מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה ראשונה: תורת הקבוצות

הוצאת ספרים על שם י. ל. מאגנס, האוניברסיטה העברית

והוצאת „מסדה" בע"מ

מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך שני: האינסוף והמרחב

חטיבה ראשונה: תורת הקבוצות

עם 7 ציורים

הוצאת ספרים על שם י. ל. מאגנס, האוניברסיטה העברית
והוצאת „מסדה" בע"מ

לזכרו של ברל בצנלסון
ממחוללי המפעל של
השכלה לעם בארץ ישראל

מפעלי דפוס פלאי-פי·אי·סי· בע״מ, גבעתיים-רמת־גן
PRINTED IN ISRAEL

מתוך ההקדמה לכרך הראשון

סופר צרפתי ידוע (*Beaumarchais*) דימה את הספרים לפרי־הבטן: „הורתם בעדנים, הֱרונם בעצבון, לידתם בחבלים.” ואמנם נוצר ספר זה בקלות: אחרי ששדלני ד״ר יהודה אבן־שמואל בשנת תרצ״ו לחבר ספר עברי על מתימטיקה חדישה, שימשו חוט־השדרה לספר ההרצאות על „בעיות ושיטות מתוך המתימטיקה החדישה” שמסרתין מדי פעם בפעם באוניברסיטאות בחו״ל ובאוניברסיטה העברית בפני תלמידי „כל החוגים”. סידרתי את החומר בהתאם לצרכי הקהל בארץ ונסיתי לשוות לו צורה עברית מתאימה – היתה זו יותר בעית הסגנון המתימתי בעברית מאשר בעית המונחים.

מיד התברר כי כרך רגיל קטון מהכיל את כל הנושאים; לכן חלקתי את החומר לשנים. והנה המחצית הראשונה, המקיפה בשלושה חלקים את תורת המספרים הטבעיים, את הרחבת מושג־המספר (לרבות אלגברה), ואת תורת הפונקציות עם החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי... את רובו המכריע של החומר הכתבתי בזמנו, לפני חמש שנים, לתלמידתי ברוריה קופמן [עתה חוקרת בעלת שעור קומה, עוזרת לפרופ׳ איינשטיין בפרינסטון ואשת הפרופ׳ הריס] אשר זיכתני בכמה הערות מועילות...

בבחירת החומר ועריכתו שמתי לנגד עיני שלוש מטרות. ראשית, לסלול דרך להבנת מהותה של המתימטיקה ולקליטת חומר נבחר מתוך בעיותיה ושיטותיה לצעירים וצעירות קוראי עברית – בין אם בקרו בבית ספר תיכון בין אם התרגלו לארחות המחשבה המופשטת באופן אחר, כגון ע״י לימוד גמרא וכדומה. (המדובר בצעירים דוקא, הואיל והגיל הרצוי לחדירה למחשבה המתימטית הוא בין 15 ל־30 שנה.) שנית, לתת חומר מועיל למורים בבתי הספר התיכוניים בארץ: לא על־מנת למסרו בכתה כמות שהוא, אלא כדי להעשיר את ידיעות המורה על התפתחותם החדישה של הכוונים המיתמטיים הקשורים בנושאים מתכנית ביה״ס, וכדי לאפשר לו לעבד מצדו בצורה מתאימה פרקים מסוימים... שלישית, הספר פונה גם אל אנשים מבוגרים, שאינם בעלי המקצוע מתימטיקה אך שמרו על יחס חיובי למקצוע זה מנעוריהם: בעזרת הספר יהיה לאל ידם ליצור להם השקפה עצמאית על קשרי המתימטיקה לתרבות החדישה בכלל ולפילוסופיה בפרט. הם יבינו כי פלאי המתימטיקה

---

1. מומחה כ-*Cassius J. Keyser* במאמרו: The rôle of mathematics in the tragedy of our modern culture שהופיע בכרך 6 (1939) של *Scripta Mathematica*

וסודותיה נובעים לא כפלאי הטבע מאת עושה בראשית, כי אם מתוך שכלנו־אנו, ולכן חובת כבוד עלינו לפענחם...

...הקורא יווכח כמה מוטעית היא דעה נפוצה למדי על המתימטיקה: כאילו יש להתיחס אליה כאל עתיק המדעים ו„הקלסי" ביניהם, אולם מתוך ההכרה שהתפתחותה נגמרה והגיע תורם של מדעים „צעירים"... לאמיתו של דבר, מתפתחים בעץ המתימטיקה מדי פעם בפעם, ודוקא בדורות האחרונים, ע נ פ י ם ח ד ש י ם בלתי צפויים מראש; נוצרות שיטות חדשות הנותנות סוף־סוף גישה לבעיות בנות מאות ואף אלפי שנים; צצים מושגים חדשים המאפשרים ניסוח לבעיות שעד כאן לא היו בתחום ההשגה; ואף גם זאת: שרשי העץ, ה י ס ו ד ו ת שעליהם מתרוממת חמתימתיקה,... מ ת נ ע נ ע י ם ו מ ת ע ר ע ר י ם, והנה ויכוחים, מחלוקת ומשבר תחת בטחון מוצק!...

בעבור סוגי־קוראים כנ"ל נחוץ היה לכתוב את הספר ל ל א ד ר י ש ה ש ל „ י ד י ע ו ת ק ו ד מ ו ת", באופן שיוכל להבינו מי שיודע אך את התחלות הטכניקה החשבונית, כפי שלמדה בערך תלמיד המחלקה הששית של בי"ס תיכון. ואולם הוא לא יוכל להבינו אלא על סמך ה ת א מ צ ו ת מ ת ו ך ה ק ר י א ה, התאמצות במחשבה מופשטת: מי שקרא והבין את הספר עד תומו (אף ללא המלואים) למד לא רק ענינים מתימטיים רבים... אלא עבר על מפתן תורת־ההגיון וכוונים פילוסופיים שכנים. אמנם הוויתור על ידיעות קודמות מנַעֵני מֵהכניס כמה נושאים חשובים שאין להשיגם ללא טכניקה מקצועית... לשם נוחיות ציינתי ב„מפתח המונחים", תחת הכותרת „פילוסופיה", את המקומות בעלי ע ר ך ע ק ר ו נ י ו ה ג י ו נ י.

...לגבי ה ד י ו ק ב ה ו כ ח ו ת עמדתי בפני ברירה קשה. לא יכלתי לדייק בכל מקום במלוא מובן המלה (אשר גם הוא יחסי, ותלוי בתקופה). אולם לא הייתי רשאי לכחד מן הקוראים את המקומות בהם לא דייקתי. מצד אחד אמת כי המוסיף דיוק מוסיף פשטות בנושאים רבים; מצד שני שכיחים גם מקרים בהם יעמיד דיוק נוסף את התלמיד בסכנה שמא לא יראה את היער מרוב עצים. צדק *Hermite* באמרו (עיין ב־*Oeuvres*, כרך ראשון, עמ' XXXVII): ת מ ו ה, זוהי ראשית המדע; לכן יש להקדים בהדרכת התלמידים נושאים פשוטים ויפים לדיוק הקיצון שהתלמידים לא יעמדו על ערכו.

אך בראשית ההדפסה (1938) התחילו „חבלי ההריון והלידה"... עצם ההדפסה נמשכה ארבע שנים... בחו"ל יש בכל מדינה רק בתי־דפוס מעטים המתמחים בסידור מתימטי. בארץ אין „התמחות" רבה במקצוע זה, ומצד שני גדולים יותר הקשיים כשלעצמם: כוונים שונים בסידור הטכסט והנוסחות בשורה אחת, פסיקים נבדלים לעברית וללועזית וכו'. זוהי הפעם הראשונה שמופיע בעברית ספר

רואה מצב טראגי בכך שאף לבעל תרבות גבוהה אין בזמננו, מטעמים „טכניים", גישה אל מדעים מרכזיים כמתימטיקה, פיסיקה עיונית, אסטרונומיה. הוא מציע כאמצעי להקלת המצב הזה—לעורר את הרצון להבנת ה ב ע י ו ת, מאין אפשרות להבנת הדרכים ל פ ת י ר ת ן (אמנם אין בכך משום תיקון אמיתי).

מתימטי, לא לצרכיו המצומצמים של בית־הספר ולא במקצוע מיוחד בלבד, כי אם ספר כולל. אין לתמוה ולהתאונן אפוא על שקשייה הטכניים של ההדפסה היו גדולים. המסדרים, לא פחות ממני, למדו פרק גדוש בהלכות ההדפסה...

על הקורא לשים לב לכללים הבאים: נוסחות וביטויים מתימטיים כתובים משמאל ימינה; אך כשבאים הם בתוך הטכסט העברי, ס ד ר ם מימין שמאלה כדרך הכתיבה העברית, ואילו הביטויים בעצמם סדורים משמאל ימינה.[1] במקרים רבים יוכל הקורא לסמוך על צורת הפסיק: העברי (،) מורה על קריאה מימין, הלועזי (,) על קריאה משמאל...

ירושלם, ה' בסיון תש"ב (21.5.1942)

הקדמה לכרך השני

מה שנאמר בהקדמה לכרך הראשון (עיין לעיל) על מטרת הספר ובחירת החומר, כחו יפה גם לגבי הכרך השני, שמעוטו מוקדש ל ת ו ר ת ־ ה ק ב ו צ ו ת (חלק רביעי של הספר כולו) ורובו ל ג י א ו מ ט ר י ה לכווניה ולשיטותיה השונים (חלק חמישי). בהתאם לתחום המתימטיקה „הטהורה", כפי שהתכוונתי לו מלכתחילה, יחסר עוד חלק ששי המוקדש ל י ס ו ד ו ת ה מ ת י מ ט י ק ה (בעיקר בחלקה האריתמיטי והאנליטי); חלק זה ימצא את מקומו בכרך קטן מיוחד (כרך־השלמה). מי יתן וייכתב בקרוב גם ספר מקביל מוקדש ל„מתימטיקה שימושית" לזרמיה השונים.

מטעמים מעשיים מחולק כרך שני זה ל ש ל ו ש ח ט י ב ו ת: הראשונה, הנמצאת כאן לפני הקורא, מכילה את תורת־הקבוצות. השנייה והשלישית עומדות להופיע גם הן בתשי"ד ומקיפות יחד את הגיאומטריה. המפתחות לכל שלוש החטיבות יחד נמצאים בסוף.

הכרך השני כולו נכתב בשנים תש"ג/תש"ד ונמצא מוכן לדפוס בסוף תש"ה. באותו זמן (1945) נחתם חוזה ביני לבין חברת „מסדה" להוצאת הספר, ובזה נגמרה תקופת „הורתם בעדנים" (עיין לעיל) והתחילה הפרשה של „חבלי לידה". צפו קשיים מקשיים שונים, ודי לציין שנים: קשיי ההדפסה, הסידור והסמלים המתימטיים, וצרת הנייר. (אמנם ועדת הנייר הממשלתית החליטה להפריש נייר להדפסת הכרך השני, אך גם החלטה זו „נשארה על גבי הנייר".) תמהני, אם ומתי היה כרך זה רואה אור, לולא, ראשית, ערך בשנים האחרונות ה מ ר כ ז ל ה ש כ ל ת ה ע ם, מתוך שיתוף עם הוצאת הספרים של האוניברסיטה העברית ועם הוצאת

1. דוגמה: „a, b, c מסמנים מספרים" — לעומת „(a, b, c) היא שלישיה". חוסר עקביות בכתיב עצמו, כגון כתיבת „אנליזה" ב־ז ולא ב־ס, מקורה בהחלטות ועד־הלשון, שלא ראיתי לי זכות לסטות מהן אלא לעתים רחוקות.

„מסדה". תכנית ספרותית להשלמת „התורה שבעל־פה" הניתנת מטעם המרכז; לרשימת הספרים, שרובם בתחום מדעי הרוח השונים, הוכנסו גם כמה ספרים במדעי הטבע, ובתוכם ספר זה. שנית, אחד מידידַי בארה"ב, מר שמואל ס. שניאורסון (Samuel S. Schneierson) בניו־יורק, הואיל לפי הצעתי להעמיד לרשות המפעל הספרותי של המרכז להשכלת העם כמות ניכרת של נייר משובח לשם הדפסת ספרים, וספר זה בכללם. לפיכך זוהי הזדמנות מתאימה להעמיד על הברכה נדבן זה, שפעל גדולות לטובת הארץ בתחומים אחרים. כן נתונה תודתי להוצאת „מסדה" על יזמתה ולהוצאת הספרים על־שם י. ל. מגנס, האוניברסיטה העברית, על השתתפותה במפעל הכולל.

גם בכרך זה השתדלתי לבחור, לערוך ולתאר את החומר בצורה המכוונת לקוראים, שאין להם ידיעות מתימטיות חוץ מהחומר הנלמד במחלקות ה' ו' ז' של בי"ס תיכון. אותן הוכחות והשלמות הדורשות התאמצות יתירה, ובחלקן הקטן גם ידיעות־יתר, רוכזו במלואים, כמו בכרך הראשון. החלק החמישי שונה מהחלקים ב' ו־ד' (וגם ממרבית תכנם של החלקים א' ו־ג') בכך, שתיאור זה של בעיות ושיטות בגיאומטריה אינו מתימר לערוך את החומר באופן שיטתי, אלא בא להצביע על ההתפתחות ההיסטורית ועל כוונים אפייניים בתקופה החדישה — הואיל ותיאור הפרטים היה מטשטש כאן, בניגוד לשאר החלקים, את עצם מהותו של הנושא.

הנני מודה לגברת ב. פלאי, מנהלת הוצאת „מסדה", ולבנה על העזרה שהושיטו לי, לבעל דפוס „הספר", מר ל. פינברג, וכן לפועל הראשי מר ח. ורקר ולחבריו נתונה הוקרתי; תפקידם לא היה פשוט כל עיקר, ואעפ"י שנשארו פגמים ידועים שלא היתה אפשרות טכנית לתקנם, הרי סידור הספר והדפסתו מטיבים להתחרות בהישגי בתי־דפוס דומים בחו"ל, על אף הקשיים המיוחדים שנתקל בהם מדפיס עברי.

על הספר עברו ד"ר ש. ברימן (בכתב־היד) ומר מ. שמרת (בחלקו בהגהה ובחלקו בכתב־היד), ונעים לי להודות להם על כמה הערות סגנוניות ועניניות מועילות. בעוד שקבלתי את החלטות ועד הלשון לגבי המונחים (עד כמה שהועד עיין בהם) רובן ככולן, לא ראיתי אפשרות לנהוג כך לגבי הפיסוק, אלא נקטתי עמדת־בינים בין הקו של ועד הלשון ובין שיטת הפיסוק באנגלית. השלמתי עם כתיב מלא לנוחיות הקורא. פרט לקמץ קטן שעפ"י רוב לא מלאני לבי לסמנו ב־ו. אך לא יהיה קושי בקריאת מלים כמו „אפייני". שגיאות הדפוס (המעטות) שמצאתי, רשומות הן בסוף הספר, בעמ' 152. („עם כי" אינה שגיאת דפוס.)

באשר למפתחות המונחים והשמות שבסוף הספר (בחטיבה השלישית), ראיתי גם הפעם צורך בהרחבה, כמו בכרך הראשון. המונחים תורגמו לאנגלית, וחלקם גם לצרפתית או לגרמנית. הוספתי רשימה של הסימנים המתימטיים המופיעים בספר, ואותיות הא"ב היווני. במפתח השמות ניתנו פרטים

ביוגרפיים קצרים, עד כמה שלא ניתנו בסוף הכרך הראשון. ברשימות הספרות הן בתוך נושאי הספר למיניהם הן בסוף, הענקתי זכות בכורה לספרים באנגלית מטעמים מעשיים, אך גם הספרות הצרפתית, הגרמנית והאיטלקית הובאו בחשבון.

ומסיים אני, כמו בכרך הראשון (היוצא לאור מחדש בחדשים הקרובים), בהבעת תודה לאלה שהמריצוני בעקיפין, בתוך המסגרת ההולכת ומתפתחת של השכלה לעם בישראל, לכתוב ספר מסוג זה: מאזיני קורסים והרצאות בעיר ובכפר, בקיבוץ ובקבוצה, איש ואשה, בחור ונערה. התענינותם והשתתפותם הפעילה, שאין לראות כמותה בחו"ל — בפרט לא במדעים המדוייקים ובפילוסופיה — מצדיקות, למרות היקפן הצר של ארצנו ושל הבנת שפתנו, הופעתו של ספר מסוג זה בעברית.

ירושלים, ר"ח אלול תשי"ג (אוגוסט 1953)

אברהם הלוי פרנקל

תוכן הענינים

תוכן הענינים לגיאומטריה

(חטיבה שניה ושלישית לכרך שני זה)

חלק רביעי[1]: תורת הקבוצות (האינסוף המוחלט).

פרק ראשון: קבוצות סופיות ואינסופיות.

§ 1. מושג הקבוצה.

נפתח בכמה דוגמות שעליהן נבסס בסוף הסעיף הגדרה מתאימה.

1) בצלחת העומדת לפנינו יש פירות, למשל: שלשה תפוזים, שתי אשכוליות ובנאנה אחת. ניצור את המושג „מערכת הפירות האלה" ונקראנו בשם קבוצה. הפירות הבודדים ייקראו איברי הקבוצה. הקבוצה מכילה את איבריה. יצרנו מתוך האיברים את הקבוצה ע"י פעולה מופשטת: בצרפנו אותם לחטיבה אחת. נוכל לסדר את פירות הקבוצה בשורה; במקרה זה, אם נתעלם מאָפיים המיוחד של האיברים (שהם פירות), נקבל תבנית סידורית שצורתה: ראשית, שנית, ..., ששית. אם נתעלם אף מן הסדר, בזרקנו את הפירות בערבוביה לתוך שק, לא ישאר לקבוצה תוכן אחר אלא מספר הפירות בלבד, שהוא 6. מה שנאמר כאן אינו תלוי במספרם (הסופי) המיוחד של העצמים שצרפנום. יתכן אפילו לפעול כך כלפי עצם אחד בלבד; שהרי פרי מסויים, שהוא עצם מוחש, שונה בודאי מן המושג המופשט של הקבוצה, שאיברה היחיד הוא הפרי הנידון.

2) איבריה של קבוצה יכולים להיות גם עצמים מופשטים, למשל: תכונות, תנועות, משולשים, מספרים. נתבונן בקבוצה המכילה את המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6. נתעלם רק מאופי איבריה — ולא תשתנה תבניתה הסדורית מתבנית הקבוצה שב־1); ולא כל־שכן אם נתעלם גם מסדר האיברים, שכן בדרך זו נגיע שוב אל קבוצה הקבועה בזה שהיא מכילה ששה איברים.

3) נתבונן בקבוצה שגם היא „סופית" (כלומר, מכילה מספר סופי n של איברים) רק שהיקפה גדול מאד. חומר של 100 אותיות שונות מתוך א"ב מסויים (למשל העברי), לרבות ספרות, סימני פיסוק וכו', וגם „ההפסק" היוצר חלל ריק, מספיק בדרך־כלל להדפסת ספר. נגביל את היקף הספרים, המודפסים מתוך חומר זה, ע"י הכלל, שכל ספר יקיף לא יותר ממיליון אותיות — או מיליון בדיוק, שהרי נוכל להוסיף סימני־הפסק במקומות הנותרים. בדרך זו הגדרנו מה יובן להבא במונח „ספר".

הקבוצה הנידונה תהיה הספריה המכילה את כל הספרים

---

1. שלשת החלקים הקודמים נמצאים בכרך הראשון של ספר זה.

מימין לשמאל) ואם נתעלם ממהות האיברים (לעיל מספרים, כאן נקודות). בשני המקרים התכנית הסידורית היא: ראשית, שנית,...., n-ית,... . כן עלינו לייחס לשתי הקבוצות אותו מספר של איברים — אם לייחס להן מספר בכלל. באופן פסיכולוגי לא יקשה ליצור את המושג: המערכת השלימה (הקבוצה), הכוללת את אינסוף נקודות־האמצע P_n. יתכן אף להרחיק־לכת ולטעון, שמושג הקבוצה האינסופית פשוט הוא ממושג הקבוצה המכילה, למשל, רק את המיליון הראשון של נקודות P_n. יש להבהיר טענה זו כך, שבמקרה האחרון יש לנו צורך במיליון צעדים כדי להגיע עד הצעד האחרון, ואילו לשם בנין הקבוצה האינסופית נזדקק לשני צעדים בלבד: לצעדים הקובעים את „האינדוקציה השלימה" (I, 16–17)[1]. הקורא יבין בנקל את הקשר האמיץ (של התלכדות כמעט) בין הדוגמה שלפנינו לבין קבוצת הנקודות המופיעות במירוץ בין הגבור והצב (I, 259).

6) בהסתמכנו על מה שהוסבר בפרק הששי של הכרך הראשון, נתבונן אל קבוצת כל המספרים הממשיים — או, לפי ההעתק הניתן שם (I, 115–117), אל קבוצת כל הנקודות שבקו ישר (קו־המספרים). אם, למשל, נסדר את המספרים לפי גדלם (הקטנים לפני הגדולים), ואת הנקודות בקו של ציור 3 ב I, 116 בסדר משמאל לימין, הרי לפנינו אותה תבנית סידורית, המתקבלת תוך התעלמות ממהות האיברים. ההתאמה החד־ערכית בין המספרים לבין הנקודות בנות־זוגם יוצרת העתק, השומר על יחסי הסדר שבין כל שני איברים של אחת הקבוצות ומעבירם אל המותאמים להם בקבוצה השניה.

7) ב § 1 של הפרק השמיני (I, 173–181) הגדרנו מיון מיוחד בתחום המספרים הממשיים, המבדיל בין המספרים (הממשיים) האלגבריים והטרַנסצֶנדֶנטיים[2]; מספר המהווה שורש למשוואה אלגברית בעלת מקדמים שלמים נקרא „אלגברי", ואילו כל מספר אחר „טרנסצנדנטי". ניצור את קבוצת כל המספרים (הממשיים) הטרַנסצנדנטיים. יש לנתח כאן במקצת את המונח „ניצור". כידוע לנו מן הפרק השמיני של הכרך הראשון, הרי לגבי מספר ממשי „נתון" (למשל, בצורת שבר עשרוני הבנוי לפי חוק מסויים, או לפי אחת משאר השיטות המבוארות בפרק הששי של כרך I), קשה בדרך כלל להכריע, האלגברי הוא אם לא. בדרך כלל לא הצליח המחקר המתימטי להגיע לידי הכרעה. לכן יצירת הקבוצה שלפנינו, משמעותה: הסתמכות על הברירה שכל מספר ממשי הוא או אלגברי או טרנסצנדנטי, בין אם נדע להכריע בין אם לא נדע; מתוך כל המספרים הממשיים נברור אפוא את הטרנסצנדנטיים בלבד ונצרפם לקבוצה הנידונה.

1. בצורה זו יצוטט הכרך הראשון של ספר זה; 16—17 מציין את מספרי העמודים. רוב הציטאטות מן הכרך הראשון הובאו רק לנוחיותם ולתועלתם של הקוראים שעברו על הכרך הראשון. בדרך כלל יוכל להבין את הענין גם מי שמתחיל בכרך השני.

2. מי שנמצא בידו הכרך הראשון, ישתמש נא במפתח המונחים שבו (I, 354 — 364), מלבד מפתח המונחים שבסוף הכרך השני הזה.

דוגמות אלו מאפשרות לנו להבין ולנתח את ההגדרה, שנתן בשנת 1895 גיאורג קנטור (Georg Cantor), יוצר תורת הקבוצות, למושג הקבוצה. והנה ניסוח ההגדרה:

בשם קבוצה נקרא כל צירוף של עצמים מסויימים ומובדלים המצורפים לחטיבה אחת; העצמים, אשר מקורם בהסתכלות (בנסיון) או במחשבה, נקראים איברי הקבוצה.

הפעולה המחשבתית, המצרפת ומאחדת עצמים שונים למושג המערכת האחידה (הקבוצה) הכוללת את העצמים, אינה טעונה ניתוח, שכן היא בעלת פשטות ראשונית ושייכת לתחום הפילוסופיה ולא למתימטיקה. נדגיש רק שאין הכוונה כאן, שיחס הקבוצה לאיבריה יהיה כיחס גוף שלם לחלקיו. הקבוצה היא מושג מופשט, גם אם איבריה עצמים מוחשים הם, והיא שונה מאיבריה אפילו אם מכילה היא איבר יחיד בלבד. והלא גם בתורת־ההגיון אין לזהות את היקפו של מושג עם העצמים שאליהם מכוון המושג! בעלי הלוגיקה החדישה, בעיקר החל מ Bertrand Russell,[1] הרהרו הרבה במהותה של הקבוצה, אם היא „עצם" או „פיקציה" או „סמל לא־מושלם" וכו'; כל הויכוחים הללו אינם נוגעים למתימטיקה, שהרי לגביה די לומר: לאיברים בשלמותם יֻתאם עצם רעיוני חדש הנקרא קבוצת כל האיברים, והקשור באיברים דרך יחס המכונה „מכיל", או בסימן: ε. היחס $a \varepsilon b$ מתבטא אפוא: „a הוא איבר של הקבוצה b, או הקבוצה b מכילה a (כאיבר)."

אם אין מניחים מראש כל הנחה מיוחדת בדבר מהותם של איברי הקבוצות — כך על־פי רוב בחלק רביעי זה — מדברים על קבוצות מופשטות. בגיאומטריה וגם באנליזה חוקרים בדרך כלל את תכונותיהן של קבוצות „מוחשות" ופרוטות יותר, כגון קבוצות של נקודות או של מספרים.

שומה עלינו לבאר עוד את המונחים „מסויים" ו„מובדל" המופיעים בהגדרתנו. הביטוי „עצמים מובדלים" מורה על כך, שמראש יהיה קבוע כלפי כל שני עצמים, העשויים לשמש איברי קבוצה, אם שווים הם או שונים; ובפרט שכל איבריה של קבוצה איזו שהיא שונים הם זה מזה. לפיכך עצם ידוע או שיהיה איבר לקבוצה או שלא יהיה, אבל אין מקום לדרגות ולהבדלים ביחס שבין האיבר לקבוצה, כגון שאיבר יופיע פעמיים וכו'. עמוקה יותר משמעות המונח „מסויים". הכוונה לכך כי בהינתן קבוצה צריך להיות קבוע לגבי כל עצם, אם הוא איבר של הקבוצה אם לאו. אמנם אין הדבר מחייב, שיהיה לאל ידינו להכריע בכל מקרה אם העצם שייך לקבוצה, אלא רק שההכרעה תהא מוחלטת ויציבה במובן פנימי — בין אם ידיעותינו מאפשרות לנו להכריע בין אם אינן מספיקות לכך. בקבוצת המספרים

1. עיין ברשימה שהופיעה ב„דבר" (ת"א) בכ"ח באייר תשי"ב ליום הולדתו ה 80 של ראסל.

הטרַנסצֶנדֶנטִיים, למשל, (דוגמה 7 לעיל) רחוקים אנו מהכריע לגבי כל שבר עשרוני נתון, אם הוא טרנסצנדנטי. מכל מקום קיום הקבוצה מבוסס על כך שכל מספר ממשי הוא בהכרח או אלגברי או לא, על־פי הגדרת המספר האלגברי ועל־סמך המשפט על „השלישי הנמנע" (tertium non datur)[1].

אף כי הבהרנו בדרך זו את פרטי ההגדרה של קַנטור, לא נצדק אם נאמר, שיש כאן הגדרה לפי חומר הדין הנדרש במדע מדויק. הן חוט־השדרה של ההגדרה הוא צירוף העצמים השונים לחטיבה אחת, וצעד זה, שכמוהו כיצירת הקבוצה, לא הוגדר ואולי אינו נתון לניתוח נוסף. אכן לפנינו אחת הפעולות הפשוטות והמקוריות ביותר לא רק של המתימטיקה אלא של השכל האנושי — פעולה שאין לפרקה לחלקים ושהשתמשנו בה, למשל, גם בפרק החמישי של הכרך הראשון, אגב הכנסת מושגי החבורה והשדה. לפיכך יש לראות את הגדרת קנטור כביאור בעלמא. הרבותא שבביאור זה נמצאת בכלליותה, ללא כל הגבלה בהיקף הקבוצה ובמהות איבריה. תקפה זו של הגדרת הקבוצה הוא הוא מקום־תורפתה, ועל כך נייחד גם כן את הדיבור בחלק הששי.

הואיל ולפי ההגדרה נקבעת קבוצה אם נקבעו כל איבריה, עלינו להגדיר:

הקבוצות S ו T שוות הן $(S=T)$ אם, ורק אם, שתיהן מכילות אותם האיברים.

אין פרוש הדבר שקבוצות שוות מזדהות הן, או בנויות הן באותו אופן. לפי מה שנאמר ב I, 34–35, שוה, למשל, קבוצה, שאיבריה הם חמשת המספרים הראשוניים הקטנים ביותר בעלי הצורה 2^n+1 (n מספר טבעי), לקבוצה המכילה את המספרים 3, 5, 17, 257, 65537. קבוצה זו אפשר להגדיר גם בכמה דרכים אחרות — בהתאם לכך שלמושגים בעלי תוכן שונה יוכל להיות היקף שוה. דוגמה מרחיקה לכת מתקבלת מתוך השערתו המפורסמת של Fermat[2]. לפיה תשוה הקבוצה המכילה את המספרים 1 ו־2 לקבוצה המכילה כל אותם המספרים הטבעיים n שלגביהם אפשר לפתור את המשוואה הדיוֹפאנטית

$$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$$

במספרים שלמים x, y, z.

המתימטיקן הבריטי C. L. Dodgson, שקנה את עולמו בחוגים רחבים ביותר (ב„שם המחבר" Lewis Carroll) ע"י ספרו „עליזה בארץ הפלאים" (בו טמונות הערות רבות בעלות חשיבות הגיונית עמוקה)[3], רמז בשיחה בין

1. משפט זה מופיע בין האכסיומות שקבען אריסטו בראש תורת־ההגיון. בדורנו אנו הובעו פקפוקים לגבי נכונות המשפט בקשר למערכות אינסופיות. לכן נוגעים הויכוחים הללו גם בתורת הקבוצות. על כך ידובר בחלק הששי (כרך־ההשלמה).

2. השוה I, 40 – 42.

3. השוה ספרו הקטן של Philip E. B. Jourdain שהוא מעמיק ומבדח גם יחד: The philosophy of Mr B*rtr*nd R*ss*ll (לונדון, 1918).

היונה ועליזה למהות השויון במדע, ולצורך להבחין בין השויון לבין הזהות[1].

מכיון שכולל האיברים קובע את הקבוצה, נוכל לסמן את הקבוצה ברשמנו את כל איבריה או (אם מספרם גדול או אינסופי) ברמזנו עליהם. מנהג רווח הוא לסמן את הקבוצה המכילה את האיברים a, b, c, ..., z, ואותם בלבד, ע"י $\{a, b, c, \ldots, z\}$; כיוצא בזה, למשל, את הקבוצה שבדוגמה 4 ע"י $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. בהתאם לכך תרשם הקבוצה המכילה את האיבר היחיד a בצורה $\{a\}$. לגבי קבוצות נשתמש אפוא בסוגריים צומדים $\{\ \}$, וכך נבדיל ביניהן לבין הסדָרות המסומנות בסוגריים עגולים (I, 29).

§ 2. המושגים היסודיים.

מלבד יחס־השויון, שהגדרנוהו ב § 1, יש להגדיר כמה יחסים אחרים בין קבוצות; בראשם עומד יחס האֶקויוָלנטיוּת, שכבר למדנו לדעתו באופן שטחי ב I, 6. (אין הכוונה לאקויולנטיות במובן הכללי יותר, שעליו מדובר ב I, 8 ו־72.)

בדוגמה 2) של § 1 הודגש, שהקבוצה הסופית המופיעה שם שונה מזו שבדוגמה 1) רק לפי מהות האיברים. ואמנם אפשר להתאים את איברי הקבוצה האחת לאיברי השניה (בכמה דרכים), באופן שלכל פרי יֻתאם מספר אחד ויחיד, וחילופו. הוא הדין לגבי שני המקרים (של קבוצות אינסופיות) שבדוגמה 6), או בדוגמות 4) ו־5).

התאמות כגון אלו, המכונות התאמות חד־חד־ערכיות (או חד־ערכיות באופן הדדי), נמנות אף הן על התהליכים הפשוטים והרגילים ביותר של ההגיון; ב I, 4–6 הרחבנו את הדיבור עליהן. גם בחיי יום יום נוכל להשתמש בהן ולמעט בספירה מתוך כך: בארצות שבהן הנשואין מוֹנוֹגָמיים — כך שלכל גבר נשוי מתאימה אשה נשואה יחידה (אשתו), וחילוף הדבר — אין צורך לערוך מנין לנשים הנשואות אם ידוע מספר הגברים הנשואים. במושג זה של התאמה לא נכלל כל שימוש בהנחה, שהקבוצות מכילות מספר סופי דוקא של איברים. לפיכך נגדיר באופן כללי:

הגדרה I. הקבוצה S נקראת אֶקְויוָלֶנטית (שוות־ערך)[2] אל הקבוצה T, בסימן: $S\sim T$, אם אפשר להתאים את איברי T לאיברי S לפי התאמה חד־חד־ערכית, ז"א כך, שעל־פי

1. למשל: היונה אומרת לעליזה „את הנך נחש, אל תכחישי זאת; שמא תגידי לי שמעולם לא אכלת ביצים?" ועליזה עונה „בודאי אכלתי ביצים, אך הרי ילדות גם הן, כמו נחשים, רגילות לאכול ביצים." היונה: „אינני מאמינה זאת; אולם אם כן הדבר, הרי זאת אומרת כי ילדות הן מין נחשים."

2. המונחים הבינלאומיים (בעיקר רומיים או יווניים), שמשמעותם ומקורם נתבארו בכרך הראשון — כגון מונח זה — לא יוסברו כאן שוב. כדי למצוא את המקום בו בארנו את מקור המונח, ישתמש נא הקורא במפתח המונחים שם (I, 354 – 364).

ההתאמה יהיה לכל איבר של S בן־זוג יחיד ב T ולכל איבר של T בן־זוג יחיד ב S. במקרה זה תכונה ההתאמה גם העתק בין הקבוצות S ו T, המעתיק כל אחת מן הקבוצות אל חברתה.

אל יטעה הקורא לחשוב, שכדי להראות ששתי קבוצות אינן אקויולנטיות, די להצביע על „התאמה" בין איבריהן שאינה חד־ערכית או חד־חד־ערכית. אדרבה, מן הצורך להוכיח שאין במציאות שום התאמה חד־חד־ערכית, כלומר, שכל נסיון ליצור התאמה כזו נידון לכשלון. שכן הצבעה על כשלון מסויים היתה יכולה להראות לא את אי־האפשרות להתאמה כי אם אי־כשרוננו לבחור בדרך המועילה. (השוה להלן, פרק שני, § 2.) הדגשנו את הדבר מאחר שלגבי הקבוצות הסופיות רגילים אנו, ובצדק, לראות כשלון אחד כראיה כללית. תכונה מיוחדת זו של הקבוצות הסופיות קשורה קשר אמיץ בתכונה אחרת, שכבר נזכרה בכרך הראשון (עמ' 10, 22, 54); נעסוק בשאלה זו בפרק הבא.

נוכל להגדיר העתק בין קבוצות סופיות בשימנו זה מול זה, זוג אחר זוג, את האיברים המותאמים. אפשרות כזו אינה קימת לגבי קבוצות אינסופיות, אלא לגביהן צריכה ההתאמה להקבע ע"י חוק; לאמור, ע"י כלל הניתן להאמר בצורה סופית והקובע את אופן ההתאמה לכל אינסוף המקרים הנחוצים.

בפרק התשיעי (I, 243—245 ו 258—259) הכנסנו את מושג הפונקציה. קל להבין, שמושג ההתאמה קשור למושג הפונקציה. התאמה חד־ערכית של איברים מתוך T לאיברי S מתבטאת כפונקציה חד־ערכית $y = f(x)$, שבה הגורם (המשתנה הלא־תלוי) x עובר על איברי S, וכל ערך של המשתנה התלוי y נמצא בתוך T. עד כאן אין צורך שיהיה $f(x_1) \neq f(x_2)$ במקרה $x_1 \neq x_2$; כלומר, הפונקציה יכולה להיות חד־ערכית ללא היפוך חד־ערכי (I, 238—241 ו־245). דוגמה לכך שימש שם מהלך הטמפראטורה במשך יום רגיל, או מהלך הפונקציה $y = \sin x$ בין $x = 0$ ל $x = 2\pi$. ואולם אם הפונקציה החד־ערכית $y = f(x)$ ניתנת גם להיפוך חד־ערכי, כלומר אם $x_1 \neq x_2$ גורר תמיד $f(x_1) \neq f(x_2)$, הרי לפנינו התאמה חד־חד־ערכית ולכן העתק בין קבוצת ערכי־הגורם x לבין קבוצת ערכי־הפונקציה y; לפיכך אקויולנטיות שתי הקבוצות. מכאן מתברר, שמושגי ההעתק והאקויולנטיות אינם חידוש אלא נובעים ממושג הפונקציה הניתנת להיפוך — לפחות אם הכוונה לפונקציה שרירותית כמבואר ב I, 258.

נחקור עתה את תכונותיו של יחס־האקויולנטיות שהגדרנוהו, ונוכיח שליחס המוגדר יש שלש התכונות האפייניות (לפי I, 8 ו־42) ליחסים המכונים „אקויולנטיות" במובן כללי יותר; לאמור: שהיחס המוגדר הוא רֶפְלֶכְּסיבי (חוזר), סימֶטרי (הדדי) וטרַנסיטיבי!

מובן מאליו, שהיחס הוא רפליכסיבי, דהיינו, שכל קבוצה אקויולנטית אל עצמה: $S \sim S$; על כך מעיד ההעתק „הזהותי" המתאים כל איבר של הקבוצה

לעצמו. כן ברורה הסימטריה של האקויולנטיות, כלומר שהיחס $S \sim T$ גורר אחריו גם $T \sim S$; שכן כל העתק המעתיק T אל S מתאים לא רק לכל איבר של S איבר יחיד של T, אלא גם לכל איבר של T איבר יחיד של S, ולכן הוא מעתיק גם S אל T. כבר השתמשנו בתכונה זו בשיגרת הלשון, באמרנו: „שתי קבוצות הן אקויולנטיות" או בדברנו על „העתק בין שתי קבוצות" — בקיצור: בהשתמשנו בביטויים המעניקים זכויות שוות לשתי הקבוצות. בלשון הפונקציות פירוש הדבר: הפונקציה $y = f(x)$ המתאימה ערכים y מתוך T לערכי הגורם x שב S, היא לא רק חד־ערכית אלא נתונה להיפוך, והפונקציה ההפוכה (השוה I, 245) חד־ערכית אף היא.

כדי להוכיח את הטרנסיטיביות של היחס נצא משלש קבוצות S, T, V שביניהן קיימים היחסים $S \sim T$ ו $T \sim V$; עלינו להוכיח שקיים גם $S \sim V$. יהי φ העתק (איזה שהוא) בין הקבוצות S ו T, ψ העתק בין T ו V. אם s מסמן איזה איבר שהוא (קבוע מעתה) מתוך S, הרי לפי φ מותאם לו איבר מסויים t מתוך T, ול t מותאם לפי ψ איבר מסויים v מתוך V. נקבע כלל־התאמה האומר: ל s יותאם האיבר v של V שמצאנוהו זה עתה. כלל זה יוצר התאמה בין איברי S ו V שאינה חד־ערכית בלבד אלא חד־חד־ערכית, על־סמך תכונתן של ההתאמות φ ו ψ. לפיכך קיים $S \sim V$, מה שרצינו להוכיח.

נמחיש תהליך זה, בצאתנו מארבעה איברים מתוך S, על ידי התבנית הבאה

מתוך S:	s_1	s_2	s_3	s_4
	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$
מתוך T:	t_1	t_2	t_3	t_4
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
מתוך V:	v_1	v_2	v_3	v_4

ציינו את החצים כדו־שנונים כדי לרמוז על הדדיותה של ההתאמה. במחקנו את איברי הקבוצה T על־מנת ליצור התאמה ישרה בין איברי S ואיברי V, נקבל את ההעתק הדרוש בין S ו V.

תהליך זה דומה, אמנם בכוון הפוך, לתהליך שתארנוהו בביאור תפקידו של המספר־המונה (I, 5 למטה): כדי להשוות את מספרי האיברים של שתי קבוצות סופיות אין אנו רגילים, כמו עמים פרימיטיביים, לבנות במישרין העתק בין הקבוצות, אלא נעתיק את שתיהן אל קבוצה „מתווכת" וכוללת — הלא היא קבוצה של מספרים מונים.

יחס נוסף בין קבוצות נכניס על־ידי

הגדרה II. הקבוצה S' תיקרא בשם קבוצה חלקית של הקבוצה S, אם כל איבר של S' הוא גם איבר של S; או בסימנים: אם $x \in S'$ גורר אחריו תמיד $x \in S$. נסמן יחס זה בין S' ו S ע"י $S' \subseteq S$.

לפי הגדרה זו מקיפה[1] כל קבוצה את עצמה כקבוצה חלקית. מדברים במקרה זה על קבוצה חלקית „לא־אמיתית", בניגוד למקרה הרגיל שבו מכילה S לפחות איבר אחד שאינו נמצא בקבוצה החלקית S'. במקרה זה קיים $S' \neq S$, ו S' נקרא קבוצה־חלקית־ממש. משתמשים לצורך מקרה זה בסימן $\subset$ הדומה לסימן $<$ (קטן מ—).

דוגמות; 1) לקבוצה $\{1, 2, 3\}$ יש שש קבוצות־חלקיות־ממש והן: $\{1, 2\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$; מתווספת עליהן הקבוצה החלקית הלא־אמיתית $\{1, 2, 3\}$.

2) כל הקבוצות הנ"ל הן גם קבוצות חלקיות לקבוצת כל המספרים הטבעיים. מאידך יש לקבוצה זו גם קבוצות חלקיות אינסופיות, כגון קבוצת כל המספרים הגדולים ממספר מסוים n, או קבוצת כל המספרים הראשוניים (I, 28).

ברור שכל קבוצה חלקית של קבוצה סופית אף היא סופית.

לפי מה שראינו, היחס $\subseteq$ הוא אמנם רפליכסיבי ($S \subseteq S$), אבל לא סימֶטרי ($T \subseteq S$ אינו גורר אחריו $S \subseteq T$). ננסח במיוחד את העובדה הפשוטה, שהיחס הוא טרַנסיטיבי:

אם T היא קבוצה חלקית של S, ו V קבוצה חלקית של T, הרי V היא קבוצה חלקית של S. בסימנים: היחסים $T \subseteq S$, $V \subseteq T$ גוררים אחריהם $V \subseteq S$.

בדרך־כלל תיוָצר קבוצה חלקית לקבוצה נתונה S ע"י תכונה מסויימת (בעלת משמעות כלפי כל איברי S). הקובעת אותם איברי S שיש להם התכונה הנדונה. הדבר מתאים לשיטת־ההגדרה המסורתית והרגילה מתוך „הסוג השכן" (genus proximum) ו„התכונה האפיינית" (differentia specifica). אם למשל S היא קבוצת כל בני האדם, הרי קובעת התכונה „זכר" את קבוצת הגברים (והילדים), התכונה „חי בארץ־ישראל" את תושבי הארץ, התכונה „לומד בישיבה" את בחורי הישיבות. אם S היא קבוצת המספרים הטבעיים, קובעות התכונות „גדול מ n", או „ראשוני" את הקבוצות החלקיות שצוינו לעיל ב־2). התכונה „איבר של S" קובעת את הקבוצה (החלקית לא־אמיתית) S בעצמה.[2]

אכן מה יקרה, אם התכונה היא אמנם בעלת משמעות כלפי איברי

---

1. מועיל הדבר להשתמש בשפה המדוברת כלפי היחס ε במלה „מוכל" (ובכוון ההפוך: „מכיל"), כלפי היחס $\subseteq$ במלה „מוקף" („מקיף"). כך מונעים אי־הבנה. רק בסוף המאה ה־19 למדנו להבחין ולהפריד היטב בין היחסים „איבר של —" ו„קבוצה חלקית של —", ואילו עד אז גרר עירוב־הפרשיות ביניהם כמה שגיאות ואי־הבנות.

2. מובן שתכונות שונות יכולות לקבוע אותה הקבוצה החלקית. השוה מה שנאמר לעיל בסוף ה § 1 על תכנו והיקפו של מושג, ואת הדוגמות (קבוצות חלקיות לקבוצת המספרים הטבעיים) שניתנו שם.

S אבל אינה מתמלאת לגבי שום איבר מ S? כדי שלא לקבוע מקרה יוצא מן הכלל, ננהוג כמימרת פוּאֶנקרֶה (H. Poincaré; I, 68), ונקבע:

נכיר בקבוצה שאין לה כל איבר, ונקרא לה בשם „הקבוצה הריקה" או קבוצת־האפס; היא תסומן ב 0, מאחר שאין סכנה להחליפה במספר 0 (אפס).[1]

אם ננהג דיוק כלפי הגדרת השויון (סוף ה § 1) והגדרת הקבוצה החלקית[2], נמצא את המסקנה (שאמנם אפשר להבינה גם כהגדרה):

קבוצת האפס היא קבועה באופן חד־ערכי; כלומר, אין קבוצות־אפס שונות זו מזו.

קבוצת־האפס היא קבוצה חלקית לכל קבוצה S ($0 \subseteq S$ כנגד כל S).

בדרך זו הבטחנו קבוצה חלקית מתאימה של S כלפי כל תכונה בעלת משמעות, ללא יוצא מן הכלל. למשל אם S היא קבוצת המספרים הטבעיים, קובעת התכונה $x^2 < x$ את קבוצת־האפס כקבוצה החלקית המתאימה.

אחרי הוספת הקבוצה 0 יש לקבוצה $\{1, 2, 3\}$ (עיין לעיל) $2^3 = 8$ קבוצות חלקיות; זוהי דוגמה למשפט שנעמוד עליו בפרק השלישי.

הגדרה III. שתי קבוצות נקראות זרות אם אין להן איבר משותף. כן נאמר על יותר משתי קבוצות שהן זרות לחלוטין, אם אין איבר משותף לשתים מהן.

נכניס שלש פעולות, שאחת מהן דומה במקצת, אך לא בכל דבר, לחיבור הרגיל שבחשבון, על־ידי

הגדרה IV. אם S ו T שתי קבוצות, נכנה בשם הקבוצה הכוללת, או הסכום, של S ו T (בסימן, $S+T$) את קבוצת האיברים הנמצאים ב S או ב T (כלומר, לפחות באחת מהן), ובשם המשותף, או המכפלה הפנימית, של S ו T (בסימן, $S \cdot T$) את קבוצת האיברים הנמצאים גם ב S גם ב T (כלומר, בשתיהן יחד). כן נקרא, אם נתון מספר סופי של קבוצות או סידרת קבוצות ($S_1, S_2, S_3, \ldots$), בשם קבוצה כוללת (או סכום) $S_1+S_2+S_3+\ldots$ לקבוצת האיברים הנמצאים לפחות באחת מן הקבוצות S_k, בשם משותף (או מכפלה פנימית) $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \ldots$ לקבוצת האיברים הנמצאים בכל אחת מן הקבוצות S_k.

---

1. המערכת שאינה מכילה שום איבר הוכנסה בתחילה בתורת־ההגיון הסימבולית (השוה בחלק הששי). רק החל מראשית המאה ה־20 משתמשים בה גם בתורת־הקבוצות, שרבים ממשפטיה מקבלים צורה נוחה ופשוטה יותר בעזרת קבוצת־האפס.

2. הלא $x \varepsilon 0$ גורר $x \varepsilon S$, כלומר אם $x \varepsilon 0$ אז גם $x \varepsilon S$, הואיל ולעולם לא יתמלא $x \varepsilon 0$ לגבי שום עצם x. הקבוצה 0 היא קבועה על ידי „כולל־איבריה", הואיל ואין לה איברים כל עיקר.

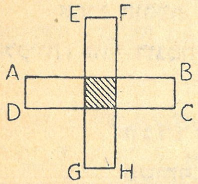
אם S_0 היא קבוצה חלקית של S, נסמן ב $S-S_0$ את השארית
של S ביחס ל S_0, כלומר את קבוצת האיברים שישארו ב S אחרי
שהוצאו איברי הקבוצה החלקית S_0.

הסכום שקול אפוא כנגד המושג ההגיוני „או" (במובן: לפחות אחת מן האפשרויות), המשותף כנגד המושג ההגיוני „ועוד", ז"א „גם־גם־". הכללה למושגים אלה וביאור תכונותיהן של הפעולות המוגדרות ינתנו בפרק השלישי.

דוגמות: א) $\{1, 2, 3, 4\} + \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\{1, 2, 3, 4\} \cdot \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$$

ב) אם S היא קבוצת המספרים (הממשיים) האלגבריים שאינם רציונליים, T קבוצת המספרים הטרַנסצֶנדֶנטיים (עיין לעיל, §1, 7), הרי $S+T$ היא קבוצת כל המספרים האירציונליים ואילו $S \cdot T = 0$. לולא הכנסנו את קבוצת־האפס לא היינו יכולים לטעון שכלפי כל שתי קבוצות קיים המשותף.



ציור 2

ג) נסתכל בציור 2. אם S קבוצת הנקודות הנמצאות בתוך המלבן האפקי ABCD, T קבוצת הנקודות שבתוך המלבן הזקוף EFHG, מכילה $S+T$ את כל הנקודות שבציור (בדמות צלב), $S \cdot T$ את הנקודות שבריבוע הקטן המקֻוקו.

ד) כלפי כל מספר טבעי k יסמן S_k את קבוצת המספרים $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$. לפי זה יהיה:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = S_1, \quad S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \ldots = 0.$$

ה) $S - 0 = S$; $S - S = 0$ כנגד כל קבוצה S.

הגדרנו קבוצה סופית כקבוצה שכלפיה יש מספר טבעי n המציין את מספר איבריה, וקבוצה אינסופית כקבוצה שאינה סופית. (קבוצת־האפס תיקרא גם היא „סופית".) לכן אינסופיות הן הקבוצות המופיעות ב § 1 בדוגמות 4) עד 7). ב I, 54—55 הוכח המשפט:

קבוצה סופית N אינה אֶקְוִיוָלֶנטית לשום קבוצה־חלקית־ממש של N.

כפי שכבר צויין בכרך הראשון (עמ' 10/11) לאור הדוגמה P של קבוצת כל המספרים הטבעיים, אין תוקף למשפט זה לגבי הקבוצות האינסופיות. קבוצה אינסופית יכולה[1] להיות אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש, ולגביה בטל אפוא המשפט העתיק „השלם גדול מחלקו" (totum parte maius). כבר אותה דוגמה P מראה בעליל, שאינסופיותה של הקבוצה, ורק היא, אחראית למציאותו של העתק בין הקבוצה לחלק ממנה; אילו היתה P סופית, לפחות איבר אחד של P היה

1. להלן נראה שהדבר קיים לגבי כל קבוצה אינסופית.

מחוסר בן־זוג בקבוצה החלקית. יש מכחישים תכונה זו של קבוצות אינסופיות Q בטענם: אם לכל איבר של הקבוצה החלקית נתאים אותו איבר בתוך Q, הרי ישארו איברים ב Q שאין להם בן־זוג, ולכן לא תהיה Q אקויולנטית לקבוצה החלקית. טענה זו בנויה על שגיאה הגיונית גסה; שכן התכונה הנידונה אומרת רק שיש העתקים בין השלם לבין החלק, ולא שכל נסיון להתאמה יצליח וימציא לנו העתק; אמנם במקרה זה אין ההעתקים „המצליחים" מתאימים אף פעם כל איבר של החלק לעצמו (בתוך Q).

כבר גליליי (Galileo Galilei) הדגיש, שלגבי הקבוצות האינסופיות פוקע תקפה של תכונת הקבוצות הסופיות, שאינן אקויולנטיות לחלק אמיתי מהן. ניגוד זה גרם לקשיים ניכרים (על רקע פסיכולוגי) בראשית התפתחותה של תורת־הקבוצות: החוקרים בתחומי המתימטיקה והפילוסופיה האמינו אמונה שלמה בעקרון, שתמיד גדול השלם מחלקו, והתעלמו ממשקלו המכריע של הצעד המעבירנו ממערכות סופיות אל אינסופיות — אשר מלכתחילה אינו מצדיק הצפיה לכך, שחוקי המערכות הסופיות יישמרו בתחום החדש.

(האקויולנטיות בין קבוצה לחלק ממנה נראית מוזרה ביותר אם יש לקבוצה כביכול מציאות „מעשית" ולא רק עיונית. כאן בעיקר מתגלה הצד הפסיכולוגי שבדבר, ולכן מתנדף הקושי ברגע בו נברר לנו, שבאמת אין מקום למקרה כזה במציאות. ידוע הסיפור על Tristram Shandy המתחיל לכתוב את דברי ימיו, ואמנם בקפדנות יתירה עד כדי כך שהוא מקדיש לתיאור כל יום בחייו עבודת שנה שלמה — ולכן לא יגמור את חיבורו. ואולם אילו חי אינסוף שנים (ביתר דיוק: שנה ראשונה, שנית, שלישית וכו' כפי סידרת כל המספרים הטבעיים), „יגמור" את החיבור; כלומר, כל יום בפרשת חייו, בין מוקדם בין מאוחר, יזכה להיכתב בחיבור, הואיל ויראה אותה שנה משנות חייו המיועדת לכתיבת היום הנידון. השוה לכך ההתאמות שבסעיף הבא.)

טרם הוכחנו שתכונה זו של אקויולנטיות בין קבוצה לקבוצה־חלקית־ממש שלה מתמלאת בכל קבוצה אינסופית. בינתים נצטרך אפוא, לשם הדיוק, להכניס מיון חדש בין הקבוצות[1], בקבענו:

הגדרה V. הקבוצה Q תיקרא עלסופית אם יש העתק בין Q לבין קבוצה־חלקית־ממש של Q. כל קבוצה שאינה עלסופית תיקרא פיניטית[2].

הבה נעיין ביחס שבין ההגדרה הרגילה של קבוצה „סופית" ו„אינסופית" לבין ההגדרה V. ראשית קיים הבדל חיצוני, ששרשו עמוק; מקודם לקחנו

1. בחלק הששי יתברר שמיון זה אינו חסר־ערך, גם אחרי ההוכחה של משפט 4 ב §3.
2. מן המלה הרומית finitus (באנגלית finite) שמובנה „סופי". עלסופי מתאים ל transfinite.

כמושג מקורי את הקבוצה הסופית, וכאן את הקבוצה העלסופית. לפיכך יש מקום לטעון כלפי ההגדרה V מנקודת־ראות דידקטית (לימודית), שכן הלומד התוודע אל הקבוצות הסופיות בראשונה. ואולם אין זה נימוק בעל אופי הגיוני.

לעצם הענין יש להעיר לגבי ההגדרה V: ראשית, גם לפיה, כמו לפי ההגדרה הרגילה, קיים המשפט שקבוצה על(אינ)סופית אינה אקויולנטית לקבוצה פיניטית (סופית). שנית, כל קבוצה סופית היא גם פיניטית. שלישית, לכל קבוצה אינסופית S יש קבוצות־חלקיות־ממש האקויולנטיות ל S, ז"א S היא גם עלסופית. בסוף ה § 3 נביא חלק מההוכחות לטענות אלה, ואת יתרן במילואים לחלק הרביעי, מספר א)[1]. משום כך אין צורך להבדיל בין קבוצות סופיות לפיניטיות, או בין קבוצות אינסופיות לעלסופיות. (אולם בחלק הששי נחזור לענין זה.)

מעתה נשתמש במונחים הרגילים „סופי" ו„אינסופי" לגבי קבוצות, ואילו לגבי מספרים נעדיף „עלסופי".

תרגילים ל §2.

1) נתונות שתי קבוצות אקויולנטיות. היש תמיד, מלבד העתק נתון ביניהן, עוד העתקים נוספים? מה יוצא מכאן לגבי העתקים בין קבוצה נתונה לבין עצמה?

2) האפשר להשתמש בפונקציות הבאות (השוה I. פרק תשיעי)

$$y = ax + b, \qquad y = x^2, \qquad y = \sqrt{x}, \qquad y = \sin x$$

כדי להעתיק קבוצה של ערכי־גורם x אל קבוצת הערכים המתאימים של ערכי־הפונקציה y

a) בתחום־ההגדרה של הפונקציה כולו?

b) בתחומי־הגדרה צרים יותר ל x?

3) בקשר למילואים מספר א): משום מה נוח הדבר, בהוכחת אי־האקויולנטיות בין קבוצה פיניטית לעלסופית, לצאת מן הקבוצה העלסופית דווקא ולא מן הפיניטית?

§3. הקבוצות הניתנות להימָנות.

בין הקבוצות האינסופיות יש סוג של קבוצות המצטיינות בפשטות יתירה. בעצם כבר עמדנו עליהן, כשעסקנו בסדרות (I, 29 ו 125/6); הדוגמה הפשוטה ביותר לסוג זה היא קבוצת כל המספרים הטבעיים $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

תהי N איזו קבוצה האקויולנטית לקבוצה M, ויהי Φ העתק בין M ו N. נסמן ב n_1 את האיבר של N המותאם ע"י Φ למספר 1 מ M, ב n_2 את האיבר של N המותאם למספר 2 מ M, ובדרך־כלל ב n_k את האיבר של N המותאם

1. מילואים אלו נמצאים אחרי הפרק הרביעי (בין החלק הרביעי לחמישי).

למספר הטבעי k מ M. השתמשנו אפוא באיברי M, שהם כל המספרים הטבעיים, כציונים (I, 25 ו 126) כדי לסמן ו„למנות" את איברי N; „מָנינו" את איברי N כך שיופיע איבר ראשון, שני, וכו' כנגד כל מספר טבעי: $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$, וכי גם להיפך ישא עליו כל איבר של N ציון המעיד על מקומו, בהתאם למקום בן־זוגו בקבוצה M.

