנידונה בדיוק), הן בעזרת מכשירים מיכָניים הקובעים את השטח המוגדר ע"י הסכם.

כבר מן ההערות הצדדיות האלה אפשר לנחש כמה רב־גווניות ועקלקלות הדרכים שיש ללכת בהן, כדי להוציא לפועל את תפקידי הסכימה.

1. C. G. J. Jacobi

§ 3. ערכיה הקיצונים של פונקציה. נגזרות בנות סדרים שונים.

תהי הפונקציה $y=f(x)$ גזירה אצל $x=x_0$. אם $f'(x_0)>0$, קיימת לפי הגדרת הנגזרת (עמ' 286) סביבה $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ של x_0 כך ש„מנת־ההפרשים" $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ חיובית גם היא, אם x ערך מתוך אותה סביבה ו $x\neq x_0$. או לפי הסימון $x=x_0+h$: כך ש $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0$. והנה מנה זו חיובית אם, ורק אם, המונה והמכנה בעלי אותו הסימן (+ או −); לכן קיים במקרה זה, אם $|h|$ קטן למדי[1]:

$f(x_0+h)>f(x_0)$ אם $h>0$; $f(x_0+h)<f(x_0)$ אם $h<0$.

מסקנה זו אומרת: ערכה של $f(x)$ במקום $x=x_0$ גדול מאשר לפניו (שמאלה ממנו), וקטן מאשר אחריו (ימינה ממנו). כלומר, בשים־לב לתיאור הגיאומטרי ע"י העקום $y=f(x)$: העקום עובר בעליה את הנקודה P בעלת הקואורדינטות x_0 ו $f(x_0)$, עיין למשל בציור 36 (עמ' 270).

אם להיפך $f'(x_0)<0$, נגיע למסקנה מתאימה באותה הדרך; אז $f(x_0+h)<f(x_0)$ כנגד $h>0$, $f(x_0+h)>f(x_0)$ כנגד $h<0$. לכן עובר העקום בירידה את הנקודה P. כך קבלנו:

משפט 1: אם $f(x)$ גזירה במקום $x=x_0$, היא עולה שם אם $f'(x_0)$ חיובי, ויורדת שם אם $f'(x_0)$ שלילי.

תרגיל מועיל, בעל אופי הגיוני יותר ממתימטי, יהיה לקורא, בהתבוננו איזו מסקנה יש להוציא מן המשפט 1 במקרה $f'(x_0)=0$. בוודאי יימצאו הרוצים להסיק, כי במקרה זה $f(x)$ לא תעלה ולא תרד אצל $x=x_0$. היסק זה איננו נכון! נוכל להראות זאת בשתי דרכים שונות לגמרי: או בציינֵנו את השגיאה ההגיונית שבמסקנה, או בתתנו דוגמה של פונקציה $f(x)$, העולה (או היורדת) אצל $x=x_0$ עם היות $f'(x_0)=0$. נלך בשתי הדרכים המשלימות זו את זו!

אם לפנינו טריכוטומיה הגיונית (חלוקת כל המקרים האפשריים לשלשה סוגים, הסותרים זה את זה), ואם הסוג הראשון גורר תכונה מסויימת I והסוג השני תכונה נגדית II, הרי לפי ההגיון נשאר חופש גמור לסוג השלישי; הסוג הזה יכול להכיל מקרים בעלי התכונה I, בעלי התכונה II וגם מקרים בעלי תכונה כלשהי השונה מ I ומ II. נחלק למשל את כל ימי השנה לשלשת הסוגים האלה: א) ימי חול ושבתות; ב) שלש רגלים (פרט לשבתות); ג) ימים נוראים (פרט לשבתות). בכל יום מן הסוג ב) קוראים את ה„הלל"; בכל יום מן הסוג ג) אומרים „אבינו מלכנו"; בכל זאת יש בין הימים מן הסוג א) כאלה, שבהם אומרים או „הלל", או „אבינו מלכנו", או לא זה ולא זה[2].

1. ז"א אם $x=x_0+h$ נמצא בריוח, שבעבורו נשארת מנת־ההפרשים חיובית.

2. או נקח דוגמה חילונית. נתאר לנו אוניברסיטה אשר יש בה תלמידים, מרצים ופקידים, וקיים בה החוק שהתלמידים יהיו למטה מן הגיל 25 והמרצים למעלה מן הגיל 35. אין זה גורר שהפקידים יימצאו דוקא בגיל בין 25 ל 35.

בירור הגיוני זה מראה רק כי מהשקפה הגיונית אין המשפט 1 גורר מסקנה מסויימת למקרה $f'(x_0)=0$. והנה דוגמות פשוטות למדי מראות כי גם בפועל נשארו במקרה $f'(x_0)=0$ שלש האפשרויות: כי $f(x)$ תעלה, או תרד, או לא תעלה ולא תרד במקום x_0. לאפשרות האחרונה תנתנה דוגמות בקרוב. דוגמה לאפשרות הראשונה תשמש $y=x^3$ במקום $x=x_0=0$ (עיין בציור 26, עמ' 241); הנגזרת $y'=3x^2$ מקבלת אצל 0 את הערך 0, ועם זאת עולה שם y, הואיל ואצל $x<0$ גם $x^3<0$, ואצל $x>0$ גם $x^3>0$. דוגמה למקרה השני תשמש $y=-x^3$.

מה אפשר להסיק בכל זאת דרך ההגיון מן המשפט 1? נבדוק מה נוכל לטעון על הנגזרת (בתנאי שהיא קיימת). אם הפונקציה לא תעלה ולא תרד במקום $x=x_0$. הערך $f'(x_0)$ לא יוכל אז להיות לא חיובי ולא שלילי, מפני שבמקרה הראשון תעלה $f(x)$ ובמקרה השני תרד. $f'(x_0)=0$ קיים אפוא אם $f(x)$ לא תעלה ולא תרד אצל x_0. הבה נברר, במובן מתימטי ולא רק הגיוני, אם דבר זה יוכל להיות באמת. מלבד המקרה הטריביאלי שבו $f(x)$ קבועה בסביבה ידועה של x_0, באמת יש שתי אפשרויות שונות פשוטות למדי לכך כי $f(x)$ לא תעלה ולא תרד וגם לא תהיה קבועה (אפילו רק משמאל או רק מימין). נראה זאת באופן אבטומטי בנתחנו את המושגים „פונקציה עולה" ו„יורדת". $f(x)$ נקראת, למשל, „עולה" אצל x_0 אם משמאל ל x_0 ערכיה קטנים, ומימין ל x_0 ערכיה גדולים מ $f(x_0)$. לכן $f(x)$ לא תעלה ולא תרד, למשל, א) אם ערכיה, הן משמאל והן מימין ל x_0, קטנים מ $f(x_0)$; ב) אם ערכיה, הן משמאל הן מימין ל x_0, גדולים מ $f(x_0)$ (עיין בציור 25, עמ' 241, שבו $x_0=0$). בשני המקרים האלה עסקנו לאור ההסתכלות כבר בעמ' 282, וקראנו לראשון בשם „שיא" של $f(x)$ במקום x_0, לשני בשם „שפל", ולשניהם בשם המשותף ערכים קיצונים. הדגשנו שם שאין הכוונה דוקא לשיא מוחלט, היינו למקום שבו ערך הפונקציה עולה על כל שאר ערכיה, אלא לשיא יחסי, ז"א למקום שבו ערכה גדול מערכיה בסביבה; וכן לשפל. נסכם זאת:

משפט 2: התאפסות הנגזרת של הפונקציה הגזירה[1] $f(x)$ במקום x_0, ז"א $f'(x_0)=0$, היא תנאי הכרחי לערך קיצון (שיא או שפל) של $f(x)$ במקום x_0. כלומר: $f(x)$ יכולה להשיג ערך קיצון אצל $x=x_0$ רק בתנאי $f'(x_0)=0$.

הערות. ראשית: משמעות המשפט 2 מצד ההסתכלות ברורה למדי (השוה הציור 25): כשיש שיא או שפל, מקביל המשיק לציר ה x, בהתאם ליחס $f'(x_0)=0$. ברם נוסף על כך נשאר המשיק, בסביבת הנקודה הנידונה, בצד אחד של העקום. אולי נראית תכונתו זו של המשיק מובנת מאליה. ולא היא! יש למשל נימוקים חזקים לכך שנראה את ציר ה x כמשיק העקום $y=x^3$ במקום $x=0$ (עיין בציור 26);

1. אף אם אין ל $f(x)$ נגזרת אצל x_0, תוכל $f(x)$ להשיג שם ערך קיצון. דוגמות לכך ראינו בעמ' 281; בהן יש למנה $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ גבולות משמאל ומימין השונים זה מזה.

במקרה זה חודר המשיק לעקום בנקודת־המגע ואיננו נשאר בצד אחד של העקום. דוגמה זו מראה כי $f'(x_0)=0$ באמת רק תנאי הכרחי לערך קיצון; שהרי במקרה זה עולה $f(x)$ תמיד, גם אצל $x=0$, אף כי $f'(0)=0$.

שנית: המשפט 2 מלמדנו לחקור, אם יש לפונקציה נתונה $f(x)$ ערכים קיצונים, ואיפה הם נמצאים: עלינו לבדוק רק את המקומות x שאצלם $f'(x)=0$. אם למשל $f(x)$ פולינום בעל המעלה n, הרי יש ל $f'(x)$ המעלה $n-1$; האפשרויות לערכים קיצונים של $f(x)$ נקבעו אפוא ע"י המשואה האלגברית $f'(x)=0$, שיש לה לכל היותר $n-1$ שרשים x_k (עמ' 177). בכל אחד מן המקומות $x=x_k$ יש לבדוק באופן מיוחד (עיין להלן) אם נמצא שם שיא, או שפל, או לא זה ולא זה. במה דברים אמורים: במקומות פנימיים. ואולם אם $f(x)$ מוגדרת (או גזירה) רק בריוח הסגור $\{a,b\}$, או ברצותנו לבדקה רק ב $\{a,b\}$, עלינו לשים לב באופן מיוחד לקצות הריוח, a ו b. יוכל להיות שדוקא באחד משני המקומות האלה גדול, למשל, $f(x)$ משאר ערכי $f(x)$ אשר ב $\{a,b\}$, אעפ"י שאין שם המשיק מקביל לציר ה x. (במקרים רבים זה חשוב לשם חיפוש הערכים הקיצונים.)

דוגמות: 1) $f(x)=px+q$. הגזירה נותנת $f'(x)=p$. לפי זה עלינו להבדיל בין שני מקרים: ראשית: אם $p\neq 0$, אין הנגזרת מתאפסת לעולם, ולכן אין ל $f(x)$ כל ערך קיצון. עם זאת, בשימנו לב לריוח $\{a,b\}$ בלבד, נקבל ערכים קיצונים בקצות הריוח: שהרי אחד מן הערכים $f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$ קטן מכל ערכי $f(x)$ בפנים $\{a,b\}$ והשני גדול מכולם — לפי סימנו של p (+ או −). שנית: אם $p=0$, יוכל להמצא ערך קיצון לפי המשפט 2 בכל מקום. למעשה אין ערך כזה; כי לפונקציה הקבועה $f(x)=q$ אין שיא ואין שפל.

את המסקנות האלה נקבל גם דרך ההסתכלות, בזכרנו כי $y=px+q$ מתאר ישר (המקביל לציר ה x אם $p=0$; עיין בעמ' 232).

2) $f(x)=\sin x$. מכיון ש $f'(x)=\cos x$, עלינו לבדוק את המקומות שבהם $\cos x=0$, והם: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$. לפי מהלך העקום $y=\sin x$ (עמ' 251) נוכל לאשר כי לכל המקומות הללו מתאימים ערכים קיצונים של $\sin x$; בפרט נמצא שיא אצל $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, ושפל אצל $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$.

3) $f(x)=e^x$. כאן $f'(x)=e^x$. הואיל ו e^x אינה מתאפסת לעולם, אין כל ערך קיצון. באמת e^x, כמו $px+q$ במקרה $p\neq 0$ (דוגמה 1), פונקציה מונוטונית. אם נתבונן בה רק כנגד הריוח $\{a,b\}$, הרי יש ערכים קיצונים בקצותיו a ו b: שפל אצל a ושיא אצל b.

4) $f(x)=px^5+qx^3$. נקבל $f'(x)=5px^4+3qx^2$. נניח שיש למקדמים p ו q אותו הסימן (לרבות את המקרה שאחד משניהם יהיה 0). מכיון שכנגד כל $x\neq 0$ יהיו x^4 ו x^2 חיוביים, נופק כי $f'=0$ רק אצל $x=0$. עלינו לבדוק אפוא אם שם ערך קיצון אם לאו. — אם, לעומת זאת, p חיובי ו q שלילי (או

חילופו). עלינו לבדוק את שני המקומות הנוספים שבהם $f' = x^2(5px^2+3q)=0$, והם $x=\pm\sqrt{-\frac{3q}{5p}}$ (הביטוי שמתחת השורש חיובי בהתאם להנחתנו).

כאמור לעיל, אין להכריע מתוך התאפסותה של $f'(x)$ במקום ידוע כי יש שם ל $f(x)$ שיא או שפל; רק אי־מציאותם של ערכים קיצונים אפשר להסיק בדרך זו. רצוננו כמובן למצוא באמת את הערכים הקיצונים אם ישנם. לפיכך עלינו לחפש גם תנאי מספיק למציאות ערך קיצון, ולצרפו אל התנאי ההכרחי שבמשפט 2; משניהם יחד נקבל תמונה מקיפה למדי.

אל תנאי מספיק נגיע, בזכרנו את התיאורים שנתנו לעיל (עמ׳ 326) לשיא ולשפל. שיא אצל x_0 מצאנו אם $f(x)<f(x_0)$ כנגד $x \neq x_0$ בסביבת x_0; לשון אחר: אם f עולה לפני x_0 ויורדת אחרי x_0. ואמנם, בהנחה כי $f(x)$ גזירה, מתאים לשיא התנאי: $f'(x)>0$ לפני x_0 ו $f'(x)<0$ אחרי x_0 (נוסף על $f'(x_0)=0$). כמו־כן נמצא שפל אצל x_0 אם $f'(x)<0$ לפני x_0 ו $f'(x)>0$ אחרי x_0. את שני המקרים האלה נוכל לכלול בנוסח המשותף: הפונקציה $f'(x)$ משנה את סימנה אצל x_0; כלומר, הנגזרת עוברת שם, דרך 0, מערכים חיוביים אל ערכים שליליים, או חילופו. כך מתקבל (ההוכחה המדוקדקת מסתמכת על המשפט 3 מעמ׳ 309):

משפט 3: תהי $f(x)$ גזירה במקום $x=x_0$ ובסביבה ידועה, ויתקיים $f'(x_0)=0$; לפי המשפט 2 אפשר אפוא כי $f(x)$ משיגה ערך קיצון אצל x_0. תנאי מספיק לכך שבאמת נמצא ערך קיצון שם, הוא שהנגזרת $f'(x)$ מחליפה את סימנה אצל x_0, כלומר ש $f'(x)$ עוברת שם מערכים חיוביים אל שליליים, או חילופו. במקרה הראשון משיגה f שיא אצל x_0; במקרה השני (מעבר מערכים שליליים אל חיוביים) משיגה שם f שפל.

מאידך, אם יש ל $f'(x)$ אותו הסימן (תמיד $+$ או תמיד $-$) בכל הסביבה הנידונה, פרט ל $x=x_0$, אז אין ל f שם לא שיא ולא שפל.

הסיפה מתבארת מאליה לפי המשפט 1; שהרי בודאי אין ערך קיצון במקום x_0, אם $f(x)$ עולה (או יורדת) גם לפניו גם לאחריו.

דוגמות: א) אם ידוע לנו מהלך העקום $y=\cos x=(\sin x)'$ (עמ׳ 251) לפחות בסביבת המקומות $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$, נגיע אל המסקנות שבדוגמה 2) לעיל בלי הסתמכנו על עקום ה $\sin$ כל עיקר. למשל אצל $\frac{\pi}{2}$ עובר $\cos x$ מערכים חיוביים דרך 0 אל ערכים שליליים, ולכן נמצא שם שיא של $\sin x$; כמו כן נמצא אצל $-\frac{\pi}{2}$ שפל של $\sin x$, מפני ש $\cos x$ עולה בסביבת $-\frac{\pi}{2}$ מערכים שליליים אל ערכים חיוביים.

ב) $f(x)=x^2$. הואיל ו $f'=2x$, יוכל להמצא ערך קיצון רק אצל 0. באמת יש שם שפל; שהרי $2x$ עוברת אצל 0 מערכים שליליים אל ערכים חיוביים.