אמנם יש שני הבדלים בין המושג שהכנסנוהו כאן לבין מושג הסידרה. ראשית, בסידרה יוכלו להופיע גם אברים שוים, מה שאין כן בקבוצה (לעיל עמ' 5); לכן בקבוצה N הנ"ל גורר $k \neq l$ תמיד $n_k \neq n_l$. שנית, בסידרה (a_k) יש, לפי הגדרתה מראש, סדר מסויים של האיברים, כך ש $k < l$ גורם לכך כי a_k יופיע בסידרה לפני a_l; ואילו בקבוצה אין מראש סדר כל עיקר, לפי הגדרת הקבוצה. אמנם נוכל לסדר, או „למנות", את איברי הקבוצה הנ"ל לפי אותו כלל, בהקדימנו n_k ל n_l אם $k < l$. אחרי סדור זה יש לפנינו קבוצה „מנויה", ובלעדיו קבוצה „הניתנת להמנות". נגדיר אפוא:

הגדרה I: כל קבוצה $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ האקויוָלנטית לקבוצת כל המספרים הטבעיים נקראת קבוצה ניתנת להמנות או קבוצה בת־מנייה. אם איבריה n_k מסודרים בהתאם לגודל הציונים k, נדבר על קבוצה מנויה.

כל קבוצה הניתנת להימנות היא אפוא אינסופית, וכל קבוצה האקויולנטית לקבוצה בת־מנייה, גם היא בת־מנייה. נשתמש בביטוי „כדי מנייה" (מקביל ל„מספר סופי" כלפי איבריה של קבוצה סופית) כדי לציין את אוצר איבריה של קבוצה בת־מנייה.

נפתח במתן דוגמות אחדות ובהסקת כמה משפטים כלליים.

קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים גם היא בת־מנייה, וכן כל קבוצה המתקבלת מקבוצת כל המספרים הטבעיים ע"י השמטת חלק מאיבריה (במספר סופי או אינסופי), בתנאי שישארו עוד אינסוף איברים. שהרי את „הראשון" מבין האיברים הנשארים — כלומר, הקטן ביניהם; ובמקרה של קבוצה בת־מנייה כללית: האיבר בעל הציון הקטן ביותר — נוכל להתאים למספר 1 ולסמנו ב a_1; את השני מבין הנשארים נסמן ב a_2 (מותאם ל 2), וכו'. ההנחה שנשארו אינסוף איברים מבטיחה שלעומת כל מספר טבעי k יופיע איבר מסויים a_k. נקבל אפוא את הקבוצה בת־המנייה $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. במקרה של קבוצת המספרים הזוגיים — כלומר, של השמטת כל המספרים האי־זוגיים — תתואר ההעתקה אל קבוצת כל המספרים הטבעיים ע"י תבנית־ההתאמה

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2m \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & m \end{array}$$

תהליך־ההתאמה שבנינוהו לא הסתמך על תכונות מיוחדות של המספרים

הטבעיים, אלא רק על העובדה, שהם איבריה של קבוצה בת־מנייה. לכן הוכחנו את המסקנה הכללית:

משפט 1: כל קבוצה חלקית אינסופית של קבוצה בת־מנייה, גם היא בת־מנייה.

דנו כאן בקבוצות שהן לכאורה צרות מ־M. אך המצב דומה לגבי קבוצות הנראות מקיפות יותר. נסתייע בדוגמה של הקבוצה N המכילה את כל המספרים השלמים החיוביים והשליליים. בסדר הרגיל לאיבריה, שלפיו קודם מספר קטן למספר גדול ממנו, אין לפנינו קבוצה מנויה, שכן לכל מספר קודמים לפי זה אינסוף מספרים אחרים; למספר 1, למשל, כל המספרים השליליים. ברם טכסיס פשוט מאפשר לנו למנות את איברי N. נסמן את קבוצת כל המספרים הטבעיים שוב ב־M, ונתאים לאיבר 1 של M את האיבר 1 של N, לאיבר 2 של M את האיבר -1 של N, ל־3 את 2, ל־4 את -2, וכו'; בדרך כלל יותאם אפוא לאיבר $2m-1$ של M האיבר m של N, לאיבר $2m$ של M האיבר $(-m)$ של N. התאמה זו משתקפת מתוך הסידרה

$$(1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, m, -m, \ldots).$$

לא ישתנה כל דבר עקרוני אם נוסיף על איברי N את המספר 0 ונגיע כך אל קבוצת כל המספרים השלמים; ביתר כלליות, לא ישתנה דבר, אם נוסיף עוד איבריה של קבוצה סופית. שהרי נוכל להקדים את האיברים הנוספים לכל האיברים הנמצאים כבר, ובכך לא נשנה את העובדה שמקומו של כל איבר מסומן ע״י מספר טבעי מסויים — רק שמספר זה יגדל ב־k אם נקדים k איברים.

הגדלנו לעשות מזה במנותנו לעיל את הקבוצה N; שכן הוספנו שם על איברי הקבוצה הנתונה את איבריה של קבוצה אינסופית, וביתר דיוק: של קבוצה בת־מנייה (קבוצת כל המספרים השלמים השליליים). תהליך המנייה היה זה: הוספנו על איברי הקבוצה $R=\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ את איברי הקבוצה $S=\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, בשימנו s_1 על־יד r_1, s_2 על־יד r_2, ..., s_k על יד r_k. תהליך זה נתון לביצוע כנגד כל שתי קבוצות בנות־מנייה. ואפילו אם נתון איזה מספר סופי שהוא של קבוצות בנות־מנייה

$$T_1=\{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \ldots\},\quad T_2=\{t_{21}, t_{22}, t_{23}, \ldots\},\ \ldots,\ T_m=\{t_{m1}, t_{m2}, t_{m3}, \ldots\},$$

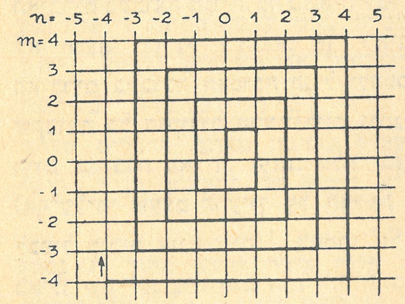
הרי נוכל לשים t_{21} (האיבר הראשון של הקבוצה השניה) אחרי t_{11}, t_{31} אחרי t_{21}, וכן הלאה עד t_{m1} (האיבר הראשון של הקבוצה ה־m־ית שהיא האחרונה); נחזור אחרי כך אל t_{12} (האיבר השני של הקבוצה הראשונה), וכן חוזר חלילה. ע״י זה נקבל את כל איברי הקבוצות T_1, T_2, ..., T_m לפי הסדר המנוי

$$\{t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{m1}, t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{m2}, \ldots, t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{mk}, \ldots\}.$$

אמנם הנחנו כאן, וכן בפיסקה הקודמת, שכל האיברים הללו שונים זה מזה, כלומר שכל הקבוצות המצורפות זרות לחלוטין. ברם אין להנחה זו חשיבות (בהתאם) למשפט 1 דלעיל. קבלנו אפוא:

משפט 2: אם נוסיף על איבריה של קבוצה בת־מנייה איברים חדשים במספר סופי או כדי מנייה, נקבל שוב קבוצה בת־מנייה. הוא הדין אם נצרף איבריהן של מספר סופי של קבוצות שכל אחת מהן היא בת־מנייה או סופית — בתנאי שלפחות אחת מהן היא אינסופית.

ב I, 178—179 (השוה הערה 2 ב I, 178) הוכחנו משפט, שלפי המונחים שהוכנסו כאן מתבטא הוא בצורה זו: קבוצת כל המספרים הרציונליים (השברים הרגילים) ניתנת להימנות. דבר זה עולה על כל מה שמצאנו עד כאן; שהרי הכוונה לסידרה של סדרות, כלומר לקבוצות בנות־מנייה לא במספר סופי אלא כדי מנייה. הקבוצות הללו הן: 1) קבוצת המספרים השלמים $\frac{m}{1}$, 2) קבוצת השברים $\frac{m}{2}$ בעלי המכנה 2, ... , n) קבוצת השברים $\frac{m}{n}$ בעלי המכנה n. נמחיש את תהליך מנייתם של כל השברים האלה, בדרך שונה קצת מזו שבכרך הראשון, ע״י הציור 3 הנותן מעין „רבוע אינסופי". השורות שבציור המסומנות ב־m מתאימות למונה השבר $\frac{m}{n}$, העמודים המסומנים ב־n מתאימים למכנה השבר [1], והשבר בעצמו מותאם לנקודת החיתוך שבין השורה m לעמוד n; נסמן נקודה זו ב־$\left(\frac{m}{n}\right)$. כדי למנות את כל הנקודות האלה נשתמש במסילה השבורה (מעין לולין) המוליכה מן הנקודה הפנימית $\left(\frac{0}{0}\right)$ החוצה; נקודות־החיתוך תסודרנה כפי שהן מופיעות במסילה הנ״ל. ע״י כך הפכנו סידרה של סדרות לסידרה פשוטה; בלשון הגיאומטריה: התאמנו את הנקודות „השלמות" (נקודות־סריג) של מישור, המהוות תבנית בשני ממדים, בהתאמה חד־חד־ערכית אל הנקודות השלמות שבקו ישר (תבנית בממד אחד).



ציור 3

כדי לקבל מתוך קבוצה בת־מנייה זו, המכילה את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$, את קבוצת כל המספרים הרציונליים השונים, נשמיט מתוך הקבוצה: א) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ בעלות הערך $n=0$; ב) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ שלגביהן $\frac{m}{n}$ אינו שבר מצומצם (I, 86—87), ז״א את הנקודות בעלות n שלילי או בעלות

1. כאן אנו מכניסים לע״ע גם את הערך $n=0$ שאין כנגדו במציאות שבר $\frac{m}{n}$. במקרה זה, אשר נבטלו מיד, נראה את $\frac{m}{n}$ כסמל בעלמא, חסר משמעות מתימטית.

הטבעיים, אלא רק על העובדה, שהם איבריה של קבוצה בת־מנייה. לכן הוכחנו את המסקנה הכללית:

משפט 1: כל קבוצה חלקית אינסופית של קבוצה בת־מנייה, גם היא בת־מנייה.

דנו כאן בקבוצות שהן לכאורה צרות מ M. אך המצב דומה לגבי קבוצות הנראות מקיפות יותר. נסתייע בדוגמה של הקבוצה N המכילה את כל המספרים השלמים החיוביים והשליליים. בסדר הרגיל לאיבריה, שלפיו קודם מספר קטן למספר גדול ממנו, אין לפנינו קבוצה מנויה, שכן לכל מספר קודמים לפי זה אינסוף מספרים אחרים; למספר 1, למשל, כל המספרים השליליים. ברם טכסיס פשוט מאפשר לנו למנות את איברי N. נסמן את קבוצת כל המספרים הטבעיים שוב ב M, ונתאים לאיבר 1 של M את האיבר 1 של N, לאיבר 2 של M את האיבר -1 של N, ל 3 את 2, ל 4 את -2, וכו'; בדרך כלל יותאם אפוא לאיבר $2m-1$ של M האיבר m של N, לאיבר $2m$ של M האיבר $(-m)$ של N. התאמה זו משתקפת מתוך הסידרה

$$(1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, m, -m, \ldots).$$

לא ישתנה כל דבר עקרוני אם נוסיף על איברי N את המספר 0 ונגיע כך אל קבוצת כל המספרים השלמים; ביתר כלליות, לא ישתנה דבר, אם נוסיף עוד איבריה של קבוצה סופית. שהרי נוכל להקדים את האיברים הנוספים לכל האיברים הנמצאים כבר, ובכך לא נשנה את העובדה שמקומו של כל איבר מסומן ע"י מספר טבעי מסויים – רק שמספר זה יגדל ב k אם נקדים k איברים.

הגדלנו לעשות מזה במנותנו לעיל את הקבוצה N; שכן הוספנו שם על איברי הקבוצה הנתונה את איבריה של קבוצה אינסופית, וביתר דיוק: של קבוצה בת־מנייה (קבוצת כל המספרים השליליים). תהליך המנייה היה זה: הוספנו על איברי הקבוצה $R=\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ את איברי הקבוצה $S=\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, בשימנו s_1 על־יד r_1, s_2 על־יד r_2, ..., s_k על יד r_k. תהליך זה נתון לביצוע כנגד כל שתי קבוצות בנות־מנייה. ואפילו אם נתון איזה מספר סופי שהוא של קבוצות בנות־מנייה

$$T_1=\{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \ldots\}, \quad T_2=\{t_{21}, t_{22}, t_{23}, \ldots\}, \ldots, \quad T_m=\{t_{m1}, t_{m2}, t_{m3}, \ldots\},$$

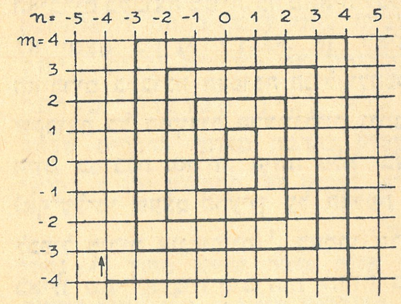
הרי נוכל לשים t_{21} (האיבר הראשון של הקבוצה השניה) אחרי t_{11}, t_{31} אחרי t_{21}, וכן הלאה עד t_{m1} (האיבר הראשון של הקבוצה ה־m־ית שהיא האחרונה); נחזור אחרי כך אל t_{12} (האיבר השני של הקבוצה הראשונה), וכן חוזר חלילה. ע"י זה נקבל את כל איברי הקבוצות $T_1, T_2, \ldots, T_m$ לפי הסדר המנוי

$$\{t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{m1}, t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{m2}, \ldots, t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{mk}, \ldots\}.$$

אמנם הנחנו כאן, וכן בפיסקה הקודמת, שכל האיברים הללו שונים זה מזה, כלומר שכל הקבוצות המצורפות זרות לחלוטין. ברם אין להנחה זו חשיבות בהתאם) למשפט 1 דלעיל. קבלנו אפוא:

משפט 2: אם נוסיף על איבריה של קבוצה בת־מנייה איברים חדשים במספר סופי או כדי מנייה, נקבל שוב קבוצה בת־מנייה. הוא הדין אם נצרף איבריהן של מספר סופי של קבוצות שכל אחת מהן היא בת־מנייה או סופית – בתנאי שלפחות אחת מהן היא אינסופית.

ב I, 178–179 (השוה הערה 2 ב I, 178) הוכחנו משפט, שלפי המונחים שהוכנסו כאן מתבטא הוא בצורה זו: קבוצת כל המספרים הרציונליים (השברים הרגילים) ניתנת להימנות. דבר זה עולה על כל מה שמצאנו עד כאן; שהרי הכוונה לסידרה של סדרות, כלומר לקבוצות בנות־מנייה לא במספר סופי אלא כדי מנייה. הקבוצות הללו הן: 1) קבוצת המספרים השלמים $\frac{m}{1}$, 2) קבוצת השברים $\frac{m}{2}$ בעלי המכנה 2, ..., n) קבוצת השברים $\frac{m}{n}$ בעלי המכנה n. נמחיש את תהליך מנייתם של כל השברים האלה, בדרך שונה קצת מזו שבכרך הראשון, ע"י הציור 3 הנותן מעין „רבוע אינסופי". השורות שבציור המסומנות ב m מתאימות למונה השבר $\frac{m}{n}$, העמודים המסומנים ב n מתאימים למכנה השבר[1], והשבר בעצמו מותאם לנקודת החיתוך שבין השורה m לעמוד n; נסמן נקודה זו ב $\left(\frac{m}{n}\right)$. כדי למנות את כל הנקודות האלה נשתמש במסילה השבורה (מעין לולין) המוליכה מן הנקודה הפנימית $\left(\frac{0}{0}\right)$ החוצה; נקודות־החיתוך תסודרנה כפי שהן מופיעות במסילה הנ"ל. ע"י כך הפכנו סידרה של סדרות לסידרה פשוטה; בלשון הגיאומטריה: התאמנו את הנקודות „השלמות" (נקודות־סריג) של מישור, המהוות תבנית בשני ממדים, בהתאמה חד־חד־ערכית אל הנקודות השלמות שבקו ישר (תבנית בממד אחד).



ציור 3

כדי לקבל מתוך קבוצה בת־מנייה זו, המכילה את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$, את קבוצת כל המספרים הרציונליים השונים, נשמיט מתוך הקבוצה: א) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ בעלות הערך $n=0$; ב) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ שלגביהן $\frac{m}{n}$ אינו שבר מצומצם (I, 86–87), ז"א את הנקודות בעלות n שלילי או בעלות

1. כאן אנו מכניסים לע"ע גם את הערך $n=0$ שאין כנגדו במציאות שבר $\frac{m}{n}$. במקרה זה, אשר נבטלו מיד, נראה את $\frac{m}{n}$ כסמל בעלמא, חסר משמעות מתימטית.

הטבעיים, אלא רק על העובדה, שהם איבריה של קבוצה בת־מנייה. לכן הוכחנו את המסקנה הכללית:

משפט 1: כל קבוצה חלקית אינסופית של קבוצה בת־מנייה, גם היא בת־מנייה.

דנו כאן בקבוצות שהן לכאורה צרות מ M. אך המצב דומה לגבי קבוצות הנראות מקיפות יותר. נסתייע בדוגמה של הקבוצה N המכילה את כל המספרים השלמים החיוביים והשליליים. בסדר הרגיל לאיבריה, שלפיו קודם מספר קטן למספר גדול ממנו, אין לפנינו קבוצה מנויה, שכן לכל מספר קודמים לפי זה אינסוף מספרים אחרים; למספר 1, למשל, כל המספרים השליליים. ברם טכסיס פשוט מאפשר לנו למנות את איברי N. נסמן את קבוצת כל המספרים הטבעיים שוב ב M, ונתאים לאיבר 1 של M את האיבר 1 של N, לאיבר 2 של M את האיבר -1 של N, ל 3 את 2, ל 4 את -2, וכו'; בדרך כלל יותאם אפוא לאיבר $2m-1$ של M האיבר m של N, לאיבר $2m$ של M האיבר $(-m)$ של N. התאמה זו משתקפת מתוך הסידרה

$$(1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, m, -m, \ldots).$$

לא ישתנה כל דבר עקרוני אם נוסיף על איברי N את המספר 0 ונגיע כך אל קבוצת כל המספרים השלמים; ביתר כלליות, לא ישתנה דבר, אם נוסיף עוד איבריה של קבוצה סופית. שהרי נוכל להקדים את האיברים הנוספים לכל האיברים הנמצאים כבר, ובכך לא נשנה את העובדה שמקומו של כל איבר מסומן ע"י מספר טבעי מסויים – רק שמספר זה יגדל ב k אם נקדים k איברים.

הגדלנו לעשות מזה במנותנו לעיל את הקבוצה N; שכן הוספנו שם על איברי הקבוצה הנתונה את איבריה של קבוצה אינסופית, וביתר דיוק: של קבוצה בת־מנייה (קבוצת כל המספרים השליליים). תהליך המנייה היה זה: הוספנו על איברי הקבוצה $R=\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ את איברי הקבוצה $S=\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, בשימנו s_1 על־יד r_1, s_2 על־יד r_2, ..., s_k על יד r_k. תהליך זה נתון לביצוע כנגד כל שתי קבוצות בנות־מנייה. ואפילו אם נתון איזה מספר סופי שהוא של קבוצות בנות־מנייה

$$T_1=\{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \ldots\},\quad T_2=\{t_{21}, t_{22}, t_{23}, \ldots\},\ \ldots,\quad T_m=\{t_{m1}, t_{m2}, t_{m3}, \ldots\},$$

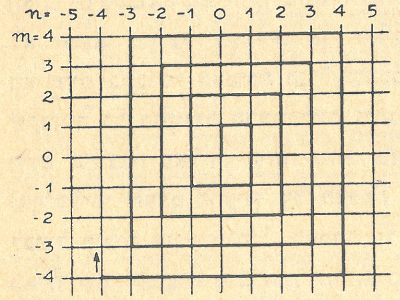
הרי נוכל לשים t_{21} (האיבר הראשון של הקבוצה השניה) אחרי t_{11}, t_{31} אחרי t_{21}, וכן הלאה עד t_{m1} (האיבר הראשון של הקבוצה ה־m־ית שהיא האחרונה); נחזור אחרי כך אל t_{12} (האיבר השני של הקבוצה הראשונה), וכן חוזר חלילה. ע"י זה נקבל את כל איברי הקבוצות $T_1, T_2, \ldots, T_m$ לפי הסדר המנוי

$$\{t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{m1}, t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{m2}, \ldots, t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{mk}, \ldots\}.$$

אמנם הנחנו כאן, וכן בפיסקה הקודמת, שכל האיברים הללו שונים זה מזה, כלומר שכל הקבוצות המצורפות זרות לחלוטין. ברם אין להנחה זו חשיבות (בהתאם) למשפט 1 דלעיל. קבלנו אפוא:

משפט 2: אם נוסיף על איבריה של קבוצה בת־מנייה איברים חדשים במספר סופי או כדי מנייה, נקבל שוב קבוצה בת־מנייה. הוא הדין אם נצרף איבריהן של מספר סופי של קבוצות שכל אחת מהן היא בת־מנייה או סופית – בתנאי שלפחות אחת מהן היא אינסופית.

ב I, 178—179 (השוה ההערה 2 ב I, 178) הוכחנו משפט, שלפי המונחים שהוכנסו כאן מתבטא הוא בצורה זו: קבוצת כל המספרים הרציונליים (השברים הרגילים) ניתנת להימנות. דבר זה עולה על כל מה שמצאנו עד כאן; שהרי הכוונה לסידרה של סדרות, כלומר לקבוצות בנות־מנייה לא במספר סופי אלא כדי מנייה. הקבוצות הללו הן: 1) קבוצת המספרים השלמים $\frac{m}{1}$, 2) קבוצת השברים $\frac{m}{2}$ בעלי המכנה 2, ...,n) קבוצת השברים $\frac{m}{n}$ בעלי המכנה n. נמחיש את תהליך מנייתם של כל השברים האלה, בדרך שונה קצת מזו שבכרך הראשון, ע"י הציור 3 הנותן מעין „רבוע אינסופי". השורות שבציור המסומנות ב m מתאימות למונה השבר $\frac{m}{n}$, העמודים המסומנים ב n מתאימים למכנה השבר[1], והשבר בעצמו מותאם לנקודת החיתוך שבין השורה m לעמוד n; נסמן נקודה זו ב $\left(\frac{m}{n}\right)$. כדי למנות את כל הנקודות האלה נשתמש במסילה השבורה (מעין לולין) המוליכה מן הנקודה הפנימית $\left(\frac{0}{0}\right)$ החוצה; נקודות־החיתוך תסודרנה כפי שהן מופיעות במסילה הנ"ל. ע"י כך הפכנו סידרה של סדרות לסידרה פשוטה; בלשון הגיאומטרית: התאמנו את הנקודות „השלמות" (נקודות־סריג) של מישור, המהוות תבנית בשני ממדים, בהתאמה חד־חד־ערכית אל הנקודות השלמות שבקו ישר (תבנית במימד אחד).



ציור 3

כדי לקבל מתוך קבוצה בת־מנייה זו, המכילה את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$, את קבוצת כל המספרים הרציונליים השונים, נשמיט מתוך הקבוצה: א) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ בעלות הערך $n=0$; ב) את כל הנקודות $\left(\frac{m}{n}\right)$ שלגביהן $\frac{m}{n}$ אינו שבר מצומצם (I, 86—87), ז"א את הנקודות בעלות n שלילי או בעלות

1. כאן אנו מכניסים לע"ע גם את הערך $n=0$ שאין כנגדו במציאות שבר $\frac{m}{n}$. במקרה זה, אשר נבטלו מיד, נראה את $\frac{m}{n}$ כסמל בעלמא, חסר משמעות מתימטית.

מחלק משותף בין m ו n. ע״י הגבלה זו נקבל את כל המספרים הרציונליים השונים; בכללם גם את המספר 0 המופיע בצורה $\frac{0}{1}$. באופן הסתכלותי אפשר לציין את הנקודות המושמטות והנשארות שבמחצית הימנית של הציור (ימנית מן „העמוד״ $n=0$) כדלקמן: נעמיד במקום $\left(\frac{0}{0}\right)$ נקודה מאירה, ונזקוף מחט דקה בכל נקודה $\left(\frac{m}{n}\right)$ שלגביה $n>0$; הנקודות המושמטות הן מקומותיהן של כל מחט הנמצאת בצלה של מחט אחרת.

על סמך משפט 1 (לעיל עמ׳ 16) ניתנת להימנות קבוצת הנקודות הנשארות, ולכן גם הקבוצה (האקויוָלנטית) של כל המספרים הרציונליים. לפי התאמה זו למספרים הטבעיים יופיעו המספרים הרציונליים בסידרה המתחילה כך:

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots\right)$$

ב I, 115–117 הסתכלנו בקבוצת כל „הנקודות הרציונליות״ בקו ישר, האקויולנטית (לפי ההתאמה הנתונה שם) לקבוצת כל המספרים הרציונליים. בפרט ראינו, שקבוצה זו צפופה היא, כלומר, שבין כל שתי נקודות רציונליות נמצאות אינסוף נקודות רציונליות שונות. מצב כזה עומד בניגוד קיצון ליחס האיברים בקבוצה מנויה, בה מתאים לכל איבר a_k העוקב a_{k+1} באופן ששום איבר לא יימצא בין a_k ו a_{k+1}. אך ראינו זה עתה, שאפשר להחליף את סדר האיברים בקבוצה הצפופה הנ״ל ולהפכה לקבוצה מנויה; זוהי משמעות המשפט, שקבוצת כל הנקודות הרציונליות ניתנת להימנות. ואמנם עובדה זו, הנראית לנו היום כמובנת מאליה, היתה פלא בעיני המתימטיקנים עוד לפני מאה שנה (אף־על־פי שעצם הרעיון על החלפת הסדר הוכנס כבר ע״י A. Cauchy כדי לכפול טורים אינסופיים)[1]. לאמתו של דבר הורסת דוגמה זו לחלוטין את הרעיון כאילו שתי קבוצות מוכרחות להיות בעלות „היקף דומה במקצת״, כדי שתהיינה אקויולנטיות – בניגוד לקבוצות הסופיות שהן אקויולנטיות רק אם מספר איבריהן שווה (I, 6). קבוצת הנקודות השלמות שבקו הישר שונה מקבוצת הנקודות הרציונליות שבישר לא רק בכך שהראשונה היא קבוצה־חלקית־ממש של השניה, אלא בכך שבין כל שתי נקודות של הראשונה נמצאות אינסוף נקודות נוספות של השניה. השניה לכאורה מקיפה פי־אינסוף מן הראשונה, ובכל זאת שתיהן אקויולנטיות!

לפי המשפט 1 ניתנת להימנות גם כל קבוצה חלקית אינסופית של קבוצת המספרים הרציונליים, כגון קבוצת כל השברים הרגילים (או השברים העשרוניים המחזוריים; השוה I, 37 ו־62/3) בין 0 ל 1, או קבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים בין 0 ל 1.

1. לפיכך יש המכנים את שיטת־ההוכחה מ I, 178, שבה קשורים ביניהם איברים הנמצאים באותם האלכסונים, בשם „שיטת־האלכסון של קושי״.

בהוכחתנו לא השתמשנו בתכונותיהם המיוחדות של המספרים הרציונליים אלא אך בתופעה שאפשר לתארם כסידרה של סדרות, כנגד המונים m והמכנים n. ע״י צירוף האיברים שבקבוצות אלו, שכל אחת מהן ניתנת להימנות, והמופיעות בעצמן כאיברי קבוצה בת־מנייה, נקבל אפוא שוב קבוצה הניתנת להימנות. לאמור:

משפט 3: אם נתונות, במספר כדי מנייה, קבוצות שכל אחת מהן ניתנת להימנות, יוצר צירוף איבריהן שוב קבוצה הניתנת להימנות.

ב I, 179–180 (השוה גם 217/8) הוכח המשפט, שאף קבוצת כל המספרים האלגבריים (הממשיים) ניתנת להימנות. משפט זה מרחיק לכת לכאורה בהרבה מן המשפט 3; שהרי כאן נתווספו על המספרים הרציונליים, שהם שרשי המשוואות הליניאריות בעלות מקדמים שלמים, עוד שרשי המשוואות בנות המעלות 2, 3, 4, ... (I, 174). באמת היתה זו התגלית הראשונה בשנות יצירתה של תורת־הקבוצות ע״י קנטור (בשנת 1873; עיין ב I, 179), ובני הדור ההוא ראו את התגלית לא בהתפעלות בלבד כי אם, בחלקם, אף בחשדנות. אבל אם ננתח את ההוכחה מתגלה שאין כאן, פרט לעובדות פשוטות מן האלגברה, כל רעיון חדש, אלא רק שימוש חוזר במשפט 3 דלעיל.

עד כאן התבוננו אל קבוצות בנות־מנייה בפני עצמן, בתתנו דוגמות וגם משפטים כלליים לגביהן. נסיים סעיף זה בהוכיחנו שני משפטים הדנים ביחס בין קבוצות אינסופיות בדרך־כלל לבין קבוצות בנות־מנייה. אפייה של הוכחת המשפט 4 עמוק בהרבה מאופי הדברים שבהם עסקנו עד הנה; ואולם ספק הוא, אם הקורא הנכנס אל המקצוע ירגיש בקושי הנידון. נחזור אליו בסוף ה§ 4 לפרק השלישי.

תהי P קבוצה אינסופית, ו p_0 איזה איבר שהוא מתוך P; נסמן ב P_1 את הקבוצה $P-\{p_0\}$, כלומר קבוצת האיברים שישארו ב P אחרי הוצאת האיבר p_0. אם p_1 הוא איבר איזה שהוא מתוך P_1, נסמן את השארית $P_1-\{p_1\}$ ב P_2; וכן הלאה. לאמור: אחרי הגיענו אל הקבוצה החלקית P_k של P (k מספר טבעי) נוציא מתוך P_k אחד מאיבריה p_k ונסמן את השארית $P_k-\{p_k\}$ ב P_{k+1}. לפי שיטת האינדוקציה השלימה הגדרנו בכך תהליך שכחו יפה כנגד כל מספר טבעי k; תהליך זה של הוצאת איברים p_k ובנין קבוצות חלקיות של P לא ייגמר בשום מספר טבעי k, ויימשך אפוא כנגד מערכת המספרים הטבעיים כולם. שכן התהליך יוכל להיגמר רק כאשר לא ישאר עוד איבר בתוך P_k שנוכל להוציאו; והרי קבוצת האיברים שהוצאו עד הצעד ה־k־י, היא סופית: $\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$, בעוד שהקבוצה P היא, לפי ההנחה אינסופית.

לפיכך יובילנו התהליך הנ״ל אל קבוצה בת־מנייה:

$$P^* = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\}$$

שהיא קבוצה חלקית של P: $P^* \subseteq P$. יתכן כי $P^* = P$; עיין בדוגמה דלהלן. כך קבלנו:

מ ש פ ט 4: כל קבוצה אינסופית P מקיפה קבוצה חלקית P^* הניתנת להימנות. אפשר אפוא לתאר את P בצורה $P = P^* + T$, שבה מסמן P^* קבוצה בת־מנייה, ואילו על הקבוצה T לא נודע מאומה.

ד ו ג מ ה: תהי P קבוצת כל המספרים הטבעיים. אם נוציא בכל צעד מן הקבוצה את המספר הקטן ביותר שנשאר בה, נקבל:

$$P^* = P, \quad T = 0, \quad P = P^* + 0 .$$

ברם אם נוציא תמיד את המספר ה ז ו ג י הקטן ביותר, תהיה P^* קבוצת כל המספרים (הטבעיים) הזוגיים, ו T קבוצת כל המספרים האי־זוגיים:

$$P = P^* + T = \{2, 4, 6, \ldots\} + \{1, 3, 5, \ldots\}.$$

אם נוציא תמיד את המספר הראשוני הקטן ביותר (השוה I, 28), נקבל את התיאור:

$$P = P^* + T = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} + \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \ldots\}.$$

לבסוף נשתמש במשפט 4 כדי להוכיח לגבי א י ז ו קבוצה אינסופית ש ה י א Q תכונה, דומה לתכונה שנקבעה לעיל במשפט 1 לגבי כל קבוצה בת־מנייה.

תהי Q' קבוצה חלקית, סופית או בת־מנייה, של Q כך שהשארית $R = Q - Q'$ עודנה קבוצה אינסופית; קיים אפוא $Q = Q' + R$. נפרד את R לפי המשפט 4 בצורה $R = R^* + T$ (R^* קבוצה בת־מנייה). כל איבר של Q שייך לפי זה לאחת ויחידה מן הקבוצות הזרות Q', R^*, T.

ועתה ניצור העתק בין הקבוצות Q ו R, בהעתיקנו את הקבוצה החלקית $Q' + R^*$ של Q אל הקבוצה החלקית R^* של R, ואת השארית T אל עצמה. הצעד השני ייעשה ע״י ההעתק הזהותי המתאים כל איבר לעצמו; הצעד הראשון אפשרי לפי המשפט 2, שהרי הקבוצה R^* ניתנת להימנות, ו Q' היא קבוצה סופית או בת־מנייה. (לגבי T לא יכלנו לעשות צעד של ממש מחוסר כל ידיעה על T; אפילו נעלם מאתנו אם $T = 0$ אם לאו.) לכן $Q \sim R$.

מ ש פ ט 5: אם נשמיט מקבוצה אינסופית Q איברים במספר סופי או כדי מנייה, תהיה השארית, אם היא אינסופית, אקויולנטית לקבוצה המקורית Q.

ד ו ג מ ה: תהי Q קבוצת כל המספרים הטבעיים ו Q' קבוצת כל המספרים האי־זוגיים. R תהיה אפוא קבוצת כל המספרים הזוגיים. כקבוצה החלקית (הניתנת להימנות) R^* של R נבחר: או ב R עצמה, או בקבוצת כל המספרים המתחלקים ב 4. במקרה הראשון נקבל $T = 0$; במקרה השני T היא קבוצת המספרים הזוגיים שחילוקם ב־4 נותן את השארית 2. להעתקים בין $Q' + R^*$

לבין R^*, ומתוך כך להעתקים בין Q לבין $Q - Q'$, (בשני המקרים הנ״ל) נרמוז בתבניות:

	מקרה ראשון		מקרה שני
Q	1 2 3 4 …		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …
	↕ ↕ ↕ ↕		↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
$Q - Q'$	2 4 6 8 …		4 2 12 8 20 6 28 16 36 10 …

בהשמיטנו מתוך הקבוצה האינסופית Q איברים במספר ס ו פ י נקבל על־כל־פנים שארית א י נ ס ו פ י ת. (כן נוכל, לפי הדוגמות הקודמות, להשמיט איברים כדי מנייה כך שתשאר קבוצה אינסופית.) לפיכך נובעת מן המשפט 5 המסקנה הבאה, שהוזכרה בסוף הסעיף הקודם (עמ׳ 14):

מ ש פ ט 6: לכל קבוצה אינסופית Q יש קבוצות־חלקיות־ממש האקויולנטיות ל Q.

ת ר ג י ל י ם ל 3§.

1) האם קבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים (I, 137) ניתנת להימנות?

2) האם קבוצת כל אותן הנקודות במישור הקואורדינטות (I, 231) x ו y, ששעוריהן x ו y הם מספרים ר צ י ו נ ל י י ם, ניתנת להימנות?

3) אם נסדר את המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$ לקבוצה מנויה ע״י הסידור לפי גודל הסכום $m + n$ (השוה I, 178, הערה 2), איך יש לפרש סידור זה לפי הציור 3 באופן הסתכלותי?

4) האם במשפט 3 מותר להחליף את התנאי „שכל אחת מהן ניתנת להימנות" בתנאי „שכל אחת מהן סופית או ניתנת להימנות" (בהנחה המובנת מאליה שכל הקבוצות שונות זו מזו)?

5) תן דוגמה למשפט 4, ז״א קבע את הקבוצות P^* ו T,

a) אם P היא קבוצת כל המספרים השלמים, בהוציאך תמיד את המספר החיובי הקטן ביותר המתחלק ב 5!

b) אם P היא קבוצת כל המספרים הממשיים החיוביים, בהוציאך תמיד את המספר הרציונלי בעל הצורה $\frac{n-1}{n}$ הקטן ביותר!

6) משום מה מיותר התנאי „אם היא אינסופית" שבמשפט 5, במקרה שהקבוצה האינסופית Q אינה בת־מנייה?

7) הוכח את המשפט: „בהוסיפנו על איבריה של קבוצה אינסופית P איברים חדשים במספר סופי או כדי מנייה, נקבל קבוצה אקויולנטית ל P"

a) במישרין, בהסתמכות על המשפט 4!

b) ע״י היסק הגיוני מתוך המשפט 5!

§ 4. על חשיבותה והשפעתה של תורת הקבוצות.

בשלשת הפרקים הבאים תנתן סקירה כללית, עד כמה שאפשרי הדבר ללא מעמסה חשבונית ניכרת, על מסקנותיה וכווניה העיקריים של תורת הקבוצות (המופשטות). תורה זו היא אחת העיוניות ביותר במתימטיקה, באשר שני מושגיה היסודיים – הקבוצה (המופשטת) והמספר (הסופי, ובעיקר האינסופי) – מחוסרים כמעט כל תוכן הסתכלותי. לפיכך נוצר בנקל הרושם כאילו כאן לפנינו מקצוע המהווה תורה לשמה ואינו יוצא מעבר לתחומו כדי להתקשר בשאר המקצועות המתימטיים – רושם, שהוא צודק במידת־מה לגבי תורת־המספרים (I, פרק שלישי) והתורות האריתמיטיות הטהורות הקשורות בה. אולם רושם זה מוטעה הוא לגמרי לגבי תורת־הקבוצות. אדרבה, אין מקצוע במתימטיקה, שהשפיע, החל מסוף המאה ה19, השפעה מעמיקה ומקיפה על תחומים מתימטיים אחרים כתורת־הקבוצות.

השפעה זו היתה חזקה ביותר באנליזה, בפרט בתורת הפונקציות הממשיות. במובן היסטורי התפתחה בעצם תורת־הקבוצות מתוך בעיות של תחום זה. כבר לפני שנת 1870 התעוררה לגבי נושאים כגון פיתוח לטור טריגונומטרי (I, 304—301), האינטֶגרל (סֶכם) של פונקציות לא־רציפות (I, 351) וכדומה, השאלה: בכמה נקודות מתוך רֶצף נתון (למשל, מתוך קטע בציר הפסוק) תוכל פונקציה להרשות לה התנהגות „פַּתולוגית”, כגון קפיצה או אי־חסימות, בלא שהדבר יפגע בקיום הביטוי המתימטי הדרוש, כלומר באפשרות הפיתוח לטור טריגונומטרי, במציאות האינטֶגרל וכו׳? כמובן, שאלה זו מענינת בעיקר כשמדובר על אינסוף נקודות יוצאות מן הכלל. כבר לפני קנטור התחילו לגשש בכוון זה ולברר את האפשרויות השונות,[1] אך מחוסר מכשירים שיטתיים לא היתה הצלחה ניכרת לנסיונות אלו. מתוך התעסקותו בטורים הטריגונומטריים הגיע קנטור למושג של „נקודת־הגבול”, שהוא בעל חשיבות מכרעת הן בתורת המספרים הממשיים הן בתורת הקבוצות; ובהמשיכו להציג בעיות כלליות יותר ויותר נוכח לדעת, שיש צורך במכשירים מסוג חדש לחלוטין, שיאפשרו להבחין בין קבוצות אינסופיות שונות של נקודות. לתכלית זו בעיקר התחיל לבסס את תורתו המופשטת, ורק במשך העבודה נוכח לדעת, שמתוכה מתפתח כאן מקצוע חדש ומהפכני, התובע מחקר לשמו.

מאידך, עם הווצר תורת־הקבוצות בקוויה העיקריים, התברר שהקשר בין תורת הקבוצות לבין תורת הפונקציות אינו מצטמצם

1. בראש החוקרים הללו יש לציין את Paul du Bois-Reymond, שניסה גם להגדיר גדלים אינסופיים. השוה:
G. H. HARDY: Orders of infinity. The "Infinitärcalcül" of P. du Bois-Reymond. (*Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, No. 12.) 2nd ed. 1924.

בנקודות־מגע בודדות אלא הוא מהודק הרבה יותר: תורת־הפונקציות מתבססת בחלקים עיקריים על יסודות שבתחום תורת־הקבוצות. בפרט בתורת הפונקציות הממשיות, שהתרחבה במהירות מפתיעה במשך שני הדורות האחרונים, אין כמעט להבחין בין שתי תורות אלו. אחד השימושים המזהירים והמפורסמים ביותר הוא תורת התכולה והמידה בכלל והאינטגרל (כגון של Lebesgue) בפרט; עיין בפרק החמישי, § 5. מנקודת־הראות של תורת־הקבוצות אפשר לציין ככוון־המוצא למושג־האינטגרל החדש (ולאחרים כמותו) שאלה זו: אילו סוגים של קבוצות־נקודות אינסופיות אפשר להוציא מתוך קבוצת כל נקודותיו של קטע כנקודות „לא־נורמליות” (של אי־רציפות הפונקציה וכו׳) בלא למנוע, לגבי פונקציה כזו, יצירת מושג בעל התכונות העיקריות של האינטגרל? בעזרת תורת־הפונקציות שימשה תורת־הקבוצות גם מכשיר יעיל להתפתחותה של תורת־ההסתַברות.

תחום־השימוש השני במעלה לתורת־הקבוצות הוא הגיאומטריה. בחלק זה (בעיקר בפרק הרביעי), וכן בתחילת הפרק השביעי (חלק חמישי) תהיה הזדמנות לנגוע בכמה שאלות הדנות בקבוצות של נקודות בכלל ובקבוצות סדורות כאלה בפרט. בראש יש לציין את מושג הרצף (קוֹנטינוּאוּם) שנותח לראשונה בצורה מניחה את הדעת בעזרת השיטות של תורת הקבוצות. שאלות מסוג זה עמדו במרכז התענינותו הגיאומטרית של קנטור ושל בני דורו. אך מראשית המאה ה 20, ובייחוד בדורנו אנו, התרחב מאד תחום השימוש של תורת־הקבוצות בגיאומטריה, ויש הרואים בשיטותיה את המכשיר החשוב ביותר של הגיאומטריה החדישה מאז הומצאו הגיאומטריה האנליטית והחשבון האינפיניטֶסימלי. זרם חזק אחד נכנס אל הטָפּוֹלוגיה (פרק שביעי), ועל הישגיו הראשונים נמנה בירור כללי וממצה למושג המימד. זרם אחר הפרה את תורת הקווים והמשטחים העקומים, ועוד ידו נטויה לכבוש מדינות נוספות בגיאומטריה[1].

עד כאן הובלטה השפעת התורה החדשה על התפתחותם והרחבתם של המקצועות המתימטיים השונים; מבחינה זו אפשר להוסיף על האנליזה והגיאומטריה גם תחום אריתמיטי טהור: את האלגברה המופשטת, שכבר ביריית יסודותיה ע״י Steinitz מופיעה תורת־הקבוצות כסוללת דרך. אפילו נושאים אחדים של הפיסיקה המתימטית נהנים מתורה זו. אולם בקצהו השני של הבנין המתימטי מצאה תורת־הקבוצות תפקיד מהפכני עוד יותר: בביסוס יסודותיה של המתימטיקה. כאמור בראשית הכרך הראשון של ספר זה, חדל המספר השלם לשמש עוד יסוד ראשוני לבנין המתימטיקה; הוא „עלה” לקומה כמעט

1. לקוראים־מומחים תנתנה דוגמות אחדות: החבורות הרציפות, היצירים הקמורים, שדות הוֶקטורים, המשטחים המינימליים. — השוה גם כמה ספרים ומאמרים המצוטטים ב §2 של הפרק השביעי.

בינונית, אף כי מרכזית, בבנין. שינוי זה תלוי בראש וראשונה בצמיחת תורת־הקבוצות, המשמשת מכשיר שיטתי לניתוחם ולביסוסם של כל מושגיה הראשוניים של המתימטיקה, כגון מספר, העתק, פונקציה, סדר, אינסוף (השוה ב § 2) וכו׳. הראשון שהצליח במגמה זו, עוד לפני יצירת המכשירים החדשים בכלליותם, היה דידקינד (R. Dedekind); השוה בפרט ספרו המצוטט להלן ב § 4 של הפרק הרביעי. אחריו פינו את הדרך קנטור בעצמו, פריגה, ראסל, צרמילו (E. Zermelo) ואחרים, בעוד שמחוללי הלוגיקה החדישה („הסימבולית" או „המתימטית")[1] פעלו בהצלחה לאיחודן המעמיק של תורת־ההגיון והמתימטיקה, בעזרת השיטות הסימבוליות מצד אחד ותורת־הקבוצות מצד שני. חלוץ מבשר להתפתחות זו היה B. Bolzano, אף שלא הצליח בתחום זה כבשאלות אחרות של יסודות המתימטיקה.

תפקידה של תורת־הקבוצות בביסוס המתימטיקה כולה יובלט בְיֶתר שאת בחלק הששי (כרך־ההשלמה), שיוקדש ליסודות המתימטיקה[2]. אך גם בשלשת הפרקים הבאים יש למְצוא חומר מגוון המפיץ אור על סגולתה של תורה זו לנתח ולבנות מושגים בעלי אופי כללי ועיוני ביותר.

פרק שני: הצעד המהפכני. מספרים אינסופיים שונים.

§ 1. הצגת הבעיה היסודית.

בפרק הקודם דובר על קבוצות אינסופיות, וניתנו להן דוגמות שונות. אמנם לא היה בכך מן החידוש המכריע, למרות ההבדל בין האינסוף־בכח והאינסוף־בהחלט, שצויין בדוגמה 4) בעמ׳ 3. שהרי גם בכרך הראשון היינו דנים על כל צעד ושעל בקבוצות אינסופיות: לא רק בחלק השלישי, שבמרכזו עמדו הסדרות האינסופיות והפונקציות שתחומי־הגדרתן אינסופיים הם, כי אם אף לגבי מושג המספר, מן המספרים הטבעיים שבראשית הספר ועד הרֶצף במימד אחד (המספרים הממשיים) ובשני ממדים (המספרים המרוכבים). הלא בצדק טען H. Weyl: המתימטיקה היא המדע של האינסוף. היכן, אפוא, החידוש?

מה שנוגע לפרטים שלמדנום בפרק הקודם, בעיקר בדוגמות ובמשפטים על

1. ביניהם יש לציין G. Boole, E. Schröder, Ch. S. Peirce, G. Peano, ובְיֶתר ייחוד G. Frege ו B. Russell. קדם לכולם לייבניץ, שרמזיו המעמיקים לא זכו לתשומת לב במשך דורות רבים.
השוה: C. I. Lewis: A survey of symbolic logic. Berkeley Cal., 1918. 406 pp.
H. Scholz: Geschichte der Logik. Berlin, 1931. 78 pp.

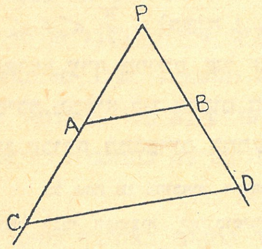
2. יופיע, כנראה, בשנת תשט"ו.

קבוצות בנות־מנייה, יש לשער שבתחילה הופתע הקורא במידה רבה. אבל בודאי הרגיש במשך הזמן „סימני־עייפות". נתקלנו בדוגמות ובמשפטים על „חיבורן" של קבוצות אינסופיות ואף על „כפלן", למשל במשפט 3 (עמ׳ 19) ובקבוצת המספרים הרציונליים המהווה סידרה של סדרות; וביתר עוז בקבוצת כל המספרים האלגבריים. והנה כל הדוגמות והמשפטים הללו המציאו לנו, ללא יוצא מן הכלל, קבוצות שהן אקויולנטיות זו לזו, בהיותן כולן בנות מנייה. במידה שאקויולנטיות זו נראתה כחידוש ברגע הראשון, באותה מידה ודאי התגנב ללב הקורא החשד: שמא כל הקבוצות האינסופיות אקויולנטיות הן זו לזו, ולכן בפרט אקויולנטיות הן לקבוצת כל המספרים הטבעיים?

נחזק חשד זה ע"י שתי דוגמות, השונות לגמרי בטיבן מן הדוגמות שקדמו! אם נסמן ב M את קבוצת הנקודות החלות בקטע (ריוח) מסויים של קו ישר, למשל בקטע בעל הארך a (ס"מ), ונסמן בN קבוצת הנקודות שבקטע גדול פי שנים (בעל האורך $2a$), הרי ברור כי M קבוצה־חלקית־ממש של N, וה„הפרש" $N-M$ לא זו בלבד שהוא אינסופי אלא יש לו אותו ההיקף כמו לקבוצה M עצמה.

נצעד הלאה ונמשיך את הקו הישר שבו נמצא הקטע המקורי (המתאים ל M) שמאלה וימינה עד בלי קץ; כלומר, נסתכל בקו הישר הלא־מוגבל במקומו של קטע סופי, ונסמן את קבוצת כל הנקודות שבקו הישר ב L. במקרה זה לפי ההסתכלות M היא לא רק קבוצה חלקית של L אלא הקבוצה L מקיפה היא פי אינסוף מן הקבוצה M.

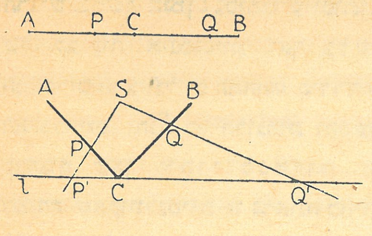
נראה עתה, בדרכים גיאומטריות פשוטות מאד, כי M אקויולנטית לא רק לN אלא אפילו לL.



ציור 4

בציור 4 יתאר $\overline{AB}$ את הקטע שקבוצת־נקודותיו סומנה בM. הקטע שארכו פי שנים (מתאים לN) שורטט למטה ממנו, וקצותיו סומנו ב C ו D. לבסוף קושרו הנקודות A ו C מצד אחד, B ו D מצד שני בקוים ישרים עד נקודת היתוכם P, וכך נוצר משולש PCD. לפי זה יש למערכת כל הקרנים היוצאות מן המרכז P התכונה הבאה: קרן מסויימת או שתחתוך את שני הקטעים $\overline{AB}$ ו $\overline{CD}$ (לרבות את הקרנים PA ו PB שבהן חלות גם הנקודות C ו D) או שלא תחתוך אף אחד מן הקטעים הנ"ל. לכן נקבל התאמה חד־חד־ערכית מתוך הכלל, שלכל נקודה של הקטע $\overline{AB}$ תותאם הנקודה של הקטע $\overline{CD}$ החלה באותה קרן היוצאת מ P. בפרט תותאם אפוא C ל A, ו D ל B. כלל זה יוצר העתק בין הקבוצות M ו N ומאשר אפוא שהן אקויולנטיות, על אף „היקפן" השונה.

באשר לקבוצות M ו־L בדוגמה השניה, יהא הישר l שבתחתית הציור 5 הקו שקבוצת־נקודותיו סומנה ב־L. שברנו קטע איזה שהוא $\overline{AB}$, שיש לתארו כקנה דק, באמצעו C עד כדי יצירת חוד; קבענו את נקודת־האמצע C במקום מסוים (איזה שהוא) של הישר l, ומשם זקפנו את חצאי־הקטע $\overline{CA}$ ו־$\overline{CB}$ בכוון אלכסוני למעלה, שמאלה וימינה, באופן שזוויותיהם עם הישר l תהיינה שוות.



ציור 5

לבסוף סומן האמצע בין הנקודות A ו־B ב־S. לפי זה יש למערכת כל הקרנים היוצאות מן המרכז S התכונה הבאה: קרן מסויימת או שתחתוך אחד מן הקטעים $\overline{AC}$ ו־$\overline{BC}$ (הנקודה C בכלל, אך לא A ו־B) ואז היא תחתוך גם את הישר l; או שהקרן לא תחתוך לא את הקטעים הנ״ל ולא את הישר l. (המקרה הראשון מתמלא לגבי כל קרן היוצאת מ־S בכוון למטה; המקרה השני לגבי כל קרן המקבילה ל־l או היוצאת מ־S למעלה.)

לפי זה נקבל התאמה חד־חד־ערכית בין נקודות הקטע השבור $\overline{ACB}$ (פרט לקצותיו A ו־B) ובין כל נקודות הישר l מתוך הכלל, שלכל נקודה של $\overline{ACB}$ תותאם הנקודה של l החלה באותה הקרן היוצאת מ־S. למשל תותאם P' ל־P, Q' ל־Q, C לעצמה. כלל זה יוצר העתק בין הקבוצות M (של $\overline{AB}$) ו־L ומאשר שהן אקוילנטיות – נגד „הראיה" ההסתכלותית כביכול.

דוגמה אחרת מאותו סוג ממש ניתנת ע״י הפונקציה $y = \tan x$ בריוח הפתוח $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (השוה I, 251, ציור 31). כל נקודה של העקום $y = \tan x$ מתאימה ערך מסויים של y לערך ידוע של x וערכים שונים לערכי x שונים. ולפיכך ממציא לנו העקום העתק בין קבוצת כל המספרים שבריוח הפתוח הנ״ל ובין קבוצת המספרים הממשיים כולם (כנגד כל הנקודות שבציר ה־y).

כל אחת מן ההוכחות הקודמות מהווה דוגמה מפתיעה לכך, שהעקרון „השלם גדול מחלקו" מתבטל לגבי הקבוצות האינסופיות, כאמור לעיל. נשוב, למשל, אל ההוכחה המתוארת בעזרת ציור 4. בהקצותנו על הקטע הארוך $\overline{CD}$ את הקטע הקטן $\overline{AB}$, בעזרת הקו המקביל ל־BD דרך הנקודה A, נקבל קטע חלקי של $\overline{CD}$. אף־על־פי־כן, כפי שהוכחנו, אקויולנטית קבוצת הנקודות שבקטע חלקי זה לקבוצת הנקודות אשר ב־$\overline{CD}$ כולו. לשון אחר: אם במקום ההתאמה בעזרת קרנים מן המרכז P, ניצור התאמה אחרת בעזרת המקבילים ל־BD, תשארנה בחלק השמאלי של $\overline{CD}$ אינסוף נקודות, שאין כנגדן בנות־זוג בקטע $\overline{AB}$. ואולם הרי כשלונו של נסיון מסויים להעתיק קבוצה אל חברתה, אינו מוכיח מאומה על קיומו או אי־קיומו של יחס־אקויולנטיות ביניהן (השוה בסעיף הבא); במקרה שלפנינו, לא תהליך ההתאמה בעזרת מקבילים אלא התהליך הנרמז ע״י הציור 4 הוא המוליכנו אל ההצלחה.

החשד, שעליו דובר בראשית הסעיף הזה, נתחזק בודאי מתוך הדוגמות

הגיאומטריות האחרונות; כלומר, ההשערה שכל שתי קבוצות אינסופיות הן אקויולנטיות זו לזו, ובכללן קביצות שהיקפיהן שונים לכאורה תכלית שוני, מבוססת עתה מכמה בחינות. אם השערה זו תתאמת הרי, קודם כל, אין ערך אמיתי למושג האקויולנטיות, פרט לקבוצות סופיות שלגביהן מושג המספר (המוֹנֶה, הסופי) פשוט הוא למדי ואינו טעון ביסוס ע״י יחס האקויולנטיות. שנית: אם בתחום האינסוף בטלים כל הבדלי גודל, כלומר אם כל שתי קבוצות אינסופיות הן אקויולנטיות, והקושי הוא רק בכך למצוא תמיד העתק המעתיק קבוצה אינסופית אחת אל חברתה – הנה מה הרווחנו בעצם, בהכניסנו את הקבוצות האינסופיות ואת „מספר־איבריהן" האינסופי? הרי זה ענין דומה למושג־האינסוף הפרימיטיבי והמעורפל שרגילים לסמנו בסמל הסתמי ∞, הממלא יחסים טריביאליים כגון $\infty + \infty = \infty$ ו־$\infty \cdot \infty = \infty$! בחלק השלישי (השוה למשל, I, 283–291) השתמשנו בסמל ∞, בהדגישנו שאין כאן „אינסוף בפועל". ודאי אין מושג מעורפל כנ״ל עשוי לבטל את דעתו של גאוס (עמ׳ 3)! היש אפוא להוביל לקברות את מושג הקבוצה האינסופית, או לפחות את המושג של „מספר" האיברים שבתוכה, כמעט בטרם ראה אור היום?

הסעיף הבא יסתור חשד זה על כל ההשערות התלויות בו. הוא יצדיק הכנסתם של מספרים אינסופיים שונים לתוך המתימטיקה ויבסס בדרך זו אחת המהפכות העמוקות והבלתי־צפויות ביותר במדע – במתימטיקה ובפילוסופיה גם יחד. גדלו של הישג זה בולט דוקא אחרי כל הדוגמות המסבירות לכאורה את ההיפך. כמו לגבי כל מהפכה מדעית מעמיקה, התקוממו מכל הצדדים לקנטור שראה חובה לעצמו לעשות את הצעד המכריע. עשרות בשנים נלחמו רוב חבריו, ובראשם L. Kronecker, ביצירות החדשות והתקיפון כחסרות־דיוק או כבטלות. לא אימרתו הנ״ל של גאוס ודעותיהם של מתימטיקנים אחרים בלבד הורמו על נס כעדות נגד האינסוף המוחלט: גם אסמכתות והוכחות של פילוסופים מאריסטו ועד Descartes, Locke ו־Spinoza שימשו עילה נגד תגליותיו של קנטור; ואפילו אמונת הדת הנוצרית נתגיסה נגדו ונתפרשה כמתנגדת לאינסוף המוחלט, מתוך טענה שהאינסוף הוא תחומו של הקב״ה בלבד.

לעומת זאת התגונן קנטור וביסס את כיבושיו בתחום האינסוף בסיסמה: אין לך בן־חורין כמי שעוסק במתימטיקה. הוא פתח את מאמרו המרכזי [1] בכיבוש האינסוף (אמנם בכוון שנדון בו רק בפרק הרביעי) במשפטים האפייניים הבאים:

„בתארי את מחקרי בתורת־הקבוצות הגעתי למקום, שבו מחייב כל המשך את הרחבת המושג של המספר הטבעי מעבר לגבולות שהוצבו לו עד הנה; הרחבה בכוון מסויים שבו טרם חיפש איש, עד כמה שידוע לי."

1. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V. *Mathematische Annalen*, vol. 21 (1883), pp. 545–591.

„אני זקוק בהכרח להרחבה זו של מושג המספר, עד כדי כך שבלעדיה לא יהיה לאל ידי להתקדם אף צעד קטנטן בדרך חמלך של תורת־הקבוצות; עובדה זו תשמש הצדקה, ואם יש צורך: התנצלות, לכך שהנני מכניס לתוך תיאורי רעיונות שהם לכאורה מוזרים. שכן הצעד הנידון הוא הרחבתה (או המשכתה) של סידרת כל המספרים הטבעיים מעבר לאינסוף והלאה; עם הֵראוֹת דבר זה כצעד נועז, הריני להביע לא את התקוה בלבד, אלא אף את האמונה השלמה, שבמשך הזמן תיראה אותה הרחבה כפשוטה, הגונה וטבעית למדי. איני מתעלם כל עיקר מזה, שצעדי אלו סותרים במידת־מה כמה השקפות נפוצות על טיב האינסוף במתימטיקה ודעות של שיגרא על מהותם של הגדלים המספריים."

§ 2. הרֶצף אינו ניתן להימנות.

מטרתנו להצביע על שתי קבוצות אינסופיות שאינן אקויולנטיות. לשם כך נבחר בקבוצת כל המספרים הטבעיים N וברֶצף (קונטינואום) C (השוה I, 234). נתאר את הרצף כקבוצת כל הנקודות שבריוח בין שתי נקודות מסויימות; או לפי ההתאמה בין הנקודות לבין המספרים הממשיים הנוצרת ע״י קו־המספרים (I, 117): כקבוצת כל המספרים בין שני מספרים מסויימים. לשם פשטות נקח 0 ו 1 כשני מספרים אלה. לפנינו הברירה — שאין לה חשיבות לגבי עצם בעיתנו — אם לחשב את קצות הריוח, 0 ו 1, כאיברי הקבוצה. מטעם חיצוני של מה־בכך נכלול 1, אבל לא 0. נמצאנו למדים סוף־סוף, שהרצף C יופיע בהוכחתנו בצורה $0 < x \leq 1$; כל איבר x של C הוא מספר ממשי חיובי שאינו עולה על 1.

שומה עלינו להחליט עוד איך נתאר את המספרים הממשיים x (השוה I, פרק ששי). לכל קורא ידוע מלמודיו בבית־הספר התיאור כשבר עשרוני. בפרט למדנו (ב I, 139—140 ו 213/4), שאפשר לתאר כל מספר ממשי חיובי[1] באופן אחד כשבר עשרוני אינסופי, מלבד תיאוריהם של מספרים ידועים כשברים עשרוניים סופיים. בהיותנו מעונינים בתיאור חד־ערכי, נקבע, שכל איבר של C יופיע לפנינו כשבר עשרוני אינסופי.

הבה נוכיח שהקבוצה C מקיפה היא מן הקבוצה N של המספרים הטבעיים עד כדי כך, שכל נסיון ליצור העתק בין שתיהן יכשל, בהישאר איברי C שאין כנגדם בני־זוג ב N. ננסח את המשפט הנידון בצורה אחרת במקצת, אשר תקיל עלינו לנתח לפי שיטה צרופה וצלולה את רעיונה היסודי של ההוכחה:

משפט־עזר: תהא C_0 קבוצה חלקית של הקבוצה C (ללא כל הנחה

1. העובדה שמשפט זה אינו קיים לגבי המספר 0 (עיין שם), היא היא הממריצה אותנו לוותר על השתייכותו של המספר 0 לקבוצה C. לפי המשפט 5 בעמ׳ 20 לא תשפיע (אי־) השתייכותם של איברים בודדים כ 0 ו 1 לקבוצה C, על תכונותיה של C המתבטאות באקויולנטיות.

מראש לגבי הברירה $C_0 = C$ או $C_0 \neq C$). אם C_0 ניתנת להימנות, יש בתוך C איברים שאינם משתייכים אל C_0; כלומר, C_0 אינה יכולה במקרה זה להכיל את כל איברי C.

באמת שקול משפט־עזר זה כנגד המשפט שעלינו להוכיחו. שהרי ממשפט־העזר נובע „דרך השלילה", שהקבוצה C בעצמה אינה בת־מנייה, כלומר שאין העתק בינה לבין הקבוצה N. (אין חידוש בכך שיש קבוצות חלקיות C_0 של C שהן בנות־מנייה; בפרק הקודם למדנו לדעת רבות מעין אלו, כגון קבוצת כל המספרים הרציונליים בין 0 ל 1.)

אל יטען הקורא: „איזו חשיבות יש למסקנה שחסר ב C_0 חלק מאיבריה של C; הלא יתכן שגם אחרי הוספתם על איברי C_0 תהיה הקבוצה המורחבת בת־מנייה, בהתאם למשפטים 2 ו 3 בעמ׳ 17 ו 19!" טענה זו יסודה באי־הבנת השיטה: הדגש במשפט־העזר הושם בהנחה שתהיה C_0 איזו קבוצה חלקית שהיא של C שתכונתה היחידה: להיות בת־מנייה. המשפט אומר, ששום קבוצה כזו לא תוכל למצות את C בשלמותה.

נוכיח עתה את משפט־העזר לפי שיטה פשוטה וחריפה גם יחד, שהמציאה קנטור בשנת 1892.[1] תהא C_0 איזו קבוצה חלקית בת־מנייה שהיא של C; לאמור: איברי C_0 הם שברים עשרוניים אינסופיים בין 0 ל 1 במספר כדי מנייה. נתאר את C_0 כקבוצה מנויה ממש, ז"א כסידרה, ונכתוב את האיבר ה־k־י של הסידרה בצורה $0.a_{k1}\,a_{k2}\,a_{k3}\ldots$, בהשתמשנו בציונים כפולים; הציון הראשון k מורה על מקום השבר העשרוני בתוך הסידרה, הציון השני על מקום הסיפרה הנידונה (מימין לנקודה) באותו שבר. הסידרה תתחיל אפוא באיברים הבאים:

$$
\begin{array}{l}
0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\cdots \\
0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\cdots \\
0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\cdots \\
0.a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,a_{44}\cdots \\
\;\vdots \quad\;\; \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots
\end{array}
$$

לפי כתיב זה יוצרת הסידרה מעין ריבוע אינסופי המשתרע ימינה ולמטה.

1. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 1 (1892), pp. 75-78. כל מאמריו של קנטור הודפסו מחדש בקובץ Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932; בקיצור G.A. מאמר זה נמצא שם בעמ׳ 278—280. ההוכחה הראשונה ניתנה ע״י קנטור, בדרך מסובכת יותר, בשנת 1873; עיין G.A., עמ׳ 117—118 (השוה גם בעמ׳ 143—145). מתוך הספרות על הוכחת המשפט יצויין עוד
H. Poincaré: 6 Vorträge über ausgewählte Gegerstände aus der Reinen Mathematik und Mathematischen Physik (1910), pp. 45-50.
A. Fraenkel: *Fundamenta Mathematicae*, vol. 25 (1935), pp. 45-50.

ושקדקדו העליון־שמאלי ב־a_{11}. כל אחד מהסמלים a_{kl} (k ו־l שניהם מספרים טבעיים) מסמן סיפרה מתוך המערכת (0, 1, 2, ..., 9) – בהגבלה היחידה שלא כל הספרות של אותו השבר העשרוני, החל ממקום מסויים, תוכלנה להיות 0, הגבלה המוציאה את השברים העשרוניים הסופיים.

נגדיר סידרת־ספרות חדשה $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ ע״י הכלל

$b_k = 1$, אם $a_{kk} \neq 1$; $b_k = 2$, אם $a_{kk} = 1$.

לאמור: אם a_{11} (הסיפרה הראשונה של השבר הראשון) שונה מ 1, יהיה $b_1 = 1$, ואם $a_{11} = 1$, יהיה $b_1 = 2$. כן $b_2 = 1$ אם $a_{22} \neq 1$ ו $b_2 = 2$ אם $a_{22} = 1$. וכך הלאה. עיקר משמעותו של כלל זה הוא: נציין במיוחד את איברי הקרנזול (האלכסון) של הריבוע הנ״ל, החל מן הקדקוד a_{11} (כלומר, את האיברים a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...); כנגד כל אחת מן הספרות האלה a_{kk} נבחר סיפרה b_k השונה מ a_{kk}. לשם פירוט בלבד העדפנו את הספרות 1 ו 2 שבעצם אין להן יתרון על 7 או 8, למשל.

ועתה נגדיר בעזרת הספרות b_k את השבר העשרוני $d = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$. ראשית, d הוא שבר עשרוני אינסופי בין 0 ל 1; שהרי כל הספרות שב d שונות מ 0. שנית, d שונה מכל השברים העשרוניים שבסידרה דלעיל; הלא d שונה מן השבר ה־k־י בסיפרה ה־k־ית על־סמך אי־השויון $b_k \neq a_{kk}$. (למשל, הסיפרה הראשונה של d שונה מן הסיפרה הראשונה בשורה הראשונה של „הריבוע" דלעיל וכו׳.) הואיל והשברים העשרוניים האינסופיים כנ״ל מותאמים באופן חד־חד־ערכי למספרים הממשיים בין 0 ל 1, שונה גם המספר הממשי d מכל המספרים הממשיים שבסידרה הנ״ל; כלומר, השוני אינו בכתיב בלבד אלא במספרים עצמם (השוה I, 140).

בדרך זו הוכחנו את משפט־העזר, ולפיכך הוכחנו גם את טענתנו היסודית. שכן יצאנו מאיזו קבוצה חלקית בת־מנייה שהיא של הרצף C ומצאנו איבר של C שאינו נמנה על הקבוצה החלקית. לאמור:

משפט יסודי: הרצף, ז״א קבוצת כל המספרים (הנקודות) בין 0 ל 1, אינו בר־מנייה.

נוסיף כמה הערות בקשר להוכחת המשפט היסודי:

ברור שבעצם בנינו לא מספר ממשי יחיד d בלבד שאינו נמצא בסידרה המשמשת לנו נקודת־מוצא. אילו בחרנו לשם הגדרת d, במקום הספרות 1 ו 2, בספרות אחרות, היינו מקבלים מספרים ממשיים אחרים; ולא עוד אלא שצורת השימוש ב 1 ו 2 עצמה (העדפת 1 על 2) שרירותית אף היא. כן רשאים אנו להשתמש בכלל מסויים כדי לקבוע, למשל, את אלף הספרות הראשונות של d, בכלל שני כלפי אלף הספרות הבאות וכו׳, ואז תהיה גם הסיפרה 0 בעלת זכויות; שכן עלינו רק להשמר פן תופיע הסיפרה 0 בתיאור העשרוני של d תמיד, החל ממקום מסוים. יוצא שנוכל לבנות לפי זה אפילו אינסוף מספרים

שונים d. ואולם, כאמור לעיל, לפי המבנה ההגיוני של ההוכחה לא איכפת לנו אם ניצור d אחד, או אינסוף מספרים כמותו.

שיטת ההוכחה הנ״ל נקראת שיטת־האלכסון [1] על־פי אופן בחירתן של הספרות b_k, הקובעות את השבר העשרוני d; הלא הספרות ההן נקבעו על־מנת שתהיינה שונות מן הספרות a_{kk} שבאלכסון „הריבוע". לשיטת־אלכסון זו נודע תפקיד מכריע בכמה הוכחות יסודיות בתורת־הקבוצות; עיין בסעיף הבא ובפרק השלישי, § 1. לכן שומה על הקורא לעיין ולהתעמק בהוכחה שלפנינו עד שתיראה בעיניו כפשוטה ושקופה. פשטות ההוכחה מפליאה ביותר, באשר המסקנות הנובעות ממנה הן לא רק עמוקות אלא מהפכניות (§ 4). ואמנם נועד קסם מיוחד לתורת־הקבוצות בגלל זה, שפעמים רבות משמשים בה פשטות וכובד־משקל בעת ובעונה אחת, הגם שאחרות מהוכחותיה קשות מאד. הפשטות מתבטאת בפרט בחוסר חשבונות וטכניקה, בניגוד לרוב ההוכחות בתורת־המספרים, אחותה של תורת־הקבוצות בנוגע לפשטות החומר העומד לבדיקה.

אף־על־פי־כן, בהשוותנו את הוכחת המשפט היסודי להוכחות שב § 3 של הפרק הקודם, מתברר שהרעיון כאן עמוק בהרבה מאשר שם. נברר נא את השורש ההגיוני לכך! שם ניתנו הוכחות לאקויולנטיות בין קבוצות שונות, בעיקר כדי להראות שכולן בנות־מנייה; כאן הוכח ששתי קבוצות, N ו C, אינן אקויולנטיות, כלומר שאי־אפשר לבנות ביניהן העתק. זוהי דוגמה להוכחות של אי־אפשרות, שתפקידן חשוב ופירסומן גדול בכל ענפי המתימטיקה.[2] גלוי וידוע, שהוכחות מסוג זה עמוקות וקשות הן, בדרך כלל, ואין פלא בדבר, שהרי חובה עלינו להראות, שכל נסיון אפשרי להשגת מטרה מסויימת עתיד להכשל.

ואולם רובצת לפתח הטענה: הנה לגבי הקבוצות הסופיות קל מאד להוכיח את אי־האקויולנטיות, קל במידה שוה להוכחת האקויולנטיות; שהרי לשם המטרה האחרונה די בנסיון־התאמה (בין איברי הקבוצות) שהצליח, למטרה הראשונה די בנסיון־התאמה שנכשל! למה אפוא כה גדול ההבדל בין הענין הראשון והאחרון אצל הקבוצות האינסופיות? ואמנם יש כאן גורם, מקרי כביכול אבל מכריע, שעליו רמזנו כבר (עמ׳ 8). גם לגבי הקבוצות הסופיות היינו צריכים לבדוק לכאורה את כל נסיונות־ההתאמה האפשריים (שמספרם סופי אבל בדרך־כלל גדול). ברם קיימת שם עובדה המשחררת אותנו מן הצורך הנ״ל: הלא הוא המשפט שלעומת כל מספר מונה סופי – ולכן לעומת כל קבוצה

1. יש הקוראים לה שיטת־האלכסון של קנטור, להבדיל בינה לבין שיטת־האלכסון של קושי שהוזכרה בעמ׳ 18.

2. נזכיר למשל את המשפט הגדול של פֶּרמה (עמ׳ 6), המשפט של רופיני־אבל באלגברה (I, 190), חילוק המעגל בעזרת סרגל ומחוגה (למשל ל 7 חלקים; I, 199, ופרק חמישי של כרך זה, 4§), תרבוע העיגול והוכחות־טרנסצנדנטיות (I, 181—182).

סופית – קיים מספר סודר אחד ויחיד. (עיין גם בפרק הרביעי.) לכן כל נסיון של התאמה בין איבריה של קבוצות סופיות מביא אותנו בהכרח אל התבנית הסידורית היחידה: ראשית, שנית, ..., n־ית. אין אפוא הבדל עקרוני בין נסיונות שונים, ולפיכך כשלונו של אחד מהם מעיד על כשלון כולם. בניגוד לזה קיימים לעומת כל קבוצה אינסופית מספרים סודרים שונים, אפילו במספר אינסופי; ראינו, למשל, שעלינו לשנות את סדרם הטבעי של המספרים הרציונליים (לפי הגודל) כדי לקבל קבוצה מנוייה, דהיינו: סדורה כפי סדר המספרים הטבעיים על־פי גדלם. משום כך כשלונו של נסיון מסויים להעתקה אינו מוכיח ולא כלום לגבי קבוצות אינסופיות; יש להראות שכל נסיון סופו להכשל, מה שהראינו כלפי קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת הרצף.

§ 3. מסקנות מידיות. קבוצת כל הפונקציות.

יחסי האקויולנטיות בין קבוצות הנקודות שבקטעים שונים, ואף בקו ישר לא־מוגבל, שמצאנום ב § 1, נותנים לפי ה § 2 את המסקנה:

> משפט 1: קבוצת כל הנקודות שבקטע בעל איזה אורך שהוא, וכן קבוצת כל הנקודות שבקו ישר לא־מוגבל, אקויולנטית לרצף C שהוגדר ב § 2. בלשון האנליזה: קבוצת כל המספרים בריוח (a, b), אם a ו b הם אילו מספרים ממשיים שהם, אקויולנטית ל C; וכן קבוצת כל המספרים הממשיים בשלמותם. בפרט: כל אחת מן הקבוצות הנ"ל אינה ניתנת להמנות.

אם נוסיף על הקבוצות הללו את הקבוצות המתקבלות מהן ע"י חיסור קבוצות חלקיות בנות־מנייה, בהתאם למשפט 5 בעמ' 20, יתברר שתחום הקבוצות האקויולנטיות לרצף הוא רב־גווני מאד. אעפ"י־כן האקויולנטיות ביניהן מאפשרת לנו לדבר על הרֶצֶף סתם בה"א הידיעה, אם הכוונה לתכונות שאינן משתנות מתוך העתק. המשפט 1 מלמדנו בבהירות שמעבר לכל תפיסה הסתכלותית, כמה עשיר־איברים הרצף, כלומר כמה גדוש־נקודות הוא הקו הישר בחלקיו הקטנטנים. שהרי קטע בקו ישר, צר כרצוננו, מהווה קבוצת־נקודות אקויולנטית ל C, ואילו קבוצת כל הנקודות הרציונליות בקו הישר, האינסופי בשני כווניו, היא „רק" בת־מנייה – אף כי גם קבוצה זו צפופה לאינסוף בחלקיה הקטנטנים.

עד כמה רב־המשקל הוא המשפט אליו הגענו ב § 2, תוכיח כמאה עדים מסקנה שאינה שייכת לתורת־הקבוצות כל עיקר כי אם לתחום המספרים, והפותרת בעיה שקדמה לתורת־הקבוצות. בפרק הקודם הזכרנו את מיונם של המספרים הממשיים [1] למספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים. כפי שצויין ב I, 180–182, נתגלה

[1] אותו מיון ואותן מסקנות בדיוק קיימות לגבי המספרים המרוכבים. רק כדי להקל על הקורא הצטמצמנו במספרים הממשיים בלבד.

אך לפני כמאה שנה שיש במציאות מספרים טרנסצנדנטיים; ההוכחה היתה קשה במקצת ודרשה הכנות חשבוניות־טכניות, ויחד עם זה לא בררה כל צרכה את השאלה „כמה" מספרים טרנסצנדנטיים יש. לעומת זאת נובע מן הדברים הפשוטים, דברים שבמחשבה יותר מבחשבון, שלמדנום כאן, שתכונתו „הרגילה" כביכול של מספר (ממשי) היא להיות טרנסצנדנטי, ורק במקרה „יוצא מגדר הרגיל" הוא אלגברי. ביתר דיוק:

> משפט 2: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים אקויולנטית לרצף, היינו לקבוצת כל המספרים הממשיים, בו בזמן שקבוצת המספרים האלגבריים ניתנת להימנות.

אין הבדל בדבר באילו גבולות יובנו במשפט זה המספרים השונים (אלגבריים, טרנסצנדנטיים, ממשיים בכלל) – אם בין גבולות מסויימים a ו b אם בלי גבול.

ההוכחה פשוטה מאד. קודם כל יש מספרים טרנסצנדנטיים, ואף אינסוף מספרים כאלה. שהרי הרצף C אינו ניתן להימנות, ואילו קבוצתו החלקית A המכילה את המספרים האלגבריים בלבד, היא בת־מנייה (עמ' 19). לכן לא תוכל להיות ריקה קבוצת המספרים שאינם אלגבריים, כלומר הקבוצה T של המספרים הטרנסצנדנטיים; היא אפילו אינסופית ואינה ניתנת להימנות, כי אחרת היתה הקבוצה $C = A + T$ בת־מנייה גם היא (לפי המשפט 2 בעמ' 17). מאידך, הואיל ו T היא קבוצה אינסופית, אקויולנטית היא לרצף C כולו לפי המשפט 5 בעמ' 20; מש"ל.

אפשר לפרש את המשפט 2 כך: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים T היא כה מקיפה, שבעצם „לא נרחיבנה" בהוסיפנו על איבריה את המספרים האלגבריים; אחרי הרחבה זו תתקבל שוב קבוצה אקויולנטית ל T. קנטור הגיע למסקנה זו – שהיא ההישג הגדול הראשון בתורת־הקבוצות – מתוך צעדיו הראשונים בכוון החדש בשנת 1873, דהיינו בזמן בו לא ידעו המתימטיקנים כמעט מאומה על מספרים טרנסצנדנטיים: בשנה בה הכירו בפעם הראשונה פנים אל פנים מספר טרנסצנדנטי ידוע (e), ותשע שנים לפני התגלית ש π הוא טרנסצנדנטי. אז איפשרה השיטה החדשה, שהתיחסו אליה באי־אמון עוד עשרים שנה נוספות, להכיר את היקף המושג „מספר טרנסצנדנטי".

אם תאמר „אין כאן לפנינו שיטה כיצד לקבוע ממש מספרים טרנסצנדנטיים", יש לומר שטענה זו אינה צודקת להלכה – עם כי למעשה יש בה קורטוב של אמת. במובן עיוני מאפשרת לנו הוכחת המשפט היסודי (עמ' 30) לקבוע באופן חד־ערכי מספר טרנסצנדנטי מסויים, ואף אינסוף מספרים כאלה. לשם זה ניצור ראשית את הסידרה המכילה את כל המספרים האלגבריים, לפי השיטה המבוארת ב I, 179–180, ונתאר את מספרי

סופית – קיים מספר סודר אחד ויחיד. (עיין גם בפרק הרביעי.) לכן כל נסיון של התאמה בין איבריה של קבוצות סופיות מביא אותנו בהכרח אל התבנית הסידורית היחידה: ראשית, שנית,..., n-ית. אין אפוא הבדל עקרוני בין נסיונות שונים, ולפיכך כשלונו של אחד מהם מעיד על כשלון כולם. בניגוד לזה קיימים לעומת כל קבוצה אינסופית מספרים סודרים שונים, אפילו במספר אינסופי; ראינו, למשל, שעלינו לשנות את סדרם הטבעי של המספרים הרציונליים (לפי הגודל) כדי לקבל קבוצה מנוייה, דהיינו: סדורה כפי סדר המספרים הטבעיים על־פי גדלם. משום כך כשלונו של נסיון מסויים להעתקה אינו מוכיח ולא כלום לגבי קבוצות אינסופיות; יש להראות שכל נסיון סופו להכשל, מה שהראינו כלפי קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת הרצף.

§ 3. מסקנות מידיות. קבוצת כל הפונקציות.

יחסי האקויולנטיות בין קבוצות הנקודות שבקטעים שונים, ואף בקו ישר לא־מוגבל, שמצאנום ב § 1, נותנים לפי ה § 2 את המסקנה:

משפט 1: קבוצת כל הנקודות שבקטע בעל איזה אורך שהוא, וכן קבוצת כל הנקודות שבקו ישר לא־מוגבל, אקויולנטית לרצף C שהוגדר ב § 2. בלשון האנליזה: קבוצת כל המספרים בריוח (a, b), אם a ו b הם אילו מספרים ממשיים שהם, אקויולנטית ל C; וכן קבוצת כל המספרים הממשיים בשלמותם. בפרט: כל אחת מן הקבוצות הנ"ל אינה ניתנת להמנות.

אם נוסיף על הקבוצות הללו את הקבוצות המתקבלות מהן ע"י חיסור קבוצות חלקיות בנות־מנייה, בהתאם למשפט 5 בעמ' 20, יתברר שתחום הקבוצות האקויולנטיות לרצף הוא רב־גווני מאד. אעפ"י־כן האקויולנטיות ביניהן מאפשרת לנו לדבר על הרֶצֶף סתם בה"א הידיעה, אם הכוונה לתכונות שאינן משתנות מתוך העתק. המשפט 1 מלמדנו בבהירות שמעבר לכל תפיסה הסתכלותית, כמה עשיר־איברים הרצף, כלומר כמה גדוש־נקודות הוא הקו הישר בחלקיו הקטנטנים. שהרי קטע בקו ישר, צר כרצוננו, מהווה קבוצת־נקודות אקויולנטית ל C, ואילו קבוצת כל הנקודות הרציונליות בקו הישר, האינסופי בשני כווניו, היא „רק" בת־מנייה – אף כי גם קבוצה זו צפופה לאינסוף בחלקיה הקטנטנים.

עד כמה רב־המשקל הוא המשפט אליו הגענו ב § 2, תוכיח כמאה עדים מסקנה שאינה שייכת לתורת־הקבוצות כל עיקר כי אם לתחום המספרים, והפותרת בעיה שקדמה לתורת־הקבוצות. בפרק הקודם הזכרנו את מיונם של המספרים הממשיים [1] למספרים אלגֶבריים וטרַנסצֶנדנטיים. כפי שצויין ב I, 180–182, נתגלה

1. אותו מיון ואותן מסקנות בדיוק קיימות לגבי המספרים המרוכבים. רק כדי להקל על הקורא הצטמצמנו במספרים הממשיים בלבד.

אך לפני כמאה שנה שיש במציאות מספרים טרנסצנדנטיים; ההוכחה היתה קשה במקצת ודרשה הכנות חשבוניות־טכניות, ויחד עם זה לא בירֵרה כל צרכה את השאלה „כמה" מספרים טרנסצנדנטיים יש. לעומת זאת נובע מן הדברים הפשוטים, דברים שבמחשבה יותר מבחשבון, שלמדנום כאן, שתכונתו „הרגילה" כביכול של מספר (ממשי) היא להיות טרנסצנדנטי, ורק במקרה „יוצא מגדר הרגיל" הוא אלגברי. ביתר דיוק:

משפט 2: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים אקויולנטית לרצף, היינו לקבוצת כל המספרים הממשיים, בו בזמן שקבוצת המספרים האלגבריים ניתנת להימנות.

אין הבדל בדבר באילו גבולות יובנו במשפט זה המספרים השונים (אלגבריים, טרנסצנדנטיים, ממשיים בכלל) – אם בין גבולות מסויימים a ו b אם בלי גבול.

ההוכחה פשוטה מאד. קודם כל יש מספרים טרנסצנדנטיים, ואף אינסוף מספרים כאלה. שהרי הרצף C אינו ניתן להימנות, ואילו קבוצתו החלקית A המכילה את המספרים האלגבריים בלבד, היא בת־מנייה (עמ' 19). לכן לא תוכל להיות ריקה קבוצת המספרים שאינם אלגבריים, כלומר הקבוצה T של המספרים הטרנסצנדנטיים; היא אפילו אינסופית ואינה ניתנת להימנות, כי אחרת היתה הקבוצה $C = A + T$ בת־מנייה גם היא (לפי המשפט 2 בעמ' 17). מאידך, הואיל ו T היא קבוצה אינסופית, אקויולנטית היא לרצף C כולו לפי המשפט 5 בעמ' 20; מש"ל.

אפשר לפרש את המשפט 2 כך: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים T היא כה מקיפה, שבעצם „לא נרחיבנה" בהוסיפנו על איבריה את המספרים האלגבריים; אחרי הרחבה זו תתקבל שוב קבוצה אקויולנטית ל T. קנטור הגיע למסקנה זו – שהיא ההישג הגדול הראשון בתורת־הקבוצות – מתוך צעדיו הראשונים בכוון החדש בשנת 1873, דהיינו בזמן בו לא ידעו המתימטיקנים כמעט מאומה על מספרים טרנסצנדנטיים: בשנה בה הכירו בפעם הראשונה פנים אל פנים מספר טרנסצנדנטי ידוע (e), ותשע שנים לפני התגלית ש π הוא טרנסצנדנטי. אז איפשרה השיטה החדשה, שהתיחסו אליה באי־אמון עוד עשרים שנה נוספות, להכיר את היקף המושג „מספר טרנסצנדנטי".

אם תאמר „אין כאן לפנינו שיטה כיצד לקבוע ממש מספרים טרנסצנדנטיים", יש לומר שטענה זו אינה צודקת להלכה – עם כי למעשה יש בה קורטוב של אמת. במובן עיוני מאפשרת לנו הוכחת המשפט היסודי (עמ' 30 לקבוע באופן חד־ערכי מספר טרנסצנדנטי מסויים, ואף אינסוף מספרים כאלה. לשם זה ניצור ראשית את הסידרה המכילה את כל המספרים האלגבריים, לפי השיטה המבוארת ב I, 179–180, ונתאר את מספרי

הסידרה כשברים עשרוניים; אחרי זה ניצור כאוות נפשנו, לפי שיטת האלכסון, מספרים d השונים מכל איברי הסידרה, כלומר מספרים טרנסצנדנטיים. אי־המעשיות שבתהליך זה תלויה בהמשכו של השבר העשרוני ל־d — שכן אם נפסיק את המשך השבר באיזה מקום שהוא ישאר מספר, שהוא אפילו רציונלי (שבר עשרוני סופי). אכן טענה זו, המסתמכת על אי־האפשרות „לגמור" למעשה את השבר העשרוני, אינה בת משקל; שכן לא כתיבת הספרות הבודדות קובעת את השבר העשרוני אלא החוק שלפיו הוא בנוי, והרי יש ויש לפנינו חוק מוחלט.

עד כאן למדנו לדעת שני סוגי קבוצות אינסופיות שאינן אקויולנטיות: הקבוצות הניתנות להימנות והקבוצות האקויולנטיות לרצף. נבנה עתה קבוצה אינסופית מסוג שלישי, שאינה אקויולנטית לאחת מן הסוגים הקודמים. ביֶתר דיוק: קבוצה מקיפה עד כדי כך שאי אפשר להעתיקה אל הרצף, אף כי יש לה קבוצות חלקיות האקויולנטיות לרצף. נקח כאן את הרצף כריוח „הסגור" מ־0 עד 1, לרבות קצותיו.

נסמן ב־F את קבוצת כל הפונקציות החד־ערכיות $f(x)$ של הגורם (המשתנה) הממשי x, במובן שהגדרנוהו ב־I, 244—245. הכוונה אפוא לאו דוקא לפונקציות המוגדרות ע"י נוסחה חשבונית אלא למה שקראנו „פונקציה רצונית או שרירותית" (I, 258). לשם נוחיות נגביל את תחום־ההשתנות של הפונקציות, כלומר את התחום שבו ישתנה הגורם x, לריוח $1 \geq x \geq 0$. כל פונקציה $f(x)$ מוגדרת ברצף זה, ושתי פונקציות $f_1(x)$ ו־$f_2(x)$ נחשבות כשונות (לא־שוות) אם יש לפחות ערך אחד $x=a$ בריוח הנ"ל כך שהמספר $f_2(a)$ שונה מ־$f_1(a)$.

קודם כל קיימות קבוצות חלקיות של F האקויולנטיות לרצף C. הפשוטה ביניהן מכילה את כל הפונקציות הקבועות (עיין I, 245) בעלות הצורה $f(x)=c$, שבהן הקבוע c לקוח גם הוא מן הריוח מ־0 עד 1. ניצור העתק בין קבוצה חלקית זו לבין הרצף, בהתאימנו את הפונקציה $f(x)=c$ למספר c, כנגד כל ערך של c.

כדי להוכיח, שאין העתק בין C לקבוצה F בשלמותה, נשתמש שוב בשיטת האלכסון[1]. תהא אפוא F_0 קבוצה חלקית של F, כלומר קבוצת פונקציות מן הסוג הנ"ל, האקויולנטית אל C (ז"א $C \sim F_0$); מלבד זה לא נדרוש כלום מ־F_0. לפיכך יש העתקים בין F_0 ל־C, ומתוכם נבחר העתק מסויים Ψ, שישאר קבוע מעתה. עלינו לבנות על־סמך הנחה זו פונקציה ידועה מתוך F — נסמנה ב־$\varphi(x)$ — שאינה נמצאת בקבוצה החלקית F_0.

1. השוה מאמרו של קנטור משנת 1892 המצוטט בעמ' 29.

קיום הפונקציה $\varphi(x)$ מראה כי $F \neq F_0$, כלומר שקבוצה חלקית של F האקויולנטית ל־C לא תוכל להתלכד עם הקבוצה F בעצמה. לשון אחר: F בעצמה אינה אקויולנטית לרצף.

אף־על־פי שבנין פונקציה $\varphi(x)$ כנ"ל תובע התאמצות מסוימת, לא נדחנו אל המלואים, בשימנו לב לחשיבותו של צעד זה.

נסמן את איברי C ב־z; קיים אפוא $1 \geq z \geq 0$. לפי זה ועל־סמך ההעתק Ψ בין C ו־F_0 נסמן את הפונקציה מתוך F_0, המותאמת למספר מסויים z מתוך C, ב־$f_z(x)$. $f_{\frac{1}{2}}(x)$, למשל, היא הפונקציה המותאמת למספר $z=\frac{1}{2}$.

הבה נבנה פונקציה $\chi(x)$ על־פי הכלל הבא: כנגד כל ערך $x=z$ מתוך הריוח מ־0 עד 1 יהי $\chi(z)$ הערך המתקבל ע"י הפונקציה $f_z(x)$ במקום $x=z$. אם, למשל, נחפש את הערך $\chi_{\frac{1}{2}}$, עלינו למצוא את הפונקציה $f_{\frac{1}{2}}(x)$ מתוך F_0 המותאמת לאיבר $\frac{1}{2}$ של C, ולקחת את ערכה $f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ במקום $x=\frac{1}{2}$. הגדרתה הכללית של $\chi(x)$ היא אפוא: $\chi(x)=f_x(x)$. בכתיב זה בולטת שיטת האלכסון; שהרי $f_x(x)$ אנלוגי הוא (בתחום הרצף, תחת קבוצת המספרים הטבעיים) למספר המסומן בעמ' 30 ב־a_{kk}, ז"א לסיפרה ה־k־ית של השבר העשרוני ה־k־י. יש לומר: $f_x(x)$ הוא הערך האלכסוני לעומת המספר הממשי x.

לבסוף תהא $\varphi(x)$ איזו פונקציה שהיא (מתוך F) השונה מ־$\chi(x)$ אצל כל ערך של x; למשל, $\varphi(x)=\chi(x)+1$. מטרתנו היא להוכיח, שהפונקציה $\varphi(x)$ אינה איבר של F_0, ז"א אינה מופיעה בין הפונקציות שבקבוצה חלקית זו. מכיון ש־$\varphi(x)$ נמצאת על־כל־פנים בקבוצה השלמה F, נשיג בדרך זו את מבוקשנו.

כדי להראות כי $\varphi(x)$ אינה איבר של F_0, יעבור u על המספרים בין 0 ל 1 (לרבות הקצוות); לפי זה יסמן $f_u(x)$ כל פונקציה שהיא מתוך F_0. די להראות ש־$\varphi(x)$ שונה מ־$f_u(x)$; לאמור: שלפחות במקום מסויים אחד שונות שתי פונקציות אלו. הבה נבחר במקום המיוחד $x=u$! ערכה של $f_u(x)$ שם הוא $f_u(u)$, ואילו ערכה של $\varphi(x)$ שם הוא:

$$\varphi(u)=\chi(u)+1=f_u(u)+1 \neq f_u(u).$$

$\varphi(x)$ שונה אפוא מכל פונקציה שבתוך F_0, מש"ל.

בולט הדמיון בין צעד אחרון זה לבין הצעד המכריע בהוכחת המשפט היסודי של §2: שם היתה זאת החלפת הספרות האלכסוניות a_{kk} בספרות אחרות b_k, הגורמת לכך שהשבר העשרוני d שונה מכל השברים שבסידרה הנתונה.

משפט 3: הקבוצה F, המכילה את כל הפונקציות הממשיות של גורם ממשי (בריוח מ־0 עד 1), והמקיפה קבוצות חלקיות האקויולנטיות לרֶצף, אינה אקויולנטית בעצמה לרצף.

תרגילים ל §§ 2 ו 3.

1) פיתוחם של המספרים הממשיים לשברים עשרוניים מתבסס על העדפת המספר היסודי 10; ואולם אפשר לפתחם לשברים שיטתיים על פי כל מספר יסודי טבעי גדול מ 1, ומטעמים עקרוניים מעדיפים במתימטיקה העיונית את המספר היסודי 2 (I, 2 ו 141). איך אפשר להוכיח את המשפט היסודי (עמ' 30) על־סמך תיאור המספרים בין 0 ו 1 כשברים „דואליים" (לפי המספר היסודי 2)

a) בדרך ישרה?

b) מתוך שמוש במשפט 5 בעמ' 20?

2) הוכח, שקבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים אינה בת־מנייה! (ההוכחה דומה להוכחת המשפט היסודי, אבל קלה ממנה קצת. מאידך אפשר לתאר את ההוכחה כפירוט להוכחת המשפט 3 מ § 3.)

3) תן כלל חשבוני (למשל, בעזרת פונקציה רציונלית) המעתיק

a) את הריוח (a, b) אל הריוח (c, d) אם a, b, c, d מסמנים מספרים ממשיים ואם $a < b$, $c < d$!

b) את הריוח $(0, a)$ אל „הריוח" $x > a$, כלומר אל קבוצת כל המספרים הגדולים מן המספר החיובי a!

4) הוכח, שקבוצת כל הנקודות שבקו־מעגל היא אקויולנטית לרצף! (על־סמך הגדרה מתאימה קל להרחיב זאת לקו עקום כללי יותר.)

5) איך תשתנה הוכחת המשפט 3 מ § 3, אם תחום־הגדרתן של הפונקציות יהיה מערכת כל המספרים הממשיים?

6) נסה להכליל את הוכחת המשפט 3 באופן שתיראה אי־האקויולנטיות בין קבוצת הפונקציות F לבין איזו קבוצה חלקית שהיא של הרצף C!

§ 4. המספרים המונים האינסופיים (עֻצמות). העצמות $\aleph_0$, א, ז.

מבחן חשוב לערכם של מושגים ומסקנות במתימטיקה (וכן במדעי הטבע) נתאמת לגבי האקויולנטיות והמשפט היסודי מ § 2: חשיבותם גדולה לא רק לשם המטרה שדחפתנו מראש, אלא גם לשם מטרות אחרות, שלא צפינו להן בהמשך זה: כגון מציאות המספרים הטרַנסצנדנטיים.

ואולם להלן עלינו להבליט את חשיבות המשפט היסודי לגבי תורת־הקבוצות עצמה. באמת כשמו כן הוא: יסוד לכל התורה הזאת, באפשרוֹ ובדרשוֹ להכניס מספרים אינסופיים־בהחלט, ולא רק אינסופיים־בכח, אל תוך המתימטיקה.

ידוע איך המספרים המונים הסופיים מופיעים במתימטיקה, כל אחד כבא־כחה של מערכת קבוצות אקויולנטיות; עיין ב I, 4–9. (כבר D. Hume הצביע על שיטה זו.) לעומת זאת, לולא היינו מוצאים קבוצות אינסופיות לא־אקויולנטיות זו לזו, כי אז לא היה מקום להכניס מספרים אינסופיים

שונים; היינו צריכים להסתפק במושג מטושטש „אינסוף" כמספר משותף לכל הקבוצות האינסופיות. בניגוד לכך מלמדנו המשפט היסודי, שמבחינה עקרונית דומה המצב בתחום האינסוף למצב שבתחום הסופי: יש מקום וצורך במספרים שונים. בראשית הפרק הבא נראה, שדמיון זה קיים לא בעקרון בלבד כי אם גם למעשה: לא די להבדיל בין שנים או שלשה מספרים אינסופיים שונים, אלא הם נמצאים במספר אינסופי — ואפילו בכמות „העולה" על כמות האוצר של המספרים הסופיים 1, 2, 3, ...

נבסס עתה את יצירת המושג של מספר מונה על־סופי (או אינסופי) בדרך שיטתית, מתוך קיצור בתיאור הדברים המבוארים כבר בראשית הכרך הראשון.

ניחס באופן חד־ערכי לכל קבוצה, סופית או אינסופית, מושג וסמל הנקרא המספר המונה (הקַרדינלי) של הקבוצה, בתנאי שמספריהן המונים של קבוצות שונות שווים אם, ורק אם, הקבוצות אקויולנטיות ביניהן. האמרה שלשתי הקבוצות S ו T יש אותו המספר המונה, היא אפוא אך בטוי אחר לטענה $S \sim T$.

כל הקבוצות מתחלקות לפי זה למחלקות שונות באופן שכל הקבוצות הנמצאות במחלקה אחת אקויולנטיות הן זו לזו, ולעולם לא תהיינה אקויולנטיות שתי קבוצות הנמצאות במחלקות שונות. (למחלקות יש אפוא התכונה, ששתי מחלקות הן או זרות או מתלכדות.) לכל מחלקה מותאם מספר מונה מסויים באופן חד־חד־ערכי, הוא המספר המונה המשותף לכל הקבוצות שבמחלקה. זהו יתרונן של המחלקות על הקבוצות בעצמן, שלהן מותאם המספר המונה רק באופן חד־ערכי ולא חד־חד־ערכי. הכלל נשאר בתקפו גם לגבי הקבוצה הריקה 0 (קבוצת־האפס); היא הקבוצה היחידה שבמחלקתה, ומותאם לה המספר המונה 0 (אפס). (אין סכנה לערבוב הקבוצה והמספר.)

תהליך זה ליצירת מושג המספר המונה הוא דוגמה — ואף הדוגמה הקלַסית בה"א הידיעה — לתהליך ההגדרה דרך־הפשטה, ובפרט דוגמה ליצירת טיפוס בעזרת יחס־אקויוָלנטיות (במובן הרחב); עיין ב I, 6–9. התהליך שקוף מלכתחילה לגבי הקבוצות הסופיות ומספריהן המונים 0, 1, 2, ...; לגבי הקבוצות האינסופיות מקבל התהליך משמעות לא־טריביאלית אך בזכות המשפט היסודי, המבטיח קיומן של קבוצות אינסופיות שאינן אקויולנטיות. השאלה המעורפלת לכאורה, אם בעולם המספרים האינסופיים יש מקום להבדלה ולהתחמה, הועמדה בדרך זו על השאלה הברורה לחלוטין של אקויולנטיות בין קבוצות (אינסופיות).

נכנה את המספר המונה של קבוצה אינסופית בשם מספר מונה

על־סופי (טרנספיניטי)[1], וגם בשם עָצמה. הוספת שם חדש כמו „עצמה" מתבארת בעיקר מתוך סיבות היסטוריות, שעליהן נייחד את הדיבור ב § 1 של הפרק השלישי ובסוף הפרק הרביעי: המספרים המונים האינסופיים מראים מראש תכונות מוזרות במקצת שבגללן היססו המתימטיקנים מֵהעניק להם את תאר־הכבוד „מספר". להלן נעדיף את המונח „עצמה" מטעמי פשטות בלבד. העצמה באה לענות, בדיוק כמו המספר המונה הסופי, על השאלה: כמה איברים יש בקבוצה (אינסופית) נתונה?

הבדל ראשון בין העצמות לבין המספרים המונים הסופיים ידוע לנו מכבר והוא: לשתי קבוצות סופיות, שאחת מהן מהווה חלק אמיתי (קבוצה־חלקית־ממש) של חברתה, יש מספרים שונים, ואילו אצל הקבוצות האינסופיות יש ועצמתה של קבוצה־חלקית־ממש של S שוה לעצמת S. לשון אחר: אם בקבוצה S יש איברים נוספים על איברי T, הרי מעיד הדבר על אי־שויון בין המספרים המונים המתאימים רק בתחום הקבוצות הסופיות. ניצלנו הבדל זה אפילו להגדרת המושג „קבוצה אינ(על)סופית".

נשארה עוד שאלת סימונם של המספרים החדשים (העצמות). מלבד השימוש בספרות לשם סימון מספרים סופיים קבועים, השתלטו המתימטיקנים במשך 400 השנים האחרונות יותר ויותר על הא"בים של רוב השפות האירופיות וגם הכניסו כמה סמלים מיוחדים. לכן התקשה קנטור, בגשתו אל המספרים האינסופיים, במציאת סמלים חדשים מתאימים. הוא החליט – אולי בזכרו את מוצאו היהודי של אביו – לנצל את הא"ב העברי; בהסתפקו באות אחת בצירוף „ציונים", בחר באות א. לפי זה יסמן $\aleph_0$ את העצמה „הקטנה ביותר"; בהתאם למשפט 4 בעמ' 20 נראה בראשית הפרק הבא, שזו היא עצמת הקבוצות הניתנות להמנות. לפיכך מסמן $\aleph_0$, למשל, את עצמתה של קבוצת כל המספרים הטבעיים.

טבעי יהיה לסמן את העצמה „העוקבת" את $\aleph_0$ ב $\aleph_1$, אחריה תבוא העצמה $\aleph_2$, וכן הלאה. ואולם, ראשית, מובן המלים „וכן הלאה" אינו ברור כל צרכו; מי יעיז לקבע מראש אם הציונים הסופיים $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ יספיקו לגבי $\aleph_n$, נוכח היקפו הענקי של תחום המספרים האינסופיים? (באמת אינם מספיקים!) וגדולה מזו: מהיכן לנו בטחון שלעומת כל עצמה $\aleph_n$ קיימת עצמה „עוקבת" $\aleph_{n+1}$ הבאה „מיד אחרי" $\aleph_n$?[2] קשיים אלה מונעים מאתנו קביעת סימון שיטתי אפילו לעצמות הפשוטות ביותר שכבר עמדנו עליהן, כגון עצמת

1. מן המלה הרומית trans-finitus שמובנה: על־סופי. הביטויים מספר „עלסופי" ו„אינסופי" משמשים בערבוביה.

2. בשתי הבעיות הללו נגע בפרק הרביעי. — נשתמש תמיד בביטוי „עוקב את —" במובן של „נמצא אחרי — וסמוך לו". בלא תנאי הסמיכות נאמר „עוקב ל—", בעיקר בפרק הרביעי.

הרֶצף ועצמת הקבוצה שאיבריה הן כל הפונקציות. בלית ברירה נסמן את עצמת הרֶצף ב א, ללא כל ציון, ואת עצמתה של קבוצת כל הפונקציות באות הגוטית $\mathfrak{f}$.

לבסוף עלינו לנגוע בקיצור בקשיים הפילוסופיים הקשורים ביצירת המושג של המספר המונה; לאמור, ננתח את הדרך בה הכנסנו מושג זה לאור תורת־ההגדרה. כנינו בשם „מספר מונה" את „המשותף לכל הקבוצות האקויולנטיות ביניהן"; לשון אחר: המספר המונה של S מייצג את מערכת כל התכונות של S שקבוצה זו שותפת בהן עם כל הקבוצות האקויולנטיות לה, ולא עם שום קבוצה לא־אקויולנטית ל S. ברם אין זו הגדרה בנויה על כללי־ההגדרה המסורתיים, ביחוד אין כאן „סוג עכן"[1]. ואם תמצא לומר, שהביאור „המשותף לכל הקבוצות וכו'" כשר כהגדרה פילוסופית, על־כל־פנים המתימטיקן אינו רגיל להסתפק בהגדרה ממין זה. בוודאי לא נשפר את המצב בהסתמכנו על הגדרתו האחרונה (1895) של קנטור האומרת: „בשם עצמה או מספר מונה של S נקרא למושג הכולל הנוצר בעזרת כח־מחשבתנו הפעיל מן הקבוצה S תוך התעלמות ממהות איבריה השונים ומן הסדר בו הם ניתנים."

אמנם אין לפנינו קושי בודד, אפייני למושג המספר. ראינו ב I, 9 שקיים מצב דומה לגבי כל הגדרה של „טיפוס" (בעזרת יחס מתאים), והפילוסופים העוסקים בתורת־ההגדרה הרבו בזמן האחרון לעיין בהגדרות מטיב זה או דומה לו, בהכניסם מונחים שונים כגון: הגדרה פונקציונלית, הגדרה דרך הפשטה, הגדרה שימושית, הגדרה של בנין, וכו'.[2] נציין כאן רק זאת: תחת באר־את המונח שיש להגדירו (definiendum) בעזרת ביטוי ידוע מראש (definiens), שאפשר להכניסו בכל מקום תחת המושג החדש (כך שבעצם נוכל ל„חלץ" שוב את המונח החדש, אם נרצה) — מבארים בהגדרות חדישות אלו כל שימוש במושג שרוצים להכניסו; כלומר, מפרשים את הבטויים או המשפטים שבהם יוכל להופיע המושג החדש. על תהליך זה מורה השם „הגדרה שימושית", בניגוד ל„הגדרה מושלמת".[3] נשוב לשאלות אלה ב § 1 של הפרק הששי.

1. genus proximum. עיין לעיל עמ' 10, וגם I, 9.

2. כבר אצל לייבניץ יש רמז בכוון זה. מלבד ספרו של Dubislav המצוטט ב I, 6 נציין את הספרים והמאמרים הבאים:

ה. וייל: פילוסופיה של המתימטיקה. תורגם מגרמנית ע"י דוד מאוחד. ירושלים תש"ה. 82 עמ'.

R. Carnap: Abriss der Logistik. Wien, 1929. 114 pp.

E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin, 1910. English edition: Chicago, 1923.

E. Meyerson: Du cheminement de la pensée. Paris, 1931. (3 כרכים)

J. G. P. Nicod: Mathematical logic and the foundations of mathematics. *The Encyclopaedia Brittanica*, 12th edition, vol. 31, pp. 874–876. 1922.

B. Russell: The principles of mathematics. Vol. I (יותר לא הופיע). Cambridge, 1903. 534 pp. New ed., London, 1951.

B. Russell: Introduction to mathematical philosophy. London & New York, 1919. 206 pp. (הופיע בכמה מהדורות, למשל: לונדון 1950, ותורגם לשפות רבות.)

דיון מעמיק הרבה יותר בבעיותיהן של הגדרות אלו, לפי שיטת הלוגיקה הסימבולית, נמצא בחוברת:

H. Scholz und H. Schweitzer: Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Leipzig, 1935. 108 pp.

3. יצויין שיש סוג אחר של הגדרות, בעלות חשיבות מכרעת במתימטיקה, שגם הן אינן מאפשרות לחַלץ את המונח החדש ולהעמידו על מונחים קודמים: הן ההגדרות דרך אינדוקציה („שלימה" או „על־סופית"); השוה להלן בפרק הרביעי, וכן ב I, 17.

למרות דברי־הרגעה אלו אין להתעלם מן העובדה שכאן עומד לפנינו קושי אמיתי, קושי שהוא אפייני למושג המספר דוקא (לא האינסופי בלבד). קיימת שיטה שהומצאה ע״י G. Frege ו B. Russell, המסלקת מבחינה עקרונית את הקשיים האמורים בכל מקרה של הגדרת טיפוס בעזרת יחס (תכונה): מגדירים את הטיפוס כמערכת כל אותם העצמים (מן הסוג הנידון) שיש להם התכונה הנידונה. זוהי צורת־הגדרה כשרה אף במובן המסורתי. לפי זה יסמן, למשל, „כוון" (במישור) את מערכת כל הישרים במישור המקבילים לקו ישר (קרן) מסויים; „צורה (של משולש)" תוגדר כמערכת כל המשולשים הדומים למשולש מסויים (למשל, למשולש ישר־זוית ושווה־שוקיים); וכן הלאה. לפי זה עלינו להגדיר „מספר מונה (עָצמה)" כמערכת כל הקבוצות האקויולנטיות לקבוצה מסויימת; למשל 5 כמערכת כל הקבוצות האקויולנטיות לקבוצת האצבעות של ידך הימנית, $\aleph_0$ כמערכת כל הקבוצות האקויולנטיות לקבוצת כל המספרים הטבעיים.

אל יטען הקורא: הרי לא לכך מתכוון אני בדברי על מספר. הגדרה — פירושה פעולה הקובעת מין סימון, לפי שרירות־לבו של המגדיר כביכול, ולא פעולה המסתמכת על מציאות חיצונית או פסיכולוגית והבאה לבאר אותה. אם ההגדרה דלעיל מסלקת את הקשיים ומועילה למטרתנו, אין לנו אלא לקבלה בסבר פנים יפות. אבל דא עקא: היא מסלקת את הקשיים בסַבכה אותנו בקשיים חדשים, חמורים אולי מן הראשונים. בתחילת המאה ה־20 נוכחו רסל ואחרים לדעת שהמושג הכללי של „מערכת" או „קבוצה", וכן מושג כה מקיף כ„מערכת כל הקבוצות האקויולנטיות לקבוצה נתונה", גוררים אחריהם בהכרח סתירות הגיוניות (אנטינומיות) מן הסוג הידוע כבר לסופיסטים היוונים. רק בעזרת ריפורמה מהפכנית בשיטות תורת־ההגיון, כמו שניסה רסל בתורת־הטיפוסים שלו, אפשר להציל ולהצדיק מושגים כלליים, מקיפים יותר מדי, מעין אלה; בחלק הששי נרחיב את הדיבור על כך.

אכן, על אף כל זאת אין צורך להתיאש למראה הקשיים הכרוכים במושגי המספר המונה והעָצמה, וכמו־כן גם במושג המספר הסודר (פרק רביעי). המצב היה מחוסר־תקוה כמעט, אילו היינו חייבים להוציא משפטים בעלי אופי פילוסופי (מיטאפיסי) על המספרים. ואולם המתימטיקן אינו מעונין ב„מהותם" של המספרים יותר משמעונין המשַחק בשחמט „במהות" גלמי המִשחק. המשחק צריך לדעת את כללי התנועות של כל גולם וגולם; וכן עוסק המתימטיקן במספרים רק כדי להשוותם ולחשב בהם! ואמנם אין כל קושי בתפקיד היסודי של השוואת מספרים מונים, כלומר בתפקיד לקבוע אם שני מספרים שווים הם או שונים; הרי הגדרנו שהדבר מתלכד עם השאלה אם שתי קבוצות, בעלות המספרים הנידונים, אקויולנטיות הן זו לזו אם לאו. בפרק הבא נראה איך השוואת מספרים שונים לפי גדלם מצד אחד ופעולות־חשבון במספרים מצד שני מוגדרות אף הן בעזרת יחסי־אקויולנטיות בין קבוצות מתאימות. לפיכך אפשר להעמיד, אם לא את המספרים המונים עצמם, הרי לפחות את כל מה שמענין אותנו לגבי המספרים המונים, על יחס האקויולנטיות בין קבוצות; ולא עוד אלא שבעצם אפשר לוותר לגמרי על השימוש במספרים ובעצמות ולטפל תחתם בקבוצות בלבד. אמנם דרך זו תגרום לאי־נוחיות, שקשה לעמוד בה, בביטוי המשפטים ובתיאור ההוכחות. אבל הואיל ויש אפשרות עקרונית לכך, אין צורך אף למדקדק כחוט השערה להמנע מֵאחוז בדרך הפורמלית בה פתחנו בענין זה, והוא: להתאים באופן חד־ערכי לכל קבוצה סמל חסר־תוכן, הנקרא „המספר המונה של הקבוצה", בתנאי שלקבוצות אקויולנטיות, ורק להן, יותאם אותו סמל. לפיכך לא תוכל יצירת המושגים שבסעיף זה להיות בגדר ספק אלא בעיני אותם הספקנים השוללים באופן עקרוני את המושג של קבוצה אינסופית, כגון קבוצת המספרים הטבעיים או הרצף. בשאלה יסודית וכללית זו נדון בחלק הששי [1].

1. מן הספרות על תורת הקבוצות המופשטות נציין, נוסף על מאמרי קנטור עצמו, את הספרים הבאים:

פרק שלישי: פעולות־חשבון בין קבוצות ועָצמות. [1]

§ 1. סידור העצמות לפי גדלן.

בתחום המספרים הסופיים [2] ידוע איך להגדיר ולהכריע, איזה משני מספרים נתונים שונים קטן מחברו. אפשר לנסח את המבחן כך: תהיינה S ו T קבוצות סופיות; המספר המונה של S הוא קטן מן המספר המונה של T אם S אקויולנטית לחלק (לקבוצה־חלקית־ממש) של T. (השוה I, 10.)

מטרתנו הראשונה, בשאפנו לחשבון בעצמות, תהיה לסדר את העצמות בינן לבין עצמן וכן ביחס למספרים הסופיים. אין זו הפתעה בשבילנו שאי־אפשר לקיים את ההגדרה הנ״ל לגבי קבוצות אינסופיות; שהרי כאן יקרה ש S אקויוָלנטית לקבוצה־חלקית־ממש של T — בפרט: ש S עַצמה היא קבוצה־חלקית־ממש של T — ואף־על־פי־כן S ו T אקויולנטיות זו לזו, כלומר עצמותיהן שוות. (דוגמה: S היא קבוצת כל המספרים השלמים, T — קבוצת כל המספרים הרציונליים.) ברור שלא יתכן להגדיר יחס של סדר־לפי־הגודל כך, שעצמה ידועה תהיה גם קטנה מחברתה גם שווה לה. ניגוד זה למספרים הסופיים תלוי, כמובן, בכך שקבוצה אינסופית אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש, אך לא קבוצה סופית.

A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Berlin, 1928 & New York, 1946. 424 pp.

A. A. Fraenkel: Abstract set theory. Amsterdam, 1953. 479 pp.

F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914 & New York, 1949. 476 pp.

F. Hausdorff: Mengenlehre. 2. Aufl. Berlin & Leipzig, 1935 & New York, 1944. 285 pp.

E. Kamke: Mengenlehre. (*Samml. Göschen* No. 999.) Berlin & Leipzig, 1928. 160 pp. English ed., New York, 1950.

J. E. Littlewood: The elements of the theory of real functions. 2nd ed. Cambridge, 1926. 60 pp. (ספר קשה למדי)

W. Sierpiński: Leçons sur les nombres tranfinis. Paris, 1928. 240 pp. (הופיע גם בפולנית)

כל כתבי קנטור (המדעיים) יצאו לאור בברלין בשנת 1932, עם הערות מאת E. Zermelo וביוגרפיה של קנטור מאת A. Fraenkel, עיין בעמ׳ 29. אחד ממאמריו החשובים ביותר הוצא באנגלית: G. Cantor: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, translated and edited by P. E. B. Jourdain. Chicago, 1915.

1. הפרקים שלשה וארבעה מכילים חומר שבחלקו הוא טכני יותר משאר פרקי הספר. הקורא שירצה לדלג עליהם מסבה זו לא יסבול בהבנת הפרקים הבאים.