ג) בדקנו לעיל (עמ׳ 326) את $f(x)=x^3$. $f'=3x^2$ גורר, כי ערך קיצון יוכל להמצא רק אצל 0. ואולם אין שם ערך קיצון לפי סיפת המשפט 3; $3x^2$ מתאפסת אמנם אצל 0, אבל גם לפניו גם אחריו ערכי $3x^2$ הנם חיוביים. (השוה בציור 25, עמ׳ 241, המראה את הפרבולה $y=x^2$.)

ד) נחזור אל הדוגמה 4) (עמ׳ 327) $f(x)=px^5+qx^3$ בהנחה כי p ו q הנם בעלי אותו הסימן; לכן ערך קיצון אינו אפשרי אלא אצל $x=0$. הבה נבדוק אם באמת שם שיא או שפל, מה שלא יכולנו לבדוק בעמ׳ 327 מחוסר מכשיר מתאים. התשובה שלילית: אמנם $f'(0)=0$, אבל משני צדדיו של $x=0$ ערכי $f'(x)$ כולם חיוביים או כולם שליליים, ואין אפוא חילוף הסימן. אותו המצב קיים אם אחד המקדמים p ו q שוה ל 0 (עיין בדוגמה הקודמת). — לעומת זאת, אם אחד המקדמים p ו q חיובי וחברו שלילי, נמצאים אצל המקומות $x=\pm\sqrt{-\frac{3q}{5p}}$ ערכים קיצונים, דבר אשר קל להסיקו מן המשפט 3 (השוה בדוגמה 4)).

ה) לכאורה מצטרפים שני חלקי המשפט 3 לתנאי הכרחי ומספיק (מבחן, השוה בעמ׳ 293) לכך שקיים ערך קיצון. נתן עתה דוגמה המלמדת כי אין כאן מבחן: יש אשר הנגזרת $f'(x)$ לא תשמור על סימנה בסביבת x_0 וגם לא תחליפנו אצל x_0.

נגדיר כמו בעמ׳ 307 $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ בהוספה $g(0)=0$, $g(x)$ בוודאי גזירה אצל כל $x \neq 0$; אבל גם אצל 0. אי־אפשר אמנם להסיק זאת מן המשפטים שב§2, כגון מן הנוסחה לגזירת מכפלה; כי למשל $\sin\frac{1}{x}$ איננה גזירה אצל 0. ברם בעמ׳ 307 מצאנו במישרין כי $g'(0)=0$. לפי זה מתמלא התנאי ההכרחי לערך קיצון אצל $x=0$ (משפט 2). ואולם בדיקת התנאים שבמשפט 3 מראה, שאין כאן לא חילוף־סימן ולא שמירת־סימן. שהרי קיים, אם $x \neq 0$:

$$g'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

ועל־סמך הדוגמה $\sin\frac{1}{x}$ (עמ׳ 279) לא יקשה להוכיח כי $g'(x)$ מקבלת בכל סביבה של 0, משני הצדדים, גם ערכים חיוביים גם שליליים. לכן אי־אפשר לדבר על חילוף הסימן בכוון מסויים, או על שמירתו. (החשבון מראה כי $g'(x)$ אף איננה רציפה אצל 0.)

לפיכך עלינו להכריע את בעיתנו ללא שימוש במשפט 3. באמת אין ערך קיצון אצל 0, הואיל וגם $g(x)$, כמו $g'(x)$, מקבלת ערכים חיוביים ושליליים יחד בכל סביבה (אף חד־צדדית) של $x=0$. תמונה הסתכלותית לפונקציה $g(x)$ נוכל לקבל בעזרת הציור 43, בקחתנו תחת הישרים $y=\pm x$ את הפרבולות $y=\pm x^2$.

המשפט 3 יובילנו אל מושג חשוב חדש, המרחיב את פעולת־הגזירה. כתנאי מספיק למציאות שיא של $f(x)$ אצל x_0 מצאנו, שהנגזרת $f'(x)$ תעבור שם דרך 0 מערכים חיוביים אל ערכים שליליים. נראה עתה את $f'(x)$ כפונקציה בפני עצמה, ונסמנה ב $g(x)$. לפי המשפט 1 יורדת $g(x)$ אצל x_0, אם $g'(x_0)<0$. על־פי ההנחה $g(x_0)=f'(x_0)=0$ אומרת ירידה זו כי $g(x)$ עוברת מערכים חיוביים

(לפני x_0) אל ערכים שליליים (אחרי x_0). לכן שני התנאים $g(x_0)=0$ ו $g'(x_0)<0$ מהוים יחד תנאי מספיק למציאות שיא של $f(x)$ אצל x_0.

$g'(x)$ היא הנגזרת של הנגזרת של $f(x)$. כאן אפוא דחיפה ליצור, מלבד הנגזרת של פונקציה, גם את נגזרת הנגזרת, המכונה הנגזרת השניה של $f(x)$, והמסומנת ב $f''(x)$. יש דחיפות חזקות עוד יותר לצעד זה, ובדרך־כלל: להשנות תהליך־הגזירה כמה פעמים. מדברים על הנגזרת השלישית $f'''(x)$ וכו׳, וכן על הנגזרת הnית $f^{(n)}(x)$. כמעט בכל חלקי האנליזה והגיאומטריה ה„דיפרנציאלית" יש תפקיד חשוב לנגזרות האלה בעלי ה„סדרים" 2, 3, ..., n, ... (דוגמה אחת תופיע בעמ׳ 332/3.) יש חסרון פורמלי לנגזרות אלו, חסרון שאין להמלט ממנו, והוא: אין לגביהן סימון נוח כסימון $\frac{dy}{dx}$ לגבי הנגזרת „הראשונה" — סימון המקרב ללבנו, כאילו מובנים מאליהם, משפטים כמו $\frac{dx}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$ (עמ׳ 318). אדרבה, הנוסחות לנגזרת הnית של הפונקציה ההפוכה או המורכבת הנן מסובכות למדי.

את המסקנה שבחלק הראשון של המשפט 3 נוכל לנסח עתה כך:

משפט 4: תהי $f(x)$ אצל x_0 בעלת נגזרת שניה, ויהי $f'(x_0)=0$. אז משיגה שם $f(x)$ ערך קיצון אם $f''(x_0)\neq 0$; בפרט: יש שם שיא אם $f''(x_0)<0$, ושפל אם $f''(x_0)>0$.

הערה: כאשר גם $f''(x_0)=0$, אין לנו לפי זה אסמכתא אם קיים ערך קיצון אצל x_0 אם לאו. במקרה זה נוח יותר להשתמש במשפט 3, אעפ״י שאפשר להרחיב את המשפט 4 על־פי שימוש בנגזרות בעלות סדרים גבוהים יותר.

דוגמה: ב2) בעמ׳ 327 מצאנו כי ערכים קיצונים של $\sin x$ יכולים להמצא רק אצל $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ..., שבהם $(\sin x)'=\cos x=0$. נבדוק עתה את הפונקציה $(\sin x)''=-\sin x$ במקומות ההם! היא חיובית אצל $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, ..., שלילית אצל $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... לפי זה מתברר בלי הבדיקה הקפדנית של ה cos שבעמ׳ 328, כי במקומות מן הסוג הראשון משיגה $f(x)=\sin x$ שפל, במקומות מן הסוג השני שיא.

המשפטים הרשומים בסעיף זה מאפשרים במקרים רבים לבדוק את מהלכה הכללי של פונקציה נתונה, או של עקום נתון. בהנתן לנו הפונקציה $y=f(x)$, וברצותנו לבדקה בריוח $\{a, b\}$ שבו יש ל $f(x)$ נגזרת רציפה (פרט אולי לנקודות בודדות), עלינו לקבוע קודם־כל את המקומות שבהם $f'(x)=0$, ולחקור על־פי אחד התנאים שבסעיף זה — או במישרין — באילו מן המקומות ההם נמצא ערך קיצון של $f(x)$. נניח שאלה הם $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (אם הפונקציה איננה פתולוגית ביותר, יהיה מספרם סופי.) לפי זה יש סימן קבוע ל $f'(x)$ בין a ל x_1, בין x_1 ל x_2, בין x_2 ל x_3 וכו׳. על־פי התנאים שבמשפטים 3 ו 4 יש לברר, באילו מן המקומות $x_1, x_2, \ldots, x_n$ מקבלת $f(x)$ שיא ובאילו שפל; גם את ערכי השיאים והשפלים נקבל, בחשבנו את

המספרים $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. כך מתקבלת כבר צורה איכותית של מהלך הפונקציה. חשבון נקודות־החיתוך בין העקום וציר ה x, לפי שרשי המשואה $f(x)=0$, יוסיף דיוק לתיאור. נברר במקומות אחדים גם את מידת הנטיה של העקום, הקבועה ע״י ערך הנגזרת $f'(x)$. אחרי הוסיפנו את ערכי $f(x)$ בקצות הריוח, כלומר $f(a)$ ו $f(b)$, קבלנו סקירה על אופי הפונקציה, המספיקה במקרים רבים.

אם נחוצים פרטים נוספים, יש להסתכל עוד בנגזרת השניה $f''(x)$; סימנה ילמדנו איפה העקום קעור (קונקָב) או קמור (קונוֶקס) — ממבט ציר ה x למשל; בפרט קובעים המקומות, שבהם $f''(x)$ מתאפסת, בדרך־כלל את „נקודות־המפנה", ז״א הנקודות שבהן פונה העקום מקעירות לקמירות וחילופן. גם את מידת ה„עיקום" של העקום, מושג שיש להגדירו ביחס לעיקומו הקבוע של מעגל, אפשר לחשב בעזרת $f'(x)$ ו $f''(x)$. כאן לא נוכל לעסוק בתכונות גיאומטריות אלו הקשורות ב $f''(x)$ ואף בנגזרות גבוהות יותר.

§4. משואות דיפֶרֶנציאליות.[1]

בעמ׳ 267 ראינו: אם $y=f(x)$ הוא חוק־התנועה (הדרך) של נקודה נעה במימד אחד, כך ש x מסמן את הזמן ו y את סטית הנקודה ממצב מסויים (למשל מהמצב בהתחלת התנועה) בכוון חיובי או שלילי ברגע x, תקבע הנגזרת $f'(x)$ — אם ישנה — את מהירות הנקודה ברגע x. בפרט מצאנו כנגד $y=\frac{g}{2}x^2$ (נפילה חפשית) את המהירות $v=y'=f'(x)=g\cdot x$. בדרך דומה קל למצוא: בצאתנו מחוק־המהירות $v=\varphi(x)=f'(x)$, נקבל בנגזרת $a=\varphi'(x)=f''(x)$[2] את התאוצה ברגע x, המודדת את „גידול" המהירות; היא קבועה (שוה ל g) במקרה הנפילה החפשית.

נהפוך עתה את כוון גישתנו! נניח כי ידוע לנו למשל חוק־המהירות $y'=gx$, ועלינו לחשב על־סמך זה את חוק־התנועה. הואיל והסכימה הופכת את הגזירה, ברור שאם $\varphi(x)$ קובעת את חוק־המהירות, תקבע הנסכמת של $\varphi(x)$, ז״א $\int\varphi(x)dx$, את חוק־התנועה. המעבר מ $f(x)$ אל $f'(x)=\varphi(x)$ אמנם חד־ערכי, אבל לא המעבר ההפוך (הן מהשקפה מתימטית הן מהשקפה פיסיקלית): הרי הנסכמת (האינטגרל הלא־מסויים) $\int\varphi(x)dx$ כשמה כן היא: לא־מסויימת, מכיון שנוכל להוסיף עליה קבוע כלשהו; וגם במובן פיסיקלי ברור כי לחוקי־הדרך $y=f(x)+C$ (C קבוע כלשהו) מתאימה אותה המהירות $f'(x)$ כמו ל $y=f(x)$. חוק־המהירות $v=\varphi(x)$ מקיף אפוא יותר מחוק־הדרך $y=f(x)$, בכוללו את אינסוף החוקים $y=f(x)+C$, המתאימים למקומות־מוצא שונים.

---

1. מן הספרות העשירה יצויינו:

E. L. Ince: Integration of ordinary differential equations. 4th ed. 1946.
H. W. Reddick: Differential equations. 2nd ed. 1950.
S. Lefschetz: Lectures on differential equations. 1946.

2. האות a, מן המלה הרומית acceleratio = תאוצה, מסמנת כאן משתנה.

מצב זה יבלוט עוד יותר, אם נצא מן התאוצה $y'' = f''(x)$, שהיא הנגזרת השניה של חוק־הדרך. גם כאן נגיע באופן חד־ערכי ע״י גזירה מחוק־המהירות לחוק־התאוצה, ואילו מזה האחרון לאינסוף חוקי־המהירות $y' = \varphi(x) + c$. וגדולה מזו: הלוא מחוקי־המהירות $y' = \varphi(x) + c$, שקבלנום מחוק־התאוצה $y'' = \varphi'(x)$, נוכל לעבור ע״י סכימה אל חוקי־הדרך המתאימים, ומכיון שקיים $\int c\,dx = c \cdot x + C$, נקבל כך חוקי־דרך השונים ביניהם לא במחובר קבוע בלבד כי אם בפונקציות משתנות של x; הם החוקים: $y = \int (\varphi(x) + c)\,dx = f(x) + cx + C$. נקח למשל את הנפילה המאונכת על־פי כח־המשיכה של כדור הארץ: כאן התאוצה $y'' = g$, המהירות $y' = \int g\,dx = gx + c$, וחוק־הדרך $y = \int (gx + c)\,dx = \frac{g}{2}x^2 + cx + C$. קבלנו אפוא את המחובר הנוסף cx, המתכונתי לזמן. (במובן פיסיקלי מבוססת רב־ערכיות נוספת זו על כך, שערך התאוצה איננו תלוי במהירות ההתחלתית c, כמו שאיננו תלוי במקום־המוצא.) חוק־התאוצה, המסתמך על הנגזרת השניה של חוק־הדרך, כולל בתוכו רב־גווניות גדולה של חוקי־דרך, ואת כולם אפשר לקבל ע״י חשבון מתימטי (סכימה כפולה) מחוק־התאוצה; למשל מן החוק $y'' = g$.

נוסף על כך יש לשימוש בנגזרת השניה y'', תחת y או y', גם יתרון פיסיקלי מיוחד אשר נגע בו רק בקיצור: המיכניקה מבארת (או ביתר דיוק: מתארת) את תנועתן של „נקודות־המַסה" ע״י כ ו ח ו ת בעלי גודל וכוון מסויימים. לפי זה מתבטא החוק היסודי, הנקרא על שמו של נ י ו ט ו ן, כך: הכוח F הוא מַתכונתי לתאוצה a, ז״א $F = ma = mf''(x)$. (הקבוע m נקרא ה„מסה" של הנקודה.) את החוק הזה אפשר אמנם לראות כ ה ג ד ר ת הכוח בעזרת שני גדלים שיש לקבעם מתוך נסיונות; ואולם למעשה יש ליחס הנ״ל גם חשיבות כחוק־ממש, אם נוכל לקבוע את הכוחות על־סמך הנחות פיסיקליות. אז נקבל אפוא משואה המכילה את $f''(x)$ ולא (או לא רק) את הפונקציה המבוקשת $f(x)$.

רמז שטחי זה, שיש להרחיבו מהשקפת מדעי־הטבע וגם מהשקפת הגיאומטריה והאנליזה בעצמן, מברר את חשיבות המשואות שבהן מופיעות, מלבד גדלים קבועים ופונקציות ידועות ונעלמות (מבוקשות), גם נגזרותיהן של הפונקציות הנעלמות, בעלות סדרים שונים. משואות כאלה נקראות: משואות דיפרנציאליות.

חקירת הטבע קשורה קשר אמיץ במשואות האלה. האידיאל שעמד לפני לַפְּלַס[1] ובני דורו היה: לדעת את כל הכוחות שבטבע, יחד עם מצב הטבע ברגע מסויים; אילו הצליחה האנליזה המתימטית לפתור את מערכת המשואות הדיפרנציאליות המתקבלות לפי הידיעה הנ״ל, כי אז יכולנו — כך סברו החוקרים הללו — לחשב את מצב הטבע בכל רגע שהוא, הן בעבר הרחוק הן בקץ הימין. התפתחות מדעי־הטבע מאז ועד היום תיקנה אמנם בהרבה את ההשקפה

1. P. S. Laplace. עיין למשל בספרו Essai philosophique sur les probabilités שהופיע במהדורה השלישית בפריס 1816.

הנאיבית והמַטריאליסטית שברעיון ההוא. דוקא תגליות הפיסיקה החדישה חיזקו את ההשערה, כי בטבע יש גורמים השונים מן הגורמים המיכניים הפשוטים; הן התחילו להפיץ אור על בעיות כמו „כח־החיים", סיבתיות, חופש־הבחירה וכו׳. ואולם אף אחרי כל זאת לא נפגמה חשיבות המשואות הדיפרנציאליות. גם במתימטיקה עצמה גדול תפקידן, והיו חוקרים בעלי שם כמו סופוס לִי[1] אשר שמו את כסאה של תורת המשואות האלה מעל כל שאר ענפי המתימטיקה. באופן שטחי במקצת נוכל לומר: לפתור משואה דיפרנציאלית, זהו לחקור אפיין של פונקציות מתוך אפיין „האינפיניטֶסימלי".