2. כאמור לעיל, אין צורך מעשי להבדיל לגבי המספרים הסופיים בין מספרים מונים למספרים סודרים. מאידך, אם בפרק זה מדובר על מספרים סופיים, הכוונה תמיד למספר המונה — בהקבלה למספר המונה האינסופי (העָצמה) המהווה את נושאו העיקרי של הפרק.

נגדיר אפוא, בצרפנו דרישה נוספת, ובוותרנו לעומת זה על ההדגשה של קבוצת־חלקית־ממש:

הגדרה: המספר המונה $\mathbf{s}$[1] של הקבוצה S הוא קטן מן המספר המונה $\mathbf{t}$ של הקבוצה T, אם ראשית S היא אקויולנטית לקבוצה חלקית של T, ושנית T אינה אקויולנטית לשום קבוצה חלקית של S. כותבים בסימן הרגיל אצל כל „סדר־לפי־הגודל" $\mathbf{s} < \mathbf{t}$ (השוה I, 10), ובאותה המשמעות גם $\mathbf{t} > \mathbf{s}$ (קרי $\mathbf{t}$ גדול מ $\mathbf{s}$).

בדברנו על „מספר מונה" בהגדרה זו, התכוונו למספרי קבוצות סופיות ואינסופיות כאחד. ב I, 77 (הערה) מבואר, משום־מה משתמשים בשני בטויים („קטן", „גדול") ובשני סימנים ($<$, $>$) כנגד אותו היחס בין הקבוצות S ו־T. בסימן $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$ נבטא גם כאן, כרגיל, את היחס „$\mathbf{s}$ קטן מ $\mathbf{t}$ או שווה ל $\mathbf{t}$".

ליחס $<$ יש התכונות הבאות:

א) $\mathbf{s} < \mathbf{t}$ גורר אחריו שלא יהיה $\mathbf{s} = \mathbf{t}$, כלומר שהקבוצות S ו־T אינן אקויולנטיות. (כי לפי הגדרת $\mathbf{s} < \mathbf{t}$ אין ל־S קבוצה חלקית האקויולנטית ל־T.) היחסים $\mathbf{s} = \mathbf{t}$ ו־$\mathbf{s} < \mathbf{t}$ סותרים אפוא זה את זה.

ב) היחסים $\mathbf{s} < \mathbf{t}$ ו־$\mathbf{t} < \mathbf{s}$ (כלומר, $\mathbf{s} > \mathbf{t}$) סותרים זה את זה. לאמור: היחס $<$ הוא אסימטרי (I, 8).

ג) היחסים $\mathbf{s} < \mathbf{t}$ ו־$\mathbf{t} < \mathbf{u}$ (או גם $\mathbf{t} \leq \mathbf{u}$) גוררים אחריהם $\mathbf{s} < \mathbf{u}$. לאמור: היחס $<$ הוא טרנסיטיבי (לעיל עמ' 9).

ד) היחסים $\mathbf{s} < \mathbf{t}$, $\mathbf{s}' = \mathbf{s}$, $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ גוררים אחריהם $\mathbf{s}' < \mathbf{t}'$. לאמור: בהשוואת מספריהן המונים של קבוצות ע"י היחס $<$ מותר להחליף כל קבוצה בכל קבוצה אקויולנטית. לשון אחר: השויון בין מספרים מונים מוגדר באופן חוקי גם בשים לב ליחס הסדר (השוה I, 72).

תכונות אלו אפייניות הן לכל יחס של סדר המופיע במתימטיקה (השוה I, 163, הערה), והקורא יוכיחן על נקלה לגבי $<$. לעומת זאת עמוקה מאד השאלה אם היחס המוגדר מקיים את התכונה היסודית הבאה של כל יחס סודר הראוי לשמו: בין כל שני עצמים (כאן: מספרים $\mathbf{s}$ ו־$\mathbf{t}$) קיים (לפחות) אחד היחסים

$$\mathbf{s} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{s} < \mathbf{t}, \quad \mathbf{s} > \mathbf{t}.$$

בשאלה זו נעסוק להלן וגם בסוף בפרק הבא.

נשתמש בהגדרתנו לשם ברור יחסי־הגודל בין העצמות שכבר עמדנו עליהן, וכן בין המספרים הסופיים ו־$\aleph_0$ מצד אחד לבין איזו עצמה שהיא מצד שני!

1. בדרך כלל נסמן עָצמות לא־מסויימות ע"י אותיות רומיות קטנות גסות; לגבי עצמתה של קבוצה נשתמש באותה אות $\mathbf{s}$ המסמנת (כאות גדולה קורסיבית) את הקבוצה הנדונה (S).

קודם כל קיים $\aleph > \aleph_0$. שכן יש לרצף קבוצות חלקיות בנות־מנייה, כגון קבוצת המספרים הרציונליים; ואילו כל קבוצותיה החלקיות של קבוצה בת־מנייה הן סופיות או בנות־מנייה (משפט 1 בעמ' 16), ולכן אף אחת מהן אינה אקויולנטית לרצף. כן קיים $f > \aleph$ מפני שקבוצת כל הפונקציות הקבועות אקויולנטית לרצף, בעוד ששום קבוצה חלקית של הרצף אינה אקויולנטית לקבוצת כל הפונקציות (6) בעמ' 36).

היחסים בין המספרים הסופיים, העצמה $\aleph_0$ ושאר העצמות נקבעים ע"י:

משפט 1: הסדר הרגיל בין המספרים הטבעיים לרבות 0, כלומר בין המספרים המונים הסופיים, נשאר בתקפו לפי ההגדרה דלעיל. כל מספר סופי קטן הוא מ $\aleph_0$, ו־$\aleph_0$ קטן מכל עצמה אחרת; לאמור: $\aleph_0$ היא העצמה הקטנה ביותר. לכן כל מספר סופי קטן הוא מכל עצמה (אינסופית).

הוכחה: הטענה הראשונה נובעת מיד מן ההגדרה; וכן הטענה השניה, שהרי לקבוצה בת־מנייה יש קבוצות חלקיות בנות n איברים (n מספר סופי איזה שהוא), ואילו כל קבוצה חלקית של קבוצה סופית, סופית גם היא. הטענה השלישית – האומרת שיש עצמה קטנה ביותר והיא $\aleph_0$ – נובעת מן המשפט 4 בעמ' 20. על־פיו יש לכל קבוצה אינסופית קבוצה חלקית בת־מנייה; ואילו כל קבוצה חלקית אינסופית של קבוצה בת־מנייה גם היא בת־מנייה, ולכן אינה אקויולנטית לקבוצה אינסופית שאינה בת־מנייה. הטענה האחרונה $\mathbf{s} > n$ (n מספר סופי, $\mathbf{s}$ איזו עצמה שהיא) נובעת מן היחסים $\aleph_0 > n$, $\mathbf{s} \geq \aleph_0$ על־סמך טרנסיטיביותו של היחס הסודר.

ההגדרה אינה נותנת לנו כל אמצעי להכריע אם עצמת הרצף $\aleph$ היא העצמה העוקבת את $\aleph_0$, או אם יש ביניהן עוד עצמות $\mathbf{s}$ כך שקיים $\aleph > \mathbf{s} > \aleph_0$. בעיה זו נקראת בעית הרצף. אף־על־פי שהחל ממאמציו המיואשים־ממש של קנטור סביב בעיה זו (בשנים 1874–1884) ועד היום לא פסקו גדולי־החוקרים להקדיש ממיטב כחם לבעית הרצף, ובפרט להוכחת „השערתו של קנטור" הטוענת שא עוקבת את $\aleph_0$, אנו רחוקים עתה מפתירתה כמעט במידה שהיה רחוק ממנה קנטור לפני שבעים שנה. הילברט, גדול המתימטיקנים בדור הקודם, בהרצותו בשנת 1900 לפני הקונגרס הבינלאומי של המתימטיקנים בפריז על בעיות מתימטיות שלא מצאו עוד את פתרונן, הציג במקום הראשון (בכלל 23 הבעיות שברשימתו) את בעית הרצף; והוא הביא שוב בצורה דראמטית בשנת 1925 לפני העולם המתימטי נסיון לפתור את הבעיה, נסיון שנתברר עד מהרה כבלתי־מוצלח. ספר מיוחד המוקדש כולו לבעית הרצף[1] לא ללמד על הצלחה

1. W. Sierpiński : Hypothèse du continu. Warszawa & Lwów, 1934. 192 pp.

יצא אלא להראות מספר גדול של בעיות הקשורות בבעיה זו ושל צעדים קטנטנים בכוון פתירתה, בלא כל תקוה שאלה יצטרפו לכלל התקדמות ניכרת לקראת פתרון סופי. רק בשנת 1938 הצליח גידל[1], בעזרת שיטות מעמיקות מאד, להגיע להתקדמות של ממש; אמנם הוא לא הוכיח שהשערת קנטור נכונה אלא רק שהיא מחוסרת סתירה.

אפשר לנסח את בעית הרצף גם בצורה זו: האֶקויוָלנטית כל קבוצה חלקית אינסופית של הרצף, שאינה בת־מנייה, לרצף עצמו, אם יש קבוצות חלקיות שעצמתן בין $\aleph_0$ ל $\aleph$? כשם שאין אנו יודעים תשובה על שאלה זו, כן נעדרת מאתנו ידיעה אם יש עצמה בין $\aleph$ ו $\mathfrak{c}$.

לעומת מצב מעורפל זה פתר קנטור את הבעיה אם $\mathfrak{c}$ (או עצמה אחרת גדולה יותר) מהווה את השיא בין המספרים האינסופיים.

משפט 2 („משפט קנטור"[2]): לעומת כל קבוצה S יש קבוצה בעלת עצמה גדולה מעצמת S; למשל הקבוצה שאיבריה הם כל הקבוצות החלקיות של S. קבוצה זו נקראת קבוצת־החזקה של S, מטעם שיתברר להלן (§ 3).

את הוכחת המשפט 2 ימצא הקורא במלואים לחלק הרביעי, מספר ב; גם היא בנויה על שיטת האלכסון.

מן המשפט 2 יש להסיק: אם P היא קבוצה אינסופית בעלת העצמה $\mathfrak{p}$, יש לקבוצת־החזקה P_1 של P עצמה $\mathfrak{p}_1$ גדולה מ $\mathfrak{p}$, וכן לקבוצת־החזקה P_2 של P_1 עצמה $\mathfrak{p}_2$ גדולה מ $\mathfrak{p}_1$; וכן הלאה. יש אפוא אינסוף עצמות שונות. בפרט נקבל בדרך זו, בצאתנו מן הקבוצה N של המספרים הטבעיים, סידרה מסויימת של עצמות הולכות וגדלות. בניגוד להשקפה הנאיבית, שכאילו יש רק „אינסוף"־סתם מחֻסר הבדלי־גודל ברורים, ראינו בפרק הקודם שיש לפחות שלשה מספרים מונים אינסופיים שונים זה מזה. עתה למדנו שיש אינסוף מספרים מונים אינסופיים שונים, ולא עוד אלא שקבענו ביניהם יחס של סדר לפי הגודל, המוגדר באותו דיוק כבין המספרים הסופיים. לפי יחס זה עולים בלי די המספרים האינסופיים הנוצרים לפי המשפט 2. בסעיף הבא נראה איך אפשר להרחיב מסקנה זו הרחבה נוספת. — דרך אגב: מסקנתנו מדברת לא רק על מציאותן של העצמות השונות אלא מלמדת אותנו גם לבנותן, בצאתנו מאחת (הראשונה) מהן.

1. K. Gödel: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. (*Annals of Mathematics Studies*, No. 3.) Princeton N. J., 1940. 66 pp.

2. עיין במאמרו של קנטור משנת 1892 המצוטט בעמ׳ 29. כבר ב 1883 הוכיח קנטור שלעומת כל עצמה יש עצמה גדולה יותר; אבל שיטת ההוכחה ההיא מסובכת יותר ומסתמכת על יסודות הלקוחים מתחום אחר (מתחום הסדר).

כאמור, המשפט 2 כחו יפה גם לגבי קבוצות סופיות ומספריהן. נראה ב § 3, שבמקרה זה מבטא הוא עובדה פשוטה מתורת הקומבינטוריקה. ביחס למספרים הקטנים ביותר נקבל: המספר המונה של קבוצת־האפס, דהיינו המספר 0, קטן מן המספר של קבוצת־החזקה שלה; הואיל ולקבוצת־האפס יש רק קבוצה חלקית אחת, שהיא הקבוצה בעצמה, יש לאותה קבוצת־חזקה איבר יחיד. לפיכך אומר המשפט במקרה זה: $0 < 1$. לעומת שני הצעדים הבאים נצא מקבוצות בעלות איבר אחד ושני איברים: $A = \{a\}$, $B = \{b_1, b_2\}$. ל A יש שתי הקבוצות החלקיות A ו 0 (קבוצת־האפס); ל B ארבע הקבוצות החלקיות B, $\{b_1\}$, $\{b_2\}$, 0. לפיכך מבטא המשפט במקרים אלו את היחסים $2 > 1$ ו $4 > 2$.

כפי שצויין למעלה, עלינו לשים לב, בקשר לסידור העצמות, לשאלה יסודית שטרם נפתרה, והיא: ההשתַוות (אפשרות־ההשואה) בין עצמות שונות; כלומר השאלה אם מבין כל שתי עצמות שונות אחת קטנה מאחותה, או היש מקום גם לאפשרות „שאין להשוותן", לאמור: שאף אחד מן היחסים $=$, $<$, $>$ אינו קיים ביניהן.[1] יקשה להכתיר בתאר־הכבוד מספר עצמים בעלי התנהגות כה מוזרה. ע"י המשפט 1 נפתרת השאלה רק במקרה שלפחות אחד מן המספרים, שיש להשוותם, הוא מספר סופי או $\aleph_0$.

לא נתגלתה אפשרות לפתור את הבעיה הנ"ל בעזרת האמצעים העומדים לרשותנו עד כה; לאמור: בעזרת מושג האקויולנטיות ושאר המושגים המסתמכים עליו. רק בסוף הפרק הבא יהיה לאל ידינו לפתור את הבעיה, בעזרת מושג בעל אופי אחר לגמרי (מושג „הסדר הטוב"). ואולם גם על־סמך ידיעותינו הנוכחיות נוכל לצעוד צעד חשוב קדימה בכוון הרצוי.

בצאתנו מהגדרת הסדר הנזכרת למעלה נגיע, באמצעות השיטה ההגיונית של „הברירה השלימה", אל מיון שלם של כל היחסים האפשריים בין שתי קבוצות S ו T או בין עצמותיהן. מיון הקובע ארבעה מקרים:

א) יש קבוצות חלקיות של S האקויולנטיות ל T, וכן יש קבוצות חלקיות של T האקויולנטיות ל S;

ב) יש קבוצות חלקיות של S האקויולנטיות ל T, אבל אין קבוצה חלקית של T האקויולנטית ל S;

ג) אין קבוצה חלקית של S האקויולנטית ל T, אבל יש קבוצות חלקיות של T האקויולנטיות ל S;

ד) אין קבוצה חלקית של S האקויולנטית ל T, ואין קבוצה חלקית של T האקויולנטית ל S.

1. יש המכנים את הבעיה שלפנינו בשם בעית הטְריכוטומיה, כלומר: הבעיה בדבר האפשרות להסתפק בשלושת המקרים הנ"ל (השוה I, 162).

ארבעת מקרים אלה, כראוי לכל ברירה שלימה, סותרים זה את זה וממצים את כל האפשרויות שבהגיון. נתארם במסגרת הבאה, בסמננו את עצמת S ב $\mathbf{s}$ ואת עצמת T ב $\mathbf{t}$.

	T אקוויולנטית לקבוצה חלקית של S	T אינה אקוויולנטית לשום קבוצה חלקית של S
S אקוויולנטית לקבוצה חלקית של T	א) $T \sim S$, ז"א $\mathbf{s}=\mathbf{t}$	ג) $\mathbf{s}<\mathbf{t}$
S אינה אקוויולנטית לשום קבוצה חלקית של T	ב) $\mathbf{t}<\mathbf{s}$	ד) אי־השתוות

מה שכתוב כאן לגבי המקרים ב) ו־ג), נובע מהגדרת הסדר. כנגד א) קיימת המסקנה הבאה, שהוכנסה כבר אל המסגרת:

משפט 3 (משפט־האֶקויוָלנטיות): אם הקבוצה S אקוויולנטית לקבוצה חלקית של T, ויחד עם זה T אקוויולנטית לקבוצה חלקית של S, אקוויולנטיות הקבוצות S ו T זו לזו; כלומר, עצמותיהן שוות.

משפט זה מובן מאליו במקרה של קבוצות סופיות; כי על כן ההנחות מתמלאות רק אם הקבוצה החלקית הנידונה של S (T) היא S (T) עצמה. הוכחה למקרה הכללי, שאינה פשוטה כל עיקר, ניתנת במלואים לחלק הרביעי, מספר ג).

נבטא את משפט האקוויולנטיות בצורה שניה, שהיא נוחה בעיקר להשוואת עצמות. אם הקבוצה S בעלת העצמה $\mathbf{s}$ אקוויולנטית לקבוצה חלקית של הקבוצה T בעלת העצמה $\mathbf{t}$, נשארות שתי האפשרויות המסומנות במסגרת דלעיל במקרים א) ו־ג), דהיינו $\mathbf{s}=\mathbf{t}$ ו $\mathbf{s}<\mathbf{t}$. מאידך נובע מכל אחד של יחסים אלו כי S אקוויולנטית לקבוצה חלקית של T. לאמור:

משפט 4: אם הקבוצה S אקוויולנטית לקבוצה חלקית של T, הרי עצמת S קטנה היא מעצמת T או שווה לה, וחילופו. (בסימן $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$.)

בהתאם לכך אפשר לבטא את הכלל לסידור העצמות (לרבות המספרים הסופיים) על־פי גדלן בצורה הבאה, הנראית אולי טבעית מזו שבהגדרה בעמ׳ 42: אם הקבוצות S ו T אינן אקוויולנטיות (כלומר, אם עצמותיהן אינן שוות), הרי עצמת S **קטנה** מעצמת T אם S אקוויולנטית לקבוצה חלקית של T.

חשיבותם של המשפטים 4 ו 5 בולטת בייחוד במקרים שבהם קשה לבנות בפועל העתק בין הקבוצות S ו T – בעוד שקל להראות שכל אחת אקוויולנטית לקבוצה חלקית של חברתה. דוגמה למקרה זה תופיע ב §3.

במסגרת המציינת את יחסי־הסדר האפשריים בין שתי קבוצות ועצמותיהן נשאר ללא פתרון המקרה הרביעי, שבו S אינה אקוויולנטית לשום קבוצה חלקית של T, ולא T לשום קבוצה חלקית של S. מקרה זה נראה מראש מוזר,

ובאופן פסיכולוגי קשה לתארו; משמעותו תהיה, לפי הגדרת הסדר, שהקבוצות ועצמותיהן אינן ניתנות להשואה. אף כי כבר בתקופה קדומה טען קנטור, שיחס זה בין שתי קבוצות אינו יכול להתקיים, הרי רק במאוחר ובעזרת אמצעים רחוקים מעצם הענין ניתנה הוכחה ממש לטענה זו. נייחד את הדיבור עליה בסוף הפרק הרביעי.

תרגילים ל§1.

1) הוכח את המשפטים ב) עד ד) מעמ׳ 42!

2) באיזה מובן מאפשר המשפט 4 (או 3) להוכיח ביתר פשטות את אי־השויון $\mathfrak{f} >$ א ואת המשפט הכללי 2?

3) לגבי הוכחת המשפט 2, עיין במלואים: אם הקבוצה U_0 המופיעה בהוכחה, תהיה הקבוצה U בעצמה (כלומר, אם ההוכחה תיעשה דרך־השלילה), יש תמיד איברים מן הסוג השני (השוה בהוכחה); לשון אחר: במקרה זה הקבוצה u^* אינה ריקה. הראה את נכונותה של טענה זו!

§2. פעולות החיבור והכֶּפל בין עצמות.

למדנו להכיר מספרים „גדולים־לאינסוף בהחלט", בצורת העצמות של קבוצות אינסופיות, והשווינו אותם ביחס לגדלם. הבה נבדוק אם ואיך אפשר לחַשב במספרים אלו!

יתברר, שפעולות החיבור, הכפל וההעלאה לחזקה הידועות מן האריתמיטיקה ניתנות להכללה טבעית המאפשרת את ביצוען בין העצמות; ולא עוד אלא שהכללים הרגילים (חוקים פורמליים[1]) הקיימים לגבי הפעולות הנ"ל ישארו בתקפם אף לגבי העצמות. לעומת זאת אי־אפשר להוציא לפועל בתחום העצמות בדרך כלל את פעולות־החשבון **ההופכות** את הפעולות הנ"ל, דהיינו חיסור, חילוק, הוצאת שרשים ויצירת לוגריתמים.

אין לתמוה על כך, שאי־אפשר להגדיר באופן מתקבל על הדעת את פעולות החיסור והחילוק בין עצמות – כשם שכמה מחוקי החיבור והכפל (כגון החוקים הקומוטטיביים) מתבטלים בתחום אותם „מספרים אינסופיים" שנעמוד עליהם בפרק הרביעי. על צד האמת, אם מרחיבים את תחום המספרים הנהוגים במתימטיקה בצורה כה מהפכנית ובהיקף כה רחב כפי שהרחבנוהו ע"י הכנסת המספרים האינסופיים של קנטור, כיצד נוכל לצפות לכך, שהמספרים החדשים יִכָּנעו לאותם החוקים השוררים בתחום „הצר" של המספרים הסופיים הרגילים?

1. חוקים אלו ידועים מן הפרקים ב׳, ד׳, ה׳ של הכרך הראשון: עיין שם בעמ׳ 18—20, 84/5, 106. ואלה הם החוקים העיקריים באריתמיטיקה:

$(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (חוקים אסוציאטיביים).

$a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (חוקים קומוטטיביים).

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (חוקים דיסטריבוטיביים).

הרי גם במתימטיקה, כבכל מדע אחר, גוררת כל הכללה (הרחבה) של מושג ביטול חלק מתכונותיו של המושג הקודם, הפרוט.

בהתאם לעקרון היציבות של החוקים הפורמליים, שסמכנו עליו בהרחיבנו את מושג המספר (I, חלק שני, בפרט עמ׳ 70), נשאף גם בהגדרת פעולות־החשבון בין העצמות לכך, שהפעולות החדשות תהיינה הכללות „טבעיות" לפעולות שבין המספרים הסופיים; „טבעיות" בעיקר במובן זה שנשמור אף בתחום המורחב ככל האפשר על חוקי החשבון שבתחום האריתמיטיקה הרגילה. ואולם לאחר שקבענו הגדרות מתאימות, אין לאל ידנו ל ד ר ו ש את חוקי החשבון בתחום החדש, אלא שומה עלינו ל ב ד ו ק עד כמה ישארו בתקפם החוקים הרגילים על־סמך ההגדרות ובמה ישתנו החוקים שלא ישארו. לפיכך ההפתעה היא לא בכך שיש שינויים אלא במה שחוקי הפעולות „הישרות" (בניגוד להיפוכיהן) מ ש ת מ ר י ם ללא פגיעה, למרות הרחבתו העצומה של התחום. חוסר ההבנה של מצב־ענינים זה הוא ששם, במשך תקופת־ראשית ממושכת, מכשולים קשים על דרך התפתחותה של תורת־הקבוצות [1].

נפתח בהגדרת ה ח י ב ו ר בין מספרים מונים (סופיים ואינסופיים גם יחד; כן גם להלן) תוך הצטמצמות ב ש נ י מחוברים, כרגיל באריתמיטיקה. דבר זה יקל עלינו את המעבר למקרה הכללי.

ה ג ד ר ה I: כדי לחבר שני מספרים מונים נתונים (שונים או שווים) $\mathbf{q}$ ו־$\mathbf{r}$, נבחר בשתי קבוצות „מייצגות" ז ר ו ת Q ו־R בעלות המספרים המונים (העצמות) $\mathbf{q}$ ו־$\mathbf{r}$, ונבנה את הקבוצה הכוללת (עמ׳ 11) $S=Q+R$. המספר המונה $\mathbf{s}$ של S ייקרא ס כ ו ם המספרים $\mathbf{q}$ ו־$\mathbf{r}$; בכתב: $\mathbf{s}=\mathbf{q}+\mathbf{r}$. – בקיצור: ס כ ו מ ם ש ל מ ס פ ר י ם ה ו א מ ס פ ר ס כ ו מ ן ש ל ק ב ו צ ו ת ז ר ו ת מ ת א י מ ו ת.

הערות להגדרה I. ר א ש י ת: התנאי שהקבוצות Q ו־R תהיינה זרות, הכרחי הוא; שאם לא כן „ילכו לאיבוד" פעם אחת האיברים המשותפים, והסכום יחסר חלק מאוצר איבריו „הדרוש". למשל, כדי לחבר 3 ו 4, עלינו לצאת

1. במכתב משנת 1885 כתב קנטור אל G. Eneström: כל ההוכחות־כביכול נגד אפשרותם של מספרים אינסופיים־בהחלט לקויות בזה — וכאן מקום־תורפתן המכריע — שמעמיסות הן מראש על המספרים הנידונים את כל תכונות המספרים הסופיים. והרי כדי שיהיה למספרים האינסופיים־בהחלט מקום במחשבה, צריכים הם, מתוך ניגודם למספרים הסופיים, להוות מין־מספרים חדש לחלוטין, שמהותו תלויה לגמרי בטבע הענין; מהות ששומה על המחקר לגלותה, ושאינה ענין לשרירות לבנו ולמשפטנו הקודם. (עיין במאמרי קנטור [השוה לעיל עמ׳ 29], עמ׳ 371/2.) כאן נוגע קנטור בפלוגתא המפורסמת, אם מושגי המתימטיקה נוצרו ע"י מחשבתנו או שיש להם מציאות בפני עצמם. עיין בחלק הששי.

מקבוצות בעלות שלשה וארבעה איברים; אם נקח לשם זה את הקבוצות $\{a_1, a_2, a_3\}$ ו $\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$, הרי תהיה הקבוצה הכוללת $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, כלומר קבוצה בת ששה איברים ולא שבעה, כדרוש לפי ההגדרה כדי לאַמֵת את היחס $3+4=7$. הסיבה לכך נעוצה בהמצאו של האיבר a_3 בכל אחד משני המחוברים. – זהו הטעם לכך על שום מה מבכרים במקרה הכללי של עמ׳ 11, בו אין דרישה של זרות בין המחוברים, את השם „קבוצה כוללת" על השם „סכום", שעדיף לשמרו למקרה שלא יהיו איברים משותפים לשנים או יותר מבין המחוברים.

ש נ י ת: לכאורה נכנס לתוך הגדרתנו גורם שרירותי העלול לתת את אותותיו בתוצאת הפעולה. הרי לא קבענו מ ה ה ן הקבוצות Q ו־R שנבחרו כמייצגות את המספרים הנתונים; וכי לא תשפיע בחירתן על הקבוצה הכוללת, ועל־ידי־זה על סכום המספרים הנתונים? (רק כנגד המספר 0 קבועה ועומדת הקבוצה המייצגת, הלא היא קבוצת־האפס.) ואמנם אלמלא ההגבלה שהקבוצות תהיינה זרות, ברור שפקפוק זה מוצדק: אם, כדי לחשב $3+4$, נבחר פעם בקבוצות שבפסקה הקודמת ופעם בקבוצות זרות (או בקבוצות בנות שני איברים משותפים) נקבל תוצאות שונות לסכום המספרים הנתונים. אבל אחרי התנותנו את תנאי הזרות כאמור בהגדרה, תשפיע אמנם בחירת הקבוצות Q ו־R, המופיעות כמייצגות למספרים הנתונים, ע ל ה ק ב ו צ ה ה כ ו ל ל ת $S=Q+R$ א ב ל ל א ע ל ע צ מ ת ה. לשון אחר: אם נבחר, בהתאם להגדרה, בקבוצות מייצגות אחרות Q' ו־R', תתקיים האקויולנטיות $Q+R \sim Q'+R$ המביעה את שויון העצמות.

כדי להוכיח זאת נבחר באיזה העתק שהוא Φ בין Q ל־Q', ובאיזה העתק שהוא Ψ בין R ל־R'. במקרה זה יותאם כל איבר s מתוך $Q+R$ באופן ח ד ־ ע ר כ י לאיבר מסויים s' מתוך $Q'+R'$, אם על־פי Φ אם על־פי Ψ; התאמה זו בין איברי $Q+R$ ואיברי $Q'+R'$ מעידה על אקויוָלנטיוּתן של שתי קבוצות אלו. ברם ההתאמה אפשרית אך על־סמך זה, שלגבי כל איבר של $Q+R$, למשל, לא נשאר ספק ל א י ז ה מן המחוברים הוא משתייך, כלומר באיזה מן ההעתקים Φ ו־Ψ עלינו להשתמש כדי לקבוע את בן־זוגו בסכום $Q'+R'$.

ד ו ג מ ו ת לחיבורם של שני מספרים מונים: א) סכומם של שני מספרים סופיים מתלכד עם סכומם הרגיל באריתמיטיקה, כפי שיוצא בקלות מן ההגדרה.

ב) אם $\mathbf{q}$ היא עצמה (אינסופית) ו־n מספר סופי, קיים $\mathbf{q}=n+\mathbf{q}$ על־פי המשפט 5 בעמ׳ 20 (השוה תרגיל 7) בעמ׳ 21). בפרט קיים: $\aleph_0 = n + \aleph_0$, $\aleph = n + \aleph$.

ג) אם $\mathbf{q}$ היא איזו עצמה שהיא, קיים על־פי אותו משפט: $\mathbf{q} = \aleph_0 + \mathbf{q}$. בפרט: $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$, $\aleph = \aleph_0 + \aleph$.

ד) $\aleph = \aleph + \aleph$ בהתאם למשפט 1 בעמ׳ 32.

בניגוד לפעולת־החיבור שבאריתמיטיקה, אין ההגדרה I מספקת להורותנו את החיבור בדרך כלל. שם מכלילים את הפעולה לכל מספר (סופי) של מחוברים בעזרת האינדוקציה השלימה והחוק האסוציאטיבי. (השוה I, 18 ו־51.) אכן כאן זקוקים אנו להגדרה, שכחה יפה כלפי כל מספר (אף אינסופי) של מחוברים; אלה יוכלו להופיע, למשל, כאיברי סידרה או כאיברי קבוצה בעלת העצמה א. אם כן, לא תנחנו אל מחוז חפצנו האינדוקציה השלימה, אלא יש צורך בהגדרה חדשה, מרחיבה ממש.

בקשר לניסוחה נצביע על נקודה בעלת חשיבות עקרונית יותר ממעשית. ייתכן שחלק מן המחוברים, ואף כולם, שווים ביניהם; במקרה זה אין להציגם כאיברי קבוצה, שהרי בקבוצה שונים כל האיברים זה מזה. ואולם בכל מקרה כזה אפשר להציג את המחוברים כמותאמים (באופן חד־ערכי) לאיברי קבוצת־עזר שתיבחר בהתאם לתפקיד זה; כלומר בצורה $f(t)$, שבה עובר t על איברי הקבוצה. בפרט, אם המחוברים מופיעים במספר כדי מנייה, אפשר לתתם כאיברי סידרה. (הערה זו כחה יפה גם כלפי ההגדרה IV בעמ׳ 53.) לפי זה נגדיר:

הגדרה II: כדי לחַבר מספרים מונים, שונים או שווים, הנתונים באיזה מספר סופי או אינסופי שהוא, נבחר כנגד כל מחובר $\mathbf{q}$ בקבוצה מייצגת Q בעלת המספר (העצמה) $\mathbf{q}$, באופן שקבוצות אלו זרות הן לחלוטין. ניצור את הקבוצה הכוללת S של כל הקבוצות האלה, כלומר הקבוצה המכילה כל איבר המופיע באחת מן הקבוצות Q, ורק איברים אלו. המספר המונה $\mathbf{s}$ של S ייקרא הסכום של כל המספרים הנתונים. – בקיצור: סכומם של מספרים הוא מספר סכומן של קבוצות זרות מתאימות. גם כאן נשתמש בסימן $+$.

הערות להגדרה II. ראשית: משמעות המונח „נתונים" בראשית ההגדרה הוסברה לעיל: בהיות T קבוצה מתאימה, נתונים המספרים המונים $\mathbf{q}_t$ כערכיה של פונקציה חד־ערכית $f(t)=\mathbf{q}_t$ שהגורם t שלה עובר על כל איברי T. התנאי שהמחוברים יהיו זרים, נחוץ כבהגדרה I. המונח „קבוצה כוללת" (או סכום) מופיע כאן במובן כללי מזה שהוגדר בהגדרה IV בעמ׳ 11; כי על כן יצאנו שם ממספר סופי של קבוצות או מסידרת קבוצות, ואילו כאן מוגדרת הקבוצה הכוללת כנגד כל קבוצה של קבוצות. (מושג הקבוצה הכוללת בעצמו אינו תלוי, כמובן, בתנאי שהמחוברים זרים; השוה בדוגמות בעמ׳ 12.)

שנית: כבהגדרה I (השוה ההערה השניה שם) כך גם בהגדרה שלפנינו מופיע גורם שרירותי, והוא בחירת הקבוצות Q המייצגות את העצמות $\mathbf{q}$. גם כאן אין שרירות זו משפיעה על התוצאה הסופית, כלומר על העצמה $\mathbf{s}$, באשר כל שתי קבוצות S, המתקבלות לפי ההגדרה II, אקויולנטיות זו לזו. ההגדרה II סומכת אפוא על

משפט 1: תהיינה R ו־R' שתי קבוצות אקויולנטיות; כל שנים מאיברי R יהיו קבוצות זרות זו לזו, וכן לגבי איברי R'. יהא Φ העתק מסויים בין R ו־R' המתאים לכל איבר Q של R איבר Q' של R' באופן שהקבוצות Q ו־Q' אקויולנטיות זו לזו. במקרה זה אקויולנטית גם הקבוצה הכוללת S של כל איברי R לקבוצה הכוללת S' של כל איברי R'.

מוכיחים את המשפט בשיטה דלעיל, דהיינו ע״י יצירת העתק Ω בין S ל־S' המתאים לכל איבר s של S — כלומר, לכל איבר של קבוצה מסויימת Q שהיא איבר של R – את „בן־זוגו" בקבוצה Q' המותאמת ע״י Φ לקבוצה Q. כדי לקבוע את בן־זוגו של s, יש להשתמש בהעתק Ψ בין הקבוצות האקויולנטיות Q (איבר של R) ו־Q' (איבר של R') ברור שהתאמה זו בין איברי S ו־S' היא חד־חד־ערכית. אמנם כדי שהמושג „בן־זוגו" יהיה קבוע, נחוץ לבחור בקבוצה של העתקים מסויימים Ψ הקושרים כל איבר Q מתוך R באיבר המותאם לו Q' מתוך R'; שהרי העובדה, כי Q ו־Q' הן קבוצות אקויולנטיות, כשהיא לעצמה, מעידה רק על מציאותם בעלמא של העתקים בין Q ו־Q' ואינה קובעת העתק מסויים. (השוה ב־§5, להלן.) לבסוף יצויין כי אך הזרות בין איברי R, וכן בין איברי R', גוררת אחריה את המסקנה שבמשפט 1; שכן כדי ליצור את ההעתק Ω בין S ל־S' עלינו לדעת כלפי כל איבר של S לאיזו קבוצה Q (ז״א לאיזה איבר של R) הוא משתייך; לאמור, עלינו לסמוך על כך שהאיבר אינו מופיע באיברים שונים של R. וכן כלפי כל איבר של S'.

בטרם נתן דוגמות לחיבור הכללי, נקבע כמסקנה המובנת כמעט מאליה:

משפט 2: החיבור בין מספרים מונים, המוגדר בהגדרה II, ממלא את החוק הקומוטטיבי ואת החוק האסוציאטיבי. כלומר: קביעת סדר מסויים למחוברים, או צירופם של כמה מחוברים בינם לבין עצמם, אינם משנים את הסכום.

קיומם של חוקים אלה כלפי חיבור מספרים (עצמות) נובע מתוך קיומם כלפי חיבור קבוצות. החוק הקומוטטיבי אינו זקוק להנמקה; כי הלא בהגדרת החיבור אין זכר לסדר בין המחוברים. החוק האסוציאטיבי ינוסח ויוכח במלואים לחלק הרביעי, מספר ד).

דוגמות לחיבורם הכללי של מספרים מונים.

א) חיבורם של מספרים סופיים, אם מספר המחוברים סופי גם הוא, מבוצע כרגיל, כפי שיוצא מדוגמה א) בעמ׳ 49 ומן החוק האסוציאטיבי.

ב) $\aleph_0+\aleph_0+\dots+\aleph_0=\aleph_0$, וכן $\aleph+\aleph+\dots+\aleph=\aleph$, אם מספר המחוברים סופי. יש להוכיח יחסים אלו בדרכים שונות: למשל על־פי הדוגמות ג) ו־ד) בעמ׳ 49 בעזרת האינדוקציה השלימה, או במישרין על פי המשפט 2 בעמ׳ 17 והמשפט 1 בעמ׳ 32.

ג) בקחתנו מחוברים כדי מנייה, נקבל גם כן

$$\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\dots=\aleph_0,\qquad \aleph+\aleph+\aleph+\dots=\aleph$$

לפי המשפטים 3 בעמ׳ 19 ו־1 בעמ׳ 32. (מקרים שבהם מספר המחוברים גדול מכדי מנייה, יועלו על הפרק להלן.)

ד) לגבי סכום כל המספרים הסופיים קיים:

$$0+1+2+3+\ldots+n+\ldots=\aleph_0.$$

שכן כדי ליצור את הסכום נוכל לצאת, לפי ההגדרה II, מן הקבוצות הזרות לחלוטין

$$Q_0=0,\ Q_1=\{a_1\},\quad Q_2=\{a_2, a_3\},\quad Q_3=\{a_4, a_5, a_6\}.\ \ldots$$

ולבנות את קבוצתן הכוללת, המכילה את האיברים a_n כנגד כל מספר סופי n. הואיל וקבוצה כוללת זו ניתנת להימנות, הסכום המבוקש הוא $\aleph_0$.

ה) כדי להראות את השימוש בחוק האסוציאטיבי נוכיח את השויון $\aleph+n=\aleph$ בדרך פורמלית, בהסתמכנו על השויונות $\aleph=\aleph+\aleph_0$ ו $\aleph_0+n=\aleph_0$:

$$\aleph+n=(\aleph+\aleph_0)+n=\aleph+(\aleph_0+n)=\aleph+\aleph_0=\aleph.$$

כדי להגיע לידי הגדרה טבעית ומועילה לכפל בין עצמות, נסתכל בדוגמה פשוטה מתוך האריתמיטיקה, כגון $3\cdot4$. אפשר להגדיר מכפלה זו כאחד הסכומים $3+3+3+3$ או $4+4+4$; כלומר, לקחת אחד הגורמים כמחובר מספר פעמים כפי ערך הגורם השני. (החוק הקומוטטיבי של הכפל טוען כי שתי דרכים אלו משתוות.) ואולם שיטה זו של הגדרת הכפל אינה נוחה במקרה שלנו שבו יוכל כל גורם להיות עצמה אינסופית; לאמור: שבו עלינו לקחת מחובר אינסוף פעמים כפי גדלו של אחד הגורמים. אי־נוחיות זו תגדל במידה מכרעת ברצותנו להגדיר מכפלה של אינסוף גורמים.

לפיכך נצא מהגדרה אחרת למכפלה כגון $3\cdot4$; מהגדרה המסתמכת על קבוצות. נקח שתי קבוצות זרות, K בעלת 3 איברים, ו L בעלת 4 איברים. בצרפנו בכל דרך אפשרית את איברי K לאיברי L לשם יצירת זוגות, נגיע ל $3\cdot4$ זוגות. למשל, אם $K=\{k_1, k_2, k_3\}$ ו $L=(l_1, l_2, l_3, l_4\}$, נקבל את 12 הזוגות

$$\{k_1, l_1\}, \{k_2, l_1\}, \{k_3, l_1\}, \{k_1, l_2\}\ \{k_2, l_2\}, \ldots, \{k_3, l_4\}.$$

קל להבין, ששיטה זו „תצליח" בכל מקרה של שני גורמים סופיים m ו n במובן זה, שקבוצת כל הזוגות תכיל בדיוק $m\cdot n$ איברים שונים. לפי מחשבה זו נגדיר אפוא, לעומת המקרה הכללי של גורמים סופיים או אינסופיים, בצורה דומה במקצת להגדרה I.

הגדרה III: כדי לכפול שני מספרים מונים נתונים (שונים או שווים) $\mathbf{k}$ ו $\mathbf{l}$, נבחר בשתי קבוצות[1] K ו L בעלות המספרים (העצמות) $\mathbf{k}$ ו $\mathbf{l}$, וניצור את קבוצת כל הזוגות $\{k, l\}$ המתקבלים כעבור k על כל איברי K, ו l על כל איברי L (ללא תלות בין שני התהליכים). המספר המונה $\mathbf{p}$ של קבוצת־הזוגות, שתסומן ב $K\times L$, ייקרא מכפלת המספרים $\mathbf{k}$ ו $\mathbf{l}$; כותבים $\mathbf{p}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}$.

1. התנאי שהקבוצות זרות אינו חיוני בהגדרות III ו IV כבהגדרות I ו II. כאן התנאי הוא ענין של נוחיות ופשטות בלבד. השוה במלואים לחלק הרביעי, סוף המספר ו).

אם נקרא לקבוצת־הזוגות $K\times L$ בשם המכפלה החיצונה[1] של הקבוצות K ו L, נוכל לומר בקיצור: מכפלת מספרים מונים היא מספר מכפלתן החיצונה של קבוצות מתאימות.

הערה: בדיוק כמו בהגדרת החיבור (עיין בהערה השניה להגדרה I) נכנס גם לתוך הגדרה זו גורם שרירותי, באשר לא נקבעו באופן חד־ערכי הקבוצות K ו L המייצגות את המספרים הנתונים $\mathbf{k}$ ו $\mathbf{l}$. אבל גם כאן תביאנו שרירותיות זו לידי מכפלות חיצונות $K\times L$ ו $K'\times L'$ שהן שונות אמנם זו מזו אבל אקויולנטיות זו לזו, ולכן עצמותיהן שוות. יש להוכיח זאת בדרך דומה לזו דלעיל על־סמך העתקים בין הקבוצות K ל K' מזה, ובין L ל L' מזה.

צורת בנינה של ההגדרה III מאפשרת לנו לעבור בנקל למקרה הכללי, שבו ניתנים לא שני גורמים בלבד אלא איזה מספר שהוא של גורמים. במקרה זה תופענה, במקום זוגות־איברים, קבוצות שכל אחד מאיבריהן לקוח מאחד הגורמים, באופן שלא ישתייכו שני איברים לאותו הגורם. כדי להקל את ניסוח ההגדרה נסמן הפעם את הגורמים הנתונים ב $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$... ללא כוונה לכך שמספרם יהיה כדי מנייה דוקא, אלא רק כדי לאפשר סימון נוח לקבוצות N_1, N_2, ... שעצמותיהן הן $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, ...; כלומר, הציונים מורים לא על מנייה כי אם על התאמה ידועה בין קבוצות לעצמות בעלות אותו ציון. לפי זה נוכל לנסח כדלקמן (השוה הגדרה II).

הגדרה IV: כדי לכפול מספרים מונים (עצמות), שונים או שווים, הנתונים במספר סופי או אינסופי (לאו דוקא כדי מנייה): $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, ... $\mathbf{n}_k$, ... נבחר כנגד כל גורם $\mathbf{n}_k$ בקבוצה „מייצגת" N_k בעלת העצמה $\mathbf{n}_k$, למשל באופן שכל הקבוצות האלה זרות הן לחלוטין. ניצור את כל הקבוצות („הצירופים") $\{n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots\}$ המתקבלות כעבור n_k על כל איברי N_k, כנגד כל k וללא תלות בין תהליכי־מעבר אלו, ונסמן את הקבוצה שאיבריה הם כל הצירופים הללו, ב $P=N_1\times N_2\times\ldots\times N_k\times\ldots$. ($P$ תיקרא המכפלה החיצונה של הקבוצות N_k.) המספר המונה $\mathbf{p}$ של הקבוצה P ייקרא מכפלת כל המספרים $\mathbf{n}$; כותבים:

$$\mathbf{p}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2\cdot\ldots\cdot\mathbf{n}_k\cdot\ldots.$$

כך הגדרנו מכפלת מספרים כמספר של מכפלתן החיצונה של קבוצות מתאימות. בהקבלה למשפט 1 קיים:

משפט 3: תהיינה R ו R' שתי קבוצות אקויולנטיות, ויהיו

1. „חיצונה" כדי להפלות בין פעולה זו ויצירת המשותף שכינינוהו גם בשם „מכפלה פנימית" (עמ' 11). לכל אחת משתי הפעולות האלה, השונות תכלית שוני זו מזו, יש יחס־קרבה מסויים לכפל הרגיל.

איברי R, וכן איברי R', קבוצות זרות לחלוטין; נניח עוד שיש העתק Φ בין R ו־R' המתאים לכל איבר Q מתוך R איבר Q' מתוך R' כך שהקבוצות Q ו־Q' אקויולנטיות זו לזו. במקרה זה אקויולנטית גם המכפלה החיצונה P של כל איברי R למכפלה החיצונה P' של כל איברי R'.

לגבי הוכחת המשפט 3 יש לומר מה שנאמר לעיל לגבי הוכחת המשפט 1, רק שההנחה דלעיל, שאיברי R ו־R' זרים, אינה עקרונית כאן. המשפט 3 מצדיק את ההגדרה IV; בלעדיו היינו חוששים שמא תשפיע בחירתן השרירותית של הקבוצות המייצגות את המספרים הנתונים על תוצאת הפעולה. לעומת זאת מבטיח המשפט 3, שאף כי בחירות שונות תביאנה לידי תוצאות שונות, תהיינה התוצאות קבוצות אקויולנטיות; לפיכך שווים מספריהן המונים, שאליהן נשואות עינינו.

אחרי שהתוודענו אל פעולות החיבור והכפל במספרים מונים, נבדוק עד כמה נשארו בתקפן, על־סמך ההגדרות, תכונותיהן של פעולות אלו הידועות לנו מן האריתמיטיקה. קודם כל קיים:

משפט 4: הכפל במספרים מונים הוא קומוטטיבי ואסוציאטיבי, וקשור בחיבור ע״י החוק הדיסטריבוטיבי.

משפט זה מקביל, לא רק בניסוחו כי אם גם באפייו, לחוקים המתאימים באריתמיטיקה. (השוה למשל I, 18–20.) הסיבוך העיקרי בהשואה לאריתמיטיקה נובע מכך, שמספר המחוברים והגורמים יוכל להיות אינסופי. על כך ידובר במלואים לחלק הרביעי, מספר ה).

משפט 5: מכפלת מספרים מונים מתאַפסת (כלומר, שווה למספר המונה 0) אם, ורק אם, אחד הגורמים לפחות מתאפס.

ידוע לנו גודל חשיבותו של משפט זה באריתמיטיקה ובאלגברה (השוה I, 80, 85, 107–115). כאן כמו שם פשוטה טענתו החיובית („אם״) של המשפט מטענתו השלילית („רק אם״). הוכחת החלק הראשון פשוטה כאן אף יותר מבאריתמיטיקה. שכן אם המספר 0 מופיע בין הגורמים, תופיע קבוצת־האפס (הקבוצה הריקה) בין גורמי המכפלה החיצונה של קבוצות, שיש לבנותה לפי ההגדרה IV, ובמקרה זה אין כל איבר בתוך המכפלה החיצונה; שהרי איבריה הם צירופים של איבר־איבר מתוך כל גורם, ומתוך הקבוצה הריקה אי אפשר לקחת איבר, מאחר שאין בה איברים כל עיקר! לפיכך המכפלה החיצונה ריקה גם היא, ומספרה המונה הוא אפוא 0.

באשר לחלק השלילי של המשפט 5, נתרגמו ללשון־חיוב; לאמור, נוכיח שמכפלתן החיצונה של קבוצות נתונות, שכל אחת מהן מכילה לפחות איבר אחד, לא תהיה ריקה. הבה נבחר מתוך כל אחת הקבוצות המופיעות כגורמי המכפלה, באיבר אחד! צירופם של איברים נבחרים אלה הלא הוא איבר של

המכפלה החיצונה הדרושה לנו בהתאם להגדרה IV. זאת אומרת שהמכפלה אינה ריקה, בהכילה לפחות איבר אחד. ב § 4 ניחד את הדיבור על הוכחה זו.

באריתמיטיקה מתבססת פעולת־הכפל על פעולת־החיבור. הדבר בולט לגבי הגדרת הכפל בין מספרים טבעיים שאצלם מיוסדת הגדרת הכפל במפורש על החיבור; עיין I, 19. ואמנם מתוך החוק הדיסטריבוטיבי יוצא שהמכפלה $m \cdot n$ פירושה $m+m+\cdots+m$, בחזרנו n פעמים על המחובר m. למשל: $4+4+4 = 4 \cdot 3$.[1]

כפלם של מספרים אחרים באריתמיטיקה, מחוץ לטבעיים, מבוסס גם הוא על הכפל במספרים הטבעיים, ולכן בעקיפין על פעולת החיבור. לעומת זאת „הכפל הפנימי״ (יצירת המשותף) בין קבוצות, שהוגדר בעמ׳ 11, אינו מבוסס על חיבור הקבוצות המבואר שם, אלא הוא שקול כנגד החיבור ושווה־זכויות אתו; בהתאם לכך קשורות שם שתי הפעולות לא ע״י החוק הדיסטריבוטיבי הרגיל בלבד כי אם ע״י חוק דיסטריבוטיבי נוסף, שהוא „דואלי״ לראשון.

והנה הכפל בין מספרים מונים המוגדר בהגדרה III והמוכלל ב־IV, בנוי בעצם גם הוא על החיבור (הגדרה II) כמו באריתמיטיקה, אף כי אין הדבר בולט מתוך ההגדרה III בעצמה. זה מתבטא ע״י

משפט 6: אפשר לקבל את המכפלה $\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}$ של שני מספרים מונים (סופיים או אינסופיים) גם ע״י חיבור „ממושך״; למשל, בקחתנו את המחובר $\mathbf{k}$, במובן ההגדרה II, מספר פעמים כפי המספר $\mathbf{l}$.

ההוכחה, שהיא קלה, תנתן במלואים לחלק הרביעי, מספר ה). בפרט יוצא, אם $\mathbf{l}$ הוא מספר טבעי n,

$$\mathbf{k} \cdot n = \mathbf{k} + \mathbf{k} + \cdots + \mathbf{k} \quad (n \text{ פעמים})$$

בהתאם לכפל האריתמיטי. אין פלא בדבר, שהרי זו היתה מטרתנו בהגדירנו את הכפל בעצמות. המקרה $\mathbf{l} = 0$ מקביל גם הוא למצב באריתמיטיקה, כפי שמראה המשפט 5.

דוגמות לכפל במספרים מונים.

א) $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots$ (הגורם 1 מופיע כאן בצורת סידרה.) הדבר נובע מיצירת המכפלה החיצונה P כנגד הגורמים (השרירותיים במידה רחבה)

$$N_1 = \{1, 2, 3\},\ N_2 = \{4, 5\},\ N_3 = \{6\},\ N_4 = \{7\},\ N_k = \{k+3\},\ (k > 2)$$

---

1. בארנו כאן את גורמי המכפלה $m \cdot n$ באופן שהראשון m יהיה „הנכפל״ והשני n, המכונה „כופל״, יבטא כמה פעמים יחובר הנכפל. אין זאת אלא שיגרת־לשון לפרש כך; אפשר גם במובן ההפוך. להלן נחזיק תמיד בשיגרה זו. באריתמיטיקה הרגילה, פרט למשל לקואטרניונות (I, 98 ו־216), וכן בכפל המספרים המונים המבואר כאן, אין הבדל בדבר איזה גורם יהיה הנכפל ואיזה הכופל, מחמת קיום החוק הקומוטטיבי של הכפל. במקרים אחרים, כגון בכפל המספרים הסודרים (פרק רביעי), יש לשים לב להבדל הנ״ל.

P מכילה את ששת האיברים הבאים:

$$\{1,4,6,7,8,\dots\},\ \{2,4,6,7,8,\dots\},\ \{3,4,6,7,8,\dots\},$$
$$\{1,5,6,7,8\dots\},\ \{2,5,6,7,8\dots\},\ \{3,5,6,7,8,\dots\}.$$

בפרט קיים לכל $\mathbf{k}$: $\mathbf{k}\cdot 1=\mathbf{k}$; שכן לגבי קבוצה המכילה איבר יחיד יש רק אפשרות אחת להוציא ממנה איבר לשם יצירת הצירופים. מכיון שגם $1\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}$, נלמד מן המשפט 6: אפשר לתאר כל עצמה $\mathbf{k}$ כסכום יחידות $1+1+\dots$, ו„מספר" המחוברים 1 מתאים לעצמה $\mathbf{k}$.

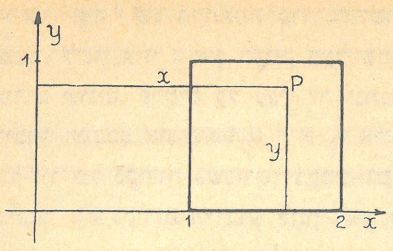
ב) $\aleph_0\cdot n=\aleph_0$. (n מסמן כאן, וכן תמיד להלן, מספר טבעי, כלומר מספר מונה סופי שונה מ 0.) נוכל להראות את נכונות היחס בכמה דרכים: על פי המשפט 6 דלעיל והמשפט 2 בעמ' 17, או בצאתנו מהדוגמה $\aleph_0\cdot 2=\aleph_0$ – השוה במלואים, סוף המספר ה) – דרך האינדוקציה השלימה.

ג) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$. זה יוצא מהמשפט 3 בעמ' 19 על־סמך המשפט 6 דלעיל. אם נתבונן להוכחת המשפט 3 (בעזרת המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$), נראה שאין בעצם צורך במשפט 6; שהרי השברים בעלי מונים ומכנים חיוביים יכולים להחשב כאותם הזוגות שהם איברי המכפלה החיצונה לפי ההגדרה III. אך שתי סטיות יש כאן, שאחת תלויה בחברתה, והן: שני הגורמים אינם קבוצות זרות אלא, אדרבה, שוות; והזוגות הם סדורים, שהרי אין להחליף את השבר $\frac{m}{n}$ בשבר $\frac{n}{m}$. ברם יש לגדור פרץ זה על נקלה, ואף בדרכים שונות, כפי שיגלה הקורא המתעמק ללא קושי. (השוה במלואים לחלק הרביעי, סוף המספר ו.) צורה הסתכלותית למחשבה זו יש למצוא ב I, 178.

ד) $\aleph=\aleph_0\cdot\aleph=n\cdot\aleph$. יש להפיק יחס זה מן המשפט 1 בעמ' 32 בעזרת המשפט 6 דלעיל. לשם כך נראה בסכום $\aleph+\aleph+\aleph+\dots$ את המחובר הראשון, למשל, כעצמת הרצף מ 0 עד 1, את השני כעצמת הרצף מ 1 עד 2, וכן הלאה. במקרה $n\cdot\aleph$ נקבל ע"י החיבור, בהתאם להגדרה II, את עצמת הרצף מ 0 עד n; במקרה $\aleph_0\cdot\aleph$ את עצמת הקבוצה שאיבריה הן נקודות הקו הישר הלא־מוגבל מאחת נקודותיו והלאה. מאידך, אפשר להוכיח את השויון גם במישרין על־פי המכפלה החיצונה, אם כותבים את נקודות הריוח בין n ו $n+1$ כזוגות (n, c) שבהם עובר c על כל המספרים הממשיים בין 0 ל 1.

ה) $\aleph=\aleph\cdot\aleph$. הוכחת השויון הזה נמצאת במלואים לחלק הרביעי, מספר ו). כאן נפרשׂ באופן גיאומטרי, בעזרת השיטה של שעורים (קואורדינטות) שבגיאומטריה האנליטית. (השוה I, 231; וכן להלן בפרק החמישי.)

נצא ממערכת־צירים במישור באופן שציר ה y (הפּוסק) מאונך לציר ה x (הפסוק), ונסתכל בקבוצת כל הנקודות $P=(x, y)$ שלגביהן $1<x\leq 2$ ו $0<y\leq 1$. נקודות אלו ממלאות ריבוע שקדקדיו הם בעלי השעורים $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$; עיין בציור 6[1].



ציור 6

לפי הגדרת הקבוצה הנ"ל שייכות לריבוע הנידון הצלע העליונה והימנית, אבל לא התחתונה והשמאלית, ומבין הקדקדים הנקודה $(2, 1)$ בלבד. (להגבלות אלו אין כל חשיבות, הן רק מקילות על ההוכחה שבמלואים. מובן מאליו, שלמשל תוספת כל הצלעות והקדקדים לא תשנה את העצמה, על פי $\aleph=\aleph+\aleph$.)

היחס $\aleph=\aleph\cdot\aleph$ קובע אפוא שהריבוע אקויולנטי לקטע, למשל לקטע מ 0 עד 1, אם נראה הן את הקטע הן את הריבוע כקבוצות נקודותיהם. לשון אחר: אפשר להתאים, בהתאמה חד־חד־ערכית, נקודותיו של ריבוע לנקודותיו של קטע, למשל לנקודות אחת מצלעותיו; וביתר כלליות, בהתאם למשפט 1 בעמ' 32: אפשר להתאים את נקודותיו של איזה מלבן שהוא, ואף של המישור כולו, לנקודות שבאיזה ריוח שהוא או שבקו הישר כולו. יש המבטאים זאת בצורה הבאה כדי „לשבר את האוזן": אפשר להתאים את כל הנקודות שבמישור אינסופי כולו לנקודותיו של קטע קטן כרצוננו. (בחלק החמישי יתברר שההגבלה לקטעים ישרים, או לתחומים בעלי שוליים ישרים, אינה נחוצה.)