עסקנו לעיל בדוגמה $f''(x) = g$. כדי למצוא את הפונקציה המבוקשת $f(x)$ עלינו לפעול פעמיים את פעולת הסכימה; בצעד הראשון נקבל (עיין לעיל) $f'(x) = \int g\,dx = gx + c$, בשני $f(x) = \int (gx + c)\,dx = \frac{g}{2}x^2 + cx + C$. ברם מקרה זה פשוט יותר מדי, במובן הבא: בשתי המשואות הדיפרנציאליות הנ״ל מוצגת הנגזרת (הראשונה או השניה) של הפונקציה המבוקשת $y = f(x)$ כתלויה בגורם x לבדו (בצירוף קבועים), ולא ב y. בכל מקרה כזה די בסכימה או בסכימות אחדות, זו אחרי זו, כדי „לפתור" את המשואה, ז״א למצוא את $f(x)$; בפתרון יופיעו קבועים c, C, ... („קבועים רצוניים") במספר המתאים לסדר הנגזרת הגבוה של $f(x)$ שבמשואה הדיפרנציאלית. הבעיה שייכת אפוא לחשבון האינטגרלי.

ואולם בדרך־כלל אין המצב כה פשוט: במתמטיקה ובמדעי־הטבע מופיעות עפ״י רוב משואות דיפרנציאליות שבהן — מלבד סיבוכים אחרים לעומת המקרה הפשוט הנ״ל — מוצגת הנגזרת של הפונקציה המבוקשת $y = f(x)$ כ ת ל ו י ה ל א ר ק ב x, כ י א ם ג ם ב y.

נקרב זאת להבנתנו ע״י דוגמה פיסיקלית פשוטה; נתבונן בגוף (קטן) הקשור קשר גמיש (אֶלַסטי) במקום נתון (המקום של „שווי־המשקל") כך שיוכל להתרחק מאותו מקום בכוון מסויים; למשל משקל התלוי בקפיץ. במקרים רבים יהיה הכח, המשפיע על הגוף על־מנת להחזירו אל מקום שווי־המשקל, מתכונתי לרוחק הגוף משם, רוחק המשתנה במשך הזמן. בסמננו את משתנה־הזמן ב x, את רוחק הגוף (בעל המסה m) ממקום שווי־המשקל בזמן x ב $y = f(x)$, ואת הכח הגמיש הנידון ב F, נקבל את המשואה $(F =)\ my'' = -a^2 y$[2]. אף כי משואה זו פשוטה מאד, הרי היא מבליטה, שהכח (או התאוצה) מופיע כתלוי גם בפונקציה המבוקשת y עצמה, ולא בגורם x בלבד. כדי לפתור משואה דיפרנציאלית כזו דרושות שיטות חדשות, שאין מקומן בחשבון האינטגרלי.

לא נוכל לגלות כאן אלא טפח מן התורה רחבת־הידים ועמוקת־התוכן הנקראת: תורת המשואות הדיפרנציאליות. נרמוז ראשית דרך ההסתכלות על עצם

1. Sophus Lie.

2. גורם־המתכונת סומן כמספר שלילי מטעם זה: אם נתאים למקום שווי־המשקל את $y = 0$, הרי מתאים לערכי y חיוביים כח השואף להחזיר את הגוף עד $y = 0$, ז״א ל ה ק ט י ן את y.

האפשרות „לפתור" משואות אלו להלכה, לפחות במקרים פשוטים; שנית נערוך שתי דוגמות המראות את פתירתן למעשה.

מה שנוגע לאפשרות הפתירה, כלומר להוכחת המציאות של אינטגרל[1] (פתרון) למשואה נתונה, נסתפק לדון במשואה הדיפרנציאלית המפורשת בעלת הסדר 1: $y'=f(x,y)$. ($f(x,y)$ פונקציה נתונה של x ו y.) תפקידנו לקבוע את y (המבוקש) כפונקציה של x כך, שבשביל y והנגזרת $y'=\frac{dy}{dx}$ יתקיים השויון $y'=f(x,y)$ כ„זֶהות", ז"א כנגד כל ערכי x המובאים בחשבון. המשואה $y'=f(x,y)$ נקראת „בעלת הסדר 1", מפני שהנגזרת בעלת הסדר הגבוה ביותר שבמשואה היא y', ז"א בעלת הסדר 1. בעמ' 333 (השוה בעמ' 337) עסקנו גם במשואה בעלת הסדר 2; בה מופיעה (מלבד, אולי, y ו y') הנגזרת y'', אבל לא נגזרת בעלת סדר גדול מ 2[2]. בפרט נקראת $y'=f(x,y)$ משואה „מפורשת", הואיל והנגזרת y' (בעלת הסדר הגבוה) מיוצגת במפורש כפונקציה של x ו y[3].

נסביר בצורה הסתכלותית, בהשתמשנו במישור (x,y), מציאותם של פתרונים y למשואה $y'=f(x,y)$, ונניח קודם כל כי $f(x,y)$ פונקציה רציפה של גורמיה. אם קיים פתרון המייצג y כפונקציה של x, הרי זה יתואר במישור ע"י עקום $y=\varphi(x)$; כל עקום כזה יכונה „עקום־אינטגרל" של המשואה הדיפרנציאלית. נחפש עקום כזה! בצאתנו מערך כלשהו $x=x_0$, נבחר כנגדו בערך כלשהו $y=y_0$ כך שהזוג (x_0,y_0) יימצא בתחום־ההגדרה של $f(x,y)$. כנגד הזוג (x_0,y_0) תתן המשואה שלפנינו לנגזרת y' את הערך $f(x_0,y_0)$. לכן, אם ישנו עקום־אינטגרל העובר דרך הנקודה $P_0=(x_0,y_0)$, ייקבע שם כוון העקום (ז"א משיקו) ע"י המספר $f(x_0,y_0)$; אם למשל $f(x_0,y_0)=1$, מקביל המשיק לחוצה־הזוית בין הצירים. נקח נקודה שניה $P_1=(x_1,y_1)$, „שכֵנה" ל P_0, באותו משיק ($x_1>x_0$); גם כנגדה תתן המשואה $y'=f(x,y)$ כוון מסויים ב P_1, המוגדר ע"י $f(x_1,y_1)$. בהשארנו בישר החדש דרך P_1, נפנה אל נקודה שלישית $P_2=(x_2,y_2)$ ה„שכנה" ל P_1 ($x_2>x_1$). אחרי הצעד הnי נגיע כך אל $P_n=(x_n,y_n)$. כל התהליך הזה אינו קבוע כל צרכו: לא הגדרנו בדיוק איפה (במשיק דרך P_0) תימצא P_1, כמו־כן לא את מקומה של P_2, וכו'. ואולם בזכרנו את השיטה בה הגדרנו בעמ' 273/5 את הסֶכם $\int_a^b f(x)\,dx$, יתקבל על דעתנו שגם הפעם נגיע לידי תהליך מוגדר היטב, אם נקטין את הרחקים שבין P_0 ל P_1, בין P_1 ל P_2 וכו', בהשארנו אמנם במשיקים הנ"ל שכווניהם נקבעו ע"י $y'=f(x,y)$. לפי מעבר זה „אל הגבול" — גבול במובן הקטנת ערכי

1. נוהגים לכנות כל פונקציה $y(x)$, שהיא פתרון למשואה דיפרנציאלית, בשם אינטגרל של המשואה. השם מוכלל מן המקרה הפשוט (עיין לעיל) של המשואה $y'=g(x)$, שפתרונה $y=\int g(x)\,dx$. — להלן נשמיט עפ"י רוב את התאר „דיפרנציאלית" לשם „משואה".

2. אין לערבב את המושגים „סדר" ו„מעלה". על „משואה בעלת המעלה 1 (ליניארית)" מדברים, כאשר הפונקציה המבוקשת ונגזרותיה מופיעות רק בחזקה הראשונה; למשל אצל המשואה בעלת הסדר 2: $y''=ay'+\sin x\cdot y$. מאידך יש למשואה $y'=x(y^2+1)$ הסדר 1 והמעלה 2.

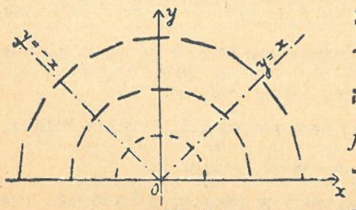
3. לא תמיד זהו קל ונוח לייצג את y' מפורש כפונקציה של x ו y.

הקטעים $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \ldots$, ולכן הגדלת מספר הקטעים כנגד הריוח הקבוע הנתון $x_0 \leq x \leq b$ — נקבל, כך יש לקוות, סוף־סוף עקום מסויים המשתרע מ P_0 עד לנקודה בעלת הפסוק $x=b$.

באמת אפשר להוכיח בתנאים כלליים למדי לגבי $f(x,y)$, שקיים עקום כזה, הקבוע באופן חד־ערכי בצאתנו מן $P_0=(x_0,y_0)$, והממציא אפוא פתרון מסויים למשואה $y'=f(x,y)$. ההוכחה איננה קלה (עיין בספרי־הלימוד השונים).

אף כי לא נעסוק כאן בעצם ההוכחה, נקודה עקרונית אחת טעונה בירור. יצאנו (באמצע העמוד הקודם) מנקודה $P_0=(x_0,y_0)$, בבחרנו כרצוננו בקואורדינטות x_0 ו y_0; החל מ P_0 קבענו בכוון „ימינה" את עקום־האינטגרל הנותן את פתרון המשואה. בהעדיפנו את הכוון ימינה, קבלנו כמובן רק „מחצית" העקום המבוקש; בפנותנו מ P_0 שמאלה נקבל אותו חלק של העקום שכנגד $x<x_0$. מתמיה אולי הדבר שהתאמנו ל $x=x_0$ ערך שרירותי $y=y_0$. ואמנם: אילו בחרנו כנגד x_0 בערך אחר $y=y_0^*$ השונה מ y_0, כי אז קבלנו, ראשית, נקודת־מוצא שונה מ P_0, ושנית עקום השונה בעיקרו מן העקום שקבלנוהו לעיל. כי הלוא בדרך־כלל $f(x_0,y_0^*)\neq f(x_0,y_0)$, ולכן יגדיר $f(x_0,y_0^*)$ גם כוון חדש למשיק. כיוצא בו נקבל כנגד כל ערך של y, שנתאימנו ל $x=x_0$ (בתנאי שנשאֵר בתחום־ההגדרה של $f(x,y)$), נקודת־מוצא אחרת ועקום־אינטגרל אחר. כך יווצרו אינסוף פתרונים שונים למשואה $y'=f(x,y)$.

מצב זה לא יפתיענו אחרי זכרנו את המקרה ה„פשוט" של המשואה $y'=f(x)$ (f תלוי רק ב x; עיין בעמ' 332), שבו היה הפתרון האינטגרל הלא־מסויים $y=\int f(x)\,dx=F(x)+C$, המקיף אינסוף פונקציות. ההבדל בין מקרה מיוחד זה ובין המקרה הכללי $y'=f(x,y)$ הוא: בראשון מתארות אינסוף הפונקציות $y=F(x)+C$ עקומים מקבילים, מה שאין כך במקרה השני; הלוא כאן שונים כווניהם של עקומי־אינטגרל שונים כבר בנקודות־המוצא (הרצונית) $x=x_0$ אם $f(x_0,y_0^*)\neq f(x_0,y_0)$. הגענו כך (בדרך הסתכלותית ולא־מדוייקת) אל המסקנה: את פתרוני המשואה הדיפרנציאלית $y'=f(x,y)$ אפשר לתאר כמערכת אינסופית של עקומים $y=\varphi(x)$. כרמז לכך, שכל אחד מעקומי המערכת תלוי ב y_0 המיוחד שנצא ממנו (כנגד x_0), נכתוב y בעזרת „המְצד" (פָּרָמֶטר) y_0 בצורה $y=\varphi(x,y_0)$, הנותנת כנגד כל ערך של y_0 עקום יחיד.



ציור 56

נקח כדוגמה $f(x,y)=-\frac{x}{y}$, כלומר את המשואה (בעלת הסדר 1) $y'=-\frac{x}{y}$. כנקודת־המוצא נבחר ב $P_0=(0,y_0)$ (ז"א $x_0=0$) בהגבלה $y_0>0$. לפי $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ נקבל $f(0,y_0)=0$ כנגד כל y_0; כלומר, מעל $x=0$ מקביל תמיד העקום המבוקש לציר ה x (ציור 56). יהי מקומה

של P_0 (בציר ה y החיובי) אשר יהיה. לעומת זאת, בקחתנו בשביל נקודת־המוצא $x=-y_0$ ו $y=y_0$ (y_0 מספר חיובי כלשהו), ז"א בקחתנו את המוצא בחציו העליון של הישר $y=-x$, נקבל $f(x,y)=1=\tan\frac{\pi}{4}$; בכל נקודה כזאת יהיה אפוא משיק העקום המבוקש מקביל לחוצה־הזוית בין צירי ה x וה y החיוביים (ציור 56). בחציו העליון של הישר $y=x$ נקבל בדרך דומה $f(x,y)=-1$, ולכן מקביל שם המשיק הנידון לחוצה־הזוית בין ציר ה y החיובי וציר ה x השלילי. חקירה מדוקדקת יותר מראה: בצאתנו מנקודה כלשהי $P_0=(x_0,y_0)$ (בתנאי $y_0>0$), נקבל ככוון המבוקש את כוון המשיק ב P_0 למעגל סביב נקודת־הראשית 0, העובר דרך P_0. לפי זה עקומי־האינטגרל, הפותרים את המשואה $y'=-\frac{x}{y}$, הנם כל המעגלים סביב 0. „המעגלים", ולא חצאי־המעגלים בלבד ; שהרי מה שמצאנו לגבי חצי־המישור העליון, נשאר בתקפו לגבי חצי־המישור התחתון[1]. המשואה הדיפרנציאלית הנתונה נפתרת ע"י המערכת הנ"ל של מעגלים משותפי־מרכז ; היחס הגיאומטרי שבין כל המעגלים סביב אותו המרכז עומד כאן במקום יחס־ההקבלה בין כל העקומים $y=F(x)+C$, שקבלנום כפתרון למשואה $y'=f(x)$. בדרך־כלל אין אמנם היחס הגיאומטרי בין אינסוף העקומים, המציגים פתרונה של משואה דיפרנציאלית בעלת הסדר 1, פשוט כמו בשני המקרים האלה.

מערכת כל אינסוף עקומי־האינטגרל הפותרים את המשואה — לשון אחר: מערכת אינסוף הפונקציות $y=\varphi(x,y_0)$ כנגד כל ערכי y_0 (עמ' 335) — נקראת **האינטגרל הכללי** של המשואה הדיפרנציאלית. כל עקום מיוחד מתוך המערכת, ז"א העקום $y=\varphi(x,y_0)$ כנגד y_0 מסויים, מכונה **אינטגרל פרטי**[2].

הבה נערוך בדיקה על־מנת להווכח כי בצדק הגענו אל מערכת המעגלים הנ"ל כפתרון למשואתנו! למעגל בעל המחוג r סביב נקודת־הראשית מתאימה המשואה $x^2+y^2=r^2$; דבר זה ידוע לרבים מן הקוראים (השוה בעמ' 154). לכן מציגה מערכת המשואות $x^2+y^2=r^2$ (r חיובי **כלשהו**) את מערכת מעגלינו ; הצורה המפורשת אפוא: $y=\sqrt{r^2-x^2}$[3]. הגזירה נותנת לפי V והמשפט 1 בעמ' 319/17

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{y}.$$

1. אמנם לא נקבל כאינטגרל פונקציות חד־ערכיות, אם נתכוון לשני חצאי־המעגל יחד ; שהרי כל מעגל סביב 0 מתאר פונקציה דו־ערכית. — גם בשביל הנקודות שבציר ה x עצמו הכל בסדר. שם אמנם $y=0$, ולכן $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ אין במציאות ; אבל בדיקה מפורטת, למשל מתוך החלפת הצירים, מראה כי במקרה זה נקבל את הכוון המקביל לציר ה y, ז"א $\tan\frac{\pi}{2}$ (שגם הוא איננו מוגדר).

2. מלבד האינטגרל הכללי ופירוטיו מופיע בתורת המשואות הדיפרנציאליות מונח נוסף ; „אינטגרל סינגולָרי" ; ברם במסגרת הספר הזה לא נוכל להגדירו.

3. כדי לקבל פונקציות חד־ערכיות, עלינו לבחור או בסימן החיובי לשורש הריבועי (המכוון כנגד חצאי־המעגלים העליונים) או בסימן השלילי (כנגד החצאים התחתונים).

הנגזרת y' ממלאת אפוא את המשואה הדיפרנציאלית הנתונה ; למשיקי המעגלים $x^2+y^2=r^2$ יש בכל מקום הכוון הנקבע ע"י המשואה[1].

לבסוף נתן שתי דוגמות לפתירת משואות דיפרנציאליות.

1) $xy'-2y=0$. במקרה זה (ורבים כמותו) נוח ל„הפריד" בין המשתנים x ו y כך, ש y ונגזרתה y' יימצאו באגף אחד, ו x באגף השני. נכתוב אפוא $\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}$. ההנחה (עיין לעיל) שישנה פונקציה y של x, הממלאת את המשואה, גוררת שהנסכמת של $\frac{y'}{y}$ לפי x תשוה לנסכמת של $\frac{2}{x}$. והנה קיים מצד אחד $\int\frac{y'}{y}\,dx=\ln y+C_1$ (השוה X בעמ' 320), ומצד שני $\int\frac{2}{x}\,dx=2\int\frac{1}{x}dx=2\ln x+C_2$ לפי [5] בעמ' 322. בסמננו את הקבוע C_2-C_1 ב C, נקבל: $\ln y=2\ln x+C$, ז"א $y=cx^2$ (אם $C=\ln c$). מערכת־פונקציות זו (כנגד כל ערכי c) מתארת את מערכת כל הפרבולות אשר קדקדן המשותף בנקודת־הראשית, ומשיקן שם ציר ה x.

2) נתבונן אל המשואה $my''=-ky$, או $y''+a^2y=0$ (אם $\frac{k}{m}=a^2$)[2].

כדי לפתור משואה זו (שיש לה הסדר 2, הואיל ומופיעה בה הנגזרת השניה y''), נזכור כי $(\sin x)''=-\sin x$, $(\cos x)''=-\cos x$. מתקבל אפוא על הדעת כי הפונקציות $\sin x$ ו $\cos x$ תמלאנה תפקיד כלפי המשואה שלפנינו, המבטאת מתכונתיות בין הפונקציה המבוקשת ונגזרתה השניה. במקדם a^2 נתחשב על־פי $(\sin ax)''=-a^2\sin ax$, $(\cos ax)''=-a^2\cos ax$. לפי זה יש למשואה $y''+a^2y=0$ האינטגרלים („הפרטיים") $\cos ax$ ו $\sin ax$, וביתר כלליות $c_1\cos ax$ ו $c_2\sin ax$. גם סכומם $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ הנהו אינטגרל ; שהרי קיים

$$y''=(c_1\cos ax+c_2\sin ax)''=-a^2c_1\cos ax-a^2c_2\sin ax=-a^2y.$$

זאת אומרת כי $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ ממלאת את המשואה $y''+a^2y=0$. כאן לפנינו „האינטגרל הכללי", הכולל בתוכו את האינטגרלים הפרטיים הנ"ל.[3]

נתן לפתרון צורה אחרת, נוחה מהשקפה פיסיקלית! אחרי הוציאנו את המקרה הטריביאלי $c_1=c_2=0$ (ז"א $y=0$), ובשימנו $C=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ (לא איכפת באיזה סימן), נוכל לקבוע זוית δ לפי $\frac{c_1}{C}=\sin\delta$, $\frac{c_2}{C}=\cos\delta$[4]. לפיכך נקבל על־פי הנוסחה הידועה (עמ' 155) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$:

1. הקורא היודע קצת מן הגיאומטריה האנליטית יבין מיד את משמעותה הגיאומטרית של המשואה $y'=-\frac{x}{y}$. היא מביעה כי כוון העקום (או משיקו) **מאונך** לכוון הנקבע (במובן ה tan) ע"י $\frac{y}{x}$, כלומר לכוון מ 0 אל הנקודה (x,y). והנה המעגלים סביב 0, ורק הם, הנם העקומים, אשר משיקם מאונך בכל מקום למחוג המתאים.

2. לפי המשמעות הפיסיקלית שנתנו למשואה זו בעמ' 333, חיוביים k ו m. בהתאם לזה רומז הסימן $\frac{k}{m}=a^2$ על כך שערך המנה חיובי.

3. מצאנו את הפתרון רק דרך מקרה, בזכרנו את התכונות של $\sin x$ ו $\cos x$. תורת המשואות הדיפרנציאליות מפנה דרך שיטתית בה מגיעים אל הפתרון הזה, ומראה כי אין פתרון אחר.

4. זה אפשר הואיל וקיים $\sin^2\delta+\cos^2\delta=1$.

$$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax=C\left(\frac{c_1}{C}\cos ax+\frac{c_2}{C}\sin ax\right)=$$
$$=C(\sin\delta\cos ax+\cos\delta\sin ax)=C\sin(ax+\delta).$$

התנועה אפוא תנודת־סינוס פשוטה (השוה בעמ׳ 301) שמחזורה $\frac{2\pi}{a}$ תלוי במקדם a שבמשואה הדיפרנציאלית בלבד. לעומת זאת, C, וכן δ (המורה על מצב התנודה בתחילת התנועה), הם קבועים רצוניים.

נעורר בקשר עם משואתנו שאלה עקרונית! בכל אחת מן הצורות שנתַנו לאינטגרל הכללי: $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ ו $y=C\sin(ax+\delta)$, מופיעים שני קבועים רצוניים (c_1 ו c_2, C ו δ). קבועים אלו מקבילים לקבוע c בדוגמה 1) ולקבוע y_0 מעמ׳ 336 (מערכת העקומים). מה שיש לנו כאן ש נ׳ י קבועים רצוניים, מתאים לזה כי למשואה הסדר 2, ולא 1 כמקודם. באמת מכיל האינטגרל הכללי של משואה דיפרנציאלית בעלת הסדר 2 שני קבועים רצוניים; ריבוי הפתרונים למשואה כזו גדול אפוא „פי־אינסוף" מן הריבוי אצל משואה בעלת הסדר 1. וכן יגדל הריבוי בעברנו אל משואות בעלות סדר גבוה יותר.

אולי תתעורר השאלה: בשלמא המתימטיקן יוכל להסתפק בקבלו אינסוף פתרונים פרטיים למשואה דיפרנציאלית נתונה; אלא הפיסיקן, איך ימצא הוא סיפוק בפתרון הרחוק כל־כך מתת תשובה חד־ערכית? הרי בשבילו מבטאת המשואה אחד מחוקי־הטבע, שעל־פיהם ירצה לקבוע מראש את מצב הטבע בעתיד באופן חד־ערכי! מה יתן לו פתרון התלוי בקבועים רצוניים?

את התשובה נמצא כאשר נוציא את ראשנו מסבך הנוסחות המתימטיות לקראת מובנן הפיסיקלי. תחַכמנו כבר הדוגמה הפשוטה של נפילת גוף: $y''=f''(x)=g$ (עמ׳ 333), שבה מסמן x את הזמן ו y את הדרך. גם שם הופיעו באינטגרל הכללי $y=\frac{g}{2}x^2+cx+C$ שני קבועים רצוניים c ו C. והרי מובנם הפיסיקלי ברור: תלויים הם במקום הגוף הנופל בזמן $x=0$, ובמהירותו בזמן $x=0$. שני הגדלים c ו C אינם תלויים אפוא בחוק־הטבע הנידון (חוק המשיכה) אלא הם „מקריים": תלויים בכך, איפה נשמיט את הגוף בתחילת התנועה, ואיזו מהירות התחלתית נתן לו ע״י דחיפה. קוראים לתנאים האלה תנאֵי ההתחלה. באמת מתאימים הקבועים הרצוניים, המופיעים באינטגרל הכללי של משואה דיפרנציאלית, לתנאי ההתחלה בתהליך הנידון. לפי זה יש להבין את ניסוח האידיאל של לפלס (עמ׳ 332). ידיעת כל חוקי הטבע המשפיעים על תהליך ידוע אינה מספיקה לקבוע — ע״י פתירת המשואות הדיפרנציאליות המתאימות — את מצב התהליך בכל רגע; לשם כך עלינו לדעת עוד את מצב התהליך בהתחלה או ברגע מסויים כלשהו; „מצב־התחלה" זה יקבע את ערכי הקבועים הרצוניים שבפתרון. כדי לחשב מראש את עתיד העולם עלינו לדעת, מלבד חוקי־הטבע, גם את מצב העולם ברגע מסויים — לפי חלומו של לפלס, אשר אמנם בינתים השליכו המדע אחרי גוו.

5§. בעיות שונות הקשורות בחשבון האינפיניטסימלי.

בפרק העשירי דובר על תקופת הוולדו של החשבון האינפיניטסימלי. עתה, אחרי למדנו את קַויו הראשיים, נבין ביתר קלות את קֹשי התפתחותו הראשונה. גם אותם המתימטיקנים במאה השבע־עשרה, שפתרו למעשה בעיות הן של גזירה (משיק, שיא) הן של סכימה (שטח), טרם הבינו את הקשר שביניהן. קשר המתבטא במשפט 3 מעמ׳ 320. הצעד המכריע הראשון נעשה ע״י גילוי הקשר הזה; כנראה ע״י ברו[1], מורו של ניוטן. ברו שם לבו עוד לפונקציות רצוניות, והצעד המכריע השני נעשה ע״י ניוטן ולייבניץ: הריכוז לפונקציות חשבוניות (עמ׳ 258).

מה שנוגע להבדל בין ניוטן ולייבניץ (מלבד ההפרש הזמני), אֵין חשיבות יתרה לכווני השימושים שהיו נגד עיניהם: ניוטן יצא מן המיכניקה, בקחתו כמשתנה לא־תלוי את הזמן, ובדברו על fluxiones (נזילות) במובן המהירות[2]; ואילו לייבניץ יצא מן הגיאומטריה והדגיש את בעית המשיק. עמוק מזה הבדל אחר: ניוטן שת לבו לדיוק השיטה במובן מתימטי, ואף הדגיש כי על מושג־הגבול לשמש מפתח לתחום האינפיניטסמלי. לעומת זאת נטה לייבניץ (וחוקרי המאה השמונה־עשרה) לקחת את „הדיפרנציאלים" dx כגדלים קטנים־לאינסוף ממש, כנראה בקשר ידוע עם דרכיו בפילוסופיה (תורת המוֹנָדות). תחייה מאוחרת אבל לא מוצלחת יותר נודעה להשקפות האלה באסכולה הניאו־קַנטית של מַרבורג, בעיקר אצל הרמן כהן[3]. — מאידך הצטיין לייבניץ בסימוניו אשר היו מכריעים בדרך־נצחונה של השיטה.

החשבון האינפיניטסימלי נולד לפני 250 שנה ויותר. אעפ״י כן לא פג טעמו ולא נס לֵחו עד היום; לא רק שענפי העץ הזה מוסיפים להתחזק ולהוציא פירות, אלא לעתים קרובות צומחים ממנו ענפים חדשים — כמו בדורנו „תורת המשואות האינטגרליות" (עמ׳ 344) — נחמדים להשכיל ועשירי פירות. (תופעה זו אפיינית למתימטיקה כולה: היא לא הזדקנה, עם המנותה בין עתיקי המדעים.) לא נוכל להביא כאן אף ראשי־פרקים לגידולים הללו; רק כווני אחדים מהם יוצגו לפני הקורא — פרט לשימושים בגיאומטריה אשר מקומם בחלק החמישי.

---

1. I. Barrow

2. השוה דבריו: ,...Lineae describuntur per motum continuum punctorum tempora per fluxum continuum... .

3. Hermann Cohen. השוה: Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte (1883), Logik der reinen Erkenntnis (1902) (ספרו היסודי).
משאר ספרי האסכולה ההִיא יש לציין:
P. Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. 1910.
D. Gawronskii: Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. 1910.

בפרק התשיעי הבדלנו בין פונקציות של גורם אחד ושל גורמים אחדים. ברור כבר מתוך הדוגמות שניתנו שם, כי גם לפונקציות מן הסוג השני יש תפקידים חשובים במתימטיקה ובמדעי־הטבע. משום כך נחוץ לפתח את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי כך שיהיה בר־שימוש גם לפונקציות של כמה גורמים. נתחיל בחשבון הדיפרנציאלי: בהנתן למשל פונקציה של שני גורמים $f(x,y)$, נוכל לראות את x כמשתנה היחיד, בשימנו קבוע את ערכו של y; כך תוגדר הנגזרת לפי x, המכונה „הנגזרת החלקית לפי x של $f(x,y)$". וכן לפי y. לאור התיאור במישור ה (x,y) יש לומר: גזרנו את $f(x,y)$ בכוון ה x ובכוון ה y. כמו שאפשר להרכיב כל כוון במישור מתוך כוון ה x וכוון ה y (השוה למשל בעמ׳ 151), כך יש לנחש כי בעזרת שתי הנגזרות החלקיות נוכל ליצור, במובן ידוע, נגזרת כללית ל $f(x,y)$. ואמנם זה מְתאמת במידה רחבה.

עסקנו עד הנה בגזירת פונקציות מפורשות של x. ואיך המצב אם נתונה לנו רק הצורה הסתומה $F(x,y)=0$ (עמ׳ 228 ו 237), ואין בכחנו או ברצוננו לפרשה? גזירת הפונקציות של שני גורמים תתן בידינו שיטה לגזירת הפונקציות הסתומות האלה, בתנאי שהמשואה $F(x,y)=0$ תמלא תנאים מסויימים. אפשר להכליל את השיטה גם בעבור פונקציות סתומות של כמה גורמים.

בקשר עם פונקציות של כמה גורמים מתרחבת גם תורת המשואות הדיפרנציאליות, ומהשקפת מדעי־הטבע נודעת חשיבות יתרה למשואות המכונות „משואות דיפרנציאליות חלקיות" הואיל ומופיעות בהן נגזרות חלקיות לפונקציה המבוקשת. תורת המשואות האלה היא מופת לדחיפה אשר נתנו בעיות האסטרונומיה, הפיסיקה וכו׳ להתפתחות המתימטיקה העיונית: במקרים רבים נתחדשו מקצועות שלמים במתימטיקה לרגל דרישות־חוץ, ובמידה לא־קטנה משמש החשבון האינפיניטסימלי בעצמו דוגמה לכך. מאידך נמצא בדברי ימי המדע גם יחס כמעט הפוך: כאשר הציגו בעיות ידועות ממדעי־הטבע את דרישותיהם לפני החוקר, התברר כי בתקופה קודמת כבר יצרו המתימטיקנים בלא־יודעים את המכשיר, בה"א הידיעה, אשר בלעדיו לא יוכל החוקר להתגבר על הבעיה שלפניו. כך היה הדבר, כשניסה קפלר[1] למצוא ניסוח מתאים לתצפיותיו על תנועת כוכבי־הלֶכת: לולא פיתחו היוונים, יותר מאלף שנים לפני כך, את התורה הגיאומטרית של חתכי־החרוט (אֶליפסה וכו׳) כתורה לשמה, כי אז לא יכול קפלר לנסח את מסקנותיו בצורת חוק כללי. או נקח דוגמה קרובה לתקופתנו: לא היתה אפשרות לאיינשטיין[2] לתאר את תורת־היחסות הכללית (1917), לולא קידמהו רימַן באמצע המאה ה 19 בהמציאו את תורת־הגיאומטריה הנקראת על־שמו. (נדבר עליה בחלק החמישי, כרך שני.)

1. J. Kepler
2. A. Einstein

באשר לחשבון האינטגרלי לגבי פונקציות של גורמים אחדים, נסתפק ברמז לצד גיאומטרי מסויים. כאמור בעמ׳ 235/6 מתוארת פונקציה של שני גורמים $f(x,y)$ ע"י משטח במרחב בעל שלשה ממדים (למשל משטח־כדור או חרוט). לפי זה לא יקשה להבין, מה מסמן במובן גיאומטרי האינטגרל המסויים של פונקציה בעלת שני גורמים $f(x,y)$: במקום השטח שהגדרנוהו בעמ׳ 272/75 ע"י $\int_a^b f(x)\,dx$, נקבל כאן נֶפח הגוף, המוגבל ע"י תחום ידוע במישור ה (x,y) – תחום הבא במקום ריוח־הסכימה –, ע"י חלקו המתאים של המשטח $z=f(x,y)$ (למשל כיפת־כדור או כיפת־אליפסואיד) וע"י האנכים על המישור הנ"ל בשפת התחום.