כשפירסם קנטור בשנת 1877[2] מסקנה זו עם הכללתה (עיין בסעיף הבא), ראה בה העולם המתימטי משום הפתעה סנסאציונית, ואף מאנו להאמין בה. שכן המתימטיקנים היו משוכנעים, שמספר ממדיו של כל יציר גיאומטרי הוא יציב ואפייני, במובן שאי־אפשר להעתיק, למשל, יציר מישורי (דו־ממדי), כמלבן או ריבוע, אל יציר קווי (בעל ממד אחד), כלומר קטע. מסקנתו של קנטור הרסה וביטלה לכאורה את מהות הממד, בהראותה כאקויולנטיים מיני רצף שונים ללא הבדל ממדיהם.

ואולם התברר בינתים שבזה לא בוטל מושג הממד כל עיקר. אדרבה, דוקא אפייה המהפכני של מסקנת קנטור הכריחנו להעמיק ולחקור את עצם מהות הממד. אם לגבי ההעתק הנידון מוסיפים על דרישת חד־חד־

---

1. אמנם זוג השעורים הקובע נקודה במישור הוא זוג סדור, המפלֶה בין הפסוק x והפוסק y בניגוד לזוגות המופיעים במכפלה החיצונה שהם קבוצות סתם (לא סדורות). אבל במקרה שלפנינו הרי קבוצת ערכי הפסוק זרה היא לקבוצת ערכי הפוסק, ולכן נוכל לראות את הנקודות (x, y) אף כזוגות לא־סדורים, מאחר שאין אפשרות לערבב x ב y. השוה ההערה בסוף המספר ו) שבמלואים.

2. עיין בכרך 84 של ה Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, וכן באוסף של מאמרי קנטור, עמ' 119—133.

ע ר כ י ו ת ה[1] של ההתאמה עוד דרישת ה ר צ י פ ו ת, תהיה מובטחת שמירת הממד; לשון אחר: אין העתק בעל שתי תכונות אלו בין מיני רצף בני מספרי־ממדים שונים. פרטים על ענין זה ינתנו בפרק השביעי, § 2. ההעתק בין קטע וריבוע המבסס את היחס $\aleph = \aleph \cdot \aleph$ אינו שומר על רציפות, כלומר אינו מתאים לכל זוג של נקודות „שכנות" בקטע, גם זוג של נקודות „שכנות" בריבוע. זרקנו, כביכול, את נקודות הריבוע לתוך שק וערבבנון, בטרם התאמנו אותן לנקודות הקטע. לכן אין המסקנה שלפנינו נוגעת בחשיבותו של מושג ה„ממד" כמלוא נימה.

מתוך הגדרות החיבור והכפל שבסעיף זה הסקנו כמה מסקנות, הן לגבי חוקים פורמליים בתחום העצמות הן לגבי „לוחות החיבור והכפל" בעצמות הפשוטות ביותר. והנה מסקנות אלו אינן סוטות במידה ניכרת מחוקי החשבון הרגיל, או ממה שיש לצפות מ„מספרים אינסופיים". בפרק הבא נראה שבזה זכינו יותר במזל מאשר בהצלחה צפויה מראש ומתוך הכרח „אַ־פריוֹרי" כביכול. ואולם כבר כאן, בתחום המספרים המונים, יש סטיות עקרוניות ורחבות מן המצב באריתמטיקה, סטיות בשני כוונים: בדבר א י ־ ש ו י ו נ ו ת (בניגוד לשויונות שהופיעו עד הנה), ובדבר ה י פ ו כ ן של פעולות החיבור והכפל.

באריתמטיקה קיימים אי־השויונות הבאים, אם l, m, n הם מספרים טבעיים ו $m < n$:

$$l + m < l + n, \qquad l \cdot m < l \cdot n.$$

אין תוקף לאי־שויונות אלו בתחום העצמות. אדרבה, קיימים למשל השויונות:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0\ (=\aleph_0), \quad \aleph + \aleph_0 = \aleph + \aleph\ (=\aleph), \quad \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph \cdot \aleph\ (=\aleph)$$

על אף אי־השויונות $n < \aleph_0$ ו $\aleph_0 < \aleph$.

אפילו כנגד מספרים מונים ס ו פ י י ם, דהיינו מספרים טבעיים, מתבטלים אי־השויונות הנ"ל, לכשנשתמש בחופש החדש לבנות סכומים או מכפלות של אינסוף איברים, בהתאם להגדרות II ו IV. נצא למשל מאינסוף אי־השויונות (k מספר טבעי):

$$1 < 2,\ 2 < 3, \ldots,\ k < k + 1.$$

אף־על־פי־כן קיימים השויונות:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + \ldots = 2 + 3 + 4 + \ldots + (k+1) + \ldots,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \ldots = 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (k+1) \ldots .$$

שהרי הסכום שוה ל$\aleph_0$ (דוגמה ד) בעמ' 52). את ערך המכפלה נחשב ביתר נוחיות בסעיף הבא, אבל השויון בין שתי צורות המכפלה ברור מאליו.

1. חד־ערכיותה של ההתאמה ורציפותה יחד אינן מספיקות, כפי שיוצא, למשל, מעקום הממלא ריבוע שלם. השוה בפרק השביעי, § 2.

בכל זאת קיימים אי־שויונות גם בחשבון במספרים מונים; אחד מהם, חשוב ביותר, נלמד לדעת בסעיף הבא. אי־שויון אחר, פשוט ומועיל גם יחד, נוכיח עתה:

מ ש פ ט 7: תהא $S = \{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \ldots\}$ קבוצה של עצמות המכילה, כנגד כל עצמה שבS, עצמה גדולה ממנה. במקרה זה הסכום $\mathbf{s} = \mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} + \ldots$ של כל איברי S ג ד ו ל מכל איבר של S.

עלינו להראות: אם $\mathbf{q}$ הוא איזה איבר שהוא של S, קיים אי־השויון $\mathbf{q} < \mathbf{s}$. והנה לפי ההנחה יש בתוך S עצמה $\mathbf{r}$ שהיא גדולה מ$\mathbf{q}$. מאידך, לפי המשפט 4 מעמ' 46 ועל־סמך ההגדרה II, קיים על־כל־פנים כנגד המחובר $\mathbf{r}$ אי־השויון $\mathbf{s} \geqq \mathbf{r}$, ואי־השויונות $\mathbf{q} < \mathbf{r}$ ו $\mathbf{s} \geqq \mathbf{r}$ מצטרפים אל $\mathbf{q} < \mathbf{s}$, מש"ל. — מובן שיש תוקף למשפט גם לגבי מספרים סופיים; השוה הדוגמה ד) בעמ' 52.

המשפט 7 מרחיב את המסקנה שהוצאנו בעמ' 44 ממשפט־קנטור, ואף מרחיב אותה במידה העולה על כל הדמיון. נצא מאיזה מספר מונה $\mathbf{c}_0$ (סופי או אינסופי; אפילו $\mathbf{c}_0 = 0$). משפטו של קנטור ממציא לנו מספר $\mathbf{c}_1$ הגדול מ$\mathbf{c}_0$ (עצמת קבוצת־החזקה של קבוצה בעלת העצמה $\mathbf{c}_0$), וכן מספר $\mathbf{c}_2$ הגדול מ$\mathbf{c}_1$, וכו'; נקבל אפוא ס י ד ר ה $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots)$ של מספרים מונים, באופן שקיים $\mathbf{c}_{k+1} > \mathbf{c}_k$. סכום המספרים האלה גדול מכל $\mathbf{c}_k$ לפי המשפט 7; נסמן את הסכום ב $\mathbf{d}_0$. (אם $\mathbf{c}_0 = 0$, יהיה $\mathbf{d}_0 = \aleph_0$.) מ$\mathbf{d}_0$ נוכל ליצור על־פי המשפט של קנטור שוב סידרה של עצמות $(\mathbf{d}_k)$ כך ש$\mathbf{d}_{k+1} > \mathbf{d}_k$, והסכום $\mathbf{e}_0$ של כל ה$\mathbf{d}_k$ גדול מכל $\mathbf{d}_k$. וכן נוכל להמשיך בלי סוף, מתוך ת ה ל י ך של ע ל י ה ל מ ס פ ר י ם ג ד ו ל י ם י ו ת ר ו י ו ת ר — תהליך שאין דומה לו בין המספרים הרגילים.

חסרי־אונים עוד יותר מאשר לגבי שמירה על אי־השויונות שבחשבון הרגיל, אנו נמצאים כלפי ה י פ ו ך הפעולות שהוגדרו בסעיף זה; כלומר: כלפי ביצוע החיסור והחילוק. א י ן א פ ש ר ו ת ל ה ג ד י ר ב ת ח ו ם ה מ ס פ ר י ם ה מ ו נ י ם פ ע ו ל ו ת ח י ס ו ר א ו ח י ל ו ק הראויות לשמן — הן מתוך אותן הסיבות שאינן מרשות פעולות אלו בתחום המספרים הטבעיים[1] הן מתוך סיבות נוספות. לא רק שאין מספר מונה $\mathbf{x}$ הממלא את המשוואות $\aleph_0 + \mathbf{x} = 1$ או $\aleph_0 = \mathbf{x} \cdot \aleph$, אלא אפילו הפרשים ומנות „פשוטים" כמו $\aleph_0 - \aleph_0$ או $\frac{\aleph}{\aleph}$ (כלומר, פתרוני המשוואות $\aleph_0 + \mathbf{x} = \aleph_0$ או $\aleph \cdot \mathbf{x} = \aleph$) אינם קיימים, מתוך שאין להם קביעות חד־ערכית; שכן קיימים היחסים (כנגד כל מספר סופי n):

$$\aleph_0 + 0 = \aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph \cdot n = \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph \cdot \aleph = \aleph.$$

1. השוה I, 70 ו־76. הכוונה לאי־האפשרות של פתירת משוואות כמו $8 + x = 2$ או $3 = 2 \cdot x$ במספרים טבעיים x.

לכן, למשל, „המנה" $\frac{\aleph}{\aleph}$, אילו רצינו להכניסה, היתה צריכה להשתוות למספרים השונים n, $\aleph_0$, $\aleph$ גם יחד! כן יוצא מתוך המשפט 5 בעמ' 20, שלכל עצמה $\mathfrak{k}$ היה „ההפרש" $\mathfrak{k}-\mathfrak{k}$ מקבל לכל הפחות את אינסוף הערכים השונים 0, n, $\aleph_0$.

אי־האפשרות להעביר פעולות וחוקים מן האריתמיטיקה הרגילה אל החשבון בעצמות, לא תוכל לשמש עילה להוצאת שם רע על המספרים המונים האינסופיים. לאחר שהוגדרו היה זה תפקידנו לחקור את תכונותיהם ולא לכפות עליהם תכונות לפי שרירות לבנו או לפי דוגמת המספרים הסופיים. קל לראות, שהיסוד העמוק לסטיות הנ"ל מתכונות המספרים הרגילים נמצא בתכונתן האפיינית של הקבוצות האינסופיות, האקויולנטיות לקבוצות־חלקיות־ממש. ביטול העקרון „השלם גדול מחלקו" הוא מקור הסטיות, ועקבותיו נודעו בתחום העצמות לכל היקפו.

תרגילים ל§ 2.

1) הראה כי הסכום לכל סידרה של מספרים סופיים הוא $\aleph_0$, אם אינסוף מחוברים שונים מ 0!

2) אם $\mathfrak{f}$ מסמן את עצמתה של קבוצת כל הפונקציות (עמ' 34), מה הם ערכי הסכומים

$$\mathfrak{f}+n \quad \mathfrak{f}+\aleph_0 \quad \mathfrak{f}+\aleph, \quad \mathfrak{f}+\mathfrak{f}?$$

3) יהיו נתונים מספרים מונים (לאו דוקא במספר כדי מנייה) $\mathfrak{m}_k$ ו $\mathfrak{n}_k$ באופן שקיימים כל אי־השויונות $\mathfrak{m}_k \leqq \mathfrak{n}_k$. הוכח, שגם סכום כל ה $\mathfrak{m}_k$ שוה או קטן מסכום כל ה$\mathfrak{n}_k$, וכן מכפלת כל ה$\mathfrak{m}_k$ שוה או קטנה ממכפלת כל ה $\mathfrak{n}_k$!

4) אם בתרגיל הקודם נניח $\mathfrak{m}_k < \mathfrak{n}_k$, המותר למחוק גם במסקנה את המלים „שוה או"?

5) בהתאם למה שנאמר בעמ' 55, קשורות הפעולות בין קבוצות, היוצרות את הקבוצה הכוללת (הסכום) ואת המשותף (המכפלה הפנימית), ע"י החוקים הדיסטריבוטיביים $R\cdot(S+T)=R\cdot S+R\cdot T,\ R+S\cdot T=(R+S)\cdot(R+T)$. הוכח את החוקים האלה!

6) המחש את היחס $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ בהפרידך את קבוצת כל המספרים הטבעיים לאינסוף קבוצות בנות־מנייה! (הדבר אפשרי בדרכים שונות.)

7) מהי עצמת הקבוצה שאיבריה הם כל הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים? ומה נובע מתוך כך לגבי מספר הכרכים של „הספריה הכוללת" המתוארת ב § 1 של הפרק הראשון, אם אין מגבילים ע"י חסם קבוע את היקפו המכסימלי של כל ספר (בעוד שההיקף נשאר תמיד סופי)?

8) הנשאר בתקפו המשפט 7 אם, תחת „המכילה, כנגד כל עצמה, עצמה גדולה ממנה", נתנה „שאינה מכילה עצמה גדולה ביותר (מכסימום)"?

§ 3. פעולת ההעלאה־לחזקה בתחום העצמות.

באריתמיטיקה רגילים אנו להעמיד את ההעלאה לחזקה, דהיינו יצירת a^b, על הכפל, בראותנו את יצירת החזקה בעלת מעריך שלם חיובי b ככפל ממושך, כשם שאנו רואים את הכפל כחיבור ממושך. גם בתחום העצמות הגיע עתה תורה של פעולה זו. נקדיש לה סעיף מיוחד מחמת השימושים המרובים והחשובים הקשורים בה.

תחילה נגדיר את הפעולה באופן מקביל להגדרה שבאריתמיטיקה, כלומר ככפל ממושך. כדי לבנות את החזקה $\mathfrak{q}^2=\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}$ עלינו לבחור, לפי ההגדרה III ב § 2, בשתי קבוצות Q_1 ו Q_2 בעלות העצמה $\mathfrak{q}$ וליצור את עצמת המכפלה החיצונה $Q_1\times Q_2$. בעברנו למקרה הכללי של איזה מספר שהוא של גורמים שווים (בהתאם להגדרה IV), נקבל:

הגדרה I: כדי לבנות את החזקה $\mathfrak{q}^\mathfrak{r}$ שבה $\mathfrak{q}$ ו $\mathfrak{r}$ הם מספרים מונים (פרט ל $\mathfrak{r}=0$), נבחר בקבוצה R בעלת העצמה $\mathfrak{r}$ שכל איבריה הם קבוצות, זרות לחלוטין[1], בעלות העצמה $\mathfrak{q}$. במקרה זה תיקרא עצמתה $\mathfrak{t}$ של המכפלה החיצונה של כל איברי R החזקה בעלת הבסיס $\mathfrak{q}$ והמעריך $\mathfrak{r}$. בסימנים: $\mathfrak{t}=\mathfrak{q}^\mathfrak{r}$. בקיצור החזקה $\mathfrak{q}^\mathfrak{r}$ היא המכפלה המכילה את הגורם $\mathfrak{q}$ במספר כפי גודל המעריך $\mathfrak{r}$. (יש המגדירים את החזקה גם כנגד $\mathfrak{r}=0$ ע"י $\mathfrak{q}^0=1$, בתנאי ש $\mathfrak{q}\neq 0$.)

אין צורך להאריך בדבר, שתוצאת הפעולה אינה תלויה בבחירת הקבוצות המופיעות כאיברי R; שכן אי־תלות זו נובעת מן המשפט 3 ב § 2.

לגבי ההעלאה לחזקה בתחום המספרים הטבעיים קיימים החוקים הפורמליים:

$$a^b\cdot a^d=a^{b+d},\ a^d\cdot b^d=(a\cdot b)^d,\ (a^b)^d=a^{b\cdot d}.$$

חוקים אלו קיימים גם לגבי המספרים המונים (הסופיים והאינסופיים), רק שכאן מספר הגורמים (בשויון הראשון והשני) אינו מוגבל לשנים, או למספר סופי בכלל. בדרך זו נקבל את החוקים הבאים, שבהם אין הציונים מורים על מספר כדי מנייה דוקא:

---

1. תנאי זה של זרות אינו עקרוני כלל, בניגוד לתנאי המקביל בהגדרה II שב 2§. השוה מה שנאמר בכוון זה בקשר להגדרה III ב 2§ ולהגדרה II של סעיף זה (עמ' 64).

$$(1)\quad a^{b_1} \cdot a^{b_2} \cdot a^{b_3} \cdot \ldots = a^{b_1+b_2+b_3+\cdots}$$

$$(2)\quad a_1{}^d \cdot a_2{}^d \cdot a_3{}^d \cdot \ldots = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots)^d$$

$$(3)\quad (a^b)^d = a^{b \cdot d}$$

הוכחת היחסים האלה קלה למדי; עיין במלואים לחלק הרביעי, מספר ז).

קנטור, בהכניסו את ההעלאה לחזקה בין עצמות, נקט שיטה שונה מזו של ההגדרה I ועדיפה עליה בעיקר מבחינת השימושים: השיטה של קבוצת־ההרכבה. שיטה זו מסתמכת על מושג־הפונקציה הידוע לנו מן החלק השלישי (I, 228—245), אלא שכאן מופיע מושג זה בצורה כללית יותר: תחום־ההגדרה של הפונקציה — כלומר, קבוצת הערכים שעליה יעבור „גורם" הפונקציה — יהיה לאו דוקא ריוח וכיוצא בו, ואף לא בהכרח קבוצת־מספרים בכלל, אלא איזו קבוצה שהיא; וכן אין הגבלה לקבוצה שאליה ישתייכו ערכי־הפונקציה. בהשתמשנו בסימן הפונקציונלי המקובל f לתאור פונקציה חד־ערכית של גורם אחד, נכתוב $s = f(t)$; הגורם t יעבור על איברי קבוצה מסויימת T, וערכי־הפונקציה יוגבלו לאיבריה של קבוצה מסויימת S.

דוגמות: א) נבצע „מִשחק בקוביה" בהפילנו בבת אחת ארבע קוביות, מסומנות ב 1, 2, 3, 4. כידוע מראה כל נפילת קוביה את אחד המספרים $s=$ 1, 2, 3, 4, 5, 6. לפיכך יסמן $s=f(t)$ את המספר שהתקבל, בהפלה מסויימת, מתוך הפלת הקוביה t; תחום־ההגדרה הוא אפוא הקבוצה $T = \{1, 2, 3, 4\}$, וערכי־הפונקציה הם איברי הקבוצה $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. בשימנו לב, לעומת כל אחת מהקוביות, לכל תוצאת־נפילה אפשרית, ובצרפנו את ארבעתן, נקבל את כל התוצאות האפשריות של „הפלה" או „הרכבה" אחת. מספרן של תוצאות אלו הוא $1296 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$, אם שתי הפלות תחשבנה שונות במקרה שאחת הקוביות העלתה מספרים שונים. לכל אחת מ 6^4 האפשרויות מתאימה פונקציה מסויימת $s=f(t)$.

ב) נסדר נשף מוסיקלי, שתכניתו כוללת כמה ניגונים; קבוצת הניגונים תסומן ב T. S תהי קבוצת מנגנים, שכל אחד מהם מוכשר לבצע כל ניגון מתוך T. אם s יעבור על איברי S ו t על איברי T, תגדיר כל פונקציה מסויימת $s=f(t)$ קביעה ידועה לתכנית הנשף, כלומר הרכבה ידועה של המנגנים s על הניגונים t (נתעלם כליל מן הסדר בו יופיעו הניגונים.) מערכת כל הפונקציות הנ"ל תקבע את כל האפשרויות לביצוע התכנית. פונקציה מסויימת מתאימה אמנם לכל יחידה של הפרוגרמה באופן חד־ערכי את המנגן המבצע אותה; אבל אותו המנגן יכול לקבל עליו כמה תפקידים (אף את כולם), כלומר, המנגן s אינו קובע באופן חד־ערכי את הניגון t בתוך הרכבה מסויימת. הפונקציות הנידונות הן אפוא חד־ערכיות אך לא חד־חד־ערכיות.

ג) נתבונן לשבר עשרוני מסויים בין 0 ל 10, לרבות 0 ו 10; למשל $\pi = 3.14159..$. T תהי קבוצת המקומות בשבר כזה; הואיל ויש מקום אחד לפני הנקודה וסידרה של מקומות אחריה, נכתוב $T = \{0, 1, 2, \ldots, k, \ldots\}$, ברמזנו ב 0 למקום לפני הנקודה וב k למקום ה־k־י אחרי הנקודה. $s=f(t)$ נותן את הסיפרה המופיעה במקום t, דהיינו איבר מסויים מתוך הקבוצה $S = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. שבר עשרוני מסויים בין 0 ל 10, כגון π, מתאר פונקציה מסויימת $s=f(t)$, שבה יעבור t על כל איברי T; לשון אחר: הוא מתאר סידרה מסויימת שאיבריה ספרות. מערכת כל הפונקציות מן הסוג הנ"ל שקולה אפוא כנגד קבוצת כל השברים העשרוניים בין הגבולות הנ"ל[1]. גם כאן נוכל לכנות כל פונקציה $s = f(t)$ בשם „הרכבה של ערכים מתוך S על איבריה של T". באשר למספרן של הרכבות אלה, הנה כנגד המקום $t = 0$ יש 10 אפשרויות, וכן כנגד המקום $t = 1$, וכן הלאה; נקבל אפוא מעין מכפלה אינסופית $10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots$ (השוה בדוגמה א) לעיל.)

הצד השוה שבדוגמות הנ"ל הוא שתמיד מופיעות הרכבות מתוך קבוצה מסויימת S על קבוצה מסויימת T. כל הרכבה (פונקציה) לחוד עשויה להיראות כדבר דומה לקבוצה: מערכת של ערכי s המופיעים כנגד כל ערכי t. אולם יש הבדל בין הרכבה ובין קבוצה: לא כל ערכי s שבהרכבה צריכים להיות שונים זה מזה. נתקרב יותר למצב הדברים אם נדבר על צירופים כגון אלה הנזכרים בהגדרה IV שב § 2. אמנם הצירופים ההם היו קבוצות ממש על־סמך ההנחה שגורמי המכפלה החיצונה (עיין שם) הן קבוצות זרות לחלוטין. ברם אם נוותר על הנחה זו נצטרך, כנגד כל מקום בצירוף, לשים לב לא רק לערכו (איבר מתוך אחד הגורמים) אלא גם לגורם שממנו לוקח האיבר. וכן המצב כאן: עלינו לשים לב לא רק למספר המתקבל מנפילת קוביה אלא גם למספר הקוביה שהיפלנוה (בדוגמה הראשונה), וכן לא רק לסיפרה שבשבר העשרוני אלא גם למקום בו מופיעה הסיפרה. לפיכך, אם נרצה לראות את הצירופים כקבוצות, יהיו איברי הקבוצות לא הערכים s סתם אלא זוגות סדורים (t, s), שבהם מסמן s את הערך המותאם ל t, וכל שני זוגות שונים בערכי t, אך לא תמיד בערכי s.

על־סמך ההכנות האלה נגדיר:

---

1. מובן שעלינו להבדיל כאן בין שני שברים עשרוניים, אחד סופי ואחד אינסופי, המתארים אותו המספר הממשי (I, 140). למשל יש להבדיל בין ...0.999 ו ...1.000; באמת מתארים הם פונקציות שונות לגמרי. כי על כן מדובר כאן לא על פיתוח המספרים הממשיים לשברים עשרוניים אלא על השברים העשרוניים עצמם בתפיסה פורמלית. — השבר ...9.999 (שהוא שוה ל 10) הוא קצהו האחד של הריוח.

$$(1)\quad a^{b_1}\cdot a^{b_2}\cdot a^{b_3}\cdot\dots = a^{b_1+b_2+b_3+\cdots}$$

$$(2)\quad a_1{}^{d}\cdot a_2{}^{d}\cdot a_3{}^{d}\cdot\dots = (a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\dots)^{d}$$

$$(3)\qquad (a^{b})^{d} = a^{b\cdot d}$$

הוכחת היחסים האלה קלה למדי; עיין במלואים לחלק הרביעי, מספר ז).

קנטור, בהכניסו את ההעלאה לחזקה בין עצמות, נקט שיטה שונה מזו של ההגדרה I ועדיפה עליה בעיקר מבחינת השימושים: השיטה של קבוצת־ההרכבה. שיטה זו מסתמכת על מושג־הפונקציה הידוע לנו מן החלק השלישי (I, 228–245), אלא שכאן מופיע מושג זה בצורה כללית יותר: תחום־ההגדרה של הפונקציה – כלומר, קבוצת הערכים שעליה יעבור „גורם" הפונקציה – יהיה לאו דוקא ריוח וכיוצא בו, ואף לא בהכרח קבוצת־מספרים בכלל, אלא איזו קבוצה שהיא; וכן אין הגבלה לקבוצה שאליה ישתייכו ערכי־הפונקציה. בהשתמשנו בסימן הפונקציונלי המקובל f לתאור פונקציה חד־ערכית של גורם אחד, נכתוב $s = f(t)$; הגורם t יעבור על איברי קבוצה מסויימת T, וערכי־הפונקציה יוגבלו לאיבריה של קבוצה מסויימת S.

דוגמות: א) נבצע „מִשחק בקוביה" בהפילנו בבת אחת ארבע קוביות, מסומנות ב 1, 2, 3, 4. כידוע מראה כל נפילת קוביה את אחד המספרים $s=$ 1, 2, 3, 4, 5, 6. לפיכך יסמן $s=f(t)$ את המספר שהתקבל, בהפלה מסויימת, מתוך הפלת הקוביה t; תחום־ההגדרה הוא אפוא הקבוצה $T=\{1, 2, 3, 4\}$, וערכי־הפונקציה הם איברי הקבוצה $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. בשימנו לב, לעומת כל אחת מהקוביות, לכל תוצאת־נפילה אפשרית, ובצרפנו את ארבעתן, נקבל את כל התוצאות האפשריות של „הפלה" או „הרכבה" אחת. מספרן של תוצאות אלו הוא $1296 = 6\cdot6\cdot6\cdot6 = 6^4$, אם שתי הפלות תחשבנה שונות במקרה שאחת הקוביות העלתה מספרים שונים. לכל אחת מ 6^4 האפשרויות מתאימה פונקציה מסויימת $s=f(t)$.

ב) נסדר נשף מוסיקלי, שתכניתו כוללת כמה ניגונים; קבוצת הניגונים תסומן ב T. S תהי קבוצת מנגנים, שכל אחד מהם מוכשר לבצע כל ניגון מתוך T. אם s יעבור על איברי S ו t על איברי T, תגדיר כל פונקציה מסויימת $s=f(t)$ קביעה ידועה לתכנית הנשף, כלומר הרכבה ידועה של המנגנים s על הניגונים t (נתעלם כליל מן הסדר בו יופיעו הניגונים.) מערכת כל הפונקציות הנ"ל תקבע את כל האפשרויות לביצוע התכנית. פונקציה מסויימת מתאימה אמנם לכל יחידה של הפרוגרמה באופן חד־ערכי את המנגן המבצע אותה; אבל אותו המנגן יכול לקבל עליו כמה תפקידים (אף את כולם), כלומר, המנגן s אינו קובע באופן חד־ערכי את הניגון t בתוך הרכבה מסויימת. הפונקציות הנידונות הן אפוא חד־ערכיות אך לא חד־חד־ערכיות.

ג) נתבונן לשבר עשרוני מסויים בין 0 ל 10, לרבות 0 ו 10; למשל $\pi = 3.14159\dots$. T תהי קבוצת המקומות בשבר כזה; הואיל ויש מקום אחד לפני הנקודה וסידרה של מקומות אחריה, נכתוב $T=\{0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$, ברמזנו ב 0 למקום לפני הנקודה וב k למקום ה־k־י אחרי הנקודה. $s=f(t)$ נותן את הסיפרה המופיעה במקום t, דהיינו איבר מסויים מתוך הקבוצה $S=\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. שבר עשרוני מסויים בין 0 ל 10, כגון π, מתאר פונקציה מסויימת $s=f(t)$, שבה יעבור t על כל איברי T; לשון אחר: הוא מתאר סידרה מסויימת שאיבריה ספרות. מערכת כל הפונקציות מן הסוג הנ"ל שקולה אפוא כנגד קבוצת כל השברים העשרוניים בין הגבולות הנ"ל[1]. גם כאן נוכל לכנות כל פונקציה $s=f(t)$ בשם „הרכבה של ערכים מתוך S על איבריה של T". באשר למספרן של הרכבות אלה, הנה כנגד המקום $t=0$ יש 10 אפשרויות, וכן כנגד המקום $t=1$, וכן הלאה; נקבל אפוא מעין מכפלה אינסופית $10\cdot10\cdot10\dots$ (השוה בדוגמה א) לעיל.)

הצד השוה שבדוגמות הנ"ל הוא שתמיד מופיעות הרכבות מתוך קבוצה מסויימת S על קבוצה מסויימת T. כל הרכבה (פונקציה) לחוד עשויה להיראות כדבר דומה לקבוצה: מערכת של ערכי s המופיעים כנגד כל ערכי t. אולם יש הבדל בין הרכבה ובין קבוצה: לא כל ערכי s שבהרכבה צריכים להיות שונים זה מזה. נתקרב יותר למצב הדברים אם נדבר על צירופים כגון אלה הנזכרים בהגדרה IV שב § 2. אמנם הצירופים ההם היו קבוצות ממש על־סמך ההנחה שגורמי המכפלה החיצונה (עיין שם) הן קבוצות זרות לחלוטין. ברם אם נוותר על הנחה זו נצטרך, כנגד כל מקום בצירוף, לשים לב לא רק לערכו (איבר מתוך אחד הגורמים) אלא גם לגורם שממנו לוקח האיבר. וכן המצב כאן: עלינו לשים לב לא רק למספר המתקבל מנפילת קוביה אלא גם למספר הקוביה שהיפלנוה (בדוגמה הראשונה), וכן לא רק לסיפרה שבשבר העשרוני אלא גם למקום בו מופיעה הסיפרה. לפיכך, אם נרצה לראות את הצירופים כקבוצות, יהיו איברי הקבוצות לא הערכים s סתם אלא זוגות סדורים (t, s), שבהם מסמן s את הערך המותאם ל t, וכל שני זוגות שונים בערכי t, אך לא תמיד בערכי s.

על־סמך ההכנות האלה נגדיר:

---

1. מובן שעלינו להבדיל כאן בין שני שברים עשרוניים, אחד סופי ואחד אינסופי, המתארים אותו המספר הממשי (I, 140). למשל יש להבדיל בין 0.999... ו 1.000...; באמת מתארים הם פונקציות שונות לגמרי. כי על כן מדובר כאן לא על פיתוח המספרים הממשיים לשברים עשרוניים אלא על השברים העשרוניים עצמם בתפיסה פורמלית. — השבר 0.999... (שהוא שוה ל 10) הוא קצהו האחד של הריוח.

הגדרה II: תינתנה שתי קבוצות T (קבוצת ערכי־הגורם) ו S (קבוצת ערכי־הפונקציה); T לא תהא ריקה. נכנה בשם הרכבה של S על T כל התאמה חד־ערכית של איברים (לאו דוקא שונים) מתוך S אל כל איברי T; כלומר, כל פונקציה חד־ערכית $s = f(t)$ בעלת ערכים מתוך S, המוגדרת ב T. שתי הרכבות שוות רק אם הפונקציות המתאימות שוות; לאמור: אם בשני המקרים מותאם לכל ערך t אותו הערך s. קבוצת כל ההרכבות האלה תיקרא קבוצת־ההרכבה של S על T, ותסומן ב $(S \mid T)$.

לפי הבאורים דלעיל מתקבל על הדעת המשפט הבא, שהוכחתו המדוקדקת תנתן במלואים לחלק הרביעי, מספר ח):

משפט 1: לקבוצת־ההרכבה של S על T יש העצמה $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}$, אם $\mathbf{s}$ היא עצמת S ו $\mathbf{t}$ עצמת T.

בפרט יוצא ממשפט זה, שקיים $0^{\mathbf{t}} = 0$ לעומת כל מספר מונה $\mathbf{t}$; שהרי אם אין ערכים שנוכל להרכיבם על איברי T, אין במציאות שום הרכבה.

ועתה יש בכוחנו להסביר את המונח „קבוצת־החזקה" שהוכנס בעמ' 44 (משפט 2) לגבי קבוצת כל הקבוצות החלקיות. תהי A קבוצה בעלת העצמה $\mathbf{a}$. קבוצה חלקית מסויימת של A, לרבות הקבוצה הריקה ו A בעצמה, שקולה כנגד הרכבה מסויימת של קבוצה בת שני איברים: (הן, לא), או $(1, 0)$ על הקבוצה A; „הן" נתווה על איברי A הנמצאים בקבוצה החלקית, „לאו" על הנעדרים. לשון אחר: כל קבוצה חלקית משמשת פונקציה $f(a)$, שתחום־הגדרתה הוא הקבוצה A ושהיא עשויה לקבל רק שני ערכים 1 ו 0. התאמה זו בין הקבוצות החלקיות וההרכבות (הפונקציות) האפשריות היא חד־חד־ערכית; בפרט מתאימה A עצמה לפונקציה (הקבועה) $f(a) = 1$, הקבוצה הריקה לפונקציה $f(a) = 0$. לכן עָצמתה של קבוצת־ההרכבה הנידונה $(\{1, 0\} \mid A)$, השוה ל $2^{\mathbf{a}}$ בהתאם למשפט 1, היא גם עצמתה של קבוצת כל הקבוצות החלקיות של A; היטבנו אפוא לעשות בכנותנו אותה בשם „קבוצת־החזקה של A". לפיכך יוצא מן המשפט 2 בעמ' 44:

משפט 2: אם $\mathbf{a}$ היא עצמת הקבוצה A, תהיה $2^{\mathbf{a}}$ עצמת קבוצת־החזקה של A (קבוצת כל הקבוצות החלקיות של A). לעומת כל מספר מונה סופי או אינסופי $\mathbf{a}$, קיים $\mathbf{a} < 2^{\mathbf{a}}$.

כלפי מספרים סופיים $n = \mathbf{a}$ מוסר המשפט אך את העובדה הידועה $n < 2^n$, שכחה יפה גם לגבי $n = 0$ $(2^0 = 1)$. 2^n מסמן, למשל, את כל מקרי־הפילוג האפשריים למין (ילד או ילדה) בין ילדי משפחה, אם האם ילדה n מונים ואם נשים לב לסדר הבנים והבנות. במקרה זה נוכל לראות כל קבוצה

חלקית של $\{1, 2, \ldots, n\}$ כתבנית, שבה מתאים ילד לכל מספר המופיע בקבוצה החלקית, ילדה לכל מספר הנעדר ממנה.

2^n הוא גדול אמנם מ n, אבל (פרט למספרים הקטנים ביותר $n = 0$ ו $n = 1$) אינו עוקב את n; למשל נמצא 3 בין 2 ו 2^2. בעיה זו כלפי עצמות אינסופיות $\mathbf{a}$, השואלת „העוקב $2^{\mathbf{a}}$ את $\mathbf{a}$, אם יש עצמה בין $\mathbf{a}$ ל $2^{\mathbf{a}}$?", היא אחת הבעיות הקשות והחשובות ביותר לא של תורת־הקבוצות בלבד אלא של המתימטיקה בכללה. קוראים לה בשם בעית־הרצף המוכללת מתוך נימוק שיתבאר מיד.

מה שנאמר לעיל על תהליך העליה אל עצמות ההולכות וגֵדלות, אפשר לנסח עתה בְיֶתֶר פשטות. אם נצא מאיזו עצמה שהיא (או אפילו ממספר סופי) $\mathbf{b}$, נקבל את אי־השויונות

$$\mathbf{b} < 2^{\mathbf{b}} < 2^{2^{\mathbf{b}}} < \cdots < \mathbf{s} = \mathbf{b} + 2^{\mathbf{b}} + 2^{2^{\mathbf{b}}} + \cdots < 2^{\mathbf{s}} < \cdots$$

בתארנו איזו עצמה $\mathbf{a}$ כסכום שכל מחובריו שוים ל־1 (כך שמספר המחוברים הוא $\mathbf{a}$; עיין בעמ' 56), ואת החזקה $2^{\mathbf{a}}$ כמכפלה שכל גורמיה שוים ל 2, יתכן לפרש את המשפט 2 כדלקמן: בצאתנו מאי־השויון $1 < 2$, ובחזרנו עליו $\mathbf{a}$ מונים, נגיע מתוך חיבורם של כל האגפים השמאליים וכפלם של כל האגפים הימניים לאי־השויון $\mathbf{a} < 2^{\mathbf{a}}$. ואמנם קיימת ההכללה הבאה למשפט 2:

יהיו $\mathbf{m}_k$ ו $\mathbf{n}_k$ מספרים מונים (סופיים או אינסופיים) כך שכנגד כל k קיים $\mathbf{n}_k < \mathbf{m}_k$; כמו בהגדרה IV ב § 2 לא בא כאן הציון k לרמוז על ריבוי כדי־מנייה אלא על התאמה מסויימת בין המספרים $\mathbf{m}_k$ והמספרים $\mathbf{n}_k$. במקרה זה סכום כל המספרים $\mathbf{m}_k$ קטן הוא ממכפלת כל המספרים $\mathbf{n}_k$.

אם נקח בשני האגפים יחד את הסכום, או את המכפלה, לא נגיע לידי אי־שויון בדרך כלל (השוה התרגיל 4 בעמ' 60).

הוכחת המשפט הזה של J. König ו Zermelo מסובכת למדי, ולא נביאנה כאן. אף היא, כהוכחת המשפט 2 (המבוסס על המשפט 2 בעמ' 44), בנויה על שיטת־האלכסון. עיין, למשל, בספרו של Hausdorff (ספרו השני המצוטט בעמ' 41), עמ' 34/5, או בספר האנגלי של פרנקל המצוטט שם, עמ' 132—134.

הדוגמות „המספריות" להעלאה־לחזקה מבטאות על־פי־רוב משפטים מענינים, אם נפרשן לפי ההגדרה II. נתחיל בחזקה $10^{\aleph_0}$.

עלינו לצאת מקבוצה T בעלת העצמה $\aleph_0$, כלומר מקבוצה בת־מנייה, כגון קבוצת כל המספרים הטבעיים. נרכיב עליה קבוצה S בת עשרה איברים, למשל הקבוצה $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. כל הרכבה $f(t)$ תהיה אפוא סידרה של ספרות $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$; בהקדימנו את הסימן .0, נוכל לכתוב $f(t)$ כשבר עשרוני

מסויים בין 0 ל 1. (השוה דוגמה ג) לעיל.) לכן מכילה קבוצת־ההרכבה דדן, שעצמתה $10^{\aleph_0}$, את כל השברים העשרוניים, האינסופיים והסופיים, בין 0 ל 1.

מאידך יש לקבוע עצמת קבוצה זו של שברים עשרוניים על־סמך תיאורם של המספרים הממשיים כשברים עשרוניים (עמ' 28). הרי יש לקבוצת כל השברים האינסופיים בין 0 ל־1 העצמה $\aleph$; הואיל וקבוצת כל השברים הסופיים ניתנת להימנות, יש לקבוצת־ההרכבה הנידונה העצמה $\aleph_0+\aleph$, השוה לא. לאמור: $\aleph = 10^{\aleph_0}$.

אף ללא הוכחה מיוחדת ברור שלא יוכל להיות כאן תפקיד מיוחד למספר 10. שכן מן הנמנע הוא שהקשר המתימטי בין $\aleph_0$ ו $\aleph$, המתבטא בשויון שלפנינו, בנוי על העובדה הביולוגית „המקרית" שיש לבן־האדם עשר אצבעות – עובדה שעליה מבוססת השיטה העשרונית, לרבות השברים העשרוניים (I, 3–4). ואמנם אפשר לתאר את איברי הרֶצֶף, כלומר: את המספרים הממשיים, כשברים שיטתיים על־סמך כל מספר יסודי l, בתנאי שהמספר הטבעי l גדול מ־1 (I, 140–141); בפרט על־סמך המספר היסודי 2, שכנגדו נקבל[1]: $\aleph = 2^{\aleph_0}$. מאידך למדנו במשפט 2 כי $2^{\aleph_0}$ היא עצמתה של קבוצת־החזקה של כל קבוצה בת־מנייה. לכן קיים:

משפט 3: אם S היא קבוצת־החזקה של קבוצה בת־מנייה, כגון של קבוצת המספרים הטבעיים, שוה עצמת S לעצמת הרצף $\aleph$. בדרך־כלל קיים כנגד כל מספר טבעי l הגדול מ־1: $\aleph = l^{\aleph_0}$.

במלואים לחלק הרביעי, מספר ט), תנתן גם הוכחה ישרה ליחס זה, הוכחה שאינה סומכת על האפשרות של פיתוח המספרים הממשיים לשברים שיטתיים.

בהתאם למה שנאמר בעמ' 43, נוכל עתה לבטא את בעית הרצף כך: האם $2^{\aleph_0}$ היא העצמה העוקבת את $\aleph_0$, או היש עצמה אחרת בין $\aleph_0$ ו $2^{\aleph_0}$? לכן היטבנו לעשות בכנותנו לעיל את הבעיה המקבילה לגבי $2^{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ איזו עצמה אינסופית שהיא) בשם „בעית־הרצף המוכללת".

בבדקנו לאור ההגדרה II את הפונקציות שהוכנסו בעמ' 34, רואים אנו, שכל פונקציה מופיעה כהרכבה מתוך רצף על רצף; ביתר דיוק: כהרכבה מתוך קבוצת המספרים הממשיים כולם על קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל 1. לקבוצת כל ההרכבות האלה יש העצמה $\aleph^\aleph$, לפי המשפט 1 בעמ' 64. מכאן יוצא לגבי העצמה $\mathfrak{f}$ המוגדרת בעמ' 39: $\mathfrak{f} = \aleph^\aleph > \aleph$.

דוגמות: א) $\aleph_0^n = \aleph_0$ לגבי כל מספר טבעי n. יש להוכיח זאת ע"י אינדוקציה שלימה, על־סמך היחס $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$ וההגדרה I.

---

1. בכך נסתמך אפוא על תאורם של המספרים הממשיים, למשל בין 0 ל 1, כשברים „דואליים" $0.b_1 b_2 b_3\ldots$, שבהם יוכל b_k לקבל אחד הערכים 0 ו 1 בלבד.

ב) $\aleph^n = (2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0\cdot n} = 2^{\aleph_0} = \aleph$, אם n מספר טבעי.

ג) $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

שתי דוגמות אלו מייצגות מעין חשבונות לוגריתמיים. כי על כן הצגנו בהן את $\aleph$ כחזקה של 2 וחישבנו במעריך, שהוא „הלוגריתמוס" של $\aleph$ לבסיס 2 כביכול. (השוה מה שנאמר בעמ' 65.) למסקנה ב) יש להגיע, כמובן, גם על־פי אינדוקציה שלימה.

ד) $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$. נוכיח זאת בדרך חשבון פורמלי המראה את השימוש בכללי־החשבון השונים שלמדנום עד כה בתנאי $n > 1$:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = (n\cdot\aleph_0)^{\aleph_0} \text{ (ב) בעמ' 56)} = n^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0} \text{ ((2) בעמ' 62)} =$$
$$= n^{\aleph_0\cdot\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0} = (n^{\aleph_0})^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0} \text{ ((3) בעמ' 62)} =$$
$$= (n^{\aleph_0}\cdot\aleph_0)^{\aleph_0} = (\aleph\cdot\aleph_0)^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} \text{ (ד) בעמ' 56)} = \aleph.$$

ה) לגבי מכפלת כל המספרים הטבעיים קיים:

$$! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k\cdot\ldots = \aleph.$$

שהרי קודם כל קיים $2^{\aleph_0} \le\, !$ (עיין בתרגיל 3), עמ' 60), ומאותו טעם גם $! \le \aleph_0^{\aleph_0}$. אבל הואיל ו $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ כפי שהוכח לעיל, קיים גם $\aleph = \,!$.

ו) $\mathfrak{f} = \aleph^\aleph = (2^{\aleph_0})^\aleph = 2^{\aleph_0\cdot\aleph} = 2^\aleph$ (השוה לעיל). בתרגמנו זאת לשפת ההרכבות, נקבל: קבוצת כל הפונקציות $f(x)$ (המוגדרות, למשל, בין 0 ל 1) היכולות לקבל שני ערכי־פונקציה בלבד, כגון 0 ו 1, אקויולנטית לקבוצת כל הפונקציות ללא הגבלה לערכי־הפונקציה; זוהי הקבוצה שעסקנו בה בעמ' 34. מסקנה זו מפתיעה ברגע הראשון. ואמנם היא מראה באיזו מידה יתירה משפיע על היקפה של קבוצת־ההרכבה – כלומר, של קבוצת הפונקציות – היקפה של קבוצת הגורם (הקבוצה T שנרכיב עליה) משמשפיע היקפה של קבוצת ערכי־הפונקציה העומדים לרשותנו (הקבוצה S שנרכיב אותה על T). באמת גם באריתמיטיקה עולה בדרך כלל החזקה עם עלית המעריך ביתר מהירות מאשר עם עלית הבסיס.

הצגנו את נקודותיו של תחום מישורי (דו־ממדי), כגון של ריבוע או של המישור כולו, בעזרת שני שעורים (עיין בעמ' 57). בצורה מקבילה לגמרי אפשר לתאר את כל נקודותיה של קוביה, למשל, או גם של המרחב התלת־ממדי כולו, בעזרת שלשה שעורים x, y, z, או x_1, x_2, x_3. בגיאומטריה המופשטת עוסקים במרחבים שיש להם יותר משלשה ממדים; באופן כללי n ממדים (n איזה מספר טבעי שהוא), או אפילו $\aleph_0$ ממדים. (השוה להלן בפרק השמיני, §1.) כל נקודה במרחב בעל n ממדים מוגדרת, לפי שיטת השעורים, כסידרה סופית $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, וכן כל נקודה במרחב של $\aleph_0$ ממדים כסידרה אינסופית $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. בהקבלה למה שצויין בסעיף הקודם יוצא אפוא שלמרחב בעל שלשה ממדים, וכן לקוביה סופית, יש העצמה $\aleph^3$. אם נראה

אותם כקבוצות של כל הנקודות שבתוכם; כן יש למרחב בעל n ממדים העצמה $\aleph^n$, ולמרחב בעל $\aleph_0$ ממדים העצמה $\aleph^{\aleph_0}$. על־פי הדוגמות ב) ו־ג) מתקבל אפוא:

משפט 4: לקבוצת הנקודות שבתוך קוביה (בעלת איזו צלע שהיא), וכן לקבוצת כל הנקודות שבמרחב התלת־ממדי הלא־מוגבל, יש עצמת הרצף (הקוי) א. לפיכך אפשר להתאים בהתאמה חד־חד־ערכית את כל הנקודות שבמרחב האינסופי אל נקודותיו של קטע ישר, קטן ככל שיהיה.

גם למרחב בעל מספר־ממדים גדול מ 3, אם נראנו כקבוצת כל הנקודות שבו, יש העצמה א; וכן למרחב בעל ממדים כדי־מנייה, כלומר לקבוצת כל הסדרות $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ שבהן עובר כל x_k על המספרים הממשיים כולם.

וודאי שתכנו של משפט זה מפתיע. אבל לא פחות מפתיעה פשטות הדרך שבה הוכחנוהו, דהיינו החשבון הקצר שבדוגמות ב) ו־ג) – בפרט אם נשוה אותו לדרך המיגעת שבה הגיע קנטור בשנת 1877 אל המסקנה הפרוטה $\aleph^2 = \aleph$ (השוה לעיל עמ׳ 57). צדק קנטור בהתגאותו, 18 שנה אחרי־כך, בהישג זה, שזכה בו הודות לחשבון הפורמלי בעצמות. חשבון זה, לפי ההגדרות שבסעיף זה והקודם לו, עם חוקיו הפורמליים הוא מיכָניסם סמלי החוסך מלאכת־מחשבה, ככל סימבוליקה פוריה במתימטיקה; מה שנאמר בנידון זה בקשר לחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (I, 344), כחו יפה גם כאן, אף כי במידה צנועה יותר.

נסיים סעיף זה, ובעצם את תורת העצמות כולה, במשפט הקשור במישרין לאנליזה (תורת־הפונקציות), והמקנה לנו הבנה מעמיקה באפיין של פונקציות, הבנה שאין לקנותה אלא בשיטותיה של תורת־הקבוצות.

משפט 5: קבוצת כל הפונקציות הרציפות, וכן קבוצת כל הפונקציות הגזירות (I, 305), הן בעלות העצמה א – בניגוד לקבוצת כל הפונקציות שעצמתה $\mathfrak{f}$ גדולה מ א.

משפט זה כחו יפה בין אם נקח כתחום־הגדרתן של הפונקציות את הרצף הלא־מוגבל בין בקחתנו ריוח סופי; שהרי עצמתה של קבוצת־ההרכבה תלויה רק בעצמות של הבסיס והמעריך. באשר לבסיס, דהיינו לאוצר ערכי־הפונקציה, נוכל להצטמצם אף במספר סופי של ערכים, כפי שהוכח לעיל.

ההוכחה לגבי הפונקציות הרציפות תנתן במלואים לחלק הרביעי, מספר י). מתוך חלק זה של המשפט נובעת הטענה לגבי הפונקציות הגזירות על פי משפט האקויוָלנטיות. שהרי מצד אחד כל פונקציה גזירה היא גם רציפה (I, 306), כלומר קבוצת הפונקציות הגזירות היא קבוצה־חלקית (־ממש) לקבוצת הפונקציות הרציפות, שעצמתה היא א לפי הרישא של משפט 5. מאידך קבוצת הפונקציות הקבועות, שאף עצמתה היא א, מהווה קבוצה־חלקית(־ממש) לקבוצת הפונקצות הגזירות; שהרי לכל פונקציה קבועה יש

הנגזרת הקבועה 0. לכן שוה ל א גם עצמתה של קבוצת הפונקציות הגזירות, הנמצאת „בין" שתי האחרות.

ב I, 308 למדנו שכל פונקציה רציפה היא גם סכימה; לאמור: קבוצת הפונקציות הרציפות היא קבוצה חלקית לקבוצת הפונקציות הסכימות. לכן עצמת הקבוצה האחרונה שוה היא ל א או גדולה מ א. בדיקה קפדנית, שלא תיערך כאן, מראה שהעצמה הנידונה גדולה היא מ א; היא שוה ל $\mathfrak{f}$, כלומר לקבוצת כל הפונקציות – אפילו אם נתפוש את מושג הסֶכם במובן האלמנטרי של רימַן בלבד (פרק חמישי, § 5).

צירוף המסקנות הנ"ל מקנה לנו הבנה מעמיקה וחודרת של מושג הפונקציה לפירוטיו השונים. אנו רואים שמושג הפונקציה הרציפה הוא פירוט צר מאד למושג הפונקציה בדרך־כלל; לשון אחר: שמערכת הפונקציות הרציפות – ועל אחת כמה וכמה מערכת הפונקציות הגזירות, או הפונקציות האלמנטריות במובן של I, 258 – מהווה חלק קטנטן של הפונקציות במובנו הכללי של המושג, כלומר במובן של פונקציה רצונית (I, 258). לעומת דרישות מרחיקות־לכת אלו של הרציפות והגזירות, אין הסכימה דורשת הרבה מפונקציה; כי־על־כן קבוצת הפונקציות הסכימות אקויולנטית לקבוצת כל הפונקציות – אף כי יש, כמובן, שפע של פונקציות שאינן סכימות (כגון פונקציה השוה ל a במקומות הרציונליים ושוה ל b $[b \neq a]$ במקומות האירציונליים). על אפייה של פעולת הסכימה, הגוררת אחריה הבדל זה, הצבענו ב I,309.

תרגילים ל§3.

1) הוכח שיחסי־האקויולנטיות $S \sim S'$ ו $T \sim T'$ גוררים אחריהם את האקויולנטיות בין קבוצות־ההרכבה $(S \mid T)$ ו $(S' \mid T')$ – כפי הצורך להצדקת ההגדרה II.

2) הוכח על־פי ההגדרה II, שכנגד כל מספר מונה $\mathfrak{c}$ קיימים היחסים:

$$\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{c}, \qquad 1^{\mathfrak{c}} = 1.$$

3) הוכח את השויון (2) בעמ׳ 62 בעזרת ההגדרה II (וההגדרה IV שב§2)!

4) הוכח את השויון $\aleph = \aleph^{\aleph_0}$ ללא חשבון פורמלי, בדרך דומה לזו שבמספר ו) במלואים לחלק הרביעי!

5) הוכח את השויון $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0}$ בעזרת משפט־האקויולנטיות!

6) הוכח את השויונות $\mathfrak{f} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = \aleph \cdot \mathfrak{f}$, שבהם מסמן $\mathfrak{f}$ את עצמתה של קבוצת כל הפונקציות!

7) הוכח שעצמותיהן של קבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים, ושל קבוצת כל הקבוצות החלקיות של הרצף הניתנות למנייה, שוות ל א!

8) היוצר ההעתק שניתן במלואים, במספר ט), בין קבוצת הסדרות (1)

(השברים העשרוניים) ובין קבוצה של סדרות (2) (שברים דואליים), התאמה חד־חד־ערכית בין כל הסדרות (1) לכל הסדרות (2)?

9) מהי עצמת הקבוצה, שאיבריה הם כל הטורים המתכנסים של פונקציות רציפות (השוה I, 294 ו־298)? הסק מן התשובה, וממה שנאמר לעיל על עצמתה של קבוצת הפונקציות הסכימות, שאי־אפשר „בדרך כלל" לפתח פונקציה סכימה לטור של פונקציות רציפות (אף ללא הדרישה של התכנסות במידה שוה; השוה I, 295—298)! — עובדה זו מפיצה אור על אפיין הפתולוגי של הפונקציות הסכימות הכלליות.

§ 4. עקרון הכֶּפל (אכסיוֹמת־הבחירה).[1]

המשפט 5 של § 2 קובע, שמכפלה של מספרים מונים מתאַפסת רק אם לפחות אחד הגורמים מתאפס. לשון אחר: המכפלה החיצונה של גורמים, שהם קבוצות זרות לחלוטין שאף אחת מהן אינה ריקה, גם היא אינה ריקה. נימקנו טענה זו בכך, שאפשר לבחור מתוך כל אחד הגורמים איבר איבר; בצרפנו איברים אלו נקבל קבוצה m, שיש לה איבר משותף אחד ויחיד עם כל אחד הגורמים. לפיכך, על פי ההגדרה IV של § 2, m הוא איבר למכפלה החיצונה הנידונה. בכך הראינו שמכפלה זו אינה ריקה.

נסמן ב P את הקבוצה של גורמי המכפלה, שהם קבוצות זרות לחלוטין ושונות מקבוצת־האפס, וב p איזה איבר שהוא מתוך P, כלומר אחד הגורמים. M תהא המכפלה החיצונה של כל איברי P, ו m איבר איזה שהוא מתוך M. כל m מכיל אפוא איבר יחיד מתוך כל איבר של P.

ואולם, האם בנינו את הקבוצה m, כלומר איבר שרירותי מתוך M, לפי שיטה שיש לה זכות־אזרח במתימטיקה? הרי שום איבר של m לא נקבע לפי כלל מסויים! ואם תאמר „נקבע כל איבר באיזה אופן שהוא, שהרי לפי ההנחה מובטח שיש איברים בכל גורם" יש לומר „מה זאת אומרת: קבוע באיזה אופן שהוא?" בודאי, אם יש גורם אחד, או אפילו מספר סופי של גורמים, נוכל „לבחור" מתוכו (או מתוכם) איבר אחד(־אחד) וליצור את הקבוצה הסופית המכילה את האיברים הנבחרים ואותם בלבד[2]. תהליך זה מתאים להגדרת פונקציה כנגד מספר סופי של ערכי הגורם. אבל כנגד אינסוף מקרים, הרי רק מושג החוק, כלומר הפונקציה בדרך כלל, יוכל להבטיח לנו את

1. סע־ף זה הוא מופשט (ולכן קשה) מן הסעיפים הקודמים והעוקבים. אפשר לדלג עליו ולשוב אליו אחרי קריאת הספר כולו. השוה המאמר, המכיל רשימה מקיפה של הספרות על האכסיומה: A. A. Fraenkel: L'axiome du choix. *Revue Philosophique de Louvain*, T. 50 (1952), pp. 429—459.

2. רעיון זה אינו חלק ביותר וטעון ניתוח נוסף. אבל אפשר לבססו ע"י שיטותיה של תורת ההגיון בעזרת האינדוקציה השלימה.

קבוצת הערכים המותאמים, דהיינו את הערכים $f(x)$ כנגד כל ערכי הגורם x; ובמקרה שלפנינו: את האיברים שנבחר בהם מתוך כל גורם p! מאין נקח חוק כזה, שיתאים לכל גורם אחד מאיבריו וכך יתן לנו לצרף איברים אלו לקבוצה m — קבוצה שעצם מציאותה מראה את אי־התאפסותה של המכפלה?

המחקרים המעמיקים שבוצעו במשך יובל שנים להבטחת חוק כזה במקרה הכללי שלפנינו, העלו חרס בידיהם. אדרבה, הצלחנו להוכיח במובן ידוע, כי בהתאם לשיטות הנהוגות במתימטיקה אין לבנות חוק כזה. (השוה בחלק הששי.) לפי השיטות הרגילות ההן אין לאל ידנו להוכיח את המשפט, שמכפלתן החיצונה של קבוצות (או מכפלת מספרים מונים) מתאפסת אך ורק אם מתאפס אחד הגורמים. מאידך קשה מאד לוותר על משפט זה, לא בשל חשיבותו־הוא בלבד אלא בשים לב למסקנות הרבות והחשובות, בתורת הקבוצות ובמקצועות מתימטיים אחרים, התלויות בו. גם במובן פסיכולוגי יקשה לתפוס את הרעיון, שבין קבוצותיה החלקיות של הקבוצה הכוללת של כל הקבוצות p תיעדרנה אותן קבוצות דוקא המכילות איבר יחיד מכל p. ובכן לא נשאר לפנינו מוצא אחר אלא לקבל את המשפט כעקרון, במובן של מושכל ראשון או אכסיוֹמה — כשם שניסחו המתימטיקנים במשך הזמן כמה עקרונות שנראו כמובנים מאליהם לדורות קודמים. (השוה חלק חמישי, פרק שמיני.) נקבע אפוא:

עקרון־הכפל או אכסיומת הבחירה: אם איברי הקבוצה P הם קבוצות לא־ריקות וזרות לחלוטין p, יש במציאות לפחות קבוצה אחת m המכילה איבר אחד ויחיד מתוך כל איבר p. בקיצור: המכפלה החיצונה של כל איברי P אינה ריקה בתנאים ההם.

אפשר לנסח את העקרון גם כך: כנגד כל קבוצה P מן הסוג הנ"ל יש, לפחות, פונקציה אחת $f(x)$ שתחום־הגדרתה הוא P (כלומר, x יעבור על איברי P) והמתאימה לכל x באופן חד־ערכי איבר ידוע מתוך הקבוצה x[1]. — נוסח אחר: אם תופרד קבוצה נתונה S (היא הקבוצה הכוללת של איברי P לפי הנוסח הקודם) לחלקים זרים לא־ריקים, יש קבוצה המכילה איבר אחד מתוך כל חלק.

במקום השם „עקרון־הכפל" או „אכסיומת־הכפל" (multiplicative axiom) הנהוג בעיקר באנגליה לפי ניסוחו של B. Russell, נוהגים ביבשת אירופה וגם באמריקה לומר „עקרון־הבחירה" או „אכסיומת־הבחירה" לפי ניסוחו של Zermelo[2], שהכניס את העקרון במפורש לתוך המתימטיקה בשנת

1. נוסח זה הוא כללי יותר, באשר אינו מצריך את ההנחה שאיברי P יהיו קבוצות זרות דוקא.

2. הוא השתמש בנוסח הכללי; עיין להלן: „עקרון־הכפל המוכלל". רסל הכניס את עקרון הכפל ב 1906 בצורה הצרה (שהיא עדיפה), הדורשת שאיברי הקבוצה הנתונה יהיו קבוצות זרות.

1904 (אף־על־פי שכבר ב 1902 הפנה ב. לוי את לב החוקרים [1] אל הצורך בעקרון חדש מסוג זה). שם זה מקורו ברעיון הנאיבי, כאילו נוכל „לבחור" כאוות נפשנו מתוך כל איבר של P איבר מיוחד, שנכניסנו לתוך m – בחירה שהקושי לבצעה תלוי ב„צרת־העושר" דוקא של הקבוצות p. קוראים ל m גם בשם „קבוצת־בחירה" של P.

אל יטעה הקורא לחשוב, שעקרון־הכפל בא כדי לאפשר את הכפל, דהיינו להבטיח את מציאות המכפלה החיצונה של איברי p. מכפלה זו מובטחת מראש; כי על כן איבריה הם הקבוצות m – ביתר פירוט: קבוצות חלקיות של הקבוצה הכוללת של איברי P – בעלות התכונה האפיינית הבאה: המשותף בין m ובין כ ל איבר של P מכיל איבר יחיד. המכפלה קיימת אפוא כקבוצת כ ל הקבוצות בעלות התכונה הנ"ל המציינת אותן. מה שהעקרון בא להשמיענו ולהבטיחנו הוא: שהמכפלה א י נ ה ר י ק ה, כלומר שיש במציאות לכל הפחות קבוצה אחת m בעלת התכונה הנ"ל – אף כי אין לנו כל בטחון שנוכל ל ב נ ו ת אחת מקבוצות אלו בדרך קונסטרוקטיבית; לאמור: על־פי חוק הקובע את איברי הקבוצה המסויימת.

אם במדעי הטבע נעמוד בפני תופעה בלתי צפויה, שאין לאל ידנו לבארה על־פי החוקים והעקרונות הידועים מכבר, יש שניצור היפותיסה (השערה) חדשה כדי להכליל את התופעה החדשה במסגרת המבנה שבאותו מדע. ואולם אללי־לנו אם ההשערה תסביר את התופעה הנידונה ב ל ב ד („השערה ad hoc"); במקרה זה קרוב לודאי שאין לה שחר, ועל־כל־פנים לא נוכל למצוא לה חיזוק וסמוכין כראוי לכל השערה חדשה במדע. לפיכך עלינו לבדוק, מהו תפקידו של ע ק ר ו ן־ה כ פ ל במתימטיקה בכלל ובתורת־הקבוצות בפרט, מלבד המשפט המיוחד על התאפסות מכפלה.

מתברר כי בהיסח הדעת השתמשנו בעקרון הנ"ל לשם הוכחת שני משפטים אחרים בפרק זה: המשפטים 1 ו 3 של §2. למשפטים אלה יש אופי כללי מן המשפט 5 שבו דנו כאן; שהרי המשפטים 1 ו 3 הם הם ה מ א פ ש ר י ם את פ ע ו ל ו ת ה ח י ב ו ר ו ה כ פ ל בין מספרים מונים לפי ההגדרות II ו IV של ה§2, כמבואר שם. בלעדי המשפטים ההם לא נדע אם, בקבענו כשרירות־לבנו את הקבוצות המייצגות את המספרים הנתונים לשם חיבור או כפל, לא נשפיע השפעה שרירותית גם על תוצאת הפעולה.

הבה נבדוק את הוכחת המשפט 1! (אין צורך לשנות ולבדוק את הוכחת המשפט 3, שכן המשפטים והוכחותיהם מקבילים זה לזה בקויהם הראשיים). הראינו בעמ' 51, שהקבוצה הכוללת S של איברי הקבוצה R והקבוצה הכוללת S' של איברי הקבוצה R' (האקויולנטית ל R) אקויולנטיות זו לזו ($S \sim S'$) בתנאי,

1. Beppo Levi. אמנם הראשון שהרגיש, בקשר לשאלה אנליטית מסוג אחר לגמרי, שיש כאן מין היסק שלא היה נהוג במתימטיקה עד כה, היה G. Peano (1890).

ראשית שאיברי R ו R' הם קבוצות זרות לחלוטין, ושנית שיש העתק Φ בין R ו R' המתאים לכל קבוצה r (איבר של R) קבוצה א ק ו י ו ל נ ט י ת r' (איבר של R'): $r' \sim r$. כדי להוכיח את האקויולנטיות בין הקבוצות הכוללות S ו S' יצרנו העתק Ω ביניהן, והעתק זה בוסס על צירוף העתקים מסויימים בין כל אחת מן הקבוצות r ובת־זוגה r'. ואולם העובדה ש r ו r' אקויולנטיות זו לזו, אינה קובעת העתק מ ס ו י י ם ביניהן – אדרבה, בדרך־כלל יש ביניהן העתקים רבים, ואף רבים לאינסוף אם הקבוצות r ו r' הן אינסופיות. על כן קובע זוג־הקבוצות r ו r' לא העתק אחד אלא קבוצה Ψ, שאיבריה הם כל ההעתקים האפשריים בין r ל r'. לפיכך, כדי לבנות את ההעתק Ω, שומה עלינו „לבחור" מתוך כ ל קבוצה Ψ העתק מסויים ψ ולאחד את ההעתקים הנבחרים לקבוצה אחת. והנה זוהי בדיוק הפעולה שעקרון־הבחירה בא לבססה.

יוצא מכאן: לא לקבל את עקרון־הכפל, זאת אומרת לא להרשות בדרך־כלל את פעולות־החשבון בין מספרים מונים (אפילו סופיים, אם יופיעו במספר אינסופי). ואמנם השתמש קנטור בתהליך עקרוננו בכמה מקומות, וכן השתמשו בו באנליזה, ואיש לא הרגיש שיש כאן תהליך מיוחד חדש.

במשך שלשים השנים האחרונות התברר במידה גוברת והולכת, בעיקר הודות למחקרי האסכולה הפולנית והפולנית־יהודית של מתימטיקנים (בפרט בעתון הווארשאי Fundamenta Mathematicae), שזקוקים אנו לעקרון־הכפל כדי להוכיח משפטים רבים מתוך האנליזה (בעיקר מתורת הפונקציות הממשיות) ומתורת־הקבוצות; אפילו בתוך האריתמיטיקה (באלגברה המופשטת, עיין I, 193) יש משפטים מסוג זה. ה י ל ב ר ט, גדול המתימטיקנים בדור האחרון, הרחיק לכת באמרו: אכסיומת־הבחירה מבוססת על עקרון הגיוני כללי, שבלעדיו אי־אפשר לצעוד אפילו את הצעדים הראשונים בשיטת־ההיסק המתימטית. [1] בפרט הושם לב למשפטים, שלא זו בלבד שהם נ ו ב ע י ם מעקרון־הכפל אלא שהם ש ק ו ל י ם כנגדו; כלומר, שמהם גם אפשר לגזור עקרון זה כמסקנה. לא נוכל לרמוז כאן על סוגי־הבעיות השונים שהתפתחו בשטח זה; נזכיר אך דוגמה אחת, והיא: אם s ו t הם מספרים מונים, אפשר להוכיח בלעדי עקרון־הכפל את המשפטים „$s < t$ גורר תמיד $s + s < s + t$" ו„$s + s > s + t$ גורר תמיד $s > t$"; אך המשפט „$s + s < s + t$ גורר תמיד $s < t$" לא רק שהוא ת ל ו י בעקרון־הכפל אלא הוא ש ק ו ל כנגדו. כמו־כן שקול כנגדו קיום השויון $s \cdot s = s$ לגבי כל עצמה אינסופית s.

השימוש החשוב ביותר בעקרון־הבחירה יתואר בפרק הבא; הוא המשפט על הסידור הטוב. זאת היתה העילה העיקרית להכנסת העקרון כאכסיומה מיוחדת אל תוך המתימטיקה.

1. D. Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Mathem. Annalen*, vol. 88 (1923), pp. 151–165. (עיין בעמ' 152)

לעקרון־הכפל יש אופי מציאותי מובהק, בהכריזו על מציאותו של חוק (או קבוצה) שאין לאל ידנו לבנותו. הבה נדגיש את אפייו זה בעזרת שתי דוגמות מנוגדות זו לזו! נניח, שאיברי הקבוצה P הם קבוצות שאיבריהן מספרים טבעיים; למשל, הקבוצות p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ המכילות את כל המספרים הטבעיים בעלי n גורמים ראשוניים (שונים או שוים). (השוה I, 16.) בהתאם לכך יכיל האיבר p_1 של P את כל המספרים הראשוניים, p_2 את כל המכפלות של שני מספרים ראשוניים (כגון $4, 6, 9, 10, \ldots$), וכן הלאה. במקרה זה לא נזדקק לעקרון־הכפל כדי להבטיח קבוצה שיש לה איבר יחיד משותף עם כל p_n, אלא נוכל לבנות קבוצה כזו; למשל את הקבוצה המכילה מתוך כל קבוצה p_n את המספר הקטן ביותר הנמצא בה. הקבוצה הנבנית לפי זה היא $(2, 4, 8, 16, \ldots)$, ובאמת יש לה התכונה הנדרשת. קבוצה אחרת מן הסוג הנדרש תהיה למשל $(2, 3\cdot5, 7\cdot11\cdot13, 17\cdot19\cdot23\cdot29, \ldots)$. מדוע נוכל להבטיח במקרה זה מציאותה של קבוצה מן הסוג הרצוי ללא שימוש בעקרוננו? מפני שכאן יש חוק בנייתי (קונסטרוקטיבי) המציין איבר מסויים בכל אחת הקבוצות p_n (ואפילו כמה חוקים ממין זה); למשל החוק המסתמך על המשפט שבכל קבוצה של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר.

אך המצב ישתנה מן הקצה אל הקצה בקחתנו כאיברי P, תחת קבוצות של מספרים טבעיים, קבוצות של מספרים ממשיים אילו שהם – אף אם P תוסיף להיות קבוצה בת־מנייה כבדוגמה הקודמת. בקבוצה של מספרים ממשיים אין, בדרך־כלל, לא איבר קטן ביותר ולא איבר גדול ביותר; למשל לא בקבוצה המכילה את המספרים שבריוח הפתוח (I, 243) מ 0 עד 1. אמנם אין אנו קשורים בתכונות אלו דוקא („קטן ביותר", „גדול ביותר"). אבל אין שום טעם לשער שיש תכונה המציינת, לגבי כל קבוצה p של מספרים ממשיים, איבר מסויים מבין איברי p; לאמור, שאפשר לבנות גם במקרה זה פונקציה חד־ערכית $f(p)$ המקבלת כערכה איבר מתוך p. לכן, כדי לטעון שיש קבוצה המכילה איבר יחיד מתוך כל קבוצה p, עלינו להשען כאן על עקרון־הכפל.

הניגוד בין המושגים „בניה" ו„מציאות־סתם" הבולט ברעיונות אלו, מופיע גם בכמה מקומות אחרים במתימטיקה. במקרים רבים תלוי הדבר בעקרון־הכפל דוקא; באחרים[1] אחראי העקרון ההגיוני הנקרא „המשפט של השלישי הנמנע" (tertium non datur), הלא הוא אחד ממשפטיה היסודיים של תורת־ההגיון, המופיע כבר אצל אריסטו. הוא טוען: אם ח משפט (טענה) בר־משמעות, הרי נכון או ח או שלילתו ל א־ח. למשל, אם T היא תכונה בעלת משמעות כלפי מספרים, הרי למספר נתון n או שיש התכונה T או שאין לו. וגדולה מזו: אם S היא קבוצת

1. למשל כבר במשפט המפורסם הנקרא על שמותם של Bolzano ו Weierstrass, האומר: בכל קבוצה אינסופית חסומה של מספרים (או נקודות) יש לפחות „מקום־הצטברות" אחד.

מספרים, או שיש לכל איבר של S התכונה T, או שיש לפחות איבר אחד ב S בעל התכונה ל א־T. כשאין בידנו שיטה שבה נכריע כנגד כל מספר, היש לו התכונה הנידונה אם לא, יש לטענת המשפט הנ"ל ערך מציאותי בלבד ולא אופי בנייתי.

בפרק הבא נגדיר עצמה מסויימת $\aleph_1$ העוקבת את העצמה $\aleph_0$, כלומר הגדולה מ $\aleph_0$ וסמוכה לה. לפי הגדרה זו יוצא מן המשפט 1 בעמ' 43 ומן המשפט 4 בעמ' 46, שיש במציאות קבוצות של מספרים ממשיים בעלות העצמה $\aleph_1$. ואולם דוגמה־ממש לקבוצה כזו, קבועה דרך־בניה, לא הצלחנו למצוא עד היום.

בחומר שלמדנו לדעתו בראשית החלק הזה, בפרק הראשון, יש שני משפטים (קשורים זה בזה) שבהוכחתם השתמשנו בלא משים בעקרון־הכפל, אף כי לכאורה המשפטים פשוטים מאד. כדי להבהיר את הדבר נקדים הרחבה ידועה של עקרון הכפל, הנובעת מתוך ויתור על התנאי שאיברי הקבוצה הנתונה P יהיו קבוצות זרות. אין כל צורך לגולל את הענין מחדש; מספיק להשתמש באותו נוסח לעקרון האומר: יש פונקציה $f(x)$ שתחום־הגדרתה הוא P, והמתאימה לכל איבר x מתוך P באופן חד־ערכי אחד מאיברי x (עמ' 71). אפשר להוכיח[1] הרחבה זו על־סמך העקרון, כפי שנוסח למעלה. נדרוש אפוא:

עקרון־הכפל המוכלל: תהי P קבוצה שכל איבריה הם קבוצות לא־ריקות. במקרה זה קיים לפחות חוק (פונקציה) אחד המתאים לכל איבר p מתוך P באופן חד־ערכי אחד מאיברי p.

אין צורך להדגיש, שמתוך חוק אחד כנ"ל קל ליצור חוקים אחרים מאותו סוג – פרט למקרה בו תכיל כל קבוצה p איבר אחד בלבד, מקרה שבו אין צרך בעקרון־הכפל.

הבה נעיין על־סמך זה מחדש בהוכחת המשפט 4 מעמ' 20, האומר שכל קבוצה אינסופית P מקיפה קבוצה חלקית הניתנת להימנות! הופיעה שם סידרה של קבוצות (לא־ריקות) $P, P_1, P_2, \ldots$ שכל אחת מהן, P_k, היא קבוצה־חלקית־ממש של קודמתה P_{k-1}, ולכן כולן קבוצות חלקיות של P. ההוכחה נתבססה על בחירת איבר אחד p_k מתוך P_k. אבל מהיכן נקח חוק הקובע – באיזה אופן שהוא – את p_k בין איברי P_k? אם נוכל לבנות חוק כזה, אשרינו וטוב לנו! אולם בדרך־כלל

1. מהלך המחשבה הוא זה: אם נתונה קבוצה P שאיבריה p קבוצות לא־ריקות, אבל לאו־דוקא זרות לחלוטין, נוכל ליצור קבוצה Q אקויולנטית ל P, שאיבריה הם קבוצות זרות לחלוטין, באופן שהעתק מסויים בין P ו Q מתאים לכל איבר p של P קבוצה q אקויולנטית ל p, ואף העתק מסויים בין p ל q. במקרה זה קיימת, לפי עקרון־הכפל, קבוצה m המכילה איבר יחיד מתוך כל איבר של Q; לפיכך נקבל פונקציה $f(x)$ מן הסוג המבואר לעיל המוגדרת ב P ע"י ההעתקים בין איברי P לבין איברי Q.

אין לרשותנו חוק כזה, אלא אנו חיים מפיו של עקרון־הכפל המוכלל, שאין לו אופי בנייתי. ואמנם עקרון זה מבטיח מציאות (לא אפשרות־בניה) של כלל, המתאים לכל קבוצה חלקית לא־ריקה של P, ולכן בפרט לכל אחת מן הקבוצות P_k, איבר אחד מבין איבריה; על־פי כלל כזה נוכל לבחור באיברים p_k ולבצע את ההוכחה הנ"ל.

בלעדי עקרוננו לא תהיה בידנו הוכחה כללית למשפט 4 הנידון, ולכן גם לא למשפט 1 בעמ' 43 האומר ש $\aleph_0$ היא העצמה הקטנה ביותר – משפט שהוכחתו בנויה על המשפט 4 הנ"ל. כמו־כן נשען עליו המשפט 6 מעמ' 21 האומר: כל קבוצה אינסופית היא גם „על־סופית", כלומר אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש. משפט זה היה החוליה המכרעת בטענה, כי ההבדלה בין הקבוצות „הסופיות" ו„האינסופיות" מצד אחד, וההבדלה בין הקבוצות „הפיניטיות" וה„על־סופיות" מצד שני, באות כאחת. (השוה במלואים לחלק הרביעי, מספר א).) לא נוכל לזהות שני זוגות־מושגים אלו כל עוד לא נסתמך על עקרון־הבחירה, ואכן בלעדיו היינו צריכים להכיר, מלבד הקבוצות הסופיות (בעלות n איברים) והקבוצות העל־סופיות (האקויולנטיות לקבוצה־חלקית־ממש), בסוג שלישי של קבוצות: קבוצות שאינן סופיות ואינן על־סופיות. עָצמותיהן של קבוצות אלו היו מייצגות סוג שלישי של מספרים מונים, מספרים שאינם לא סופיים ולא על־סופיים, ואך עקרון הבחירה מרשה לנו להסתפק בשני סוגי מספרים בלבד: מספרים סופיים ואינסופיים.

יש גם סוגי־הגדרות אחרים למושג הסופיות (או האינסופיות), ששויון־הערך ביניהן ניתן להוכחה רק בעזרת עקרון־הכפל.[1]

מאידך אפשר להוכיח את המשפט 4 ללא שימוש בעקרון־הכפל, אם „קבוצה אינסופית" תוחלף שם ב„קבוצה על־סופית"; כלומר, קבוצה האקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש. ההוכחה תנתן במלואים, מספר יא).

כללו של דבר: אל נתייאש בגלל אפיו המציאותי של עקרון־הכפל עד כדי הרהור שאין ממש בטענתו. נכון הדבר, שרק בתקופה המאוחרת של המחקר המתימטי נתגלה כי יש כאן עקרון חדש שדורות קודמים לא נשענו עליו; כן נכון הדבר, שהתהליך הרגיל במתימטיקה, הבניה (הקונסטרוקציה), לא יוכל לבסס עקרון זה. אבל לא נצדק בחשבנו שבגלל זה נופל העקרון בחשיבותו מאכסיומות אחרות, שיש להן יד ושם בביסוס האריתמיטיקה, האנליזה והגיאומטריה. הלא כהכרה הסתכלותי יֵראה לנו, כי מכפלה של קבוצות שאינן ריקות מכילה איברים גם היא – אף כי לא נוכל תמיד להציג, דרך־בניה, אחד מאיברים אלו.

---

1. השוה: A. Tarski: Sur les ensembles finis. *Fundamenta Mathem.*, vol. 6 (1925), pp. 45–95. (עיין בעיקר בסוף המאמר).

באותה זכות שבה אתה שולל את עקרון־הכפל, תוכל לדחות גם עקרונות פוריים אחרים במתימטיקה ולעקור ע"י זה תורות בעלות ערך ומשקל. הרי כל עקרון, אף מן החשובים והנחוצים ביותר, נוסח פעם בראשונה, ועל־פי רוב היתה זאת אחרי שהשתמשו בו בהיסח־הדעת. המתימטיקנים הגיעו לעקרונות או אכסיומות כאלה מתוך בירורם וליבונם ההגיוני של מושגים, שיטות והוכחות הנמצאות במדע, שראשית יצירתם באה בדרך אינטואיטיבית יותר מהגיונית, מתוך התפתחות שיש להבינה לאור גורמים פסיכולוגיים והיסטוריים. כך העיזו מתימטיקני יון להכניס את אכסיומת־המקבילים (עיין להלן בפרק השמיני) תחת כנפי הגיאומטריה, וגילוי אפייה ההִפותיטי (לא־הכרחי במובן ההגיון) של אכסיומת־המקבילים לא גרע מאומה מזיוה והדרה של הגיאומטריה האבקלידית. מתוך הפולמוס הממושך והמפורסם על עקרון־הכפל[1] תשאר בודאי לדורות הבאים רק הבעיה החשובה: מה הם המשפטים והמגמות באנליזה ובתורת־הקבוצות שאפשר לבסס בלעדי התהליך המציאותי הקשור בכל שימוש בעקרון־הכפל?

פרק רביעי: קבוצות סדורות וסדורות־היטב. המספרים הסודרים.[2]

§ 1. הקבוצות הסדורות והדמיון ביניהן.

כל מה שפעלנו עד כאן בתחום הקבוצות האינסופיות נטה לצד אחד: עסקנו במספריהן המונים (עָצמותיהן) של הקבוצות, כלומר בתכונתן המשותפת של קבוצות אקויָולנטיות. הכרנו מספרים אלה כסוג של גדלים גדולים־לאינסוף המהווים הכללה למספרים הטבעיים (מספרים מונים סופיים); ואמנם למדנו להשוותם, לסדרם לפי גדלם (בהגבלה ידועה), ולחשב בהם, מתוך הקבלה רבה ליחסים ולפעולות שבין המספרים הטבעיים.

ואולם, כאמור בתחילת הפרק הראשון, יש שקבוצה מגלה, נוסף על מהותם המיוחדת של איבריה, תכונות שאינן מתמצות בעצמת הקבוצה: תכונות־סדר, הנובעות מן העובדה, שאיברי הקבוצה נתונים בסדר מסויים; כלומר, שנתונה לנו קבוצה סדורה. יש שקבוצות סדורות האקויולנטיות זו לזו, מגלות פנים שונות בהחלט. לשם דוגמה יסמן N את קבוצת המספרים הטבעיים המסודרים, לפי גדלם[3]: $N = (1, 2, 3, \ldots)$, ו R את קבוצת השברים החיוביים הסדורים גם הם לפי גדלם. למדנו בעמ' 18, על־סמך סידור מלאכותי

---

1. פולמוס זה הגיע לשיאו בשנות 1905—1913, אך לא נשתתק לגמרי גם אחרי זה.
2. עיין בהערה שבראשית הפרק השלישי, עמ' 41.
3. אם נציין קבוצה סדורה ע"י איבריה (כולם, או חלק מהם), נכניס את האיברים לסוגריים עגולים.

במקצת של השברים (לא לפי גדלם), ש־N ו־R אקויולנטיות הן. ואולם R רחוקה היא מ־N כרחוק מזרח ממערב במה שנוגע לסדר איבריהן: בתוך N יש איבר ראשון (1), ולכל איבר אחר n של N יש בתוך N איבר שכן קודם $n-1$ ואיבר שכן עוקב $n+1$; ואילו בתוך R אין איבר ראשון, הואיל וכנגד כל שבר חיובי יש שברים חיוביים קטנים ממנו, ואין שכן לשום איבר של R לא לפניו ולא לאחריו, מפני שבין כל שני שברים נמצאים שברים נוספים, כגון הממוצע האריתמיטי וכו׳. ולא עוד אלא שאותה קבוצה, לאמור: קבוצה הקבועה ע״י כולל איבריה, מסבירה פנים בצורות שונות מאד בהתאם לכלל שלפיו סדורים איבריה. לקבוצת כל המספרים השלמים, למשל, אין איבר ראשון בסדר לפי גודל המספרים: $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, ברם יש לה איבר ראשון כשהיא סדורה לפי התבנית $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$. שונות משתיהן, וכן בינן לבין עצמן, תבניות־הסדר הבאות של אותה הקבוצה:

$$(0, 2, -2, 4, -4, \ldots 1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots)$$

$$(\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots \ \ldots, -7, -3, 1, 5, \ldots \ \ldots, -6, -2, 2, 6, \ldots \ \ldots, -5, -1, 3, 7, \ldots).$$

מי שחפץ בהמחשה הסתכלותית להבדל הקיים בין קבוצה־סתם לבין קבוצה סדורה, יתאר לו שק תפוזים מזה ואת הנרות במנורת־חנוכה מזה.

בטרם נתחיל בפיתוחן השיטתי של הבעיות החדשות המתעוררות כך, נקדים כמה הערות עקרוניות כלפי תורת הסדר והקבוצות הסדורות. יש רגלים לדבר שהקבוצה הסדורה היא, במובן הפסיכולוגי, המושג המקורי; מושג הקבוצה־סתם, שהוא פשוט ממנו במבנהו המתימטי־הגיוני, נוצר מן הקבוצה הסדורה דרך הפשטה, מתוך התעלמות מחושבת מן הסדר בו ניתנו איברי הקבוצה. הלא חושינו וגם הגיוננו מושיטים לנו, בדרך כלל, עצמים בודדים לפי סדר מסויים בזמן או במרחב; וגם ברצותנו להעביר לפנינו, אחד אחד, את איבריה של קבוצה שאינה נתונה מראש בסדר מסויים — נגיד: את הבתים שבירושלם — לא נוכל לעשות זאת אלא לפי סדר מסויים. כבני אדם נוצרנו לא לפי „זכור ושמור בדיבור אחד" כי אם לפי „כבקרת רועה עדרו, מעביר צאנו תחת שבטו".

על־פי הדברים האלה יתכן להקדים את תורת הקבוצות הסדורות (תורת הדמיון והסדר) לתורת האקויולנטיות, שבארנוה בפרקים הקודמים. יש אף טענות מדעיות ידועות לטובת תהליך זה. ואולם נפסיד הרבה מפשטות ההרצאה אם נלך בדרך זו. הלא תורת האקויולנטיות בנויה על הפשטה נוספת, ולכן ברוב חלקיה פשוטה ושקופה היא מתורת הסדר, שבה מתווסף יחס חדש בין איברי הקבוצה: יחס הסדר. ואמנם בדרך־כלל צועד התיאור השיטתי, בין במתימטיקה בין בתורת־ההגיון, לפי המגמה מן הכלל אל הפרט, כפי שצעדנו כאן.

המקצוע, המכונה תורת הקבוצות הסדורות, לא נוצר מתוך מחשבה פסיכולוגית. צרכי המתימטיקה עצמם קובעים למקצוע זה חשיבות מיוחדת, לא בשל תורת־הקבוצות בלבד כי אם גם בשל האנליזה והגיאומטריה.

אמנם הכללנו את מושג המספר הטבעי בהכניסנו את המספרים המונים האינסופיים, אבל הכללה זו היא חד־צדדית למדי. הלא בחיים משתמשים אנו במספרים הטבעיים לא רק כדי לקבוע את מספר העצמים שבמערכת נתונה (תשובה על השאלה: כמה?) אלא גם כדי לספור את איבריה אחד אחד: ראשית, שנית, שלישית,... (השוה הפרקים א׳ ו־ב׳ בכרך הראשון של ספר זה.) במובן מתימטי צד זה של המספר הטבעי פשוט הוא אף מן הצד הראשון.

אמנם לגבי המספרים הסופיים (הטבעיים) אין צורך, מהשקפה מתימטית (ברם יש ויש צורך מהשקפה פילוסופית!) להקפיד ולהבדיל בין המספרים המונים והמספרים הסודרים. שכן קיים המשפט הבא: אם לפי אלו תהליכים שהם נסדר את איבריה של קבוצה סופית נתונה (או את איבריהן של שתי קבוצות סופיות אקויולנטיות), נגיע תמיד בספירת האיברים (ראשון, שני, שלישי וכו׳) אצל האיבר האחרון לאותו המספר הסודר. לכן בתחום הסופי מתאים לא רק לכל קבוצה סדורה ולכל מספר סודר מספר מונה מסויים (כמו גם בתחום האינסופי), אלא אף חילופו: לכל מספר מונה סופי מתאים מספר סודר אחד בלבד.

עובדה זו נראית לנו כמובנת מאליה, בהיותה ידועה לנו מנעורינו ומאושרת ע״י מספר עצום של נסיונות פשוטים מאד. אולם באמת לפנינו כאן משפט אריתמיטי, שכבר הצבענו עליו ב 1, 22; הוא זקוק להוכחה מדוקדקת. נוכיחו במלואים לחלק הרביעי, מספר יב)[1].

בהתאם לכך אין צורך להבדיל לגבי מספר סופי n בין תפקידו כמספר מונה לתפקידו כמספר סודר, הואיל ו־n קובע במלואה את תבניתה הסידורית היחידה של קבוצה בעלת המספר המונה n. בניגוד גמור לזה אפשר, כפי שמעידות הדוגמות דלעיל, לסדר קבוצה אינסופית לא רק (כמו קבוצה סופית) באופנים שונים אלא באופנים שונים בעיקרם, כלומר באופנים המביאים לידי „תבניות־סדר" שונות — מושג שנגדירו להלן. לכן, ברצותנו להכליל את תהליך־הספירה מעבר למספרים הסודרים הסופיים והלאה, לא די יהיה לאחוז במספרים המונים האינסופיים, באשר יש בהם משום הפשטה יתירה; עלינו לבנות „מספרים" חדשים, דהיינו סמלים, שיותאמו לאיבריה השונים של קבוצה סדורה, בהתאם למקום בו הם מופיעים לפי הסדר שבקבוצה — כמו שמותאמים המספרים הסודרים: ראשית, שנית, ...,n־ית לאיברי הקבוצות הסדורות הסופיות. כבר בתקופה הקדומה של יצירתו הגיע קנטור לסימנים מסוג זה המכונים

---

1. E. Schröder (השוה ספרו Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, כרך ראשון [יותר לא הופיע], לפסיה 1873) הדגיש, שיש כאן עובדה שאינה מובנת מאליה — אבל עוד לא עמד על כך, שעובדה זו ניתנת להוכחה עיונית ולא רק נסיונית.

„טיפוסי־סדר" או „מספרים סודרים"; כך הוכנס לתוך המתימטיקה ותורת־ההגיון סוג חדש של מספרים אינסופיים. נוכל לבסס מספרים אלה בצאתנו מן הקבוצות הסדורות, לפי אותה שיטה ממש שהובילתנו מן הקבוצות־סתם אל העצמות. (קנטור הלך מלכתחילה בדרך אחרת הנובעת מצרכי האנליזה.)

לתורת הקבוצות הסדורות נודעת חשיבות מרובה, נוסף על משמעות עקרונית זו, לרגל שימושיה המרובים במקצועות מתימטיים אחרים; בייחוד בתורת־הפונקציות ובגיאומטריה. מחמת כלליותו היתירה של מושג האקויולנטיות מתבטלים ונהרסים בתוך תורת האקויולנטיות דוקא יחסים מתימטיים פרוטים כגון שכינות, קשר, צפיפות, רציפות, ממד וכו', דהיינו יחסים בעלי חשיבות מכרעת לבדיקתם ולניתוחם של הפונקציות והיצירים הגיאומטריים. לפחות לגבי חלק ממושגים אלה יש חשיבות ליחס הסדר. בפרקים הקודמים הסתכלנו פעמים אחדות באותו תהליך של הריסת יחסים ע"י מושג האקויולנטיות, ועתה שומה עלינו לבנות הנהרסות, לפחות מקצתן. בחלק הבא (פרק ששי) שבו ידובר על „הפרוגרמה מאֶרלַנגן", נתקל בתהליכים בגיאומטריה שאף הם שונים זה מזה לפי מידת ההפשטה שבהם. תורת־הקבוצות היתה צועדת צעד של התאבדות כמעט אילו, מתוך שאיפה חד־צדדית להפשטה וכלליות, היתה פוסחת על תהליכים ומושגים המאפשרים הפרטה והמכשירים את התורה לשימושים רב־גוניים.

הבה ננתח את המושג של „קבוצה סדורה"! על מושג הקבוצה־סתם עלינו להוסיף כלל (חוק) הקובע כנגד כל שני איברים שונים של הקבוצה, שאחד מהם יקדם וחברו יעקוב (יאחר). יחס זה בין כל שני איברים של הקבוצה הוא כללי מאד, מוגבל רק ע"י התנאים המפורשים להלן; אין כל משמעות מרחבית או זמנית ליחס שלפנינו, ואין לו קשר בסידור האיברים לפי הגודל ובתכונות דומות, אם הם, למשל, מספרים. עניות השפה, שאינה בנויה לפי צרכים הגיוניים מופשטים, כופה אותנו לנקוט במונחים כמו „קודם" ו„עוקב"; כן משתמשים אנו במקרים רבים בסידור מרחבי, כגון משמאל ימינה, כדי לרמוז לסדר.

התנאים הנוספים הנדרשים מיחס הסדר, בהתאם לרוב (לא לכל) שימושיו הן במדע הן מחוצה לו, הם שלשה (השוה לעיל עמ' 42 ו163, I):

א) לעולם אין איבר קודם לעצמו.

ב) אם a קודם לb, אין b קודם לa. (לשון אחר, לפי מה שנאמר לקמן: איבר אינו יכול להיות גם קודם גם עוקב לאותו האיבר.)

ג) אם a קודם לb וb קודם לc, קודם a לc.

כדי לסמן את יחס־הסדר במובנו הכללי הזה, לא יתכן לקחת את הסימן $<$ שאנו רגילים להשתמש בו כלפי סידור לפי הגודל. הרי היחס האריתמטי $3 < 5$ אינו שולל את האפשרות להקדים 5 ל3 בקבוצה סדורה. נשתמש אפוא כאן בסימן $\prec$; $a \prec b$ יתבטא "a קודם לb" או "a לפני b". במקרים שבהם

רצוי להתחיל (משמאל) את כתיב היחס הזה בb, יש צורך בסימן אחר, לפי התנאי ב); נכתוב $b \succ a$, ובמלים: "b עוקב לa", או "b אחרי a". אין זה אלא ביטוי אחר, שוה־משמעות, ל$a \prec b$.

הגדרה I: תהי נתונה קבוצה, ובצדה כלל (חוק) הקובע, כנגד כל שני איברים שונים a וb מתוך הקבוצה, אחד היחסים $a \prec b$ ו$b \prec a$ בתנאי: א) שלעולם לא יתקיים $a \prec a$; ב) שהיחסים $a \prec b$ ו$b \prec a$ סותרים זה את זה; ג) שהיחסים $a \prec b$ ו$b \prec c$ גוררים אחריהם $a \prec c$. במקרה זה נדבר על קבוצה סדורה.

לאמיתו של דבר קבוצה סדורה היא אפוא צירוף של קבוצה ויחס סודר; אך בדרך־כלל תסומן קבוצה סדורה ע"י סימן אחד, כמו קבוצה־סתם.

אם קיימים ביחד שני היחסים $a \prec b$ ו$b \prec c$ (בקיצור: $a \prec b \prec c$), נאמר: b נמצא בין a וc, וגם בין c וa. אם a קודם (עוקב) לכל שאר איברי הקבוצה, ייקרא a האיבר הראשון (האחרון) של הקבוצה. אם S היא קבוצה סופית, יוכל הכלל הסודר להנתן בצורת רשימה מלאה של כל יחסי־הסדר הנכונים כנגד זוגות־האיברים מתוך S. אולם אין אפשרות כזו לגבי קבוצה אינסופית, ולכן צריך לעמוד כאן במקום הרשימה אותו מכשיר שבו משתמש המתימטיקן כדי לכלול אינסוף יחסים בביטוי סופי, הלא הוא החוק, בצורת נוסחה, פונקציה וכו'. (השוה מה שנאמר בעמ' 8 על העתק בין שתי קבוצות אקויולנטיות.) במקרים רבים מספיק לרמוז על החוק הנידון בעזרת כתיב מסודר של אחדים מאיברי הקבוצה והוספת נקודות המורות על שאר האיברים ועל הסדר ביניהם. כך מתאימים אופני הכתיב של ארבע הקבוצות הסדורות מעמ' 78, שאיבריהן הם כל המספרים השלמים (תמיד אותו אוצר־האיברים), לחוקים הבאים:

1) מבין שני מספרים קודם המספר הקטן.

2) מבין שני מספרים קודם המספר בעל הערך־המוחלט הקטן; אם שניהם בעלי אותו ערך־מוחלט, קודם המספר החיובי.

3) מתוך כל זוג של מספר זוגי ואי־זוגי, קודם המספר הזוגי; מתוך זוג של שני מספרים זוגיים, או אי־זוגיים, קודם המספר בעל הערך־המוחלט הקטן, ואם הערכים שוים, קודם המספר החיובי.

4) מתוך זוג של מספרים, בעלי שאריות שונות (מבין השאריות 0, 1, 2, 3 לגבי החילוק ב4, קודם המספר בעל השארית הקטנה; מבין שני מספרים בעלי שאריות שוות, קודם המספר הקטן.

מושג הקבוצה הסדורה הוא חסר־ערך אם הקבוצה ריקה, או אם מכילה היא איבר אחד בלבד. המקרה הבא אחר כך הוא גם החשוב ביותר: הזוג הסדור,

מזוג־סתם (לא־סדור) $\{a, b\}$ מתקבלים שני הזוגות הסדורים (a, b) ו (b, a) (עיין הערה 3 בעמ' 77). במקרה הראשון קודם a, בשני b.

מן ההגדרה I נובע כי בין כל שני איברים a, b מתוך קבוצה סדורה קיים אחד ויחיד משלשת היחסים: $a = b$, $a \prec b$, $a \succ b$. הכלל הסודר קבוצה ידועה סודר גם את כל קבוצותיה החלקיות; לכן יכולות קבוצותיה החלקיות של קבוצה סדורה להתפס אף הן כקבוצות סדורות. משום כך – כדי שלא להוציאה מן הכלל – נראה גם את קבוצת־האפס 0, וכן כל קבוצה בעלת איבר יחיד, כקבוצה סדורה, לכשנימצא בתחום הקבוצות הסדורות.

שתי קבוצות סדורות בהתאם להגדרה I נקראות שוות $(=)$ אם, ראשית, שתיהן מכילות אותם האיברים (כך שהקבוצות־סתם שוות הן) ואם, שנית, כלל־הסדר קובע כנגד כל זוג־איברים אותו יחס בשתי הקבוצות.

לא מן ההכרח הוא, שקבוצה נתונה תהא סדורה (אף כי לא נוכל לקרוא או לכתוב את איבריה, כולן או חלקן, אלא בסדר ידוע). מתעוררת השאלה אם כל קבוצה ניתנת לסדירה; לאמור, אם לגבי קבוצה־סתם נתונה קיים תמיד לפחות כלל אחד הסודר אותה. בעיה זו קשה היא, וכנראה אין אפשרות לתת תשובה חיובית עליה אלא מתוך שימוש בעקרון־הכפל; עיין להלן ב $\S 4$.

אפשר להעמיד את מושג הקבוצה הסדורה על מושגי האקויולנטיות והפונקציה, ואת אלה על מושג הקבוצה־סתם. תהליך זה של הגדרות מסובך הוא למדי ולא נוכל לבארו כאן. נודעת לו חשיבות עקרונית, הואיל ובהתאם לכך אין צורך במושג הגיוני ראשוני חדש לשם הכנסת היחס הסודר $\prec$. לפיכך ברור, שמושג הסדר, כמושג הקבוצה וכמושג המספר בכלל, אינו תלוי במושג הזמן או המרחב – בניגוד לטענת כמה פילוסופים בעלי שם.

בהקדמה זו לתורת הסדר יש להעיר: מה שהגדרנו כאן יש לכנות ביתר דיוק: קבוצה סדורה לפי גון יחיד. קנטור הכניס גם את המושג של קבוצה סדורה לפי גוונים אחדים, ובמיוחד: לפי שני גוונים. לקבוצות אלו לא נודעה עד כה חשיבות ניכרת, לא בתורה העיונית ולא בשימושיה, אף כי חוקרים שונים עסקו בהן. קל לתת דוגמות: קבוצה סדורה לפי שני גוונים מהווה, למשל, קבוצת המספרים המרוכבים (או המישור כקבוצת נקודותיו, עיין I, 163), אם נסדר את המספרים (הנקודות) z מצד אחד לפי גודל ערכם המוחלט, מצד שני לפי הקשת φ $(\operatorname{arc} z)$ שיש להגבילה לריוח $0 \leqq \varphi < 2\pi$ (השוה I, 153)[1]. כן יוצרות הנקודות שבמישור (או במרחב התלת־ממדי, או ה־n־ממדי) קבוצה סדורה לפי שנים (שלשה, n) גוונים, אם נתאר את הנקודות כזוגות (שלישיות, n־יות) סדורים של קואורדינטות ונסדר לפי כל קואורדינטה לחוד.

1. לא כל שני איברים שונים מסודרים לפי זה בשני גוונים: אך בדרך־כלל מסודרים הם לפי שנים, ולפחות לפי גון אחד.

נכניס עתה את מושג ה„דמיון", שתפקידו אצל הקבוצות הסדורות מקביל לתפקיד האקויולנטיות אצל הקבוצות־סתם.

הגדרה II: הקבוצה הסדורה S דומה לקבוצה הסדורה T אם אפשר להתאים לפי התאמה חד־חד־ערכית את איברי T לאיברי S כך, שהסדר בין כל שני איברים מ S ובין בני־זוגם בתוך T יהיה אותו הסדר; כלומר: שהיחס $s_1 \prec s_2$ הקיים ב S, גורר אחריו את היחס $t_1 \prec t_2$ ב T, אם t_1 הוא האיבר המותאם ל s_1 ו t_2 האיבר המותאם ל s_2. כל התאמה בין איברי S ואיברי T בעלת תכונות אלה נקראת העתק דומה בין שתי הקבוצות הסדורות. מסמנים את הדמיון בין S ל T ע"י $S \simeq T$ („S דומה ל T").

מתוך הגדרה זו נובע מיד, כבהגדרת האקויולנטיות וההעתק בפרק הראשון, שהדמיון הוא יחס ריפליכסיבי, סימֶטרי (הדדי) וטרַנסיטיבי בין קבוצות סדורות[1]. כן ברור איך יווצר העתק דומה בין S ל V מתוך העתקים דומים בין S ל T ובין T ל V. לפיכך אפשר לחלק את כל הקבוצות הסדורות למחלקות־מחלקות, באופן ששתי קבוצות שבאותה המחלקה – ורק קבוצות כאלה – דומות זו לזו.

על־פי ההגדרה II אפשרי דמיון רק בין קבוצות (סדורות) אקויולנטיות. לכן כל שתי קבוצות דומות הן אקויולנטיות. אבל חילוף הדבר אינו נכון (אף אם הקבוצות הן סדורות). למשל הקבוצות הסדורות (לפי סדר הכתיב)

$$A = (1, 2, 3, \ldots), \qquad B = (\ldots, 3, 2, 1)$$

הן בודאי אקויולנטיות (הלא מכילות הן אותם האיברים), אבל אינן דומות: אילו היה קיים ביניהן העתק דומה, היה מתאים לאיבר 1 של B איבר ידוע a של A, ומפני הדמיון היה a עוקב לכל שאר איברי A, כמו שעוקב 1 לכל שאר איברי B. והרי דבר זה אינו יכול להיות נכון, שכן ב A קודם a, למשל, לאיבר $a+1$.

דוגמות למושג הדמיון. א) שש הקבוצות השונות

$$(1, 2, 3), \quad (2, 3, 1), \quad (3, 1, 2), \quad (1, 3, 2), \quad (3, 2, 1), \quad (2, 1, 3)$$

דומות כולן זו לזו. (אכן הן כל הקבוצות הסדורות שאפשר לבנותן מתוך הקבוצה־סתם $\{1, 2, 3\}$.) מתוך דוגמה זו יש להסיק, שאפשר לסדר כל קבוצה סופית ע"י כך שמוציאים באופן שרירותי איבר־איבר: איבר ראשון, שני, וכו'. הודגש לעיל (עיין גם במלואים, מספר יב)) שתהליך זה סופו תמיד להיגמר, וכי בכל דרכי הגשמתו יוביל לקבוצות דומות.

ב) קבוצת כל המספרים הטבעיים N אינה דומה לקבוצת כל המספרים הרציונליים, אם בשתיהן יסודרו המספרים לפי גדלם; שהרי בקבוצה הראשונה יש איבר ראשון, מה שאין כך בשניה, ובשניה יש בין כל שני איברים עוד איברים, מה שאין כך בראשונה. ואולם בסדרנו את המספרים הרציונליים

1. התוספת „סדורה" תושמט מעתה בדרך־כלל, בהיותה מובנת מאליה.

כבעמ׳ 18, דהיינו בצורת ס י ד ר ה, נקבל קבוצה P הדומה ל N; העתק דומה (ובמקרה זה, ההעתק הדומה היחיד) נקבל בהתאימנו ל 1 את השבר הראשון שב P, ל 2 את השבר השני, וכו׳. שתי קבוצות מ נ ו י ו ת (ולכן סדורות) דומות איפוא תמיד; מה שאין כן לגבי כל שתי קבוצות בנות־מנייה, אף אם שתיהן סדורות.

ג) תהא R קבוצת כל המספרים הרציונליים; T קבוצת המספרים הרציונליים פרט לאלה שבין 0 ל 1, ואולם באופן שגם 0 ישתייך ל T אך לא 1. איברי שתי הקבוצות יסודרו לפי גודל המספרים. ניצור העתק דומה בהתאימנו לכל מספר שלילי, וגם ל 0, את ע צ מ ו; מאידך יותאם לכל מספר חיובי r מתוך R המספר $r+1$ מתוך T. קל לראות, שהתאמה זו היא לא רק חד־חד־ערכית אלא גם דומה.

ברם אין במציאות העתק דומה בין שתי הקבוצות אם נכניס לתוך T גם את המספר 1; נסמן את הקבוצה החדשה ב T'. ב T' קיים אפוא היחס $0 \prec 1$, ואין שם איבר ב י ן 0 ל 1. לכן, אילו היה קיים העתק דומה בין R ו T', היינו מקבלים בין בן־זוגו z של 0 בתוך R לבן־זוגו u של 1 בתוך R את היחס $z \prec u$ בתוך R, בעוד שלא יימצא שום איבר בין z ל u. ברם, למשל, הלא הממוצע האריתמיטי $\frac{z+u}{2}$, שאף הוא רציונלי, נמצא בתוך R ומקיים את היחסים $z \prec \frac{z+u}{2} \prec u$. לכן היה בן־זוגו של $\frac{z+u}{2}$ בתוך T' צריך להימצא בין 0 ל 1, בניגוד להגדרת T'.

לפיכך בתורת ה ס ד ר (הדמיון) יש אשר ה ו ס פ ת א י ב ר י ח י ד לקבוצה אינסופית (סדורה) משנה לחלוטין את תכונותיה לגבי הדמיון, בהרסה יחס־הדמיון בין הקבוצה לקבוצה אחרת הדומה לקבוצה המקורית; כן הדבר לגבי ה ו צ א ת א י ב ר. הרי לפנינו ניגוד גמור לתכונות ה א ק ו י ו ל נ ט י ו ת, שלגביה הוספת מספר סופי, או אף כדי מנייה, של איברים על איבריה של קבוצה אינסופית לא תשנה ולא כלום (עיין 7) בעמ׳ 21).

ד) כל בקו ישר לא־מוגבל l, שמערכת נקודותיו תסומן ב L אם נראנה כקבוצה סדורה לפי סדר הנקודות, למשל משמאל לימין. (השוה בציור 5, עמ׳ 26.) כן יסמן M את הקבוצה הסדורה של נקודות הקטע $\overline{AB}$, פרט לקצותיו שאינם נמנים על הקבוצה. הקטע נמצא, נוסף על צורתו המקורית (עיין בציור למעלה), גם בצורה השבורה (הגסה) המופיעה בתוך עיקר הציור, והסדר מ A דרך C עד B שוה הוא בשני המקרים. (L ו M מסמנים כאן קבוצות ס ד ו ר ו ת, ולא כבעמ׳ 26 קבוצות־סתם.) העתק בין שתי הקבוצות יווצר ע״י הכלל, שלכל נקודה של L תותאם הנקודה של M החלה באותה הקרן היוצאת מן ה„מרכז" הקבוע S. לפיכך תותאם C לעצמה, P ל P', Q ל Q', וכו׳. העתק זה הוא דומה. שהרי אם P ו Q הן שתי נקודות של M ו $P \prec Q$ (כלומר, במצב המקורי של הקטע נמצאת P משמאל ל Q), נמצאת בקו הישר l בת־זוגה

של P, שהיא P', משמאל ל Q', בת־זוגה של Q, הואיל ושתי קרניים היוצאות מ S אינן חותכות זו את זו בנקודה נוספת. לאמור: $P' \prec Q'$. לכן הקבוצות L ו M דומות הן.

ההעתק הדומה שיצרנוהו יתבטל, כבדוגמה הקודמת, אם נוסיף על איברי M את קצוֹת הקטע A ו B, או אחד מהם; שכן, למשל, בקרן SA המקבילה ל l, אין נקודה של L. גדולה מזו: אחרי ההוספה הנ״ל לא יהיה במציאות ש ו ם ה ע ת ק ד ו מ ה בין L והקבוצה החדשה M'. קל להוכיח זאת; כי, למשל, A היא הנקודה ה ר א ש ו נ ה של M', ולכן היתה בת־זוגה ב L, על פי כל העתק דומה שהוא, צריכה לקדום לכל שאר הנקודות של L; אבל הרי אין נקודה ראשונה ב L.

נתרגם את מסקנתה של דוגמה זו ללשון האריתמיטיקה! פירושה, שקבוצת כ ל המספרים הממשיים דומה לקבוצת המספרים שבאיזה ריוח פ ת ו ח, אם המספרים יסודרו בשני המקרים לפי גדלם. מאידך אין דמיון בין הקבוצות, אם לתוך השניה יוכנסו קצוֹת הריוח או אחד מהם.

ת ר ג י ל י ם ל §1.

1) קבוצת כל המספרים השלמים דומה לקבוצת המספרים $\pm\frac{n-1}{n}$ (כעבור n על כל המספרים הטבעיים). אם המספרים בכל אחת מקבוצות אלו יסודרו לפי גדלם. הדבר לא ישתנה אם מהקבוצה השניה יושמט המספר 0 (שכנגד $n=1$), או איזה מספר סופי של מספרים. הוכח טענות אלו (המתקבלות על הדעת מיד כאשר יתוארו המספרים בקו המספרים)!

2) קבוצת כל הנקודות ש ב מ י ש ו ר מצד אחד, קבוצת כל הנקודות שבתוך ר י ב ו ע מסויים באותו מישור מצד שני (פרט לנקודות שבצלעות), תסודרנה ע״י הכלל הבא: נסדר מערכת־צירים ישרת־זווית במישור, שציריה מקבילים לצלעות הריבוע, כך שציר אחד ישתרע „משמאל לימין" והשני „ממטה למעלה". בכל אחת מן הקבוצות תקדם השמאלית מבין שתי נקודות; אם האחת היא בדיוק מעל לחברתה, באופן שאף אחת אינה משמאל לשניה, תקדם הנקודה התחתונה. בדרך זו תווצרנה שתי קבוצות סדורות (בגון אחד, ולא בשני גוונים כבעמ׳ 82); הוכח ששתיהן דומות!

§2. ט י פ ו ס י ־ ה ס ד ר ו פ ע ו ל ו ת ־ ה ח ש ב ו ן ב ה ם.

הדרך שהובילה אותנו מן הקבוצות־סתם אל המספרים המונים, תובילנו עתה מן הקבוצות הסדורות לעצמים חדשים המכונים „טיפוסי־סדר". יש לראותם כסוג חדש של גדלים אינסופיים־בהחלט. ואולם תכונותיהם אינן פשוטות (ואינן מקבילות לתכונות המספרים הסופיים) בה במידה שהדבר קיים לגבי העָצמות. לכן מוגבל יותר השימוש בטיפוסים אלה, ויש לומר שבמתימטיקה עולה, בדרך

כלל, חשיבות הקבוצות הסדורות על זו של טיפוסי־הסדר הכלליים (פרט לטיפוסים המיוחדים שנדון בהם ב §§ 3 ו 4).

הבה נחלק את הקבוצות הסדורות למחלקות־מחלקות באופן שבכל מחלקה תמצאנה אך ורק קבוצות דומות זו לזו! בצורה שטחית נאמר: המשותף בין כל הקבוצות שבמחלקה מסויימת ייקרא טִפּוּס־הסדר של כל קבוצה מתוך המחלקה. ביתר דיוק: טִפּוּסי־הסדר של הקבוצות הסדורות S ו־T הם שווים ($=$) אם, ורק אם, S ו־T דומות ($S \simeq T$); אחרת טיפוסי־הסדר של S ו־T שונים הם ($\neq$).

אם נתונה קבוצה סדורה S, נקבל את טיפוס־הסדר σ של S „בהתעלמנו ממהות איבריה" (אבל לא מסדרם). עלינו לבצע אפוא תהליך־הפשטה פשוט, ולא כפול כביצירת מושג העצמה (עמ׳ 39). משום כך נוהגים, כפי שעשה קנטור, לציין את טיפוס־הסדר של S ב $\overline{S}$. מסמלים טיפוסי־סדר גם באותיות יווניות כגון σ, τ, μ, וכו׳.

מכל קבוצה סדורה S תתקבל קבוצה סדורה אחרת (שבדרך־כלל אינה דומה ל S) ע״י הפיכת כל יחסי־הסדר; לאמור: ע״י החלפת כל יחס $s_1 \prec s_2$ הקיים ב S, ביחס $s_2 \prec s_1$. אם σ הוא הטיפוס של S, יסומן הטיפוס של הקבוצה בעלת אותם האיברים והסדר ההפוך ב $^*\sigma$; $^*\sigma$ מכונה הפכי ל σ.

אפשר לראות כל טיפוס־סדר כמסגרת המכילה „יחידות" (ולא עצמים בעלי מהות מיוחדת השונה מאיבר לאיבר) בסדר ידוע. בהתעלמנו מסדר היחידות נקבל כמות ידועה של יחידות בלבד; כלומר, נעבור אל עצמת הקבוצה. מכאן אפשרויות־הכתיב הבאות כלפי קבוצה סדורה S בעלת טיפוס־הסדר σ והעצמה $\mathbf{s}$:

$$\sigma = \overline{S}, \qquad \mathbf{s} = \overline{\overline{S}} = \overline{\sigma}.$$

הבקורת ההגיונית ליצירת המושג של טיפוס־הסדר מקבילה בדיוק לבקורת למושג של העצמה (עמ׳ 37—40 . אך השוה גם להלן ב§4.

שתי קבוצות סופיות אקויולנטיות, אם הן סדורות, דומות הן זו לזו (§1); לכן מותאמים המספרים המונים הסופיים באופן חד־חד־ערכי לטיפוסי־הסדר הסופיים (כלומר, לטיפוסי הקבוצות הסופיות). הם נקראים גם „מספרים סודרים סופיים" מטעם כללי המבואר ב§3. הודות להתאמה הנזכרת לא נתקל בטעות מתימטית בסמננו את המספרים המונים הסופיים ואת המספרים הסודרים הסופיים — על אף ההבדל ביניהם מבחינה הגיונית – באותם הסמלים 1, 2, 3, [illegible]׳. סימון דו־פרצופי זה מקביל לעובדה שהמספרים הטבעיים משמשים, בחיי[illegible]במדע, מספרים מונים וסודרים גם יחד.

[illegible]הוג לראות גם את 0 כמספר סודר: כטיפוס של הקבוצה הריקה.

כל הקבוצות המנויות, שאיבריהן מסודרים אפוא לפי סידרה, דומות זו לזו ולכן יש להן אותו טיפוס־הסדר; רגילים לסמנו ב ω. לפיכך יהיה $^*\omega$ טיפוס־הסדר של קבוצת המספרים הטבעיים, אם מספר גדול יותר יקדם תמיד לקטן; או גם

טיפוס־הסדר של קבוצת המספרים השלמים השליליים, אם יונהג הסדר הרגיל לפי גודל המספרים.