החשבון האינטגרלי משמש מכשיר לא רק לקביעת גדלים „גסים" כמו השטח והנפח, אלא גם לחישוב גדלים שהם „עדינים" ו„גסים" יחד, כמו אורך־הקשת לקו עקום, או שטח פניו של משטח עקום (למשל, פני כדור או אליפסואיד). השמות „גס" ו„עדין" רומזים להבדל בין הסכימה והגזירה שציינוהו, בהראותנו כי כל פונקציה רציפה ניתנת לסכימה, אבל לא תמיד לגזירה (עמ׳ 308/9). כמושג המשיק (הנגזרת) כן המושגים „ארכו של עקום" או „שטחו של משטח" תלויים גם בהתנהגות הפונקציה (העקום, המשטח) בסביבתה הצרה של כל נקודה ונקודה. ואילו פעולות שהן רק „גסות", כמו הסכימה הרגילה או קביעת נפח, אינן מדקדקות כחוט השערה בהתנהגות הפונקציה בכל מקום, אלא תלויות בַמהלכה הכללי בלבד (השוה בעמ׳ 309).

בהכללה הנ"ל לקראת פונקציות של שני משתנים קשורה קשר אמיץ תורת הפונקציות $f(z)$ של משתנה (גורם) מרוכב. בעמ׳ 255 רמזנו דרך אגב על התועלת אשר תפיק תורת הפונקציות מהחלפת גורם ממשי x בגורם מרוכב $z=x+iy$; כלומר, מהחלפת קו ישר במישור שלם (או חלקים מהם) כתחום־ההגדרה. מובן שיש להתיר אז גם לפונקציה שתקבל ערכים מרוכבים. מה שנוגע לסְכם של פונקציה מרוכבת, למשל מ a עד b, הרי a ו b כאן מקומות במישור, ולכן המעבר מ a אל b אינו נקבע מראש, כמו המעבר מ a ממשי עד b ממשי בציר ה x אצל הסכימה הממשית; אלא יש כאן „מסילות" שונות במישור, המובילות מ a אל b. לחקירת תלותו או אי־תלותו של ערך הסכם במסילות־הסכימה יש חשיבות רבה בתורה זו.[1]

בתורת הפונקציות (הממשיות, ובייחוד המרוכבות) נודעת חשיבות יתרה להגדרת פונקציות ע"י אינטגרלים (עמ׳ 324), וביתר כלליות: כפתרונים למשואות דיפרנציאליות. בדרך זו הוגדרו רוב הפונקציות שהומצאו במשך 100 השנים האחרונות; לרבות מהן יש חשיבות גם במדעי־הטבע. טיבן הכללי מסובך מבארו כאן. נזכיר רק תכונה אחת של ה„פונקציות האֶליפטיות" (עמ׳ 324); הן מצַין הכללה לפונקציות הטריגונומטריות, בהיותן גם הן מחזוריות (עמ׳ 252) – אבל מחזוריות „בשני ממדים" ולא רק במימד אחד. למשל ל $\sin x$ או ל $\cos x$ יש המחזור 2π

1. השוה, למשל: W. J. Thron: Introduction to the theory of functions of a complex variable. New York, 1953. 230 pp.

ולא מחזור קטן מזה; כך יש לפונקציה אליפטית שני מחזורים מרוכבים יסודיים („קטנים ביותר") ω_1 ו ω_2, שמנתם $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ איננה ממשית. מענין הדבר שאין במציאות פונקציה חד־ערכית מחזורית „כללית יותר", ז"א בעלת שלשה מחזורים „לא־תלויים".

נרמוז עוד על בעיה חשובה הקושרת את החשבון האינפיניטסימלי בתורת הטורים! לשם פשטות נצטמצם לפונקציות $y=f(x)$ של גורם ממשי אחד (עקומים במישור). ידיעת נקודה אחת $P=(x_0, y_0)$ של עקום בוודאי איננה מגדת לנו ולא כלום על התנהגות הפונקציה ומהלכה, אפילו בסביבת P. קצת יותר נדע אם, מלבד P, ינתן גם כוון המשיק ב P; כלומר, אם מלבד $f(x_0)=y_0$ ינתן גם $f'(x_0)$. בסביבה צרה למדי של P נוכל לעשות אז אומדנה למהלך הפונקציה (השוה בעמ׳ 310). אפשר להכליל רעיון זה ולשאול: אם ראשית $f(x)$ מוגדרת אצל $x=x_0$ ויש לה שם נגזרות מכל סדר, ואם שנית נדע את ערכה שם $f(x_0)$ וערכי נגזרותיה $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., היספיק זה כדי לקבוע את $f(x)$ ולחשבה אצל כל x, אף כי ידיעותינו מצטמצמות למקום x_0? וביתר צמצום: בדעתנו את הנגזרות רק עד הסדר n (n מספר טבעי), התספיק ידיעה זו כדי לתת אומדנה בעלת דיוק מסויים על מהלכה של $f(x)$, לפחות בסביבה ידועה של x_0?

משל למה הדבר דומה: למֶטאורולוג הרוצה לנבא את מזג־האויר שיחול בעירו מחר בצהרים, על־סמך תצפיותיו בצהרי היום. בוודאי לא תספיק ידיעת הלחץ הברומטרי, מידת־החום, הלחות וכו׳ הנמצאים היום בעירו, כדי לנחש מה יהיה מחר. אמנם בדרך־כלל הוא מסתמך על ידיעת הגורמים הללו גם במקומות אחרים לפי „מפה מטאורולוגית". אבל באין לו ידיעה כזו (למשל בזמן המלחמה), וגם נוסף על ידיעות אלו, יפיק תועלת עקרונית מחקירת המצב של היום לא על פני הארץ בלבד אלא גם בשכבות־האויר העליונות, למשל בגובה של 500 מ׳, 1000 מ׳ וכו׳ עד לסטרָטוֹספירה (בעזרת עפיפונים, כדורים פורחים, אוירונים וכו׳). כמו שצירוף תצפיות כאלה בזמן אחד מעל אותו המקום עוזר באופן מכריע לקביעת גורמי מזג־האויר על פני הארץ למחרת היום, כך תאפשר ידיעת ערכי הפונקציה ו נ ג ז ר ו ת י ה אצל $x=x_0$ חישוב מקורב לערכי הפונקציה עצמה ב ס ב י ב ת x_0. יש הבדלים בין המשל לנמשל; ברם הדמיון אינו שטחי אלא חודר אל מהות המצב.

ואמנם בתנאים רחבים חיובית התשובה לשאלות הנ"ל. בפרט אם נדע את כ ל הנגזרות; אז אפשר בהנחות ידועות לתאר את $f(x)$ כטור־חזקות אינסופי אשר במקדמיו מופיעים $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ וכו׳ (טור ט י ל ו ר; השוה בעמ׳ 300).

הגדרת הסֶכם (עמ׳ 287) מעוררת את השאלה: ברצותנו להכניס, תחת ריוח־הסכימה הסופי $\{a, b\}$, ר י ו ח א י נ ס ו פ י, למשל את ציר הx כולו, האפשר להרחיב את מושג הסכם לקראת מקרה זה? נצא למשל מן $f(x)=\frac{1}{x}$. כנגד כל $z>0$ קיים

$\int_1^z \frac{1}{x}\,dx$; הרשאים אנו להגדיל את הקצה העליון z כך שנגיע אל $\lim\limits_{z\to+\infty}\int_1^z \frac{1}{x}\,dx$, או בקיצור אל $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$? לכאורה תשדלנו ההסתכלות לענות בחיוב. שהרי $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, ולכן השטחים שבין ציר ה$x$ והעקום $y=\frac{1}{x}$ בעלי אותו „הרוחב" הולכים וקטנים, בצעדנו ימינה בציר הנ"ל (השוה בציור 19, עמ׳ 232). לכן יתכן לנחש, שגם בשאוף הקצה העליון z אל $+\infty$ יתקרב בכל זאת הסֶכם הנ"ל — ז"א השטח בין העקום $y=\frac{1}{x}$ וציר הx מ $x=1$ ימינה — אל מספר סופי, הקובע את השטח.

אמנם במקרה זה הטעתנו ההסתכלות: השטח הולך וגדל, אף כי בקצב אטי מאד[1], מעל לכל מספר חיובי, ולפיכך אין במציאות הסכם „עד הקצה $+\infty$". ואולם בדוגמה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ימצא הקורא, בהסתמכו על [4] בעמ׳ 322, כי $\int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx$ מתקרב אל $+1$ אם $z\to+\infty$. במקרים ידועים אפשר אפוא לחלוק משמעות לסֶכם המשתרע על־פני ריוח אינסופי; סכם כזה מכונה „אינטגרל לא־אמיתי", ויש לקבוע תנאים למציאותו.

בעיה זו קשורה באחרת, והיא: האפשר להגדיר סכם לפונקציה ש א י נ נ ה ח ס ו מ ה בריוח־הסכימה (הסופי)? נתבונן שוב אל $f(x)=\frac{1}{x}$. הציור 19 יוכל לפתותנו שנאמין, כי אפשר להגדיר את הסכם $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (המתאים לשטח שבין ציר הy והעקום $y=\frac{1}{x}$ עד הפוסק כנגד $x=+1$), אף כי $\frac{1}{x}$ איננה חסומה בסביבת $x=0$ (ולא־מוגדרת אצל $x=0$). במקרה זה כוזבת ההשערה. ואולם גם כאן אפשר לתת תנאים, שבהם אי־חסימותה של $f(x)$ במקום אחד או אחדים של הריוח $\{a, b\}$ לא תמנענו מיצירת $\int_a^b f(x)\,dx$, אחרי הגדירנו סכמים „לא־אמיתיים" כאלה באופן מתאים.

אפשר להגדיר פונקציה ע"י סכימה גם בדרך שונה מהנ"ל (עמ׳ 324), והיא: בצאתנו מפונקציה של שני גורמים $f(x, t)$, נקבל בסֶכם (לפי t) $\int_a^b f(x, t)\,dt$ פונקציה של x בלבד. לפעולה זו יש שימושים רבים. נזכיר אחד מהם, המשלים בכוון ידוע את אשר למדנו על משואות דיפרנציאליות. הרי אלה שונות ממשואות אלגבריות בין שני משתנים x וy בעיקר בזה, ששם מופיעים x וy בלבד ואילו כאן גם הנגזרת, למשל של y (הפונקציה המבוקשת של x) לפי x. דוגמה: ל $x^2+y^2=r^2$ יש הפתרון $y=\sqrt{r^2-x^2}$, ל $y'=xy$ האינטגרל הכללי $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$. הרחבנו אפוא את מושג „המשואה", שעל־פיה עלינו לייצג y כפונקציה של x, אל מקרים שבהם קשורים x וy לא קשר „סופי" בלבד אלא גם ע"י גזירה. ובכן, למה

1. ביתר דיוק: השטח הולך וגדל בקצב שבו גדל $\ln x$ אם $x\to+\infty$ (השוה [5] בעמ׳ 322). הקורא ישוה זאת אל אי־התכנסותו של הטור ההרמוני $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ (עמ׳ 291), בעל האיברים $\frac{1}{x}$ כנגד כל x טבעי.

לא נצעד הלאה, בהכניסנו קשרים פונקציונליים אחרים אל המשואה? כצעד הקרוב בכוון זה נפעיל את הסכימה על אחד המשתנים; למשל בצורת המשואה $\varphi(x)=\int_a^b f(x,t)\varphi(t)\,dt$, שבה $y=\varphi(x)$ הפונקציה המבוקשת ו $f(\ ,t)$ פונקציה נתונה. משואות בעלות צורה זו וצורה כללית יותר נקראות „משואות אינטגרליות". הן עלו לגדולה החל מראשית המאה ה 20. הן במתימטיקה הן בשימושיה לפיסיקה, הודות למחקרי וולטֶרה[1], פרֶדהולם[2], הילבֶּרט ותלמידיו, י. שור[3]. ואולם על שיטות הפתרון לא נוכל אף לרמוז כאן. מענינים בייחוד קשריה של תורה זו באלגברה, אשר יסודם בקורבה שבין מושגי הטור והסֶכם.

ב § 3 עסקנו בקביעת ערכי x אשר אצלם יש ל $f(x)$ שיא או שפל. נכליל גם בעיה זו, כשאלנו: אם נתון ביטוי שבו מופיעות פונקציות לא־מסויימות (מבוקשות; השוה עמ׳ 237, הערה), איזו קביעה לפונקציות אלו תגרור כי הביטוי יקבל שיא או שפל (ב„תנאֵי־שפה" ידועים)? נניח שהביטוי יהיה סכם המכיל פונקציה מבוקשת y של x, ואולי גם y'; עָלינו לקבוע $y(x)$ כך שהסכם ישיג שיא או שפל (בהשואה לערכי הסכם על־סמך פונקציות אחרות y). בלשון הגיאומטריה: בין כל העקומים המקשרים למשל שתי נקודות נתונות במישור, נחפש אותם עקומים אשר לגביהם (בשמשם מסילת־הסכימה, השוה בעמ׳ 341) יקבל הסכם שיא או שפל. תורה זו שהיא רבת־שימושים בגיאומטריה ובפיסיקה[4], נקראת „תורת־הוָריאציות[5]".

הרמזים האלה, שברצונם לא לתת הגדרות ומסקנות אלא לציין כוונים, דיָם לספק מושג כלשהו על התפשטות ממלכת האנליזה בהיקף ענקי, אשר באה כמעט בהיסח־הדעת בעזרת כלי־הזיין החדים והתקיפים היוצאים מבית־החרושת של החשבון האינפיניטסימלי. חשבון זה פיתח במידה ובצורה, אשר לא פללו לה קדמונינו מלפני 400 שנה (ואשר שכבות רחבות של „בעלי השכלה" בזמננו טרם הבינוה), את מה שאפשר לקרוא „בנינה הסמלי (הסימבולי)" של המתימטיקה; תהליך אשר, עם הגיעו להישגים בלתי־צפויים כבר בתורת־המספרים, מתרומם לשיא הצלחתו אצל הפונקציות. גם השפה הרגילה אמנם בנין סמלי; ואולם הסימבוליקה המתימטית זוכה לנצחונותיה דוקא בהלחמה בלקויי השפה.

1. V. Volterra
2. E. I. Fredholm
3. I. Schur
4. דוגמה גיאומטרית: קַשר במישור שתי נקודות P ו Q מצד אחד ע"י הקטע הישר $\overline{PQ}$, מצד שני ע"י עקום מבוקש בעל אורך נתון, כך שהשטח בין $\overline{PQ}$ והעקום יגדל ככל האפשר! (העקום המבוקש יהיה קשת־מעגל.) — דוגמה פיסיקלית: נתונות שתי נקודות P ו Q במרחב; למשל P גבוהה מ Q. מצוא את העקום המוביל במהירות מקסימלית גוף „כבד" מ P ל Q, אם על הגוף לא ישפיע כח מלבד כח־המשיכה, ואם נתונה מהירות הגוף בתחילת התנועה.
5. מן המלה הרומית variatio = שינוי.

ובִיַצרה „שפה" מופשטת יותר, אובייקטיבית יותר, בהירה וברורה יותר אף מן השפות המפותחות, הטבעיות והמלאכותיות גם יחד. בתוך המתימטיקה עצמה הולידה התפתחות זו מהפכה, המאפשרת לתלמידי בית־הספר לפתור בשיטה מיכנית בעיות (כגון קביעת משיק או שטח) אשר במאה ה 17 התגברו עליהן רק יחידי סגולה בדרכים שדרשו עוז־דמיון וגבורת־חידוש; ואילו רוב הבעיות האנליטיות והגיאומטריות שנפתרו במאה ה 18 וה 19, לא היה אפשר אף לבטאן בלי המכשירים הסימבוליים החדשים. מאידך הביאו המכשירים האלה גם לידי פריחה חדשה בעץ הלוגיקה (תורת־ההגיון) אשר עוד קַנט[1] חשבוֹ ליבש ועקר ללא תיקון: הלוגיקה הסימבולית, שהיא פרי הסימבוליקה המתימטית, עלתה פלאים במשך 100 השנים האחרונות ותגמול פרות בעיקר החל מראשית המאה ה 20.

אמנם כלפי חוץ, מהשקפת הטכניקה שלנו וידיעתנו את הטבע (שמובנה גם: למשול בטבע), בולטת לעין כל פריחת מדעי־הטבע שאופשרה ע"י הסימבוליקה המתימטית, במובן מחודש במקצת, שהטביע עליו את חותמו מושג האיסומורפיסמוס (פרק חמישי). קיימים גם היום דברי גליליי: לא יוכל לקרוא בספר המקיף, ששמו טבע, מי שאינו יודע את הלשון שבה נכתב הספר: הלוא היא לשון הסמלים המתימטיים והיחסים שבהם הנם קשורים.

1. I. Kant

מלואים לחלק השלישי.

א) נוסחת־השירבוב של ניוטן (מלואים לעמ׳ 248/9).

יהיו נתונים n ערכים (ממשיים) שונים x_1, x_2, ..., x_n לגורם x. נחפש פונקציה $f(x)$ המקבלת במקומות x_k את הערכים (הממשיים) y_k, הנתונים גם הם ושאינם מוכרחים להיות שונים זה מזה. נדרוש אפוא שיהיה $f(x_k)=y_k$ כנגד $k=1, 2, \ldots, n$. נוסיף ונדרוש כי $f(x)$ פולינום בעל מעלה קטנה מ n. (בלעדי הדרישה הזאת נקבל אינסוף פתרונים.)

אם a_1, a_2, ..., a_{n-1} מספרים שעתידים אנו לקבעם, תקבל הפונקציה

$$f(x)=y_1+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+$$
$$+a_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

אצל x_1 את הערך y_1, בהתאם לדרישתנו הראשונה.

את הדרישה השניה $f(x_2)=y_2$ נמלא בקבענו את a_1 לפי התנאי $y_2=y_1+a_1(x_2-x_1)$, ז״א $a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; כי לפי זה יהיה:

$$f(x_2)=y_1+a_1(x_2-x_1)+0+\ldots+0=y_2.$$

בהמשיכנו כך, נקבע a_2 בהתאם ל $f(x_3)=y_3$, ז״א לפי המשואה

$$y_3=y_1+a_1(x_3-x_1)+a_2(x_3-x_1)(x_3-x_2);$$

זוהי משואה ליניארית לנעלם a_2. כך נמשיך עד $f(x_n)=y_n$, הקובע את a_{n-1}.

הפתרון שקבלנוהו קבוע באופן יחיד; לאמור: אין פולינום אחר $g(x)$ שמעלתו קטנה מ n, הממלא גם הוא את התנאים $g(x_k)=y_k$. אילו היה $f(x)\neq g(x)$, כי אז היו למשואה האלגברית $f(x)-g(x)=0$, בעלת מעלה קטנה מ n, n השרשים השונים x_k; לכן $f(x)=g(x)$ לפי המשפט 2 בעמ׳ 177, מש״ל.

דוגמה: נתונים $y_1=f(0)=-11$, $y_2=f(1)=-4$, $y_3=f(2)=1$, $y_4=f(3)=16$. החשבון הנ״ל נותן: $a_1=7$, $a_2=-1$, $a_3=2$; לכן

$$f(x)=-11+7x-x(x-1)+2x(x-1)(x-2)=2x^3-7x^2+12x-11.$$

הערה: חד־הערכיות שהוכחה לעיל מתכוונת כמובן לפולינום $f(x)$ בעצמו, ולא לשיטה בה ייצגנוהו (שהומצאה ע״י ניוטן). יש גם שיטות אחרות, ביניהן זו של לַגרנג׳[1]. יתרונה של נוסחת ניוטן היא בזה, שבונים כאן את הפולינום דרגות דרגות, כך שלתוך המחוברים הראשונים לא יכנסו כל y_k הנתונים ואף לא מספרם הכולל n. זה מתאים לצרכים המעשיים לגבי תיאורו של חומר נסיוני נתון ע״י

1. את הנוסחה הנקראת על שם לגרנג׳ כבר ב 1779 E. Waring.

נוסחה: אפשר לבנות, ראשית, נוסחה לפי מספר מצומצם של ערכי y_k מתוך החומר; אם יתברר כי לפי נוסחה זו אין התאמה מספיקה לשאר הערכים שבחומר הנסיוני, נוכל להוסיף מחוברים חדשים — ללא שינוי המחוברים אשר הוכנסו מקודם.

ב) הוכחה כי $\sin x$ פונקציה טרַנסצֶנדֶנטית (מלואים לעמ׳ 250).

אילו היתה $y=\sin x$ פונקציה אלגברית של x, מיוצגת ע״י $F(x,y)=0$ (עמ׳ 250), כי אז נסדר את הפולינום $F(x,y)$ לפי חזקות של x (לא של y) ונקבל:

$$B_0(y)\cdot x^m+B_1(y)\cdot x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}(y)\cdot x+B_m(y)=0. \tag{1}$$

m מסמן כאן את מעלת הפולינום $F(x,y)$ לגבי x; ה $B_k(y)$ הנם פולינומים ב y. נוכל להניח שלא כל אחד מן המקדמים $B_k(y)$ מתחלק ב y; אחרת נוכל לחלק $F(x,y)$ מראש ב y ללא שינוי הערך 0, הואיל ולא תמיד (ז״א כנגד כל x) $y=0$.

ועתה נסתור את ההנחה כי משואה בעלת הצורה (1) מתמלאת ע״י $y=\sin x$. כידוע קיים $y=\sin x=0$ אצל אינסוף מקומות x (הם $x=\pm n\pi$, לרבות 0; עמ׳ 251/2). לכן היו אינסוף ערכי x שונים ממלאים את המשואה:

$$B_0(0)\cdot x^m+B_1(0)\cdot x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}(0)\cdot x+B_m(0)=0. \tag{2}$$

המקדמים $B_k(0)$ הנם מספרים. לפיכך קבלנו סתירה למשפט 2 בעמ׳ 177, אשר לפיו יש לכל היותר m שרשים ל (2). — בקיצור: $\sin x$ פונקציה טרנסצנדנטית, הואיל והיא מקבלת אצל אינסוף מקומות אותו הערך (ואיננה קבועה).

הוכחה זו דורשת בטחון שלא יוכל להיות $B_k(0)=0$ כנגד כל k. ואמנם זאת היתה אומרת כי כל $B_k(y)$ מתחלק ב y, בניגוד למה שהנחנו לעיל.

ג) על טורים שאיבריהם מתחלפי־סימן (מלואים לעמ׳ 263).

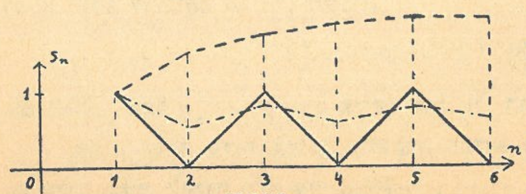
רמזנו בעמ׳ 294 על בעית הטורים שאינם „מתכנסים בהחלט". כאן לפנינו פרט מן הנושא ההוא, אשר אפס קצהו נראה וכולו לא נראה בספר זה.

הבה נוכיח כי הטור $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ מתכנס; נמחיש את התנהגותם של טורים, בהקצותנו בציר הפסוק את הציון (השלם) n, בציר הפוסק את הסכום החלקי s_n; פעמים מועיל לקשר ע״י קטעים ישרים את הנקודות הבודדות (n, s_n). במובן זה מתאר הציור 57 את הטורים

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots;\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,\quad 1-1+1-1+\ldots,$$

הציור ממחיש גם את אשר הוגד על שני הראשונים בעמ׳ 263 ו 261.

לשם עיון בטור השלישי נשוב אל הציור 35 בעמ׳ 262



ציור 57

ואל המבואר שם. קל לראות כי סדרת הנקודות השמאליות (s_{2m}) עולה וסדרת הנקודות הימניות (s_{2m-1}) יורדת, וכי צירופן קובע מספר מסויים s כמבואר בפרק הששי, § 3. s הנהו סכום הטור לפי ההגדרה 1 בעמ׳ 290; השוה גם הדוגמה 4) בעמ׳ 283. (3) בעמ׳ 300 מראה כי $s=\ln 2$. — הטור שלפנינו איננו מתכנס בהחלט; לכן, בהתאם ל א) בעמ׳ 294, יֵהפך הטור ע״י חילופים מתאימים בסדר האיברים לטור מתבדר או לטור בעל סכום נתון כרצוננו (תחת הסכום $\ln 2$).

קיים אף באופן כללי המשפט: טור שאיבריו a_n מתחלפי־סימן (כטור שלפנינו) מתכנס על־כל־פנים, אם $|a_{n+1}|\leq|a_n|$ כנגד כל n ואם $\lim a_n=0$ (השוה המשפט 6 בעמ׳ 294). ההוכחה מתנהלת בדיוק כמו בדוגמה דלעיל.

ד) חישוב e בעזרת רבית־דרבית לפי „תשלום־מראש" (מלואים לעמ׳ 288).

אם על הלווה לשלם רבית מראש (בראשית כל תקופת־רבית), הרי לטובת המלוה הוא שיקטן מספר זמני הפרעון; בקבלו בראשית השנה את הרבית לשנה כולה, יוכל המלוה להלוות בו ביום גם את סכום הרבית $q\,(>0)$ (כנגד הקרן 1), וכן את רבית הסכום הזה שהיא $q\cdot q=q^2$, וכו׳. פעולה זו נשנית בלי קץ בראשית השנה, ומגדילה את הקרן באותו רגע עד לסכום $1+q+q^2+q^3+\ldots$. זהו טור הנדסי בעל המנה $q>0$, המתכנס כידוע אל $\frac{1}{1-q}$, אם $q<1$ (עמ׳ 292).

הבה נשוה זאת אל המסקנות שנקבלן, אם בראש כל חלק nי של השנה משתלמת הרבית $\frac{q}{n}$, ואם המלוה משתמש בה לפי רבית דרבית וכו׳ כדלעיל! אם $n=2$, תגדל הקרן בראש המחצית הראשונה של השנה עד

$$1+\frac{q}{2}+\left(\frac{q}{2}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-\frac{q}{2}}, \quad \text{בתנאי } \frac{q}{2}<1.$$

בראש המחצית השניה ישקיע המלוה את הסכום $\frac{1}{1-\frac{q}{2}}$ באותה הדרך, ויקבל כנגד חצי־שנה פי $\frac{1}{1-\frac{q}{2}}$ ממה שקבל כנגד המחצית הראשונה מן הקרן 1, כלומר

$$\frac{1}{1-\frac{q}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{q}{2}}=\left(\frac{1}{1-\frac{q}{2}}\right)^2=\left(1-\frac{q}{2}\right)^{-2}.$$

וכן בשביל n גדול יותר; בדרך־כלל תגדל אפוא הקרן במשך שנה עד $\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}$, אם $q<n$. לפי מה שנאמר בפיסקה הקודמת, קיימים אי־השויונות (שלא יקשה להוכיחם גם דרך חשבון):

$$\text{(I)} \qquad (1-q)^{-1}>\left(1-\frac{q}{2}\right)^{-2}>\cdots>\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}>\cdots. \quad (q<1)$$

אם $q\geq 1$, אבל $q<n$, קיימים אי־שויונות אלו החל מן האיבר הnי.

אם n קבוע, עדיף כמובן מהשקפת המלוה התשלום בראש כל תקופה מן התשלום בסוף. לאמור (לפי עמ׳ 287/8):

$$\text{(II)} \qquad \left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}>\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n}.$$

מן (I) ו (II) ו (1) בעמ׳ 288 נופק, כי $\left(\left(1+\frac{q}{n}\right)^n\right)$ סדרה עולה חסומה מלעיל, וכן $\left(\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}\right)$ סדרה יורדת חסומה מלרע; לכן מתכנסות שתיהן (עמ׳ 284)[1]. אמנם אם נסתמך על משמעות הנוסחות לפי הלואה ברבית[2], מסתבר גם בלעדי משפט כללי כי יש גבולות לשתי הסדרות הנ״ל; וגדולה מזו: כי גבולותיהן שוים. שהרי כל אחת מן הסדרות שואפת אל המקרה של „רבית־דרבית רציפה בכל רגע". (באמת: כלפי תשלום רציף של הרבית אין הבדל בין תשלום „מראש" או „בסוף".) הגבול המשותף הוא $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^{-n}$, והוא שוה ל$e^q$ (משפט 3 בעמ׳ 289).

ה) על פונקציות רציפות ולא־גזירות (מלואים לעמ׳ 307).

התנהגותה של $x\sin\frac{1}{x}$ אצל $x=0$ מעוררת את הרעיון „לצבור" נקודות כאלה אשר אצלן תהיה $f(x)$ רציפה ולא־גזירה. את הקושי העיקרי נרגיש, בנסותנו להשיג זאת אצל כל x. ואמנם קשה במקצת להבין ולהוכיח התנהגות זו של פונקציות שונות אשר נחקרו מנֶירשטרס ועד ימינו. במקרים ידועים מועיל לגשת אל הבעיה בצורה גיאומטרית־הסתכלותית; נעשה זאת בחלק החמישי (כרך שני). בקוים קצרים, המיועדים למתקדמים, תובא כאן דוגמה חדישה המצריכה פחות הכנה[3].

יהי x מספר ממשי, ו $f_n(x)$ ערכו המוחלט של ההפרש בין x ובין אותו שבר עשרוני סופי בעל n ספרות (אחרי הפסיק), הקרוב ביותר אל x. כלומר: $f_n(x)$ הנהו המינימום בין ערכי $|x-m\cdot 10^{-n}|$, אם m שלם. נוכיח כי הטור $f(x)=\sum\limits_1^\infty n\,f_n(x)$ מייצג פונקציה, הרציפה תמיד וחסרת נגזרת סופית[4] בכל מקום.

מצד אחד קל לראות כי קיים $|f_n(x_2)-f_n(x_1)|\leq|x_2-x_1|$; ז״א $f_n(x)$ רציפה כנגד כל n. כמו־כן מתכנס הטור הנ״ל במידה שוה על־סמך $f_n(x)<10^{-n}$ (משפט 8 בעמ׳ 298). לפיכך גם $f(x)$ רציפה, לפי המשפט 4 בעמ׳ 299.

מצד שני נתאר x ממשי כלשהו כשבר עשרוני ונסמן ב q מספר טבעי. אם

---

1. אם $q<1$, גורר כבר $\left(1+\frac{q}{n}\right)^n<\frac{1}{1-q}$ את חסימות הסדרה העולה, ולכן את התכנסותה. הסדרה היורדת נחוצה רק כדי שיוכל q לקבל כל ערך חיובי. — אם $n\leq q<n+1$, נמחק בסדרה היורדת את n האיברים הראשונים.

2. כבר Jacob BERNOULLI קשר את e ו e^q ברבית־דרבית ותאר e^q כסכום שאליו תגדל הקרן 1 במשך שנה על־פי רבית־דרבית „רציפה" ב q 100 אחוז.

3. הדוגמה פורסמה ע״י B. L. VAN DER WAERDEN בכרך ה 32 (1930) של ה *Mathematische Zeitschrift*, עמ׳ 474/5. את צורת ההומחה נתן A. HEYTING.

4. אפשר להראות כי אין ל $f(x)$ אפילו נגזרת סופית חד־צדדית (עמ׳ 305 למטה) בשום מקום; מאידך יש מקומות שאצלם יש ל $f(x)$ כביכול „הנגזרת" $+\infty$; למשל אצל $x=\frac{1}{3}$.

הספרה הqית (אחרי הפסיק) של x תהיה 4 או 9, נשים $y=x-10^{-q}$; בכל מקרה אחר נשים $y=x+10^{-q}$. לפי זה יתלכדו השברים העשרוניים בעלי n ספרות הקרובים אל x ואל y, אם $q>n$, ואז יהיו x ו y שניהם קטנים או שניהם גדולים מן השבר הקרוב הנידון; כי אותו נקבל בהפסיקנו את פיתוחו של x אחרי הספרה הnית, ובחברנו 1 אל ספרה זו במקרה שהספרה הבאה גדולה מ 4. לכן קיים:

אם $n<q$, $f_n(y)-f_n(x)=\pm(y-x)$; אם $n\geqq q$, $f_n(y)-f_n(x)=0$.

$f(y)-f(x)$ מיוצג אפוא כסכום הסופי $\sum\limits_1^{q-1} (f_n(y)-f_n(x))$, וקיים היחס $f(y)-f(x)=s\cdot(y-x)$, שבו s שלם. s אי־זוגי כנגד q זוגי, s זוגי כנגד q אי־זוגי.

לכן תקבל מנת־ההפרשים $s=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ בכל סביבה של x הן ערכים (שלמים) זוגיים הן ערכים אי־זוגיים. לאמור: אין במציאות נגזרת (סופית) ל $f(x)$.

ו) הוכחה כי כל פונקציה רציפה היא סכימה (מלואים לעמ׳ 308).