מתוך המגמה לראות את טיפוסי־הסדר העלסופיים (כלומר, טיפוסי הקבוצות הסדורות האינסופיות) כגדלים אינסופיים חדשים, טבעי הדבר שנשתדל לסדרם לפי עקרון שיהיה כלל־סדר „לפי גודל הטיפוסים". ואולם דא עקא: אין במציאות כלל כזה, ולפיכך אין אפשרות לסדר את טיפוסי־הסדר לפי גדלם. לשון אחר: לא נצליח להגדיר כלל־סדר הקובע יחס סודר $<$ בין כל שני טיפוסי־סדר, יחס הנותן מקום לטריכוטומיה (עמ׳ 45) שלפיה יתקיים, כנגד כל שני טיפוסים נתונים σ ו τ, יחס אחד ויחיד מן היחסים

$$\sigma = \tau, \qquad \sigma < \tau, \qquad \tau < \sigma.$$

תהיינה נתונות, למשל, הקבוצה A של כל המספרים השלמים בסדר לפי גודל המספרים, מכאן, והקבוצה B של כל המספרים הרציונליים בין 0 ל 1 (לרבות קצוות אלו), סדורים גם הם לפי הגודל, מכאן. הטיפוס של A הוא בלי ראשית ובלי תכלית, בניגוד לטיפוס של B, שבו יש תחילה וסוף; לעומת זאת הטיפוס של B הוא צפוף (עיין להלן), בניגוד לטיפוס של A שבה יש לכל איבר „שכנים" מזה ומזה. לבסוף, שני הטיפוסים הם של קבוצות בנות־מנייה. אין טעם לכנות אחד הטיפוסים האלה קטן מחברו, ואם נעשה כן מתוך שרירות לב, יתנקם בנו הדבר, מאחר שאין אפשרות להבטיח את התכונה הטרנסיטיבית ליחס השרירותי. (השוה גם תרגיל 2) בסוף הסעיף הזה.)

סוף דבר: בדרך־כלל טיפוסי־סדר אינסופיים אינם ניתנים להשוואה. מטעם זה לא הענקנו להם את תאר־הכבוד של מספרים, המעלה על הדעת אפשרות של סדר בין המספרים. אך ב§3 נתוודע אל סוג מיוחד של טיפוסי־סדר שאינם סובלים מליקוי זה; להם נקרא באמת בשם „מספרים" (סודרים). — תחת „טיפוס־סדר" נגיד בקיצור „טיפוס".

בניגוד למצב זה יש ויש אפשרות להגדיר, במסגרת רחבה למדי, פעולות־חשבון בין טיפוסי־סדר[1]. פעולות אלו מסתמכות, דוגמת הפעולות בין עצמות, על פעולות־חשבון בין קבוצות (סדורות). יתברר שפעולות־החשבון בין טיפוסים, שהם עצמים שונים מרחק רב מן המספרים הרגילים, אינן ממלאות כמה מן התכונות, שלהן התרגלנו בחשבון בין מספרים סופיים.

---

1. בתורת־הקבוצות המסורתית ניתנת האריתמיטיקה של מספרים מונים לחוד וזו של טיפוסי־סדר, בפרט של מספרים סודרים (§3), לחוד. בזמן האחרון הציע Garrett Birkhoff איחוד מענין ומעמיק בין שתי תורות אלו. בהתבססו על תורת הקבוצות „הסדורות באופן חלקי", תורה רבת־ענין ורבת־שימושים גם לעצמה. עיין *Duke Mathem. Journal*, vol. 9 (1942), pp. 283–302.

הגדרה I: כדי לחבר שני טיפוסי־סדר α ו β נצא משתי קבוצות סדורות זרות A ו B בעלות הטיפוסים α ו β, ונסדר את קבוצתם הכוללת (סכומם הלא־מסודר; עמ׳ 11) בהקדימנו כל איבר של A לכל איבר של B; לעומת זה ישאר סדר האיברים של A בינם לבין עצמם כמו שהוא בתוך A, וכן לגבי איברי B. הטיפוס σ של הקבוצה הכוללת הסדורה המתקבלת בדרך זו, והנקראת הסכום המסודר של הקבוצות הסדורות A ו B (בסדר זה!), יכונה סכום הטיפוסים α ו β (בסדר זה דוקא); כותבים $\sigma = \alpha + \beta$.

הערות להגדרה זו: 1) אין לחשוש לאי־הבנה בעקבות השימוש הכפול (בעמ׳ 48 וכאן) בסימן $+$ (וכן לגבי הסימון בהגדרה III, עמ׳ 92); שכן משמעות הסימן תלויה בכך אם מחוברי הסכום הם עצמות או טיפוסים. אם בפרט המחוברים הם מספר סופי של מספרים סופיים, הרי דו־המשמעות אינה מזיקה, הואיל ונוכל לראות את הסכום כמספר מונה או סודר, כרצוננו.

2) התנאי שהקבוצות A ו B זרות הן, הכרחי הוא כאן יותר מבכל המקרים הקודמים (בפרק הקודם), והוא הכרחי לא רק לגבי טיפוסים אלא גם לגבי קבוצות. הלא אם הקבוצות אינן זרות, לא נוכל בדרך־כלל לשמור בסכום על הסדר הקיים בכל מחובר לחוד; שהרי במחוברים שונים יכולים להתקיים יחסי־סדר סותרים בין שני איברים משותפים.

3) הכלל, המקדים בסכום את איברי A לאיברי B, הוא שרירותי; מִבְּכר הוא אחת מן הקבוצות הנתונות על פני אחותה. לכן שמנו לב לסדר המחוברים.

4) כדי שההגדרה תהיה חד־משמעותית, מן הצורך הוא, שתוצאת החיבור תשאר ללא שינוי, אם נשנה את הקבוצות A ו B המשמשות מייצגי הטיפוסים הנתונים α ו β. לאמור: מן הצורך הוא, שכנגד קבוצות דומות A ו A', וכן B ו B', יתקבלו גם סכומים מסודרים דומים, באופן שטיפוסיהם שווים. תנאי זה מתקיים באמת; קל להוכיחו לפי השיטה שנקטנוה בעמ׳ 51, בשים לב לכללי הסדר בסכומים המסודרים.

דוגמות לחיבור שני טיפוסים.

א) קיים $5 = 3 + 2 = 2 + 3$ על־סמך היחסים בין קבוצות סדורות:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2) = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) \simeq (b_1, b_2, a_1, a_2, a_3) =$$
$$= (b_1, b_2) + (a_1, a_2, a_3).$$

קל לעמוד על אפיים הכללי של היחסים הנ״ל. לפיהם סכומים של שני מספרים סודרים (טיפוסים) סופיים אף הוא סופי, ואינו תלוי בסדר המחוברים; ולא עוד אלא שהסכום הוא המספר הסודר המתאים למספר המונה, המתקבל מתוך חבור המספרים המונים המתאימים. פעולת החיבור שומרת אפוא על ההתאמה בין מספרים מונים וסודרים סופיים, שעליה דובר למעלה.

ב) אם המחוברים הם הטיפוסים ω ו 1, נוכל לבחור בקבוצות הסדורות

$A = (1, 2, 3, \ldots)$ ו $B = (0)$. הטיפוס $\omega + 1$ מוגדר אפוא כטיפוס של הקבוצה הסדורה $(1, 2, 3, \ldots 0)$ שבה מופיע אחרי סידרת איברים עוד איבר נוסף יחידי. מכיון שבקבוצה זו יש איבר אחרון, שונה בודאי $\omega+1$ מ ω: $\omega + 1 \neq \omega$.

לעומת זאת קיים $1 + \omega = \omega$. שהרי $1 + \omega$ הוא הטיפוס של הקבוצה המנוייה $(0, 1, 2, 3, \ldots)$, הדומה ל A. לכן $1 + \omega \neq \omega + 1$; שינוי הסדר בין המחוברים משנה לא רק את אופן יצירת הסכום, כמו בדוגמה א), אלא גם את ערך הסכום בעצמו; חיבור הטיפוסים אינו קומוטטיבי בדרך־כלל, בניגוד למקרה הפרוט של מחוברים סופיים. לכן אסור בדרך־כלל לשנות את סדר המחוברים בסכום של טיפוסי־סדר.

ג) בהקבלה לדוגמה הקודמת קל להסיק, שהטיפוסים

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n, \ldots$$

כולם שונים זה מזה, בעוד שקיים $n + \omega = \omega$ כנגד כל טיפוס סופי n. כמו־כן נקבל בשביל הטיפוס ההפכי את היחס $n + \omega^* = \omega^*$, ואילו הטיפוסים $\omega^* + n$ שונים כנגד ערכי n שונים.

ד) הטיפוס $\omega + \omega$ מתקבל ע״י צירוף שתי סדרות, למשל כטיפוסה של קבוצת המספרים הטבעיים אם יופיעו המספרים הזוגיים, מסודרים לפי גדלם, אחרי המספרים האי־זוגיים המסודרים גם הם לפי גדלם. לעומת זאת $\omega^* + \omega$ הוא הטיפוס של קבוצת כל המספרים השלמים המסודרים לפי גדלם.

אם אין כאן תוקף לחוק הקוֹמוּטטיבי של החיבור, הרי קיים לפחות החוק האסוֹציאטיבי האומר

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

כדי להראות זאת יש להוֹכיח, שבקבוצה הכוללת של שלש קבוצות סדורות זרות A, B, C לא ישתנה הסדר בין שני איברים קבועים, אם נסדרם פעם לפי הכלל המוביל, על־פי ההגדרה I, אל הסכום $(\alpha + \beta) + \gamma$, ופעם לפי הכלל המוביל אל $\alpha + (\beta + \gamma)$. הדבר מצריך הבחנה בין כל המקרים האפשריים לגבי המחוברים A, B, C שבהם יימצאו שני האיברים הנידונים; בכל מקרה מתאמתת הטענה מיד.

הואיל וצירופם של שלושת המחוברים, אם באופן זה או אחר, אינו משנה ולא כלום, נוכל לכתוב את הסכום ללא סוגריים בצורה $\alpha + \beta + \gamma$. לפי כתיב זה יבין ויוכיח הקורא על נקלה, בשומו לב לדוגמות ג) ו־ד), את היחסים

$$n + \omega + \omega = \omega + n + \omega = \omega + \omega, \quad \omega^* + n + \omega = \omega^* + \omega.$$

לעומת זאת שונים זה מזה הטיפוסים $\omega + \omega + n$, וכן הטיפוסים $\omega + \omega^* + n$, כנגד ערכי n שונים.

אפשר לבאר חיבורם של שלשה טיפוסים, וכן של כל מספר סופי של טיפוסים, בעזרת ההגדרה I על־סמך החוק האסוציאטיבי. אך כדי לחבר אינסוף טיפוסים, זקוקים אנו להגדרה מיוחדת, כמו לגבי חיבור עצמות. נקבע אפוא:

הגדרה II: יהיו נתונים טיפוסי־סדר באיזה מספר (סופי או אינסופי) ובסדר מסויים; למשל ע״י כך,[1] שלכל איבר של קבוצה סדורה ידועה D יותאם טיפוס־סדר ϱ באופן חד־ערכי. בְּיֶתר דיוק: לאיבר $d\varepsilon D$ יותאם הטיפוס ϱ_d (ללא דרישה, שלאיברים שונים של D יותאמו טיפוסים שונים). כדי ליצור את סכום הטיפוסים בסדרם הנתון, נקח כנגד כל טיפוס ϱ קבוצה „מייצגת" R בעלת הטיפוס ϱ, באופן שכל הקבוצות האלה תהיינה זרות לחלוטין.[2] ניצור את קבוצתן הכוללת של כל הקבוצות הסדורות הללו ונסדרה ע״י הכלל הבא: הסדר בין כל שני איברים מתוך אותה הקבוצה R יישמר גם בקבוצה הכוללת; מאידך, אם r ו r' הם שני איברים מתוך קבוצות שונות R ו R' בעלות הטיפוסים ϱ ו ϱ', ייקבע הסדר בין r ו r' כפי הסדר בין ϱ ו ϱ' על־סמך הקבוצה D. (בקיצור: הסדר בין איברים מתוך קבוצות שונות מתאים לסדר בו ניתנו הטיפוסים המתאימים.) לפי זה יכונה הטיפוס σ של הקבוצה הכוללת הסדורה (הנקראת הסכום המסודר של הקבוצות R) בשם סכומם המסודר של הטיפוסים הנתונים; בכתב:

$$\sigma = \ldots + \alpha + \ldots + \beta + \ldots + \gamma + \ldots = \sum_{d\varepsilon D} \varrho_d,$$

אם α, β, γ מסמנים אחדים (שונים או שווים) מבין הטיפוסים המותאמים לאיברי D (בסדר זה)[3]. הסימן Σ, המורה על חיבור (I, 287), רומז כאן על חיבור כל הטיפוסים ϱ_d המותאמים לאיברים d של D לפי הסדר הקיים ב D.

ההערות שצורפו לעיל להגדרה I, כחן יפה גם כלפי ההגדרה שלפנינו בפרט אין הסכום σ תלוי באופן הבחירה של הקבוצות הסדורות כנגד הטיפוסים הנתונים; כי מתוך בחירה אחרת נקבל קבוצה כוללת סדורה הדומה לקודמת.

כמו־כן קל להוכיח גם במקרה כללי זה את קיום החוק האסוציאטיבי של ה[illegible] בעצם אין ההוכחה שונה מזו שבמקרה הפרוט, רק שיש צורך לנסח בקפדנות את החוק האסוציאטיבי, בהקבלה לצורה הניתנת במילואים, מספר ד), כלפי קבוצות־סתם. מאידך מובן, שאין תוקף לחוק הקומוטטיבי של החיבור.

---

1. השוה בעמ׳ 50. שם השתמשנו בשיטה זו כדי לקבוע את מספר המחוברים בלבד, כאן נקבע בעזרתה גם את סדרם.

2. הכוונה היא: כנגד כל שני איברים שונים של D נקח קבוצות זרות כמייצגות הטיפוסים (השונים או שווים) המותאמים לשני האיברים.

3. השימוש בנקודות הוא הכרחי: שהרי יכולים להופיע טיפוסים נוספים, ואף במספר אינסופי, לפני α, בין α ו β, בין β ו γ, ואחרי γ. ואילו בדוגמה א) אין צורך בנקודות בראשית הסכום (שהרי יש מחובר ראשון) או בין מחובר למחובר.

דוגמות לחיבור טיפוסים במקרה הכללי.

א) תהי D קבוצה מנויה (סידרה), כלומר בעלת הטיפוס ω; לכל איבר של D יותאם הטיפוס ω. הסכום הנידון יסומן אפוא ב $\ldots + \omega + \omega + \omega$, הוא הטיפוס של קבוצה סדורה, שבה מופיעות אינסוף סדרות בסדר מנוי. קל לקבל קבוצה כזו מתוך קבוצת המספרים הטבעיים, בהיכתב המספרים לפי התבנית „האלכסונית":

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16\ldots \\
3 & 5 & 8 & 12 & 17 & .\ \ldots \\
6 & 9 & 13 & 18 & . & .\ \ldots \\
10 & 14 & 19 & . & . & .\ \ldots \\
15 & 20 & . & . & . & .\ \ldots \\
21 & . & . & . & . & .\ \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

אם יסודרו כל המספרים בקבוצה אחת בסדר זה: אחרי כל איברי השורה הראשונה (בסדר משמאל לימין) יבואו כל איברי השורה השניה, גם הם לפי סדר זה, אחריהם איברי השורה השלישית, וכו׳.

אותו הטיפוס מתקבל כסכום, אם יותאם, למשל, לכל איברי הסידרה D הטיפוס $\omega + \omega$.

ב) תהי S איזו קבוצה סדורה לא־ריקה ויהי σ הטיפוס שלה. בהתאימנו לכל איבר s של S את הטיפוס 1, נקבל כסכום כל הטיפוסים את הטיפוס σ עצמו. כדי לאשר זאת נראה את 1, המותאם ל s, כטיפוס הקבוצה (הסופית הסדורה) (s), ונקבל לפי זה על־סמך ההגדרה II כקבוצה כוללת את הקבוצה הסדורה S שיצאנו ממנה. לפיכך אפשר לתאר כל טיפוס σ השונה מ־0 כסכום מסודר של יחידות — בהקבלה לאפשרות של תיאור כל עצמה כסכום (לא־מסודר) של יחידות (עמ׳ 56). במקרה שלפנינו נראה את היחידה 1 כמספר סודר, במקרה דלעיל — כמספר מונה.

ערך הסכום ישתנה — גם כנגד קבוצה S אינסופית — בדרך־כלל[1], אם נתאים ל s לא את המספר 1 אלא, למשל, את המספר 2. לשם דוגמה נקח כ S את קבוצת המספרים הרציונליים, כשהם מסודרים לפי גדלם; במקרה זה יימצאו בין כל שני איברי S איברים נוספים של S. לכן אין „שכן" (עוקב או קודם מידי) לשום איבר של S. והנה אם נתאים את 2 לכל איבר של S, נקבל, כקבוצה כוללת סדורה, קבוצה שבה יש שכן אחד לכל איבר.

מצב זה מנוגד הוא לתיאורן החיבורי של עצמות כמו $\aleph_0$ ו $\aleph$ כסכומי

---

1. פרט למקרים מיוחדים, כגון $\omega = \sigma$.

יחידות; לגביהן יכולים אנו להחליף את המחובר 1 במחובר 2 ללא שינוי הסכום, על סמך החוק הקומוטטיבי והיחסים $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ו $\aleph + \aleph = \aleph$.

נגדיר את הכפל בטיפוסים כנגד שני גורמים בלבד:

הגדרה III: כדי לכפול שני טיפוסים α ו δ (בסדר זה), נבחר בקבוצה סדורה D בעלת הטיפוס δ ונתאים לכל אחד מאיבריה את הטיפוס α. הסכום המתקבל בדרך זו בהתאם להגדרה II יסומן ב $\tau = \alpha \cdot \delta$ ויכונה מכפלת הטיפוסים α ו δ (בסדר זה).[1]

הגדרה זו מתבססת על שיטת האריתמיטיקה, שבה מגדירים את הכפל כחיבור ממושך של אותו מחובר; ואמנם, כדי לקבל $\alpha \cdot \delta$ לפי ההגדרה III, עלינו לחבר את המחובר α באותו מספר וסדר המתבטאים בטיפוס δ.

אם למשל $\alpha = \omega$ ו $\delta = 2$, נקבל $\tau = \omega \cdot 2 = \omega + \omega$; זהו הטיפוס של הקבוצה הסדורה $(1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots)$.

מאידך, אם $\alpha = 2$ ו $\delta = \omega$, נקבל $\tau = 2 \cdot \omega = 2 + 2 + 2 + \ldots$, והרי זהו הטיפוס של הקבוצה הסדורה

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots),$$

ז"א של קבוצה מנויה; לכן $2 \cdot \omega = \omega$.

בהקבלה לכך יש להסיק, שכל הטיפוסים $(= \omega)\, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot n$ שונים זה מזה, בו בזמן שכנגד כל מספר טבעי (טיפוס סופי $\neq 0$) n קיים היחס $n \cdot \omega = \omega$. הכפל בין טיפוסים אינו קומוטטיבי „בדרך־כלל", כלומר: פרט למקרים מיוחדים (כגון אם שני הגורמים סופיים). סידור הגורמים בהגדרה III הוא שרירותי: הגדרנוהו כך, שהגורם הראשון, α, יהיה הנכפל, והשני (הכופל) δ יגיד „כמה פעמים" ובאיזה סדר עלינו לקחת את הנכפל.

כנגד כל σ קיים לא רק $\sigma \cdot 1 = \sigma$ (לפי ההגדרה), אלא גם $1 \cdot \sigma = \sigma$, כפי שיוצא מן הדוגמה ב) בעמ' 91.

באשר לחוקים הדיסטריבוטיביים, הרי קיים לגבי הכפל שהוגדר אחד החוקים, אך לא חברו. שכן מן ההגדרה III יוצא על נקלה, על פי החוק האסוציאטיבי של חיבור טיפוסים, היחס

$$\varepsilon \cdot (\varphi + \eta) = \varepsilon \cdot \varphi + \varepsilon \cdot \eta.$$

למשל:

$$\omega \cdot (m + n) = \omega \cdot m + \omega \cdot n$$

$$\omega \cdot (\omega + 1) = \omega + \omega + \omega + \ldots + \omega = \omega \cdot \omega + \omega.$$

לעומת זאת [illegible] קיום בדרך־כלל ליחס $(\varphi + \eta) \cdot \varepsilon = \varphi \cdot \varepsilon + \eta \cdot \varepsilon$. כפי שראינו לעיל קיים, למשל, כנגד הטיפוסים הסופיים m ו n השונים מ 0:

1. הגדרה זו אינה מלמדת ולא כלום על המקרה $\delta = 0$. כדאי אפוא להוסיף, שבמקרה זה נקבע תמיד $\tau = 0$. זה קיים כבר לפי ההגדרה III כנגד כל δ, אם $\alpha = 0$.

$$(m + n) \cdot \omega = \omega, \quad m \cdot \omega + n \cdot \omega = \omega + \omega = \omega \cdot 2 \neq \omega;$$

$$(\omega + 1) \cdot \omega = \omega \cdot \omega, \quad \omega \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega \cdot \omega + \omega \neq \omega \cdot \omega.$$

$\omega \cdot \omega$ הוא, למשל, הטיפוס של קבוצת המספרים הטבעיים, אם איבריה הם מסודרים לפי התבנית שבעמ' 91.

לגבי הכפל המוגדר כאן אפשר להוכיח את החוק האסוציאטיבי $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ולהגדיר לפי זה את הכפל של שלשה גורמים (ומכאן, על־פי אינדוקציה שלימה, של כל מספר סופי של גורמים). ואולם אפשר לתת גם במישרין הגדרה לכפל של מספר סופי של טיפוסי־סדר; הגדרה זו לא תנוסח בכוון ההגדרה III דלעיל אלא בכוון ההגדרה IV בעמ' 53, שאליה יש לצרף כלל המסדר את המכפלה. אולם לא נוכל להגיע להגדרה מתאימה של הכפל בטיפוסים לגבי אינסוף גורמים, לא בדרך זו ולא בדרך אחרת; המעצור שנתקל בו הוא הקושי לקבוע כלל־סדר מתאים. במלואים לחלק הרביעי, מספר יג), יבוארו שניהם: ההגדרה כלפי מספר סופי של גורמים, והקושי כלפי אינסוף גורמים.

עד עתה בחרנו, כדוגמות לטיפוסי־סדר אינסופיים, ב ω ו ω^* בלבד, לרבות הטיפוסים הנוצרים מהם ומטיפוסים סופיים בעזרת פעולות החיבור והכפל. ברור שיש טיפוס אחר בעל חשיבות יתירה: הטיפוס של הרֶצף הקווי, כלומר של קבוצת כל הנקודות שבקו ישר (או בריוח סופי), סדורה באחד משני כווני הישר. (עיין לקמן, עמ' 94/5.) נדון כאן בטיפוס אחר, שלכאורה קרוב הוא לרצף, אבל באמת שונה הוא ממנו תכלית שוני.

נסתכל בקבוצת כל המספרים הרציונליים שבין שני מספרים קבועים a ו b[1]; או, לפי התאמת המספרים לנקודות בעזרת קו־המספרים, בקבוצת כל הנקודות הרציונליות בקו ישר מסויים הנמצאות בין שתי נקודות נתונות. נסדר את הקבוצה לפי גודל המספרים, כלומר ע"י הכלל $x_1 \prec x_2$ אם $x_1 < x_2$, ונסמן את הקבוצה הסדורה ב R; סדר הנקודות יהיה אפוא, לפי מצבו הרגיל של קו־המספרים, הסדר משמאל לימין.

לקבוצה R יש שלש התכונות הבאות:

א) R ניתנת להימנות (עמ' 18).

ב) R היא קבוצה „צפופה" (עיין לקמן).

ג) אין ב R לא איבר ראשון ולא איבר אחרון, ז"א R היא קבוצה „פתוחה".

מבין תכונות אלו זקוקה לביאור השניה בלבד. קבוצה סדורה נקראת צפופה, אם בין כל שנים מאיבריה נמצא איבר נוסף של

1. אפשר להניח כי a ו b רציונליים; אבל גם אם הם אירציונליים, לא ישתנה דבר. — המלה „בין" מציינת, כמובן, כי a ו b עצמם אינם משתייכים ל R; מכאן התכונה ג).

הקבוצה. אם x_1 ו x_2 הם שני איברים של קבוצה צפופה ואם $x_1 \prec x_2$, הרי יש בקבוצה איבר x_3 באופן שקיים $x_1 \prec x_3 \prec x_2$, וכן איברים x_4 ו x_5 באופן ש x_4 נמצא בין x_1 ו x_3, x_5 בין x_3 ו x_2, וכו'; מכיון שכל צעד כזה מאפשר צעד נוסף, נמצאים בין כל שני איברים של קבוצה צפופה אינסוף איברים. לכן כל קבוצה צפופה היא גם אינסופית.

בודאי יש לקבוצה R שלש התכונות הנ"ל. אך מפתיע הדבר, שתכונות אלו אפייניות הן לR כקבוצה סדורה; ביתר דיוק: לא זו בלבד, שלכל קבוצה סדורה הדומה לR יש אותן התכונות, אלא גם חילופו של דבר: כל קבוצה סדורה בעלת שלש התכונות דומה לR.

הטענה הראשונה היא פשוטה מאד: הלא התכונות אינן מסתמכות על תכונותיהם המיוחדות של איברי R (שהם מספרים או נקודות) כי אם על הסדר השורר בR. לעומת זאת יש מן ההפתעה בחילוף הדבר, האומר: שלש התכונות קובעות בשלימות את הקבוצה, אם נתעלם מאופי איבריה ונשים לב לסדרם בלבד. לפיכך קובעות שלש התכונות הנ"ל טיפוס־סדר מסויים שרגילים לסמנו ב η. ההוכחה לטענה זו אינה פשוטה ותנתן במלואים לחלק הרביעי. מספר יד).

נוכל להסיק מכאן על נקלה מסקנות שונות. קבוצת כל המספרים הרציונליים (או כל הנקודות הרציונליות בקו ישר אינסופי), סדורה לפי גודל המספרים, אף היא בעלת שלש התכונות דלעיל, ולכן יש גם לה הטיפוס η. הוא הדין לגבי הקבוצות המתקבלות מתוך R ע"י השמטת איזה איבר שהוא, או השמטת מספר סופי של איברים, ולא יקשה להבין שבתנאים ידועים נוכל להשמיט אפילו אינסוף איברים ללא שינוי של טיפוס הקבוצה. נוכל, למשל, לקחת אילו שני מספרים רציונליים שהם, c ו d, בין a ל b, ולהשמיט את כל המספרים של R הנמצאים בין c ל d, לרבות c או d או שניהם. כל הקבוצות האלה דומות זו לזו – דבר שאינו מובן מאליו כל עיקר.

לעומת זאת, בהוסיפנו על איברי R, שהם המספרים הרציונליים בין a ל b, גם את a ו b עצמם, או אחד מהם, נקבל טיפוסי־סדר שונים. בהתאם למה שלמדנו על חיבור טיפוסים, עלינו לסמן את הטיפוסים החדשים ב $1+\eta+1$, $1+\eta$, $\eta+1$. אם לפי הדוגמה האחרונה נשמיט מתוך R את כל המספרים בין c ל d אך לא קצוות אלה, נקבל קבוצה שאינה צפופה כל עיקר; באמת יש לה הטיפוס $\eta+2+\eta$, וטיפוס זה שונה מ η. מאידך, הטיפוס $\eta+1+\eta$ שווה ל η, בהגשימו את שלש התכונות הנ"ל.

מטבע הדברים היה לדון, אחרי η, בטיפוס שני הקרוב לכאורה אל η והנראה אף פשוט מ η מבחינה הסתכלותית: הלא הוא הטיפוס של הרֶצף הקוי, למשל של קבוצת כל הנקודות בקו (ישר או עקום) הנמצאות בין שתים מנקודותיו, סדורה לפי אחד משני הכוונים האפשריים בקו; או של קבוצת כל המספרים הממשיים בין שני מספרים נתונים, סדורה לפי גודל המספרים. במשך

אלפיים שנה ויותר ניסו לא רק המתימטיקנים אלא גם פילוסופים ותיאולוגים לפענח את מה שקראו בשם „חידת־הרצף", שנוכל לבטאה עתה בצורה זו: מהן תכונותיו של טיפוס־הסדר של הרצף הקוי?

באמת קביעתו של טיפוס זה אינה קלה כפי שהיא עשויה להיראות במבט הראשון. מאידך יש לבעיה זו, שאמנם נפתרה רק בעזרת שיטותיה של תורת־הקבוצות, קודם כל פרצוף גיאומטרי. לכן נדחה את הבהרתה עד לחלק החמישי, העוסק בגיאומטריה (עיין בפרק השביעי, § 1).

נסיים מבוא זה לתורת הסדר וטיפוסי־הסדר – תורה שפרטיה קשים מהכניסם למסגרת של ספר זה – בהערה כללית והיסטורית. חשיבותן העקרית של הקבוצות הסדורות באנליזה ובגיאומטריה מתגלית אצל קבוצות סדורות של נקודות; לשון אחר: של מספרים ממשיים, או של זוגות, שלישיות וכו' של מספרים ממשיים. הדוגמה החשובה ביותר היא הרצף עצמו (בממד אחד, או גם ביותר ממדים), כלומר קבוצת כל הנקודות; אבל גם לקבוצותיו החלקיות של הרצף נודעו תפקידים חשובים במקצועות מתימטיים שונים. רק שיטותיה העדינות של תורת־הקבוצות (הקבוצות־סתם, והסדורות), הפועלות כעין מיקרוסקופ בעל הגדלה אינסופית, איפשרו לנו לחדור לתוך שאלות מסובכות למעלה מכל יכולת הסתכלותית, המתעוררות בקשר לסדר, לשכנות, לצפיפות, לקשר, לממד וכו' ביצירים שבמרחב. חלק הגון של הגיאומטריה החדישה וכן של האנליזה מסתמך, הן במושגים הן בהוכחות, על שיטותיה של תורת־הקבוצות; דוגמות אחדות לכך נלמד לדעת בחלק החמישי של ספר זה, למשל בפרק החמישי, § 5 (השוה גם את הדוגמה ב ו, 349).

ואולם בתורה זו, הנקראת תורת הקבוצות של נקודות – בניגוד לתורה שלפנינו: תורת הקבוצות המופשטות – אין הקבוצה הסדורה המכשיר השיטתי היחיד. נוסף על הסדר, ואף ללא הכנסת סדר, מופיעים בתורה זו מושגים ראשוניים, למשל מושג הסביבה, הרוחק וכו', המכניסים רב־גווניות יתירה למקצוע והופכים אותו בסיס לתורת הפונקציות (הממשיות). מתחילת המאה ה 20 התפתחה ספרות עצומה בכוון זה, שמתוכה נרשמו למטה ספרים מועטים.[1]

1. מלבד ספריו המצויינים של Hausdorff הרשומים בעמ' 41, יש לציין, בין רבים אחרים, את הספרים הבאים:

L. M. Graves: The theory of functions of real variables. New York & London, 1946. 300 pp.

R. L. Moore: Foundations of point set theory. New York, 1932. 486 pp.

H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2nd ed. Paris, 1928.

C. de la Vallée Poussin: Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire. 2nd ed. Paris, 1934. 193 pp.

תרגילים ל ‎§2.

1) הוכח את החוק האסוציאטיבי לכפל של מספר סופי של טיפוסי־סדר, בהשענך על מס. יג) של המילואים!

2) הראה על פי דוגמה, שאין תוקף למשפט הבא (שהיה מקביל למשפט־האקויולנטיות, עמ' 46): אם משתי קבוצות סדורות נתונות דומה כל אחת לקבוצה חלקית של אחותה, דומות הקבוצות הנתונות עצמן זו לזו.

3) נתונים שני טיפוסי־סדר α ו β. מה הם הטיפוסים ההפכיים ל $\alpha + \beta$ ול $\alpha \cdot \beta$?

4) הוכח את היחסים: $\omega \cdot (\omega + \omega) = \omega^2 = \omega^2 + \omega$.

5) הוכח את היחסים הבאים (n טיפוס סופי $\neq 0$):

$$\eta + \eta = \eta, \quad \eta \cdot n = \eta, \quad \eta \cdot \omega = \eta, \quad \eta^2 = \eta.$$

6) הוכח (על־סמך ההוכחה לגבי η, עיין במלואים) את שלשת המשפטים:

א) אפשר לראות כל קבוצה סדורה בת־מנייה כקבוצה הלקית של קבוצה בעלת הטיפוס η;

ב) כל קבוצה סדורה צפופה מקיפה קבוצה חלקית בעלת הטיפוס η;

ג) יש במציאות רק ארבעה טיפוסים שונים של קבוצות סדורות צפופות בנות־מנייה, והם: η, $\eta + 1$, $1 + \eta$, $1 + \eta + 1$.

‎§3. הקבוצות הסדורות היטב והמספרים הסודרים.

בשני הסעיפים הקודמים עסקנו בקבוצות סדורות. והנה בכלל קבוצות אלו יש קבוצות המצטיינות באפיו המיוחד (הפשוט) של הסדר בין האיברים; מכנים אותו „סדר טוב". בהתאם לכך פשוטות ביותר תכונות הקבוצות „הסדורות היטב"; תכונותיהם של טיפוסי־הסדר שלהן קרובות לתכונות המספרים הטבעיים (טיפוסי־סדר סופיים). לכן נלמד לדעת את טיפוסי הקבוצות האינסופיות הסדורות היטב כסוג נוח ופשוט ביותר של „גדלים אינסופיים", סוג שאינו רחוק ממושג־המספר הרגיל ואינו מופשט באותה מידה כעצמות האינסופיות וטיפוסי־הסדר הכלליים. טיפוסים אלה נקראים „מספרים סודרים".

כבר גורם זה בלבד דיו לנמק את ערכם הרב של קבוצות וטיפוסים אלה במקצועות מתימטיים רבים. חיבה יתירה נודעת לתורת הסדר הטוב מתוך שאפשר להעב[illegible] כמה ממסקנותיה לקבוצות בדרך כלל, הסדורות והלא־סדורות.

C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen. I. (2nd ed., reprinted) New York, 1946. 184 pp.

H. Hahn: Reelle Funktionen, I. Leipzig 1932.

G. Vitali e G. Sansone: Moderna teoria delle funzioni di variabile reali. 2 vols. 2nd ed. Bologna, 1943–46. 194+511 pp. (Vol. I, 3rd ed., 1951).

בפרט נצליח בדרך זו לגדור את הפרצה שנשארה בתורת האקויולנטיות והעצמות: בעית ההשתוות. נתאר ניצול זה של תורת הסדר הטוב בסוף הסעיף הזה, ובעיקר ב ‎§5.

אפשר לטעון שתורת הסדר והמספרים הסודרים מקומה אפילו לפני תורת העצמות, שהיא נשארת בעלת־מום בלעדיה. אך מתוך השקפה פדגוגית, וכן לפי ההרגל בתיאור מקצועות מתימטיים אחרים, עדיפה הדרך מהכלל אל הפרט על הכוון ההפוך. תורת האקויולנטיות והעצמות שקופה יותר ומפוצלת פחות מתורת הקבוצות הסדורות, הודות לאפיין הכללי והמופשט של הקבוצות־סתם.

ב ‎§1 יצאנו מתוך העובדה, שהעצמות מהוות אמנם הכללה למספר הסופי כמספר מונה; אבל כדי למצות את תפקיד המספר בתהליך־הספירה ולראות את המספר גם כמספר סודר, יש לשים לב לסדר בו מופיעים האיברים בקבוצה. רעיון זה הובילנו אל טיפוסי־הסדר כהכללה למספר הסודר הסופי. ברם לתהליך־הספירה הרגיל יש אופי פרוט ופשוט בהרבה מאפייו של טיפוס־סדר. הלא לספירה יש תמיד ראשית: אצל העצם בו נתחיל לספור. ואחרי כל איבר שעבר תחת שבט־הספירה יופיע מיד, כעוקבו, האיבר הבא; כלומר את האיבר ה־n־י עוקב האיבר ה־$(n+1)$־י. תכונות אלו נעדרות אצל טיפוסי־הסדר: לא בטיפוס ω^* ולא ב η יש איבר ראשון, ובכל קבוצה צפופה אין עוקב מידי לשום איבר, בהימצא אינסוף איברים בין כל איבר לכל איבר הבא אחריו. בתקופת־יצירתו הקדומה כבר הדגיש קנטור את הרעיון, שהקבוצות הסדורות בעלות שתי תכונות אלו (בהכללת השניה, בהתאם לאוצר־איבריהן האינסופי) ראויות לתפוס מקום בראש הקבוצות הסדורות. נדמה, שרעיון זה הוא גולת־הכותרת במפעל־חייו של קנטור, אם נצרף כקנה־מידה את יפי הבנין בעצמו ואת רב־גווניותם של השימושים יחד.

אפשר להכניס מבחינות שונות, השקולות כולן זו כנגד זו, את המושג היסודי שעליו מתרומם הבנין. נבחר בדרך הבאה:

הגדרה 1: הקבוצה הסדורה V תיקרא סדורה היטב, אם בכל קבוצה חלקית של V שאינה ריקה, יש איבר ראשון.

בפרט צריך אפוא להימצא בקבוצה עצמה איבר ראשון. לשם הבנת ההגדרה יש לזכור, ש„קבוצה חלקית של קבוצה סדורה U" ר"ל קבוצה חלקית, שהסדר בין איבריה נקבע לפי כלל־הסדר השורר ב U.

יהי a איזה איבר שהוא של הקבוצה V[1], ותהי V' קבוצת האיברים הבאים ב V אחרי a; לפי זה V' היא קבוצה חלקית של V. אם a הוא איברה האחרון

---

1. לשם קיצור נשמיט פעמים רבות בסעיף זה את התאר „סדורה היטב", בייחוד אם הקבוצה מסומנת ב V, V', W וכו', או אם מדובר על „המספר הסודר" של הקבוצה.

של V, ורק במקרה זה, קיים $V' = 0$. אחרת נמצא בתוך V' איבר ראשון b על־סמך ההגדרה I, וקיים $a \prec b$ בעוד שאין ב V איבר c הנמצא בין a ו b; שהרי היחסים $a \prec c \prec b$ היו גורמים לכך ש c יימצא ב V' לפני האיבר הראשון b של V', וזוהי סתירה.

גם אם נצא מקבוצה חלקית A של V, ולא מאיבר בודד a בלבד, נוכל להסיק כנ״ל ולהגיע לאיבר b העוקב את A, במובן שאין איברים ב V הבאים אחרי כל איברי A ולפני b — בתנאי שיש בכלל איבר של V אחרי כל איברי A (או, כפי שאומרים, שאין A „קונפינָלית"[1] עם V). (אף אם $A = 0$ תשאר מסקנתנו בתקפה; במקרה זה יהיה b האיבר הראשון של V.) קבלנו כך:

משפט 1: יהי a איזה איבר שהוא של הקבוצה הסדורה היטב V, או A איזו קבוצה חלקית שהיא של V — בתנאי שאחרי a, או אחרי כל איברי A, נמצא ב V עוד איבר אחד לפחות. במקרה זה יש ב V איבר העוקב את a, או העוקב את A.

קל להוכיח, שתכונה זו של קבוצה סדורה היא גם מספיקה, כלומר: מבטיחה שהקבוצה סדורה היטב. (להלן אין לנו צורך בעובדה זו.) נקבל בכך הגדרה חדשה, שונה מ I, למושג „קבוצה סדורה היטב", הגדרה המבליטה אחת התכונות הרגילות של הספירה בתחום הסופי (עיין לעיל).

לפי המשפט 1 יש בכל קבוצה סדורה היטב איבר ראשון, שני, שלישי,..., n־י — אם הקבוצה לא תתרוקן לפני הצעד ה־n־י; לאמור: אם יש בה לפחות n איברים.

כל קבוצה (סדורה) סופית היא סדורה היטב, וכן כל קבוצה מנוייה (בעלת הטיפוס ω), כגון קבוצת כל המספרים הטבעיים בסדר הרגיל. (כמובן לא כל קבוצה בת־מנייה; שהרי אין צורך שיהיה בה סדר כל עיקר, ואם יש, אינו מוכרח להיות סדר טוב. עדות לכך תשמש קבוצת המספרים הרציונליים, שהיא סדורה היטב אם מופיעים המספרים לפי הסדר הנקבע בעמ׳ 18, אך לא אם יופיעו לפי גדלם.) מאידך לא לכל קבוצה אינסופית סדורה היטב יש הטיפוס ω; למשל לא לקבוצות הבאות (בעלות הטיפוסים $\omega \cdot 2 + 1$ ו $\omega \cdot \omega$):

$$(1, 2, 3, \ldots -1, -2, -3, \ldots 0),$$

$$(1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots [illegible]).$$

אמנם דוגמות אלו עודן מתארות קבוצות בנות־מנייה. בקבוצות אינסופיות סדורות היטב שאינן בנות־מנייה נדון ב § 4.

הקבוצה הסדורה בעלת איבר ראשון $(0, 1, 2, 3, \ldots \ldots, -3, -2, -1)$ אינה סדורה היטב; למשל בקבוצתה החלקית המכילה את המספרים השליליים

1. מהמלה הרומית confinalis שמובנה: שוה־סוף.

בלבד אין איבר ראשון, ואף לא בקבוצה המכילה את כל המספרים השליליים הזוגיים. כן אין סדר טוב בקבוצת המספרים הרציונליים (כולם; או בין 0 ל 1, לרבות את הקצוות), אם נסדר לפי גודל המספרים; אין למשל איבר ראשון בקבוצה החלקית המכילה את המספרים הרציונליים החיוביים בלבד.

מובן מאליו, לפי ההגדרה I ומושג הדמיון, שקיים:

משפט 2: כל קבוצה חלקית של קבוצה סדורה היטב היא סדורה היטב; וכן כל קבוצה סדורה הדומה לקבוצה סדורה היטב.

לפיכך, כדי שלא להוציא מן הכלל את הקבוצה הריקה, עלינו לראות גם את קבוצת־האפס 0 כקבוצה סדורה היטב. עמדה זו תגרור אחריה יתרונות מעין אלה הקשורים בהחלטה, לראות את הקבוצה הריקה כקבוצה חלקית של כל קבוצה.

כדי לבטא תכונה אפיינית אחרת של הקבוצות הסדורות היטב, נוסף על התכונות של הגדרה I ומשפט 1, נכניס שני מושגים המכוונים לכל קבוצה סדורה. (כמונח טכני נכתוב „רישה" ב־ה תחת א.)

הגדרה II: הקבוצה החלקית T של הקבוצה הסדורה S נקראת רישה של S, אם היחסים[1] $x \varepsilon T$ ו $x \prec y$ ב S גוררים אחריהם תמיד $y \varepsilon T$; ז״א אם יחד עם x משתייך לקבוצה החלקית גם כל איבר y הקודם ל x ב S. בפרט נקראת קבוצת כל איברי S הקודמים ל x, ראש של S; וביתר פירוט: ראשו של S הנקבע ע״י x.

לפי זה כל קבוצה סדורה היא רישה של עצמה, אולם לעולם לא ראש של עצמה. כל ראש של ראש של S הוא ראש של S; וכן לגבי רישות. בפרט 0 היא רישה של כל קבוצה סדורה, וראש של כל קבוצה סדורה היטב W: הראש הנקבע ע״י האיבר הראשון של W.

מתוך ההגדרה יוצא מיד שכל ראש של S הוא גם רישה של S. אין להפוך זאת כפי שכבר ראינו; דוגמה תשמש גם הקבוצה $(0, 1, 2, \ldots \ldots, -2, -1)$ שבה הקבוצה החלקית, המכילה את 0 ואת כל המספרים הטבעיים, מהווה רישה ולא ראש; שהרי אין איבר העוקב אותה. כמו־כן, אם נצא מן הקבוצה הסדורה המכילה את כל הנקודות שבקו־המספרים בין 0 ו 2, הרי הקבוצה החלקית המכילה את 1 וכל הנקודות משמאל לה, אינה ראש, עם היותה רישה. אולם לגבי הקבוצות הסדורות היטב קיים:

משפט 3: כל רישה A של הקבוצה הסדורה היטב W, פרט ל W עצמה, היא גם ראש של W. לאמור, היא „נקבעת" ע״י איבר מסויים של W העוקב את הראש.

1. הסימן ε (ליחס בין איבר לקבוצה) בואר בעמ׳ 5.

הוכחה: לפי ההנחה יש איברים ב־W שאינם משתייכים ל־A, ובהיות A רישה, עוקבים איברים אלה ב־W לכל איברי A. לכן האיבר a העוקב את כל איברי A (לפי משפט 1), הוא האיבר הראשון של $W-A$. לפיכך A הוא הראש של W הנקבע ע״י a, מש״ל.

קל להפוך את המשפט 3 ולהראות, שגם תכונה זו אפיינית היא לקבוצות הסדורות היטב. בדרך זו קבלנו שלש הגדרות, שקולות זו כנגד זו, למושג של קבוצה סדורה היטב (הגדרה I, משפטים 1 ו־3). הגדרה רביעית תנתן בתרגיל 2) שבסוף הסעיף הזה.

בנוגע לראשיה של קבוצה קיימים המשפטים הבאים:

משפט 4: משני ראשים שונים של אותה קבוצה סדורה[1] אחד הוא ראש לשני.

דבר זה מובן מאליו: אם a ו־b האיברים של הקבוצה הסדורה S הקובעים את הראשים A ו־B, ואם $a \neq b$ (מה שגורר $A \neq B$), קיים $a \succ b$ או $b \succ a$ ב־S. והנה במקרה הראשון A הוא ראש של B, במקרה השני B ראש של A.

משפט 5: קבוצה סדורה היטב W אינה דומה לאף אחד מראשיה, ואף לא לראש של קבוצה חלקית שלה.

משפט זה מעמיק לאין ערוך מקודמיו. נקדים להוכחתו הערה עקרונית על העתק דומה בין קבוצה סדורה היטב וקבוצה חלקית שלה, ונסלול את הדרך לקראתה ע״י דוגמה פשוטה. קבוצת כל המספרים הטבעיים N בסדר הטוב דלהלן (בו קודמים המספרים האי־זוגיים בסדרם הרגיל למספרים הזוגיים בסדרם הרגיל) תועתק לקבוצה החלקית N' הנוצרת ע״י הוצאת האיבר 1, לפי העתק זה:

$$
\begin{array}{llllllllll}
N: & 1 & 3 & 5 & \ldots & 2 & 4 & 6 & \ldots & \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
N': & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2 & 4 & 6 & \ldots & ;
\end{array}
$$

לאמור: כל מספר אי־זוגי n מ־N יותאם לאיבר $n+2$ מ־N' העוקב את n בתוך N, וכל מספר זוגי יותאם לעצמו. ברור שהעתק זה הוא דומה. כללו של דבר: יצרנו העתק דומה בין קבוצה סדורה היטב N לבין קבוצה־חלקית־ממש, המתאים לאיברים ידועים x מ־N איברים y מן הקבוצה החלקית שב־N עוקבים הם לבן־זוגם x ($x \prec y$).

בניגוד לכך לא יוכל לקרות המצב ההפוך, דהיינו שבהעתק דומה בין N לקבוצה חלקית N' (לרבות, כמובן, המקרה $N'=N$) יהיה ב־N האיבר y מ־N', המותאם ל־x מ־N, קודם ל־x ($x \succ y$). הוכחת הטענה הזאת היא עקרונית ואפיינית [illegible] כדי כך, שלא כדאי לדחותה למלואים, והקורא יתאזר־נא כח להבינה!

1. במשפט זה אין צורך להניח שהקבוצה תהא סדורה היטב.

נוכיח את הטענה דרך־שלילה, בהניחנו שלפי העתק דומה מסויים Φ בין N ו־N' יש לפחות איבר אחד x מ־N המקיים עם בן־זוגו y מ־N' את היחס $x \succ y$ ב־N. בין כל איברי x מ־N בעלי תכונה זו יהא x_0 הראשון; x_0 זה קיים, בהיות N סדורה היטב, ובן־זוגו של x_0 ב־N' יהיה y_0, באופן שקיים $x_0 \succ y_0$. הואיל ו־y_0 הוא גם איבר של N, יש לו לפי ההעתק Φ בן־זוג מסויים z_0 ב־N', ומחמת דמיון ההעתק Φ גורר היחס $x_0 \succ y_0$ (ב־N) אחריו את היחס בין בני־זוגם $y_0 \succ z_0$ (ב־N'). יחס זה קיים אפוא גם ב־N. בדרך זו קבלנו את הסתירה המבוקשת: שהרי לאיבר y_0 של N יש בן־זוג z_0 ב־N', הקודם ל־y_0 ב־N — אף־על־פי שהנחנו כי x_0 הוא האיבר הראשון של N בעל תכונה זו; והלא y_0 קודם ל־x_0 ב־N! סתירה זו מראה, שאין ב־N שום איבר x בעל התכונה הנידונה, מש״ל.

מכאן נובע מיד המשפט 5. אילו היתה הקבוצה W דומה לראש A — של עצמה או של קבוצה חלקית — הנקבע ע״י a (לפיכך כל איברי A קודמים ל־a ב־W), כי אז היה בן־זוגו של a בתוך A קודם ל־a ב־W, יהא ההעתק הדומה בין W ו־A אשר יהיה. לכן לא יוכל להיות דמיון בין W והראש A, כפי שטוען המשפט 5.

הערה: ההוכחה שלפנינו, הסותרת דרך־שלילה מציאותם של איברים x בעלי תכונה ידועה, מתוך כך שהיא מסתכלת בראשון x_0 בין האיברים הללו, אפיינית היא להוכחות רבות בתורת הקבוצות הסדורות היטב; הדבר מתאים לתכונתן של קבוצות אלו המתבטאת בהגדרה I. יש כאן מעין „בחירת" איבר מסויים מתוך קבוצת כל האיברים בעלי התכונה הנידונה; אבל בניגוד למקרה הכללי, המתואר בעמ' 72, הבחירה כאן בנייתית (קונסטרוקטיבית) היא על־סמך העובדה, שהקבוצה הנידונה היא קבוצה חלקית לקבוצה סדורה היטב, ולכן נוכל לבחור באיברה הראשון.

אולי תתעורר השאלה: משום־מה יוכל בן־הזוג y להימצא אחרי „המקור" ולא לפניו? הרי ליחסים $\succ$ ו־$\prec$ יש שויון־זכויות, ואיך נוצר מצב המבכר אחד מהם על פני רעהו? התשובה פשוטה: הגורם לכך הוא ההגדרה I. אילו הגדרנו קבוצה סדורה היטב ע״י כך שבכל קבוצה חלקית יימצא איבר אחרון, היינו מחליפים $\succ$ ב־$\prec$ בהוכחה שלפנינו. ואם תאמר „מה יתקבל אם נדרוש שני הדברים יחד?", יש למצוא את התשובה בסוף ה־§4.

מתוך הוכחת המשפט 5 נובע על נקלה:

משפט 6: יש העתק דומה אחד בלבד בין קבוצה סדורה היטב לעצמה, או לקבוצה דומה.

ההוכחה נמצאת במלואים לחלק הרביעי, מס. טו).

נפנה עתה אל טיפוסי־הסדר של הקבוצות הסדורות היטב, ונגדיר:

הגדרה III: טיפוס־הסדר של קבוצה סדורה היטב נקרא מספר סודר; בפרט מספר סודר סופי (עלסופי), אם הקבוצה היא סופית (אינסופית). אם A הוא ראש של הקבוצה W (הגדרה II), ייקרא המספר הסודר של A קטן מן המספר הסודר של W.

הערות להגדרה III.

1) השויון בין מספרים סודרים אינו טעון הגדרה, בהיותו נכלל בשויון בין טיפוסי־סדר בדרך־כלל: מספריהן הסודרים של שתי הקבוצות שוים הם אם הקבוצות הן דומות.

2) לפי 1) נוכל לנסח את סוף ההגדרה III גם כך:

בהיות ϱ ו σ מספריהן הסודרים של הקבוצות R ו S, ייקרא ϱ קטן מ σ (בסימן: $\varrho < \sigma$) אם R דומה לראש של S. יחס זה בין ϱ ו σ נבטא גם על ידי $\sigma > \varrho$ (σ גדול מ ϱ).

3) ראינו שכל קבוצה סדורה סופית היא ממילא סדורה היטב; לפיכך „טיפוסי־סדר סופיים" ו„מספרים סודרים סופיים" הם היינו הך. מאידך יש התאמה חד־חד־ערכית בין המספרים המונים הסופיים לבין המספרים הסודרים הסופיים, התאמה המצדיקה את סימון שניהם בסימנים הרגילים 0, 1, 2, 3, ... אין זה גורע מאומה מן העובדה, שקיימים שני שימושים שונים למספר הטבעי: כמספר מונה וכמספר סודר.

ההגדרה III מאפשרת סידור „לפי גדלם" בין המספרים הסודרים, סידור המקיים את התכונות של יחסי־הסדר הנהוגות בכל מקצועות המתימטיקה. באמת:

א) יחס־הסדר המוגדר הוא אי־ריפליכסיבי; לאמור: היחסים בין מספרים סודרים $\gamma = \delta$ ו $\gamma < \delta$ סותרים זה את זה. זוהי מסקנה מידית מן המשפט 5 האומר: אם C דומה לראש של הקבוצה הסדורה היטב D, לא תהיינה C ו D דומות, ולכן מספריהם הסודרים γ ו δ אינם שוים.

ב) יחס־הסדר הוא טרַנסיטיבי; לאמור: היחסים $\gamma < \delta$ ו $\delta < \lambda$ גוררים אחריהם $\gamma < \lambda$. אין זה אלא ביטוי אחר למשפט המובן מאליו (השוה משפט 4) האומר: אם C, D, L הן קבוצות סדורות היטב, ואם C דומה לראש של D, ו D לראש של L, הרי דומה C לראש של L.

ג) יחס־הסדר הוא אַסימֶטרי; לאמור: היחסים $\gamma < \delta$ ו $\delta < \gamma$ סותרים זה את זה. דבר זה נובע באופן פורמלי מ־א) ו ב), הואיל וקיום שני היחסים היה גורר אחריו $\gamma < \gamma$, יחס שאינו אפשרי.

ד) היחסים $\gamma < \delta$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$ גוררים $\gamma' < \delta'$; כלומר, ביחס־הסדר מותר להחליף כל מספר סודר בכל מספר שוה. דבר זה נובע מן ההגדרה III — השוה הערה 2) — הואיל והשויון בין מספרים סודרים מתלכד עם הדמיון בין קבוצות מתאימות.

ואולם אחרי ככלות הכל חסרה עוד הנקודה המכרעת, והיא: שבין כל שני מספרים סודרים γ ו δ קיים לפחות אחד היחסים $\gamma = \delta$, $\gamma < \delta$, $\delta < \gamma$; לאמור, שהמספרים הסודרים ניתנים להשוואה. רק בסוף הסעיף, אחרי הכנות רבות, נצליח להוכיח גם זאת.

מן ההגדרה III נסיק: אם μ הוא מספר סודר, קיים תמיד $\mu + 1 > \mu$; ביתר דיוק: $\mu + 1$ הוא המספר העוקב את μ. שהרי לכל קבוצה בעלת המספר הסודר $\mu + 1$ יש איבר אחרון, והראש הקבוע על ידיו הוא קבוצה בעלת המספר הסודר μ.

כמו כן קיים, כמובן, $\mu + \nu > \mu$ אם $\nu \neq 0$. לעומת זאת אין קיום כללי ליחס $\nu + \mu > \mu$. למשל נכון $n + \omega = \omega$ לגבי כל n סופי, וכן

$$\omega \cdot n + \omega \cdot \omega = \omega \cdot \omega .$$

קל להסיק מן ההגדרה III, שהסדר המוגדר על־ידיה בין המספרים הסודרים הסופיים לבין עצמם הוא הסדר הרגיל (לפי „הגודל") בין המספרים הטבעיים, לרבות 0. למשל, הקבוצה הסדורה (a, b, c) בעלת המספר הסודר 3 דומה לראש של הקבוצה $(0, 1, 2, 3, 4)$ בעלת המספר הסודר 5: היא דומה לראש הנקבע ע"י האיבר 3. לפיכך $3 < 5$.

מלבד זה קיים:

משפט 7: ω הוא המספר הסודר העלסופי הקטן ביותר.

משפט זה אין פירושו רק שאין מספר סודר עלסופי קטן מ ω, אלא הוא מביע באופן חיובי כי ω ניתן להשוואה עם כל מספר עלסופי אחר — מה שאינו מובן מאליו, כאמור לעיל — וכי ההשוואה מראה תמיד את ω כמספר הקטן.

ההוכחה פשוטה. תהי N קבוצה סדורה היטב אינסופית ו ν מספרה הסודר. עלינו להראות שקיים $\omega < \nu$ — אם לא $\omega = \nu$, כלומר אם אין N קבוצה מנוייה. נסמן את האיבר הראשון של N ב n_0, את עוקבו (משפט 1) ב n_1, ובדרך כלל את עוקבו של n_k ב n_{k+1}. הואיל ו N היא קבוצה אינסופית, נמצא לגבי כל איבר n_k מסוג זה גם עוקבו ב N. בסמננו את הקבוצה המנוייה $(n_0, n_1, n_2, \ldots)$ ב N_0, נוכל לכתוב $N = N_0 + \bar{N}$ במובן החיבור בין קבוצות סדורות כלומר באופן שכל איברי $\bar{N}$ נמצאים ב N אחרי כל איברי N_0.

יוכל להיות כי $\bar{N} = 0$; לאמור: כי N_0 מכיל את כל איברי N. במקרה זה קיים $\nu = \omega$. בכל מקרה אחר קובע האיבר הראשון של $\bar{N}$ את הראש N_0 של N, ולכן קיים לפי ההגדרה $\omega < \nu$. בכך גמרנו את הוכחת המשפט 7.

הואיל וכל קבוצה סופית היא ראש לקבוצה מנוייה — כלומר $m < \omega$ כנגד כל m סופי — נובעת מן המשפט האחרון המסקנה הבאה, הנותנת הצדקה נוספת להגדרה III.

משפט 8: כל מספר סודר סופי קטן מכל מספר סודר עלסופי.

פעולות־החשבון בין מספרים סודרים אינן טעונות הגדרה בפני עצמן, בהיותן כלולות בהגדרות הסעיף הקודם לפעולות־החשבון בין טיפוסי־סדר. אך יש לציין שבמקרים ידועים נקבל שוב, כתוצאה של הפעולה, מספר סודר.

משפט 9: אם נתונים מספרים סודרים בסדר טוב (למשל, כמותאמים לאיבריה של קבוצה סדורה היטב), מהווה סכומם המסודר שוב מספר סודר. לכן הסכום של מספר סופי של מספרים סודרים אף הוא מספר סודר; וכן המכפלה של שני מספרים סודרים (או של מספר סופי של מספרים סודרים).