רציפותה של $f(x)$ בריוח ידוע מביעה כי $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ אצל כל x_0 בריוח[1]; ביתר פירוט: בהנתן x_0 קיים כנגד כל ε חיובי h חיובי („קטן במידה מספיקה") כך ש $|x-x_0|\leqq h$ גורר $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ואולם אם הריוח $\{a, b\}$ סגור, נכונה אף טענה גדולה מזו (עמ׳ 299): לא רק שלכל x_0 ולכל ε מתאים ערך $h=h(x_0, \varepsilon)$ כנ״ל, אלא קיים $h=h(\varepsilon)$ שכחו יפה כנגד כל x_0 ב $\{a, b\}$; לכל ε מתאים אפוא h כך, שכנגד כל שני ערכים x ו $\bar{x}$ מ $\{a, b\}$, בעלי רוחק קטן או שוה ל h (ז״א $|x-\bar{x}|\leqq h$), יהיה $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$. $h=h(\varepsilon)$ מודד כביכול את „טיב" רציפותה של $f(x)$ ב $\{a, b\}$ כולו. לא נוכיח תכונה זו[2], הנקראת „רציפות במידה שוה", או „רציפות־בריוח", אבל נוציא ממנה מסקנה חשובה.

בהגדירנו את הסָכם בעזרת חָסם מלרע $\underline{F}$ וחסם מלעיל $\bar{F}$ (עמ׳ 272/5) או במישרין כגבולו של סכום (עמ׳ 287), הסתכלנו ב„עמודים צרים" (עיין בציור 40, עמ׳ 274) אשר „גבהם" משתנה ממקום למקום כפי $f(x)$. מסתבר כי גבול סכומם של שטחי העמודים שכנגד $\{a, b\}$, בשאוף רחבי העמודים אל 0 ומספרם אל ∞, (כלומר הסָכם הדרוש לנו) קיים, אם סכום שטחי המלבנים הקטנים, שאחד מהם מופיע בציור 40 למעלה, שואף אל 0; כלומר אם (ורק אם) מתאפס גבולו של סכום כל המכפלות $(x_k-x_{k-1})(\bar{f}_k-\underline{f}_k)$ (עמ׳ 274). ההוכחה למבחן חשוב זה איננה קשה ביותר.

---

1. כמובן בתנאי שגם x_0+h יימצא בריוח.

2. לא יספיק לומר: נקח, אחרי הנתן ε, מבין כל ערכי h המתאימים למקומות שונים x_0 את הערך הקטן ביותר; כי אין זה ברור מראש שישנו h חיובי קטן ביותר. באמת מתברר למשל אצל $f(x)=\frac{1}{x}$ בריוח הפתוח $(0, 1)$, כי h יקטן בלי קץ בהתקרב x אל 0, כך שהחסם התחתון ל h יהיה 0.

והנה התנאי הזה מתמלא למשל, אם $f(x)$ רציפה ב $\{a, b\}$. נוכיח זאת בקבענו כנגד ε נתון את h כך ש $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$ אם $|x-\bar{x}|\leqq h$ (עיין לעיל), ובהקטיננו עד h את רחבי העמודים. גבהו של כל אחד המלבנים הקטנים הנ״ל יקטן אז מ ε, וסכום שטחי המלבנים יקטן מ $(b-a)\varepsilon$, ז״א יקטן כרצוננו. כאמור לעיל, קיים לפי זה $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

קל לראות על־סמך המבחן הנ״ל כי הסכם יוכל להתקיים גם אם $f(x)$ איננה רציפה; למשל אם $f(x)=[x]$ (עמ׳ 234). וביתר כלליות: אם $f(x)$ מונוטונית. אחרי חלקנו, למשל, את הריוח $\{a, b\}$ ל n חלקים שוים בעלי הרוחב δ, ישוה הסכום הנ״ל למכפלה $\delta\cdot\sum\limits_1^n k(\bar{f}_k-\underline{f}_k)$, ולפי זה מפני המונוטוניה ל $\delta\cdot|f(b)-f(a)|$. והנה מכפלה זו שואפת אל 0 בשאוף δ אל 0.

ז) משפט־ערך־הביניים של חשבון־הגזירה (מלואים לעמ׳ 309).

נוכיח את המשפט בצורתו הפרוטה (עמ׳ 310) המניחה $f(x_0)=f(x_0+h)=0$. המעבר למקרה הכללי מצריך הצבת הפונקציה $f(x)-f(x_0)-(x-x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ במקום $f(x)$; או בשפת הגיאומטריה: „הקטנת" הפוסק $y=f(x)$ ראשית בערך הקבוע $f(x_0)$ ושנית במכפלה מ $x-x_0$ ומ„גורם־העלייה" של המיתר (החותך; השוה בעמ׳ 270). זוהי העברת־קואורדינטות פשוטה, ההופכת את המיתר לציר הפסוק.

במקרה הפרוט נסתמך על המשפט 2 בעמ׳ 299. אם $f(x)$ איננה הקבוע 0, ישנו בתוך הריוח $\{x_0, x_0+h\}$, שבו $f(x)$ גזירה, לפחות מקום אחד $\xi=x_0+\theta h$ אשר בו משיגה $f(x)$ שיא או שפל. אז קיים $f'(\xi)=0$ לפי המשפט 2 בעמ׳ 326, מש״ל.

ח) גזירת מכפלה של n פונקציות (מלואים לעמ׳ 315).

בכתבנו את הנוסחה (6) שבעמ׳ 315 בצורה $\frac{(u_1 u_2)'}{u_1 u_2}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}$ (בתנאי כי u_1 ו u_2 שונות מ 0 במקום הנידון; כך נַתנה גם להלן) נוכיח ע״י אינדוקציה שלימה (עמ׳ 17/8) נוסחה מתאימה לגבי n גורמים. נניח שקיים כנגד n כלשהו נתון

$$\frac{(u_1 u_2\cdots u_n)'}{u_1 u_2\cdots u_n}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\cdots+\frac{n'}{u_n}. \tag{1}$$

בהוסיפנו עוד u_{n+1}, נקבל על־פי הנוסחה (6) בעזרת פירוק לשני גורמים (לפי ההנחה)

$$\frac{(u_1 u_2\cdots u_n u_{n+1})'}{u_1 u_2\cdots u_n u_{n+1}}=\frac{(u_1 u_2\cdots u_n)' u_{n+1}}{u_1 u_2\cdots u_n\ n+1}+\frac{u_1 u_2\cdots u_n u_n'+1}{u_1 u_2\cdots u_n u_{n+1}}=$$

$$=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\cdots+\frac{u_n'}{u_n}+\frac{u_n'+1}{u_{n+1}},$$

ז״א (1) קיים גם כנגד $n+1$ גורמים, ולכן כנגד כל מספר של גורמים. (ב (1) מופיעה לשם פשטות־הניסוח „הנגזרת הלוגריתמית"[1] של המכפלה.)

---

1. $\frac{u'(x)}{u(x)}$ נקראת הנגזרת הלוגריתמית של $u(x)$, בהיותה הנגזרת של $\ln u(x)$ (השוה עמ׳ 320).

לו רצינו לבסס את ההוכחה ממש על הלוגריתמוס—שיטה שאיננה רצויה אצל ענין פשוט כמו המכפלה— נקבל את (1) מיד כנגד כל n; שהרי לפי (2) בעמ׳ 313 קיים:

$$\frac{d\ln(u_1 u_2 \cdots u_n)}{dx} = \frac{d(\ln u_1 + \cdots + \ln u_n)}{dx} = \frac{d\ln u_1}{dx} + \cdots + \frac{d\ln u_n}{dx} = \frac{u_1'}{u_1} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}.$$

קל לקבל מ (1) את נגזרת המכפלה בעצמה; למשל, אם $n=4$:

$$(u_1 u_2 u_3 u_4)' = u_1' u_2 u_3 u_4 + u_1 u_2' u_3 u_4 + u_1 u_2 u_3' u_4 + u_1 u_2 u_3 u_4'.$$

ט) גזירתן של פונקציה „מורכבת" ושל הפונקציה „ההפוכה" (מלואים לעמ׳ 317/8).

לפי הסימון שבמשפט 1 (שם) ובהנחותיו נוכיח שקיים אצל $x=x_0$, $u=u_0$:

$$(y=\psi(u),\ u=\varphi(x))\qquad f'(x)=\psi'(u)\cdot\varphi'(x),\ \text{כלומר}\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

בתנאי $\Delta u \neq 0$ נקבל שויון זה מיד מן היחס בין מנות־ההפרשים המתאימות $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$, בהשאיפנו את Δx אל 0; שהרי מפני רציפותה של $\varphi(x)$ קיים $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$.

כדי שנהיה פטורים מבדיקת האפשרות $\Delta u=0$, עדיף לגשת אל החשבון בלי מכנים. נכתוב אפוא לפי הגדרת הנגזרת (עמ׳ 286 ו 305)

$$\Delta\varphi=\varphi'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x,\quad \Delta\psi=\psi'(u)\Delta u+\eta\Delta u; \qquad (2)$$

ε ו η ממלאים את היחסים $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\eta=0$. אם $\Delta u=0$, טרם הוגדר η; הבה נקבע כי אז $\eta=0$.

בהציבנו ב (2) (מימין) תחת $\Delta u=\Delta\varphi$ את ערכו משמאל, נקבל:

$$\Delta\psi=\psi'(u)\varphi'(x)\Delta x+(\varepsilon\psi'(u)+\eta\varphi'(x))\Delta x+\varepsilon\eta\Delta x;$$

בחלקנו ב Δx ובהשאיפנו את Δx אל 0, נקבל (1), מש"ל.

מה שנוגע לפונקציה „ההפוכה", נניח כבמשפט 2 (עמ׳ 318) כי הפונקציה (החד־ערכית) $y=f(x)$ מונוטונית ורציפה בריוח $\mathfrak{J}$; לכן הפונקציה ההפוכה $x=g(y)$ גם היא חד־ערכית ורציפה בריוח מתאים I.[1] יהי $x=x_0$ מקום כלשהו מ $\mathfrak{J}$, כך ש $y_0=f(x_0)$ נמצא ב I, ויהי $f'(x_0)\neq 0$.

מכיון שהתמונה הגיאומטרית של $y=f(x)$ מתלכדת עם תמונת $x=g(y)$ — רק שצירי הפוסק והפסוק מתחלפים; עיין בעמ׳ 240 — גוררת מציאות המשיק של $y=f(x)$ במקום $x=x_0$ את מציאות המשיק של $x=g(y)$ במקום $y=y_0$; המשיקים האלה מזדהים. והנה הזויות α ו β בין המשיק ובין צירי ה x וה y משלימות זו את זו לזוית ישרה; הואיל וקיים $\tan\alpha=f'(x_0)$, $\tan\beta=g'(y_0)$ (השוה בעמ׳ 270), נקבל לפי ההנחה $f'(x_0)\neq 0$:

1. עובדה זו, שגם $g(y)$ מוגדרת בריוח לערכי y (השוה עמ׳ 245), מתבססת בעיקר על המשפט 1 בעמ׳ 299; על־פיו מתאים לריוח, שבו הוגדרה $f(x)$, שוב ריוח המכיל את ערכי $f(x)$. אם $\mathfrak{J}$ סגור, סגור I גם הוא ומכיל את המספרים הממשיים בין ערכי $f(x)$ אצל קצותיו של $\mathfrak{J}$.

$$f'(x_0)\cdot g'(y_0)=\tan\alpha\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha=1;\quad g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

מסקנה זו מתקבלת גם דרך החשבון. $g'(y_0)$ הריהו גבול המנה $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ אם $y\to y_0$; או על־סמך הרציפות של $x=g(y)$: אם $x\to x_0$. לכן קיים:

$$g'(y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

הוכחה זו נותנת בבת־אחת את מציאות הנגזרת ואת ערכה. אם נסתמך מראש על מציאותה, נוכל להשתמש במשפט 1 מעמ׳ 317; גזירת הזהות $x=g(f(x))$ תתן:

$$\frac{dx}{dx}=1=\frac{dg(f(x))}{df(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}=\frac{dg(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}=g'(y)\cdot f'(x).$$

י) הוכחת המשפט ה„יסודי" (3) של החשבון האינפיניטסימלי (מלואים לעמ׳ 320).

הגדרת $F(x)$ במשפט 3 גוררת $F(x+h)=\int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi$, בתנאי שגם $x+h$ יימצא ב $\{a,b\}$ (מה שאפשר למלא אם $a\neq x\neq b$). לפי ה) בעמ׳ 276 קיים:

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi-\int_a^{x} f(\xi)\,d\xi=\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

והנה המשפט 5 על ערך־ביניים (עמ׳ 312) נותן לנו, הואיל ו $f(x)$ רציפה:

$$\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi=h\cdot f(X).$$

X מסמן כאן ערך־ביניים בין x ו $x+h$. קיים אפוא על־פי (1): $f(X)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

בשאוף h אל 0, ולכן $x+h$ אל x, ישאף גם X אל x; יחד עם זאת תשאף המנה שמימין השויון האחרון אל הנגזרת $F'(x)$. לאמור: $F'(x)=f(x)$. בתנאים הנ"ל נקבל אפוא, בגזרנו את הנסכמת של $f(x)$, את הפונקציה $f(x)$ בעצמה; והרי זהו תוכן המשפט היסודי.

מפתח המונחים והסימנים.

על־יד כל מונח נמצא המונח המתאים באנגלית, ואם יש צורך גם בגרמנית; בצרפתית רק במקרים שבהם שונה המונח הצרפתי בעיקרו מן האנגלי והגרמני. כמעט בלי יוצא־מן־הכלל מופיע המונח העברי בצורה אשר קָבעה ועד הלשון — עד כמה שקבע; עיין ב„מִלון למנחי מתמטיקה" (מלוני ועד הלשון העברית, מס. י'; ירושלים ת"ש) וב„לשוננו" (רבעון לשכלול הלשון העברית), כרך ט' (תרצ"ח/ט), עמ' 32—322. השוה גם ת. מוצקין, שם כרך ח' (תרצ"ז), עמ' 34—327.

המספרים מציינים את העמוד בספר הזה. עפ"י רוב צויין רק העמוד(ים) אשר שם הוגדר או הוכנס המונח בראשונה (המונחים העקריים מופיעים שם בדפוס קורסיבי [איטליקס]), או שם ניתנה לו משמעות מורחבת וכו'. מונחים כלליים כמו „נופק", „מֶרכז", „מַלבן" ודומיהם, עד כמה שנראה צורך לתרגמם, מופיעים בלי ציונו של עמוד מיוחד.

הא"ב היווני:

$A\ \alpha\ B\ \beta\ \Gamma\ \gamma\ \Delta\ \delta\ E\ \varepsilon\ Z\ \zeta\ H\ \eta\ \Theta\ \vartheta\ I\ \iota\ K\ \varkappa\ \Lambda\ \lambda\ M\ \mu$

$N\ \nu\ O\ o\ \Pi\ \pi\ P\ \varrho\ \Sigma\ \sigma\ T\ \tau\ Y\ \upsilon\ \Phi\ \varphi\ X\ \chi\ \Psi\ \psi\ \Omega\ \omega$

הא"ב הגוטי:

$\mathfrak{A}$ ($\mathscr{A}$) $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{B}$ ($\mathscr{B}$) $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{e}$ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{f}$ $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{J}$ $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{k}$ $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{l}$ $\mathfrak{M}$ ($\mathscr{M}$) $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{U}$ $\mathfrak{u}$ $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{W}$ $\mathfrak{w}$ $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{y}$ $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{z}$

מפתח השמות.

אצל רוב החוקרים המופיעים להלן ינתנו פרטים ביוגרפיים אחדים; אצל החשובים ביותר ירשמו הוצאת כתביהם (אשר בה עפ"י־רוב גם חומר ביוגרָפי מפורט) או תיאורים ביוגרפים מיוחדים. בקשר עם זאת מצוטט כ„Bell" הספר E. T. Bell: Men of mathematics, 1937 & 1946 (653 pp.), המכיל תיאורים חיים ורעננים מהשקפה מתימטית (אף כי לא תמיד כל הפרטים מדוייקים). כן מצוטטים כ„רות I ו II" הספרים: ת. י. רות: מורה־דרך בפילוסופיה היוונית (ירושלם 1939), מורה־דרך בפילוסופיה החדשה (1941; ספרית מַס למדע פופולרי מס. 18 ו 21). הקורא ישים לב כמה מגדולי המתימטיקנים מתו בנעוריהם; גם בין האחרים רבים אלה שהגיעו לשיא הישגיהם דוקא בהיותם צעירים (Newton, Gauss וכו').

מתוך הספרים על דברי־ימי־המתימטיקה נזכיר:

M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.
4 כרכים, 941+943+923+1113 עמ'. הופיעו בכמה מהדורות.

R. C. Archibald: Outline of the history of mathematics, 1941. 76 pp.

E. T. Bell: The development of mathematics. New York 1945. 637 pp.

F. Cajori: A history of mathematics. New York, 2nd ed. 1919. 514 pp.

Th. L. Heath: A history of Greek mathematics. 2 Vols. Oxford 1921. 446+586 pp.

F. Klein: Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin 1926. 386 pp.

G. Prasad: Some great mathematicians of the 19th century. 2 Vols. Benares 1933/4.

D. E. Smith: History of mathematics. 2 Vols. 2nd ed., Boston 1929/31.

H. Wieleitner: Geschichte der Mathematik. 2 Bdde. Berlin u. Leipzig 1922/3. 136+152 pp. (*Sammlung Göschen* No. 226 u. 875.)

בקשר עם נושאה הכללי של המתימטיקה נצַטט עוד:

W. W. R. Ball: Mathematical recreations and essays. (11th ed., revised by H. S. M. Coxeter.) London 1939. 418 pp.

M. Kraïtchik: Mathematical recreations. New York 1942.

T. Dantzig: Number, the language of science. London 1930. 260 pp.

G. H. Hardy: A mathematician's apology. Cambridge Univ. Press 1940. 104 pp.

O. Ore: Mathematics. (*Development of the Sciences*, 2nd Ser., p. 1—51.) Yale University Press 1941.

H. Poincaré: La science et l'hypothèse. Paris. הופיע מ 1903 ואילך בכמה מהדורות, גם באנגלית ובגרמנית.

H. Rademacher u. O. Toeplitz: Von Zahlen und Figuren. Berlin 1930. 164 pp.

A Voss: Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur.—Über die mathematische Erkenntnis. (*Die Kultur der Gegenwart*, III. Teil, 1. Abt.) Leipzig u. Berlin 1912/14. 49+148 pp.

קֶניגסבֶרג והשפיע על העמקת ההוראה האוניברסיטאית במת׳. כתביו הופיעו ב 8 כרכים 1881—90. השוה BELL והביוגרפיה מאת L. KOENIGSBERGER (לייפציג 1904).

Kant, Immanuel (1724—1804) 345. מגדולי הפילוס׳ של הזמן החדש. להשקפותיו על אפיים של המשפטים המת׳ אין מסכימים רוב המת׳ של ימינו. השוה רות II.

Kaván, G. (Jiřc) (מת ב 1933) 27. השוה *Scripta Math.* כרך 4 (1936), עמ׳ 338.

Kep(p)ler, Johannes (1571—1630) 340. גרמני, מגדולי האסטרונומים; חידש גם בגיאומ׳ ובאופטיקה. השוה הביוגרפיה של F. E. BRASCH, בלטימור 1931.

Keyser, Cassius J. (1862—1947) 377, הקדמה. חוקר בגיאומ׳ ובפילוס׳ של המת׳. פרופ׳ באוניב׳ של קולומביה (ניו־יורק).

Khinchin (Khintchine), A. 50. חוקר רוסי

Klappauf, G. 56.

Klein, Chr. Felix (1849—1925) 365. חוקר גרמני פורה בגיאומ׳ ובת׳־הפונקציות. בעל השפעה עצומה בשאלות פדגוגיות. חיבוריו הופיעו ב 3 כרכים, ברלין 1921/3. כתב ספרים רבים. (ספריתו נמצאת במכון למת׳ של האוניב׳ העברית.)

Knopp, Konrad (1882—) 290, 305. חוקר גרמני בת׳ הפונקציות והטורים.

Koksma, Jan F. 182. חוקר הולנדי (צעיר) חריף ומעמיק.

Korzybski, Count Alfred 69. מהנדס; היה ב Chicago, Institute of General Semantics

Kraïtchik, Maurice 26/7. חוקר בלגי בת׳ המספרים

Kronecker, Leopold (1823—91) 1, 47, 196, 216. חוקר מעמיק יהודי (התנצר בסוף ימיו), בעיקר באלגברה ובת׳־המספרים; חבר האקדמיה של ברלין. כתביו הופיעו ב 6 כרכים (1895—1931). השוה BELL, ו H. WEBER ב *Math. Ann.* 43 (1893).

Kummer, Ernst Eduard (1810—93) 42, 46—48. חוקר גרמני מקורי, בייחוד בת׳־המספרים. פרופ׳ באוניב׳ של ברלין. השוה BELL.

Kulik, J. P. 27.

Lagrange, Joseph-Louis (1736—1813) 37, 346. חוקר צרפתי־איטלקי, מגדולי המת׳ במאה ה18, יוצר ומרחיב בכל הכוונים (לרבות מיכניקה ואסטרונ׳). חי בטורינו, ברלין ופריז. כתביו הופיעו בפריז ב 14 כרך, 1867—92. השוה BELL.

Lambert, Johann Heinrich (1728—77) 182. חוקר מקורי, מעמיק ורב־צדדי (ומשונה) במת׳ (בפרט גיאומ׳) ובפיסיקה. ממוצא שויצרי־אלסי; חי בעיקר בברלין אשר שמה (לאקדמיה הפרוסית) משך המלך פרידריך את גדולי המת׳ של זמנו. השוה הביוגרפיה מאת D. HUBER (באזל 1829).

Landau, Edmund (יחזקאל) (1877—1938) 12, 17, 31, 33, 50, 305. חוקר יהודי (ממשפחת ה„נודע ביהודה") חשוב ופורה ביותר בת׳־הפונקציות ות׳־המספרים (האנליטית). היה פרופ׳ באוניב׳ של גטינגן עד שהודח משם ב 1934. הורה בשנת תרפ"ח באוניב׳ העברית; מכונה למת׳ נוסד בעיקר בזכותו.

Laplace, Pierre Simon Marquis de (1749—1827) 332, 338. חוקר צרפתי פורה באנליזה ות׳־ההסתברות. גדולתו העקרית נמצאת בשימושי המת׳; בפרט באסטרונומיה (מיכניקת השמים). חי בפריז אשר שם כיבד נפוליון במיוחד את גדולי המת׳. כתביו הופיעו ב 14 כרך בפריז 1878—1912. השוה BELL.

Legendre, Adrien Marie (1752—1833) 30. חוקר צרפתי פורה וחשוב כמעט בכל ענפי המת׳, וכן באסטרונומיה. (תגליותיו בת׳ המספרים והפונקציות הורחבו ושוכללו מיד ע"י גאוס, אבל ויעקובי.)

Lehmer, Derrick N. (1867—1938) 27, 35. חוקר בת׳־המספרים ובגיאומ׳. פרופ׳ באוניב׳ של קליפורניה (א"ה).

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716) 37, 168, 181, 258, 264, 276, 286, 313, 318, 324, 339, 367. גרמני, חוקר ברוב מדעי זמנו, גדול ביותר במת׳ ובפילוס׳ (בפרט גם בת׳־ההגיון שבה קידמו רעיונותיו את התפתחות המדע במאות שנים). השוה BELL, רות II, והספרים:
B. RUSSELL: The philosophy of Leibniz. 1937.
H. SCHOLZ: Geschichte der Logik. 1931.

Levi-Civita, Tullio (1873—1942) 170. חוקר יהודי. פרופ׳ באוניב׳ של רומה. אולי גדול המת׳ באיטליה בדור האחרון (יחד עם וולטֶרה). הצטיין בעיקר במיכניקה ובענפי המת׳ והפיסיקה השכנים לה. מעסקני האוניב׳ העברית.

Lie, M. Sophus (1842—99) 333. חוקר נורויגי פורה ומקורי בת׳ החבורות „הרציפות" והמשוואות הדיפ׳, וכן בגיאומטריה. מאמריו הופיעו ב 6 כרכים, 1922—37.

Lietzmann, Walter (1880—) 41. מת׳ גרמני. סופר פורה בפדגוגיה של המת׳.

Lindemann, C L. Ferdinand von (1852—1939) 181. מת׳ גרמני. פרופ׳ באוניב׳ של מינכן. חקר בעיקר בגיאומ׳.

Liouville, Joseph (1809—82) 180, 289. חוקר צרפתי פורה ומעמיק בכל חלקי המת׳ (בפרט באנליזה). ייסד עתון מת׳ מפורסם. השוה הביוגרפיה מאת LORIA ב *Scripta Math.* כרך 4 (1936).

Littlewood, John Edensor (1885—) 31, 33, 372. חוקר מעמיק ופורה אנגלי באנליזה, בפרט בת׳־המספרים האנליטית (במקרים רבים בשיתוף עם הרדי). פרופ׳ בקמברידג׳.

Loewy, Alfred (1873—1935) 4, 100, 126, 169. חוקר יהודי חשוב, בעיקר באלגברה היה פרופ׳ באוניב׳ של פרייבורג (גרמניה). השוה הביוגרפיה מאת א"ה פרנקל ב *Scripta Math.*, כרך 5 (1938).

Loria, Gino (1862—) 188. חוקר יהודי, בעיקר בגיאומ׳ ובהיסטוריה של המת׳. היה פרופ׳ באוניב׳ של ג׳ינובה (איטליה).

Maillet, Edmond Th. (1865—) 182. מת׳ צרפתי. חקר בת׳־המספרים ובמיכניקה

Mangoldt, Hans von (1854—1925) 305. חוקר גרמני, בייחוד בת׳־הפונקציות.

March, Herman W. (1878—) 305. חוקר באנליזה ובמיכניקה. פרופ׳ באונ׳ של Wisconsin

Mariotte, Edme (1620? — 84) 226–29. פיסיקן צרפתי.

Méray, H. Charles R. (1835—1911) 136. חוקר פורה, בעיקר באנליזה ובאלגברה. היה פרופ׳ באוניב׳ של דיז׳ון (צרפת).

Mersenne, Marin (1588—1648) 45. חוקר צרפתי. הוציא ספרים מת׳ של מחברים יוונים, וכן את כתבי ג ל י ל י י. (טענותיו על „מספרי־מרסן" לא היו נכונות.) השווה R. C. Archibald ב *Scripta Math.*, כרך 3 (1935).

Miller, George A. (1863—) 75. חוקר פורה באלגברה, בפרט בת׳־החבורות. היה פרופ׳ באוניב׳ של Illinois (א"ה). כתביו התחילו להופיע ב 1935.

Minkowski, Hermann (1864 - 1909) 50. חוקר יהודי, מגדולי הדור הקודם, מקורי ביותר. תגליותיו המזהירות הן בת׳־המספרים ואלגברה, בגיאומ׳ ובפיסיקה עיונית (ת׳־היחסות). בסוף ימיו הקצרים היה פרופ׳ באוניב׳ של גטינגן. מאמריו הופיעו בשני כרכים ב 1911; שם נמצא גם נאום־אזכרה מצוין מאת ה י ל בֶּ ר ט.

Moivre, Abraham de (1667—1754) 161. חוקר חשוב באריתמ׳, אלגברה ואנליזה. מהגר מצרפת, חי באנגליה.

Moore, Eliakim Hastings (1862—1932)) 113. מגדולי המת׳ באמריקה. חקר בייחוד באריתמ׳ ובאריתמיטיסציה של האנליזה. פרופ׳ באוניב׳ של Chicago. **השוה** G. A. Bliss ב *Bull. of the Amer. Math. Society*, כרך 40 (1934).

Mordell, Louis Joel (1888—) 42. חוקר יהודי מעמיק בת׳ המספרים והפונקציות. נולד בא"ה; פרופ׳ באוניב׳ של קמברידג׳ (אנגליה).

Morehead, J. C. 35. היה מת׳ אמריקני, חקר בת׳־המספרים.

Motzkin, Theodor (1908—) 221, 354, הקדמה. מת׳ יהודי, חוקר באלגברה ובגיאומ׳. (בן המנהיג הציוני לֵאו מ׳.) הורה באוניב העברית, עתה בקליפורניה.

Nagell, T. 26. פרופ׳ באונ׳ של אופסָלה.

Natorp, Paul (1854—1922) 339. תלמידו וחברו של הרמן כ ה ן. גרמני; היה פרופ׳ לפילוס׳ באוניב׳ של מרבורג. מלבד הכוון הניאו־קַנטי, עבד גם בכוון פדגוגי.

Netto, Eugen (1846—1919) 188. חוקר יהודי בענפי האלגברה. פרופ׳ בגיסן (גרמניה).

Newton, Sir Isaac (1642—1727) 258, 276, 313, 324, 332, 339, 346. אנגלי, החוקר המעולה ב„מדעים המדוייקים" בזמן החדש. מלבד הישגיו באסטרונומיה ובפיסיקה (חוק המשיכה, אופטיקה וכו׳) נמצאות תגליותיו ברוב הלקי המת׳; ספרו *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* הוא הספר הקלַסי בדברי־ימי־המדע. המצאת החשבון האינפ׳ היא על־כל־פנים זכותו יותר מזכותו של מישהו אחר. השוה Bell והביוגרפיה מאת ז. ב ר ו ד צ ק י (לונדון 1929).

Niven, I. M. (1915—) 50. מת׳ בא"ה

Noether, A. Emmy (1882—1935) 115, 193. חוקרת ממוצא יהודי (גם אביה ואחִיה מת׳). מגדולי היוצרים באלגברה בדור האחרון, האשה המצטיינת בדברי־ימי־המת׳.

יסדה אסכולה אלגברית רחבת־ידים. מרצה באוניב׳ של גטינגן עד 1933, אחר כך עברה לא"ה. השוה הביוגרפיה מאת H. Weyl ב *Scripta Math.*, כרך 3 (1935).

Ore, Oystein (1899—) 365. נורויגי, מ 1927 פרופ׳ באוניב׳ Yale (א"ה). חוקר פורה ומעמיק בת׳־המספרים ובאלגברה (בפרט המופשטת).

Ostrowski, Alexander (1893—) 188, 221. חוקר מעמיק ומקורי באריתמ׳ ואנליזה. יהודי מקיאֶב (רוסיה); למד והורה 1912–26 בגרמניה, מ 1927 פרופ׳ בבאזל.

Pascal, Blaise (1623—62) 371. צרפתי, ממעמיקי הדעות. בין מחוללי החשבון האינפ׳ (התקרב מאד למושג הסֶכם); על ידיו הושפע לייבניץ ביותר. בהיותו בן 16 ביסס את ת׳ חתכי־החרוט. יחד עם פרמה יסד את ת׳־ההסתברות. היה גם מגדולי הפילוסופים ומן המעמיקים בתיאולוגיה. כתביו הופיעו ב 6 כרכים בפריז 1926/7. השוה Bell, רות II, וגם C. J. Keyser ב *Scripta Math.*, כרך 5 (1938), עמ׳ 83.

Pascal, Ernesto (1865—) 202. מת׳ איטלקי פורה ורב־צדדי; פרופ׳ באונ׳ של נַפולי

Peano, Giuseppe (1858—1932) 11. חוקר איטלקי מעמיק ביסודות המת׳; פעיל בתנועת שפה בין־לאומית. פרופ׳ באוניב׳ של טורינו. על חשיבותו בפילוס׳ **עיין** U. Cassina ב *Revue de Metaph. et de Morale*, כרך 40 (1933).

Peirce, Charles Sanders (1839—1914) 216. היה הפילוסוף המקורי והפורה ביותר של א"ה. חלק הגון ממחקריו, אשר רק מיעוטם יצא לאור בחייו, מוקדש ללוגיקה הסימבולית ולפילוס׳ של המת׳; החומר הזה נמצא ב 4 הכרכים הראשונים (1931—33) של כתביו שהופיעו ב Harvard Univ. Press. **השוה** C. J. Keyser ב Galois Lectures (*Scripta Math. Library*, No. 5), ניו יורק 1941.

Perron, Oskar (1880—) 120. חוקר גרמני פורה באלגברה ואנליזה. פרופ׳ במינכן

S. S. Pillai 50.

Platon (אפלטון) (429?—348? לפה"ס) 120, 370. מגדולי הפילוס׳ של כל הזמנים; תלמידו של סוקרטיס בפילוס׳, של תאודורוס במת׳. עיין בכרך השני של ספר זה.

Poincaré, J. Henri (1854—1912) 16, 68. גדול המת׳ בדור האחרון (יחד עם הילברט, אשר עליו עולה במחקריו הרבים באסטרונומיה ובפיסיקה). הרבה גם לכתוב על פילוסופית המדעים. במת׳ חקר בייחוד באנליזה. היה פרופ׳ באוניב׳ של פריז. מאמריו הופיעו ב 3 כרכים בפריז 1916—34. השוה Bell והכרך 38 (1921; בעיקר מאמרו של J. Hadamard) של ה *Acta Math.*, המוקדש כולו לזכרו.

Prasad, Ganesh (1876—1935) 35. הראשון בין מת׳ הודו בזמן החדיש שיסד אסכולת־מחקר. חקר באנליזה, גיאומ׳ ופיסיקה. היה פרופ׳ באוניב׳ של קלקוטה.

Pythagoras (אמצע המאה הששית לפה"ס) 40, 46, 118, 154. יווני מן האי סָמוס; אין יודעים הרבה עליו. ייסד את האסכולה המת׳־פילוס׳ הנקראת על שמו.