הוכחה לרישא של משפט 9 תנתן במלואים לחלק הרביעי, מספר טז). הסיפא נובעת מן הרישא מיד. שהרי כל קבוצה סדורה סופית היא סדורה היטב, ואת המכפלה $\mu \cdot \alpha$ נוכל לבנות, בהתאימנו לכל איבר של קבוצה בעלת המספר הסודר μ אותו המחובר α (עמ׳ 92). ההכללה לאיזה מספר סופי שהוא של גורמים מתקבלת על־סמך האינדוקציה השלימה. לכן גם החזקות

$$\alpha^n, \ldots, \alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha, \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$

של מספר סודר α בעלי מעריכים סופיים n, הם מספרים סודרים.

מובן שאי אפשר לוותר על התנאי, שהמחוברים יופיעו בסדר טוב. אפילו אם המחוברים כולם סופיים, אין הסכום מספר סודר (סופי או אינסופי) אלא על־סמך התנאי ההוא. על צד האמת, נוכל לקבל כל טיפוס־סדר (כגון ω^* או η, ששניהם אינם מספרים סודרים) כסכום שכל מחובריו שוים ל־1 (עמ׳ 91).

המשפט 8 מכיל את הטענה שאפשר „להשוות" כל מספר סופי לכל מספר עלסופי לפי יחס־הסדר הקבוע בהגדרה III. לפני זה נוכחנו לדעת, שהמספרים הסופיים ניתנים להשואה בינם לבין עצמם. אבל מהו המצב לגבי המספרים הסודרים העלסופיים בינם לבין עצמם? כל זמן שלא הגענו לידי מסקנה חיובית בענין זה — לשון אחר: כל זמן שלא הוכחנו שההגדרה III מבטיחה סדר מסויים בין כל שני מספרים סודרים שונים — לא נוכל להכניס לתורת המספרים הסודרים אותה מידת פשטות ושקיפות שתכשירה לשימושים מועילים, ושהיא לבדה תצדיק את הכינוי מספר סודר. ללא השלמה זו יהיה עלינו לצפות ל„פיצול" בשורת המספרים הסודרים, באופן שהמספרים הנמצאים בענפים שונים לא ינתנו להשואה.

כדי להגיע למשפט היסודי המבטיח את ההשואה הכללית בין מספרים סודרים, נסמוך על המשפט החשוב הבא; הוכחתו נמצאת במלואים לחלק הרביעי, מספר יז).

משפט 10: יהי σ איזה מספר סודר שהוא, ותסומן ב $W(\sigma)$ קבוצת כל המספרים הסודרים הקטנים מ σ, כשהיא סדורה לפי גודל המספרים; לאמור: $\alpha \prec \beta$ בתוך $W(\sigma)$, אם $\alpha < \beta$. $W(\sigma)$ זו היא קבוצה סדורה היטב בעלת המספר הסודר σ.

נברר לנו את משמעות המשפט, בראשונה כנגד σ קטן! יהי $\sigma = 3$; הרי קטנים מ 3 רק המספרים הסודרים 0, 1, 2, ובסדרנו אותם לפי גדלם נקבל את הקבוצה הסדורה $W(3) = (0, 1, 2)$. היא סדורה היטב, ומספרה הסודר הוא 3.[1] באופן מקביל, כך טוען המשפט, תהיה $W(\sigma)$ תמיד סדורה היטב, ומספרה הסודר יהיה אותו מספר σ שבעזרתו הגדרנו $W(\sigma)$: כקבוצת כל המספרים הקטנים מ σ. אם למשל $\sigma = \omega$, הנה לקבוצה הסדורה של כל המספרים הסודרים הסופיים $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ יש המספר הסודר ω. וכן לגבי $\omega + 1$ וכו׳ (השוה ב § 4).

הקורא המעיין בהוכחת המשפט 10 (עיין במלואים) ימצא, איך קבוצה סדורה היטב שרירותית S בעלת המספר הסודר σ באה ללמדנו מה הן תכונותיה של הקבוצה הפרוטה $W(\sigma)$. אך הקבוצה S הריהי באה ללַמד ונמצאת לְמדה, כי על־סמך המשפט 10 אפשר לסמן ב„ציונים", הלקוחים מאיברי הקבוצה הפרוטה $W(\sigma)$, את איבריה של הקבוצה הכללית S; לאמור: לכתבם בצורה s_α, כעבור α לא על המספרים הטבעיים בלבד כנהוג במתימטיקה, אלא על מספרים סודרים סופיים ואינסופיים; ביתר דיוק: על המספרים הסודרים עד מספרה הסודר σ של S, ולא עד בכלל. (כציונו של כל איבר מ S עלינו לקחת את המספר הסודר המותאם לו בהוכחת המשפט 10; עיין שם.)

והנה גמרנו סוף־סוף את ההכנות הדרושות להוכחת האפשרות של השוואת כל שני מספרים סודרים בנוגע לגדלם. קודם כל נפיק מהמשפט 10 הקלה זו: כדי להשוות את המספרים הסודרים σ ו τ נוכל, תחת הסתכלנו באלו קבוצות שהן בנות המספרים הסודרים σ ו τ, להסתכל בקבוצות הפרוטות $W(\sigma)$ ו $W(\tau)$. שתי קבוצות אלו פותחות באותם האיברים: 0, 1, 2, ...; אם שתיהן אינסופיות, יכולים להופיע אחרי כך המספרים ω, $\omega + 1$, וכו׳. עלינו להוכיח, שהתלכדות זו אינה מצטמצמת ב„פתיחה" אלא הולכת ונמשכת עד שיושג גבולה הטבעי: בהרקת אחת הקבוצות.

תהא אפוא C המכפלה הפנימית (המשותף; עמ׳ 11) של הקבוצות $W(\sigma)$ ו $W(\tau)$ כשהיא סדורה לפי הסדר (המתלכד) בשתי קבוצות אלו. יחד עם כל איבר α, מכילה C גם כל מספר סודר קטן מ α על־סמך התכונה המקבילה של $W(\sigma)$ ושל $W(\tau)$; C היא אפוא רישה של קבוצות אלו. במקרה $C = W(\sigma) = W(\tau)$

1. כאן מתגלה מחדש הצורך לראות גם את 0 כמספר סודר, אם לא נרצה לסבך את הענינים. שהרי רק על־סמך התחלת הסידרה ב 0 (ולא ב 1) קיים המשפט 10 לגבי המספרים הסופיים.

יהיה $\sigma = \tau$, ומטרתנו כבר הושגה. אחרת יש לפחות באחת מן הקבוצות הנתונות, למשל ב $W(\sigma)$, איברים שאינם ב C. יהי γ האיבר של $W(\sigma)$ העוקב את כל איברי C. לפי המשפט 10 קיים במקרה זה $C = W(\gamma)$, ו γ הוא המספר הסודר של C. – הוא הדין אם הרישה C אינה מכילה כל איברי $W(\tau)$.

נתקדם עתה לפי התהליך ההגיוני שנקטנוהו בעמ׳ 46, בעסקנו בבעיה המקבילה לגבי עצמותיהן (מספריהן המונים; ואילו כאן: מספריהן הסודרים) של שתי קבוצות נתונות! נרשום אפוא את כל האפשרויות ביחסי המספרים הסודרים γ, σ, τ של C ו $W(\sigma)$ מזה, של C ו $W(\tau)$ מזה, בצורת טבלה:

	$C = W(\sigma)$, ז״א $\gamma = \sigma$	C ראש של $W(\sigma)$
$C = W(\tau)$, ז״א $\gamma = \tau$	$W(\sigma) = W(\tau)$, ז״א $\sigma = \tau$	$W(\tau)$ ראש של $W(\sigma)$, ז״א $\tau < \sigma$
C ראש של $W(\tau)$	$W(\sigma)$ ראש של $W(\tau)$, ז״א $\sigma < \tau$	*

שלשת המקרים הראשונים ממציאים לנו מסקנות כמו אצל העצמות, רק ביתר קלות לגבי המקרה הראשון (אשר הזקיקנו שם למשפט האקויוָלנטיות); המסקנות הן $\sigma = \tau$, או $\sigma < \tau$, או $\tau < \sigma$ (ז״א $\sigma > \tau$). במקרה הרביעי נמנעה שם מאתנו ההכרעה, עם כי נראה הדבר שמקרה זה אינו אפשרי; ואילו כאן קל להוכיח זאת.

באמת: המקרה הרביעי, המסומן ב־*, איננו עשוי להתגשם. שכן אם C הוא ראש הן ל $W(\sigma)$ הן ל $W(\tau)$, נקבע ראש זה בשתי הקבוצות ע״י האיבר γ, לפי מה שראינו לעיל. יוצא כי γ מופיע בשתי הקבוצות גם יחד, ולכן היה γ צריך להימצא גם במשותף C, בניגוד ליחס $C = W(\gamma)$ האומר כי ב C נמצאים רק המספרים הקטנים מ γ. סתירה זו מראה שהמשותף C מתלכד לפחות עם אחת הקבוצות שעל־ידיהן הוגדר. בצאתנו מן המספרים σ ו τ נמצא אפוא תמיד אחד משלשת המקרים $\tau = \sigma$, $\tau < \sigma$, $\tau > \sigma$ („טריכוֹטוֹמיה"); ואם נתכוון לקבוצות במקום מספרים, הרי קיימת המסקנה המקבילה כנגד כל שתי קבוצות סדורות היטב, הואיל והן דומות לקבוצות בנות האופי המיוחד שצויין במשפט 10. לאמור:

משפט יסודי I: מבין כל שני מספרים סודרים שונים, אחד קטן מחברו. לשון אחר: מבין שתי קבוצות סדורות היטב שאינן דומות, דומה אחת לראש מסויים של רעותה.

משפט זה מבטיח להמשכה של שורת המספרים אותה חד־ערכיות שאליה שאפנו, ומוציא כל אפשרות של פיצול שיביא לידי אי־השתוות בין שני מספרים. החוק שלפיו מתפתחת השורה מוצא את ביטויו המלא והפשוט במשפט 10, הקובע:

המספר הסודר „הרוֹבץ לַפתח" נקבע ע״י מכלל כל המספרים שכבר הגענו אליהם.

ואולם חשיבותו של המשפט היסודי עולה על האמור כאן; היא חורגת מעבר לתורת הסדר והלאה. אל תורת האקויולנטיות והעצמוֹת. זה עתה העלינו על הזכרון את „המקרה הרביעי" שבתורת האקויולנטיות, שמנע אותנו מהשווֹת כל שתי קבוצות זו לזו באשר לעצמותיהן, עד שהססנו להעניק לעצמות בדרך־כלל את תאר־הכבוד מספר. אולם בנוגע לעצמותיהן של קבוצות סדורות היטב, השגנו עתה את המטרה שנכספנו לה, כדלקמן.

תהיינה A וB קבוצות סדורות היטב. אם דומות הן, כל שכן שהן אקויולנטיות, דהיינו שעצמותיהן שוות. אם לאו, הרי אחת מהן דומה לראש של השניה לפי המשפט הקודם; לכן היא גם אקויולנטית לראש זה, שהוא קבוצה חלקית של הקבוצה השניה. והנה אם A אקויולנטית לקבוצה חלקית של B, נשארו מבין ארבעת המקרים של הטבלה בעמ׳ 46 רק שנים, והם: א) B אקויולנטית גם היא לקבוצה חלקית ידועה של A, ב) B אינה אקויולנטית לשום קבוצה חלקית של A. במקרה הראשון שוות עצמותיהן של A וB, ובמקרה השני עצמת A קטנה מעצמת B. (עיין שם, משפט 4.) על־כל־פנים ניתנות העצמות להשוואה, לאמור:

משפט יסודי II: הקבוצות הסדורות היטב ניתנות להשוואה לא רק לגבי מספריהן הסודרים, כי אם גם לגבי מספריהן המונים (עצמותיהן): העצמות או שוות הן, או אחת קטנה מאחותה. ביתר פירוט: אם המספר הסודר של A קטן ממספרה של B, עצמת A קטנה היא מעצמת B או שווה לה.

אם נגש לדבר בכוון ההפוך, בצאתנו שוב מהקבוצות הסדורות היטב A וB בעלות המספרים הסודרים α וβ, נקבל לפי היפוך הגיוני (השוה I, 325): אם עצמת A קטנה מעצמת B, קיים (כל שכן) $\alpha < \beta$; אכן אם העצמות שוות, יכול להתקיים כל אחד מן היחסים $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$, $\alpha < \beta$. (דוגמה: אם $\omega = \alpha$, $2 \cdot \omega = \beta$, הרי קיים $\beta > \alpha$ אף כי העצמות שוות.)

תרגילים ל§ 3.

1) האפשר ל„רכך" בהגדרה I את ההנחה כי V היא קבוצה סדורה? או את ההנחה שבכל קבוצה חלקית שאינה ריקה, נמצא איבר ראשון?

2) אפשר להגדיר „קבוצה סדורה היטב" כקבוצה סדורה, שאין לה קבוצה חלקית בעלת טיפוס־הסדר $^{*}\omega$. הוכחה!

3) תהיינה A וB קבוצות סדורות היטב דומות זו לזו. לפי המשפט 6 יש העתק דומה יחיד ביניהן; אם a הוא איזה איבר נתון של A, יהא b בן־זוגו

בB הוכח שהראש של A הנקבע ע״י a, דומה לראש של B הנקבע ע״י b! (השוה הוכחת המשפט 10 במלואים.)

4) בכל קבוצה שאיבריה הם ר א ש י ם של קבוצה נתונה סדורה היטב, יש איבר שהוא הראש „הקטן ביותר" (המשותף של כל אותם ראשים). הוכח משפט זה, והראה דוגמה לקבוצת ראשים של קבוצה סדורה אך לא סדורה־היטב, שלגביה אין תוקף למשפט הנ״ל!

§4. שורת המספרים הסודרים וה„אלפ״ים. האינדוקציה העלסופית. המספרים הסופיים.

נתחיל בשלשה משפטים הנובעים על נקלה ממסקנות הסעיף הקודם! ההוכחות הן במלואים לחלק הרביעי, מספר יח).

מ ש פ ט 1: כל קבוצה של מספרים סודרים, הסדורה לפי גודל המספרים, סדורה היטב.

מ ש פ ט 2: סכומם המסודר של מספרים סודרים, המופיעים כאיבריה של קבוצה סדורה היטב, שווה או גדול מכל אחד מן המחוברים.

מ ש פ ט 3: כנגד כל קבוצה של מספרים סודרים יש מספר סודר גדול עוד יותר, ובפרט מספר סודר, קבוע באופן חד־ערכי, שהוא ע ו ק ב אותה.

המשפט 3 מאפשר לנו לבטא את המשפט 10 של § 3 בצורה חדשה הנוחה יותר לצורך השימושים הבאים. שכן, אם U היא קבוצת מספרים סודרים המכילה, עם כל מספר שבתוכו, גם כל מספר קטן ממנו, ואם μ הוא המספר העוקב את U, מלמדנו המשפט 10, כי μ זה הוא מספרה הסודר של U. לאמור:

מ ש פ ט 4: אם קבוצה U של מספרים סודרים מכילה, יחד עם כל מספר שבתוכה, גם את כל המספרים הקטנים ממנו, ואם U היא סדורה לפי גודל המספרים (לכן סדורה היטב על־סמך המשפט 1), יהיה המספר הסודר μ של U עוקבה של הקבוצה U, ולכן $U = W(\mu)$ (משפט 10 של § 3).

יתרונו של ניסוח זה בהשוואה למשפט 10 הוא בכך, שכאן אין ה ה נ ח ה מכילה את μ כל עיקר. אין אפוא צורך לדעת מראש את המספר העוקב; אדרבה, בנינו אותו.

לפי המשפטים 3 ו 4 מהווה „קבוצת כ ל המספרים הסודרים" מ ו ש ג ה ס ו ת ר א ת ע צ מ ו, הואיל ומציאותה היתה גוררת אחריה מציאותם של מספרים הגדולים מכל איברי הקבוצה. בחלק הששי (כרך־ההשלמה) נדון בשרשיה של סתירה זו ובמסקנות שיש להסיק ממנה. מסבה זו נמנענו – ונימנע גם להבא – מֵהשתמש בקבוצת כל המספרים הסודרים; משום כך לא ניתנה להנחת המשפט 4 הצורה הפשוטה „אם U היא רישה של קבוצת כל המספרים הסודרים".

על־סמך המשפט 4 נוכל לבנות, צעד אחרי צעד, את המספרים הסודרים בכלל. החוק היסודי והאחיד לבנייתם אומר: אחרי הגיענו בתהליך הבניה למקום מסויים, עלינו לקבוע את המספר הסודר של קבוצת המספרים שנבנו עד כאן, מסודרת לפי גודל המספרים; מספר סודר זה הוא העוקב את כל אלה שנבנו. בהתחילנו ב 0, 1, וכו׳ נקבל בדרך זו את השורה הבאה, הקבועה באופן חד־ערכי: היא מהווה כביכול ה מ ש ך ל ס י ד ר ת ־ ה מ ס פ ר י ם ה ר ג י ל ה מ ע ב ר ל א י נ ס ו ף ה ס ת מ י ו ה ל א ה, ויש למנותה על יצירותיו הנועזות ביותר של ק נ ט ו ר.

$$0, 1, 2, 3, \cdots \omega, \omega+1, \cdots \omega\cdot 2 (=\omega+\omega), \omega\cdot 2+1, \cdots \omega\cdot 3, \cdots \omega\cdot m+n,$$
$$\cdots \omega^2 (=\omega\cdot\omega), \omega^2+1, \cdots \omega^2+\omega, \cdots \omega^2+\omega\cdot 2, \cdots \omega^2+\omega\cdot m+n,$$
$$\cdots \omega^2\cdot 2, \cdots \omega^2\cdot m+\omega\cdot n+p, \cdots \omega^3, \omega^3+1, \cdots \omega^n,$$
$$\cdots \omega^n\cdot m_n+\omega^{n-1}\cdot m_{n-1}+\cdots+\omega\cdot m_1+m_0, \cdots$$

המחוברים והגורמים m, n, p, m_n וכו׳, וכן המעריכים n וכו׳, מסמנים מספרים סודרים ס ו פ י י ם. סימון החזקות ω^2, ω^n וכו׳ הוא בהתאם למה שנאמר אחרי המשפט 9 של § 3. לקבוצת כל המספרים הקודמים ל ω^2, למשל, יש המספר הסודר $\omega^2 = \omega\cdot\omega$, הואיל והמספרים הקודמים (בעלי הצורה $\omega\cdot m+n$; מופיעים כסדרות (m קבוע, n משתנה) בסדר מנוי (m משתנה); כלומר כסידרה של סדרות.

אפשר, כפי שנראה להלן, להכליל את מושג ה ח ז ק ה גם כנגד מעריכים אינסופיים. לפי זה יש לסמן בסמל ω^ω את מספרה הסודר של קבוצת כ ל המספרים הסודרים הכלולים במסגרת דלעיל, ולהמשיך את סידרת המספרים הסודרים בעזרת מושג־החזקה החדש כדלקמן:

$$\omega^\omega, \omega^\omega+1, \cdots \omega^\omega+\omega, \cdots \omega^\omega\cdot n, \cdots \omega^{\omega+1} (=\omega^\omega\cdot\omega), \omega^{\omega+1}+1,$$
$$\cdots \omega^{\omega\cdot n}, \cdots \omega^{\omega^2}, \cdots \omega^{\omega^n}, \cdots \omega^{\omega^\omega}, \cdots \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon_0, \varepsilon_0+1, \cdots$$

במספר ω^{ω^ω} הבסיס הוא ω, והמעריך ω^ω, וכן הלאה. המספר המסומן ב ε_0 א י ן ל כ ת ב ו בצורה סופית בעזרת פעולות החיבור, הכפל וההעלאה־לחזקה, והוא המספר ה ר א ש ו ן מסוג זה. יש לו התכונה $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$. לפי קנטור נקראים המספרים הסודרים ζ הממלאים את היחס $\zeta = \omega^\zeta$ בשם מ ס פ ר י ־ε. ε_0 הוא מספר ה־ε הקטן ביותר.

המשפט היסודי 1 של § 3 מבטיח לשורה זו של המספרים הסודרים אחדות מלאה ללא פיצול; כ ל המספרים הסודרים יופיעו בתוכה, ותמיד לפי החוק המתבטא במשפט 10 של § 3, או במשפט 4 של סעיף זה. בעזרת המספרים האלה נוכל לְמנוֹת את איבריה של כ ל קבוצה סדורה היטב, שאיבריה אינם

מספרים סודרים דוקא, בהשתמשנו במספרים הללו כציונים. „מנייה" ר"ל כאן: לא בעזרת המספרים הסופיים בלבד אלא בעזרת אלו מספרים סודרים שהם.

בראשית הכרך הראשון של ספר זה, אגב טפול במספרים הטבעיים כמספרים סודרים (פרק שני), למדנו לדעת את האינדוקציה השלימה (היקש מ n אל $n+1$) כמכשיר המכריע, המאפשר הוכחות והגדרות בתחום המספרים האלה. מובן שמכשיר זה לא יוכל לספק את צרכינו כאן, שהרי אינו מביא אותנו אפילו עד ω, הקטן בין המספרים הסודרים העלסופיים. ואולם יש מכשיר מקביל, שהוא הכללה ענקית לתהליך האינדוקציה השלימה, והמכונה: האינדוקציה העלסופית (הטרַנספִיניטית).

נתחיל בביאור לשיטה זו כשהיא משמשת מכשיר להוכחה. יהי $\mathfrak{E}(\alpha)$ משפט הדן במספרים סודרים α. במקרה זה קיים:

משפט 5: המשפט $\mathfrak{E}(\alpha)$ נכון כלפי כל מספר סודר α[1], אִם: א) הוא נכון כלפי $\alpha = 0$, כלומר קיים $\mathfrak{E}(0)$[2]; ב) נכונותו כלפי כל המספרים הסודרים הקטנים ממספר מסויים ϱ גוררת אחריה את נכונותו כלפי ϱ; כלומר גוררת את קיום המשפט $\mathfrak{E}(\varrho)$.

הוכחה: יהי β איזה מספר סודר מסויים שהוא. נוכיח שעל־סמך ההנחות א) ו־ב) קיים $\mathfrak{E}(\beta)$. הקבוצה הסדורה היטב $W(\beta+1)$ מכילה את כל המספרים הסודרים עד β, ועד בכלל. אם כלפי כל איבר של $W(\beta+1)$ נכון המשפט $\mathfrak{E}$, הרי טענתנו אושרה. אם לאו, תהי $\bar{W}$ הקבוצה החלקית של $W(\beta+1)$ המכילה את המספרים ζ שכלפיהם $\mathfrak{E}$ אינו נכון; $\bar{W}$ היא קבוצה סדורה היטב, אינה ריקה, ואינה מכילה את המספר 0 (על־סמך ההנחה א) שבמשפטנו). יהי α האיבר הראשון של $\bar{W}$; במקרה זה $\mathfrak{E}(\alpha)$ אינו נכון, בו בזמן ש $\mathfrak{E}(\zeta)$ נכון כלפי כל $\zeta < \alpha$. ברם זה סותר את ההנחה ב), ולפיכך $\bar{W}$ ריקה, מש"ל.

לשם שימוש מעשי בתהליך האינדוקציה העל־סופית יהא בכך משום נוחיות ותועלת להבחין בין שני סוגי מספרים: לסוג הראשון משתייך כל מספר סודר γ שיש לו קודם־שכן שעוקבו הוא γ. כל מספר כזה נקרא „מספר מן הסוג הראשון"; את הקודם־השכן β של כל מספר γ כזה נכתוב בצורה $\beta = \gamma - 1$, הואיל ועוקבו של כל β הוא $\beta + 1$. נוהגים לראות גם את 0 (שאין לו קודם כל עיקר) כמספר מן הסוג הראשון (או כסוג בפני עצמו). לעומת מספרים אלה עומדים המספרים שאין להם קודם־שכן, „המספרים מן

1. ניסוח זהיר יותר הוא: כלפי כל מספר סודר α עד מספר מסויים α_0. אחרת יכול להיווצר הרושם כאילו אנו מתיחסים לשורת המספרים הסודרים בכללם (השוה מה שנאמר לעיל).

2. העובדה א) בעצם היא מיותרת, בהיותה כלולה בעובדה ב) כמקרה פרוט, שהרי אין מספר הקטן מ 0, ולכן התנאי מתמלא באופן „ריק".

הסוג השני"; אם δ הוא מספר כזה ו δ_0 איזה מספר סודר שהוא בעל התכונה $\delta_0 < \delta$ ($\delta \neq 0$) גורר אחריו שיש δ_0 כזה). הרי יש אינסוף מספרים בין δ_0 ל δ. לכן מכנים את המספרים מן הסוג השני גם בשם מספרי־גבול (או מספרים גבוליים), וכותבים $\delta = \lim \delta_n$, אם δ_n עובר על מספרי קבוצת־מספרים אינסופית סדורה לפי הגודל, ש δ הוא המספר העוקב אותה[1]. למשל:

$\omega = \lim n = \lim(n^2+1)$, אם n עובר על המספרים הטבעיים;

$\omega^\omega = \lim \omega^n = \lim(\omega^{2 \cdot n_1} + \omega \cdot n_2)$, אם n, n_1, n_2 עוברים על המספרים הטבעיים. – ברור ש ω הוא מספר־הגבול הקטן ביותר.

אחרי מיון זה למספרים הסודרים אפשר לנסח את המשפט 5, הדן בתהליך־ההוכחה לפי האינדוקציה העלסופית, גם בצורה זו:

המשפט $\mathfrak{E}(\alpha)$ נכון כלפי כל מספר סודר α אם

א) $\mathfrak{E}(0)$ נכון;

ב) נכונותו של $\mathfrak{E}(\alpha)$ גוררת אחריה את נכונותו של $\mathfrak{E}(\alpha+1)$;

ג) נכונות כל המשפטים $\mathfrak{E}(\alpha_n)$ גוררת אחריה את נכונותו של $\mathfrak{E}(\lim \alpha_n)$ (אם אין אחרון בין המספרים α_n; שכן אחרת אין משמעות ל $\lim \alpha_n$).

נוסח זה שקול כנגד הנוסח הקודם. עובדה זו נובעת מכך, שכל מספר השונה מ 0 הוא או מן הסוג הראשון או מן הסוג השני. לכן אפשר, בהוכחה דרך שלילה, לבצע את ההוכחה הקודמת מתוך חלוקה לשני מקרים אלה ומתוך שימוש ב־ב) או ב־ג).

להבחנה בין המספרים מן הסוג הראשון והסוג השני נודע, נוסף על חשיבותה המעשית, גם ערך היסטורי. בהתאם לכוונו הבנייתי, החל קנטור[2] להכניס את המספרים הסודרים לא על־סמך קבוצות (סדורות היטב), דהיינו כטיפוסי־הסדר שלהן, אלא במישרין, כ„המשך" לסידרת המספרים הטבעיים. לשם כך הסתמך על שני „עקרונות־יצירה", שהם: הוספת יחידה ($+1$) ויצירת הגבול ($\lim \delta_n$). עקרונות אלה שימשו לו הגדרה למספרים הסודרים, לפחות למספרים מ„מחלקות־המספרים" הראשונה והשניה (עיין להלן). אם שיטה זו לוקה בחסרונות, על־כל־פנים יש לה גם יתרון גדול, והוא אפייה הבנייתי. ואכן התברר[3], שאפשר להלביש את הבניה הנידונה צורה גיאומטרית; לאמור: אפשר להגדיר את המספרים הסודרים העלסופיים בעזרת בניה גיאומטרית במישור, ללא התייחסות לתורת־הקבוצות כל עיקר.

1. השוה את השימוש בסימן lim ב I, 283. הדמיון בין משמעות הסימן שם ופה אינו שלם; בפרט אין להגביל כאן את השתנות הציון n לקבוצה מנוייה (סידרה) דוקא.

2. השוה בפרט את מאמרו (השני) בכרך 21 של *Mathemat. Annalen* (1883), § 11. (כל כתבי קנטור, עמ' 195).

3. G. Haenzel: Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen Cantors. *Journal für Mathematik*, vol. 170 (1934), pp. 123–128.

גם כאן כבאריתמיטיקה אפשר להשתמש באינדוקציה לא רק לשם הוכחות כי אם גם לשם הגדרות. אם כלל (תכונה) מסויים המתיחס למספרים סודרים, מתואר באופן „ריקורסיבי”, – דהיינו: ראשית לגבי $\alpha=0$, ושנית לגבי כל מספר מסויים ϱ על סמך קביעתו לגבי כל המספרים הסודרים הקודמים ל־ϱ – ישנה במציאות פונקציה אחת ויחידה $f(\alpha)$ של גורם α העובר על המספרים הסודרים עד מספר מסויים, באופן ש־f ממלאת את הכלל הנידון.

שוב אפשר לחלק את התנאי השני לשנים: קביעת $f(\gamma+1)$ על־סמך $f(\gamma)$, וקביעת $f(\lim \delta_n)$ על־סמך הגדרת $f(\delta_n)$ כנגד כל n.

לכאורה מבוסס תהליך־הגדרה זה מיד על־פי מה שהוכח לעיל, ודעה זו היתה מקובלת, עד שהראה J. von Neumann[1], שיש צורך בהוכחה־ממש כדי להצדיק במלואו את התהליך ההגדרתי. רק אחרי זה התברר שטעות מקבילה השתרשה גם בתורת המספרים הטבעיים, לגבי תהליך־ההגדרה בעזרת האינדוקציה השלימה.[2] במלואים לחלק זה, מס. יט), תנתן הצדקה לתהליך־ההגדרה האינדוקטיבי, יחד עם ניסוח מדוייק יותר.

דוגמה להגדרה דרך האינדוקציה העלסופית. נגדיר כלפי γ קבוע, השונה מ 0 ומ 1, את החזקה γ^α, שבסיסה γ ומעריכה α הם מספרים סודרים, ע״י שלשת הכללים:

א) $\gamma^0=1$; ב) $\gamma^{\delta+1}=\gamma^\delta\cdot\gamma$; ג) $\gamma^{\lim\delta_n}=\lim(\gamma^{\delta_n})$.

הגדרה זו מסתמכת אך על הכפל בין שני מספרים. $\lim(\gamma^{\delta_n})$ ר״ל, כאמור לעיל, המספר העוקב את כל המספרים γ^{δ_n}.

לפי זה ועל־סמך היחס $\omega=\lim n$, שבו עובר n על המספרים הסופיים, קיים $\omega^\omega=\lim\omega^n$, בהתאם להגדרת ω^ω בעמ׳ 109.

הגדרה זו לחזקה של מספרים סודרים אינה מקבילה להגדרת החזקה של עָצמות בפרק השלישי. לאמור: אם $\mathfrak{c}$ היא עצמת קבוצה בעלת המספר הסודר γ, ו $\mathfrak{a}$ עצמת קבוצה בעלת המספר α, אין בדרך־כלל $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}$ עצמתה של קבוצה בעלת המספר הסודר γ^α (אלא גדולה מעצמת הקבוצה הזאת). נקח כדוגמה לכך $\gamma=\alpha=\omega$. במקרה זה $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}=\aleph_0$, ו $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}=\aleph_0^{\aleph_0}$ היא עצמת הרצף א (עמ׳ 67). אבל עצמתה של קבוצה בעלת המספר הסודר ω^ω

1. מ־1923 ואילך. השוה בעיקר מאמרו ב Mathemat. Annalen, כרך 99 (1928).
2. על ליקוי זה העירו רק קרוב ל־1928; השוה מה שנאמר ב־I, 17 ובהערה 1 שם. אמנם כבר Dedekind, אשר כחריפותו כן בהירותו, הדגיש הבדל זה בספרו המעמיק Was sind und was sollen die Zahlen (הופיע בראשונה ב־1888, ומאז במהדורות רבות ובשפות שונות), מס. 126 ו־130; אבל כמעט איש לא שת לבו לזאת במשך ארבעים שנה!

היא $\aleph_0$ בלבד. נוכל לסדר, למשל, את קבוצת כל המספרים הטבעיים לפי המספר הסודר ω^ω במסגרת המתחילה כך:

(כל המספרים הראשוניים); 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...

4, 6, 10, 14, ...; 9, 15, 21, 33, ...; ...

8, 12, 20, 28, ...; 18, 30, 42, 66, ...; ... 27, 45, 63, 99, ...; ...

16, 24, 40, 56, ...; ...

הקורא יסביר נא לעצמו את החוק הקובע סדר זה; העיקר שידע להבין, כי לקבוצת כל המספרים הקודמים ל 2^n לפי מסגרת זו יש המספר הסודר ω^{n-1}.

דוגמה פשוטה עוד יותר לאי־ההקבלה הנ״ל בהגדרת החזקה משמשת החזקה 2^ω, השוה ל ω.

לא רק ω^ω והמספרים הקודמים לו, אלא כל המספרים הסודרים הרשומים לעיל בשורת המספרים – לרבות ω^{ω^ω}, ε_0, ואף גדולים מהם בהרבה – הם מספריהן הסודרים של קבוצות בנות־מנייה; בקיצור: מספרים סודרים בני־מנייה. הדבר נובע מתוך העובדה הכללית:

משפט 6: המספר הסודר העוקב סידרה, שאיבריה הם מספרים סודרים בני־מנייה, גם הוא מספר סודר בן־מנייה.

דוגמה: ε_0 הוא בן־מנייה, בהיותו עוקב את הסידרה $(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \cdots)$.

הוכחה: הסכום σ של כל איברי הסידרה הוא מספרה הסודר של קבוצה בת־מנייה, כפי שיוצא מתוך ההגדרה II בעמ׳ 90 ומן המשפטים 3 בעמ׳ 19 ו 9 בעמ׳ 104. מאידך, σ גדול מכל איברי הסידרה (אם אין בה מספר גדול ביותר) או שוה לגדול שבה, כפי שנובע מהמשפט 2 בעמ׳ 108. לפיכך המספר העוקב המבוקש אינו גדול מ־ $\sigma+1$, מש״ל.

בעמ׳ 93 רמזנו לסיבה הפנימית לאי־ההתאמה הנ״ל בין החזקות של עצמות (מספרים מונים) ושל מספרים סודרים, היא אי־האפשרות להגדיר „כראוי” את המכפלה והחזקה של קבוצות סדורות בדרך־כלל. הגדרת החזקה שלפנינו היא רק תחליף אומלל למה שהיה רצוי לאמיתו של דבר. (השוה בספרו של האוסדורף מ־1914, עיין בעמ׳ 41, וכן במלואים מס. יג).)

ההגדרה הנ״ל לחזקה מהווה מקרה פרוט לסוג חשוב ביותר של הגדרות דרך האינדוקציה העלסופית – סוג שאת כל חשיבותו גילה האוסדורף. הוא קרא לפונקציות המופיעות בהגדרות אלו בשם פונקציות נורמליות. פונקציה $f(\alpha)$ המתאימה לכל מספר סודר α כערך הפונקציה שוב מספר סודר, נקראת פונקציה נורמלית, אם היא ממלאה את שני התנאים הבאים:

א) היא מונוטונית־עולה (השוה I, 245); כלומר, $\beta<\gamma$ גורר אחריו $f(\beta)<f(\gamma)$.

ב) היא ממלאת את „התנאי הגבולי" האומר: $\delta=\lim\delta_n$ גורר אחריו $f(\delta)=\lim f(\delta_n)$.

קל לראות כי, כמו $f(\alpha)=\mu^{\alpha}$ (אם μ שונה מ 0 ומ 1), כן גם הפונקציות $f(\alpha)=\mu+\alpha$ ו $f(\alpha)=\mu\cdot\alpha$ הן נורמליות, אם μ מסמן מספר סודר קבוע (שונה מ־0 במקרה הכפל); אך לא הפונקציות $f(\alpha)=\alpha+\mu$ ו $f(\alpha)=\alpha\cdot\mu$. השוה תרגיל 1) בעמ׳ 121.

האינדוקציה העלסופית נמנית על אותן השיטות של תורת הקבוצות שנודעת להן חשיבות יתירה גם בשאר תחומי המתימטיקה; במובן זה היא עומדת בראש כל השיטות מתורת הסדר (הקבוצות הסדורות). אפייני הדבר, שידה נטויה לא רק על בעיות מן האנליזה והגיאומטריה אלא אף על בעיות אריתמיטיות; בנין אב לסוג זה משמשת הוכחה מפורסמת של ש ט י י נ י ץ (1910) מן האלגברה המופשטת (הרחבת שדות מופשטים; השוה I, 196). אמנם האינדוקציה העלסופית היא אחת השיטות המאוחרות בתורת הקבוצות. גרעינה נמצא במאמרו האחרון של ק נ ט ו ר (1895), אבל במפורש היא מופיעה רק מראשית המאה העשרים ואילך.

בסעיף הקודם עסקנו בחיבור ובכפל בין מספרים סודרים, וכאן הוגדרה ההעלאה לחזקה. טבעי אפוא לנגוע עוד בפעולות ההפוכות, חיסור וחילוק, שאין להן טעם לגבי עצמות, כפי שראינו.

מה שנוגע לחיסור, יש להבדיל בין שני סוגים, „חיסור משמאל" ו„חיסור מימין"; לאמור: בין פתירת המשוואות (לגבי הנעלם ζ) במספרים סודרים $\mu+\zeta=\nu$ ו $\zeta+\mu=\nu$. אי־קומוטטיביותו של החיבור במספרים סודרים מכריחתנו להבחין בין שני סוגים אלה.

באשר למשוואה $\mu+\zeta=\nu$, הרי מהגדרת הסדר בין מספרים סודרים יוצא, שאין למשוואה זו פתרון אם $\nu<\mu$, והפתרון היחיד $\zeta=0$ אם $\nu=\mu$; הלא לעומת כל ערך אחר ζ קיים $\nu<\nu+\zeta$. מאידך, אם $\nu>\mu$, תהא N קבוצה בעלת המספר הסודר ν, M הראש של N בעל המספר הסודר μ, ו ζ מספרה הסודר של ה„שארית" הנותרת ב N אחרי הוצאת הראש M. במקרה זה קיים לפי החיבור בין מספרים סודרים $\nu=\mu+\zeta$, וקל לראות שפתרון ζ זה, שיש לכתבו בצורה $\zeta=-\mu+\nu$, נקבע באופן חד־ערכי. השוה במלואים לחלק הרביעי, מספר כ).

החיסור מימין, כלומר פתירת המשוואה $\zeta+\mu=\nu$ אינו ניתן לביצוע בדרך כלל. שכן אם $\nu<\mu$ אין פתרון למשוואה על־פי המשפט 2 בעמ׳ 108. גם אם $\nu>\mu$ אין פתרון בדרך כלל;[1] מספיק לעיין במקרה שאחד מן המספרים μ ו ν הוא מספר גבולי והשני לא. לבסוף, אם יש פתרון, יש אינסוף פתרונים בדרך כלל, כגון במקרה $\nu=\mu$ או $\nu=\omega+\mu$ (μ אינסופי); במקרה הראשון, למשל, יש לפחות הפתרונים $\zeta=0,1,2,\ldots$.

1. הכתיב $\nu-1$, המבואר לעיל כלפי מספרים ν מן הסוג הראשון, הוא מקרה פרוט לגמרי.

באשר לחילוק, קיים המשפט הבא, המקביל עד כדי הפתעה לחילוק בין המספרים הטבעיים (שעליו מתבססת תורת־המספרים הכפלית; עיין I, 57):

משפט 7: כנגד כל שני מספרים סודרים μ ו α $(\alpha\neq0)$ יש זוג אחד ויחיד של מספרים סודרים $\varkappa$ ו ϱ באופן שקיים

$$\mu=\alpha\cdot\varkappa+\varrho.\quad(\varrho<\alpha)$$

ϱ מכונה שארית החילוק של μ ב α (משמאל).

הוכחת המשפט, הבאה במלואים לחלק הרביעי, מספר כ), מסתמכת על הכפל בטיפוסי־סדר (הגדרה III בעמ׳ 92). כאן נסיק שתי מסקנות פשוטות:

א) בקחתנו את ω כמחלק α, נקבל:

$$\mu=\omega\cdot\varkappa+n;$$

n כאן סופי, שהרי כל מספר סודר הקטן מ ω הוא סופי. לפיכך קיים $n=0$ אם μ הוא מן הסוג השני (מספר גבולי), $n\neq0$ אם μ הוא מן הסוג הראשון.

ב) נקח $\alpha=2$, ונקבל:

$$\mu=2\cdot\varkappa+m.\quad(m=0,1)$$

בהתאם לכך מתפלגים גם המספרים הסודרים האינסופיים, כמו הסופיים, לשני סוגים: זוגיים ואי־זוגיים. מובן שכל מספר גבולי הוא זוגי, אך לא חילוף הדבר: 2, ו $\omega+2=2\cdot(\omega+1)$, למשל, הם זוגיים.

ביתר כלליות: לפי המשפט 7 מתחלק כל מספר גבולי μ בכל אחד מן המספרים $\alpha=1,2,\ldots,n,\ldots,\omega$; שכן נובע מן המשפט 7 במקרים אלו:

$$\mu=\alpha\cdot\varkappa+m\quad(m<\alpha)$$

ואם $m\neq0$, μ אינו מספר גבולי.

בהיותנו טרודים במספריהן הסודרים של הקבוצות הסדורות היטב, לא שמנו לב למספריהן המונים. עצמות הקבוצות האינסופיות הסדורות היטב נקראות „אֲלָפִים" על־סמך המנהג לסמנן באות העברית א בתוספת ציונים מתאימים[1]. שתי קבוצות דומות הן בודאי אקויולנטיות; לשון אחר: לקבוצות (סדורות היטב) בעלות מספרים סודרים שווים יש עצמות שוות. לכן אפשר לדבר בקיצור על האָלֶף (העָצמה) של מספר סודר אינסופי σ: הלא היא עצמתה של קבוצה איזו שהיא בעלת המספר הסודר σ. התכונה המרימה על נס את האלָפים בין העצמות האינסופיות כולן, היא האפשרות להשוות כל שני אלפים, על־סמך המשפט היסודי II. כבר בראשית תורת־האקויולנטיות עוררנו את בעית ההשוואה לגבי עצמות בדרך כלל (של קבוצות סדורות או לא־סדורות) אך ללא הצלחה.

כפי שראינו, מותאמת לכל מספר סודר עצמה אחת ויחידה: האָלֶף שלה.

1. כאמור בעמ׳ 89, נסמן ב א ללא ציון עָצמת הרֶצף. השוה להלן ב § 5.

אך בכוון ההפוך אין התשובה כה פשוטה. אמנם לכל מספר מונה סופי מותאם גם מספר סודר אחד ויחיד, כפי שראינו. אולם לגבי עצמה אינסופית, אין כל ודאות מראש שמותאם לה מספר סודר כל עיקר; כלומר: אין בטחון שלעומת כל קבוצה אינסופית יש קבוצה אקויולנטית סדורה היטב. בעיה זו תעסיקנו בסעיף הבא. א ם לעצמה (אינסופית) ידועה מותאם מספר סודר, הרי מותאם לה לא מספר אחד בלבד, אלא א י נ ס ו ף מ ס פ ר י ם ש ו נ י ם – כלומר, ההתאמה היא חד־רב־ערכית. לשם הוכחה נסמן ב s עצמתה של קבוצה אינסופית בעלת המספר הסודר σ; לפי־זה מותאמת s גם לאינסוף המספרים הסודרים השונים $m+\sigma$ כעבור m על כל המספרים הסופיים, וכן למספר הסודר $\omega+\sigma$ וכו׳.

כך מותאמת העצמה $\aleph_0$ למספר הסודר (העלסופי הקטן ביותר) ω, ולכן גם לכל המספרים $m+\omega$, וכן ל $\omega\cdot 2=\omega+\omega$, וכו׳. מתוך האמור לעיל מתברר, שתפסנו בדרך זו חלק קטנטן בלבד מבין המספרים הסודרים בעלי העצמה $\aleph_0$, שעליהם נמנה גם $\omega^{\omega^{\omega}}$, ואפילו ε_0, וכו׳ (משפט 6).

קבוצת כל המספרים הסודרים בעלי אלף מסויים, $\aleph_\nu$, כעצמתם, נקראת מ ח ל ק ת ־ ה מ ס פ ר י ם של $\aleph_\nu$, ותסומן ב $Z(\aleph_\nu)$. לפי זה מהווה $Z(\aleph_0)$ את קבוצת מספריהן הסודרים של כל הקבוצות הסדורות היטב הניתנות להימנות. (לגבי המספרים הסופיים אין חשיבות למושג זה, באשר מחלקת־המספרים של המספר המונה n מכילה את המספר הסודר n בלבד.) ככל קבוצה של מספרים סודרים כן גם כל מחלקת־מספרים, אם תסודר לפי גודל המספרים, תהיה סדורה היטב; לפיכך יש בה מספר ק ט ן ב י ו ת ר, המכונה ה מ ס פ ר ה פ ו ת ח של המחלקה. המספר הפותח של $Z(\aleph_0)$ הוא אפוא ω. המספר הפותח של $Z(\aleph_\nu)$ יסומן ב ω_ν; לכן יש לכתוב ω גם כ ω_0. איבריה ζ של מחלקת־המספרים $Z(\aleph_\nu)$ מקיימים אפוא את אי־השויון $\omega_\nu \leq \zeta < \omega_{\nu+1}$.

הבה נוכיח משפטים אחדים, אמנם פשוטים אך מרחיקי־לכת, על אלפים ומספרים פותחים.

מ ש פ ט 8: כל מספר פותח עלסופי (כלומר, שונה מ 0) הוא מספר גבולי.

הוכחה: אלמלא כן, היה למספר הפותח δ קודם מידי γ שלגביו קיים $\delta=\gamma+1$, ולכן היו γ ו δ בעלי אותה העצמה. אך דבר זה סותר את תכונת המספר הפותח: שעצמתו גדולה מעצמות קודמיו.

מ ש פ ט 9: כל קבוצה של אלפים, הסדורה לפי גודל המספרים, היא סדורה היטב. לעומת כל קבוצה של אלפים יש אלפים גדולים יותר, ובפרט אלף ה ע ו ק ב א ו ת ה.

הדרך הפשוטה להוכחת הטענה הראשונה היא לייצג כל אלף ע״י המספר הפותח שלו, כלומר ע״י איבר מצויין מתוך מחלקת־המספרים של אותו אלף. בהתאם לכך הופכת הטענה לטענה על מספרים סודרים הכלולה במשפט 1. באשר לטענה

השניה, נסמן ב U את הקבוצה שאיבריה הם כל המספרים הסודרים השייכים לאלפים הנתונים, לרבות כל המספרים הסודרים הקטנים מהם. מספרה הסודר v של U גדול מכל איברי U ועוקב את U (משפט 4). לכן שייך ל v אלף, שהוא גדול מכל האלפים שבקבוצה הנתונה ועוקב אותם, מש״ל.

ממש כמו כל מספר סודר, כן קבוע כל אלף ע״י קודמיו, ומסומן הוא ב $\aleph_\nu$ אם ν מספרה הסודר של קבוצת כל האלפים הקודמים ל $\aleph_\nu$. ביתר פירוט: $\aleph_{\nu+1}$ עוקב את $\aleph_\nu$; ואם $\lim\ \alpha_x=\mu$, עוקב $\aleph_\mu$ את קבוצת כל ה $\aleph_{\alpha_x}$ (כעבור x על קבוצה ידועה של מספרים סודרים). בפרט עוקב $\aleph_\omega$ את הקבוצה $(\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots)$, וקל לראות שקיים:

$$\aleph_\omega=\aleph_0+\aleph_1+\ldots+\aleph_n+\ldots.$$

כל אלף $\aleph_\mu$ שציונו μ הוא מספר גבולי, ייקרא „אלף גבולי״; $\aleph_\omega$ הוא האלף הגבולי הקטן ביותר.

מ ש פ ט 10: לעומת כל $\aleph_\mu$ קיים $\aleph_\mu\cdot\aleph_0=\aleph_\mu$.

הוכחה: לפי המשפט 8 ולפי א) בעמ׳ 115 מתחלק המספר הפותח ω_μ של $Z(\aleph_\mu)$ ב ω (משמאל); ז״א, קיים $\omega_\mu=\omega\cdot\eta$. לכן יתן המעבר אל העצמות את השויון $\aleph_\mu=\aleph_0\cdot\bar{\eta}$, שבו מסמן $\bar{\eta}$ את עצמת η. הכפל ב $\aleph_0$ נותן לפי החוק הקומוטטיבי והאסוציאטיבי:

$$\aleph_\mu\cdot\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_\mu=\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\bar{\eta}=\aleph_0\cdot\bar{\eta}=\aleph_\mu.$$

בהשתמשנו באי־השויון של König (עמ׳ 65) נסיק מכאן את המסקנה, שעל כל פנים $\aleph_\omega$ א י נ ה ע צ מ ת ה ר צ ף א $(=2^{\aleph_0})$; ביתר כלליות: $\aleph_\omega$ אינה ניתנת להצגה בצורה $\aleph_\omega={\aleph_\mu}^{\aleph_\nu}$. שכן מהצגה זו היה יוצא, לפי משפטו של קיניג והמשפט 10:

$$\aleph_\omega=\aleph_0+\aleph_1+\aleph_2+\ldots<{\aleph_\omega}^{\aleph_0}=({\aleph_\mu}^{\aleph_\nu})^{\aleph_0}=(\aleph_\mu)^{\aleph_\nu\cdot\aleph_0}={\aleph_\mu}^{\aleph_\nu}=\aleph_\omega,$$

כלומר $\aleph_\omega<\aleph_\omega$, וזוהי סתירה. כפי שיוצא מהוכחה זו, עומדת הטענה בתקפה גם אם הבסיס $\aleph_\mu$ הוא מספר מונה סופי (כגון 2), ובלבד שיהיה המעריך $\aleph_\nu$ אלף־ממש.

מ ש פ ט 11: למחלקת־המספרים $Z(\aleph_\nu)$, כשהיא סדורה לפי גודל המספרים, יש המספר הסודר $\omega_{\nu+1}$ והעצמה $\aleph_{\nu+1}$.

הוכחה: המספר הפותח $\omega_{\nu+1}$ הריהו לפי הגדרתו מספרה הסודר של קבוצת כל המספרים בעלי עצמה קטנה מ $\aleph_\nu$ או שווה ל $\aleph_\nu$ (לרבות המספרים הסופיים). לפיכך קיים היחס (אפילו במובן של חיבור קבוצות ס ד ו ר ו ת):

$$W(\omega_{\nu+1})=W(\omega_\nu)+Z(\aleph_\nu).$$

בעברנו מן הקבוצות למספריהן הסודרים ובסמננו את מספרה הסודר של $Z(\aleph_\nu)$ ב φ ואת עצמתה (שהיא אלף) ב $\bar{\varphi}$, נקבל:

$$\omega_{\nu+1}=\omega_\nu+\varphi,\qquad \aleph_{\nu+1}=\aleph_\nu+\bar{\varphi}, \tag{1}$$

ז״א $\varphi \leq \aleph_{\nu+1}$. אבל האלף φ אינה יכולה להיות קטנה מ $\aleph_{\nu+1}$, כלומר להיות שוה ל $\aleph_\nu$ או קטנה ממנה; שכן דבר זה היה גורר אחריו לפי המשפט 10:

$$\aleph_\nu + \overline{\varphi} \leq \aleph_\nu + \aleph_\nu = \aleph_\nu \cdot 2 \leq \aleph_\nu \cdot \aleph_0 = \aleph_\nu < \aleph_{\nu+1}$$

בניגוד לשויון הימני שב(1). לבסוף גוררת מסקנתנו $\varphi = \aleph_{\nu+1}$ אחריה $\varphi \geqq \omega_{\nu+1}$, ולכן $\varphi = \omega_{\nu+1}$ על פי השויון השמאלי שב(1). (השוה התרגיל 1 שבסוף הסעיף הזה.)

בקחתנו את המקרה הפרוט $\aleph_\nu = \aleph_0$ נמצא את עוקבו $\aleph_1$ של $\aleph_0$ כעצמת הקבוצה $Z(\aleph_0)$, שאיבריה הם מספריהן הסודרים של כל הקבוצות הסדורות היטב הניתנות להימנות. מספרה הסודר של הקבוצה $Z(\aleph_0)$, שרגילים לכנותה בשם מחלקת־המספרים השניה[1], הוא המספר הפותח ω_1 של מחלקת־המספרים $Z(\aleph_1)$.

בהקבלה לשורת המספרים הסודרים נקבל את שורת האֲלפים

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots \aleph_{\omega\cdot 2}, \ldots \aleph_{\omega^2}, \ldots .$$

לא יתכן לראות את מערכת כל האלפים כקבוצה, הואיל ודבר זה יגרור אחריו סתירה הגיונית מאותו סוג כמו מערכת כל המספרים הסודרים.

בשורת האלפים מציין $\aleph_{\alpha+1}$ את האלף העוקב את $\aleph_\alpha$. אולם בשפת העָצמות נוכל רק לומר: העצמה $\aleph_{\alpha+1}$ עוקבת את העצמה $\aleph_\alpha$, בוותרנו על ה״א הידיעה. שהרי טרם הוכחנו שכל עצמה היא גם אלף, או שכל שתי עצמות ניתנות להשוואה (עיין בסעיף הבא); לפיכך יתכן כי את $\aleph_\alpha$ עוקבות שתי עצמות שונות שאין ביניהן אפשרות־השוואה. כן מציין אלף גבולי $\aleph_\alpha$ את האלף העוקב את כל ה־$\aleph_\beta$ שלגביהם $\beta < \alpha$.

חוקי החשבון בין האלפים פשוטים הם מחוקי החשבון בין עצמות בדרך כלל. במשפט 10 למדנו $\aleph_\mu \cdot \aleph_0 = \aleph_\mu$; מכאן שקיים כנגד כל n סופי שונה מ 0:

$$\aleph_\mu \cdot n = \aleph_\mu, \; \aleph_\mu + \aleph_\mu \; (= \aleph_\mu \cdot 2) = \aleph_\mu, \; \aleph_\mu + \aleph_\nu = \aleph_\mu (\nu < \mu).$$

במקרה $\nu < \mu$ נוכל גם לכתוב: $\aleph_\mu - \aleph_\nu = \aleph_\mu$. קשה יותר להוכיח את היחס[2]

$$\aleph_\mu \cdot \aleph_\mu = \aleph_\mu,$$

שממנו יוצא $\aleph_\mu^{\,n} = \aleph_\mu$. לעומת זאת יש אינסוף ציונים μ שלגביהם קיים $\aleph_\mu^{\aleph_0} > \aleph_\mu$; למשל $\mu = 0$ (עמ׳ 67), ו $\mu = \omega$ (עמ׳ 117). נזכיר עוד ללא הוכחה את המשפטים הכלליים האומרים:

1. לפי נוסח קנטור, שכינה את קבוצת כל המספרים הסופיים בשם „מחלקת־המספרים הראשונה״. — לעומת זאת יש לקבוצת כל טיפוסי־הסדר של קבוצות סדורות בנות־מנייה העצמה $\aleph = 2^{\aleph_0}$. שאלת האקויולנטיות בין שתי קבוצות אלו היא אפוא שוב „בעית־הרֶצֶף״.

2. ההוכחה הראשונה ניתנה ע״י Hessenberg, הוכחה פשוטה יותר ע״י Jourdain.

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu, \quad (\mu \leq \nu + n, \text{ סופי } n\text{; F. Bernstein})$$

$$\aleph_{\mu+1}^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_{\mu+1}. \text{ (Hausdorff)}$$

בניגוד לאריתמיטיקה, שבה יש למשוואה $x^y = y^x$ הפתרון היחיד $x = 4$, $y = 2$, יש לעומת כל $\aleph_\alpha$ עצמה $\mathfrak{r}$ כך שקיים $\aleph_\alpha^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}^{\aleph_\alpha}$[1]. לעומת $\alpha = 0$, למשל, יש לקחת

$$\mathfrak{r} = 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + 2^{2^{2^{\aleph_0}}} + \ldots .$$

אמנם עד עתה אין שמושים של ממש לתורות אלו מחוץ למתימטיקה; אף בפני מקצועות מתימטיים כגון הטופולוגיה, שהיו רגילים להסתמך על המספרים הסודרים, נפתחו בזמן האחרון דרכים אחרות (הבנויות אף הן, כמובן, על תורת־הקבוצות). אך כתורת־המספרים או תורת־גָלוּאַ (ו, 190) כן גם התורה שלפנינו כבודה ויפייה פנימה; הילברט ראה אתוה כ„פריה הראוי להתפעלות יתירה של המחשבה המתימטית וכאחד מהישגיה העליונים של פעולה שכלית טהורה בכלל״.[2]

בסוף תיאור זה לתורת הקבוצות הסדורות היטב ולמספריהן מן הראוי לציין, שתורה זו מכילה כפרט את תורת הקבוצות הסופיות ומספריהן, שהם המספרים הסופיים (הטבעיים) — כמספרים סודרים ומונים כאחד. הכוונה לא לתיאור פסיכולוגי או דידַקטי; במובן פסיכולוגי לא יציע איש לגשת אל המספרים 1, 2, 3, וכו׳, או אף אל המספר הטבעי בכללו (אם בכלל זהו נושא לעיון פסיכולוגי), דרך המספרים הסודרים הכלליים. ובאשר להוראה במתימטיקה, הרי ודאי יקדם לימוד האריתמיטיקה בבית הספר להכנסת מושגיה המופשטים והכלליִים של תורת־הקבוצות. השאלה היא הגיונית־שיטתית: האפשר לראות את תורת הקבוצות הסופיות והמספרים הסופיים כחלק, המתקבל מתוך פירוט, של תורת־הקבוצות הכללית? אם התשובה חיובית היא, הרי אין ספק בדבר, שרצוי לסלול דרך זו בהתחשב בכלליות מושגיה של תורת־הקבוצות, לעומת פירוטם ומוחשיותם של המושגים בתורת־המספרים (עיין ב ו, פרק שני). מי שישים לבו למטרה זו, לא יושפע ע״י הלעג ששפך פּוֹאֶנקרֶה על אלה

1. מכאן נובעת המסקנה המפתעת שבחשבון העצמות (עיין בפרק הקודם) אין אי־השויונות $n < \mathfrak{r}$ ו $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ גוררים אחריהם את אי־השויון $\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{q}^{\mathfrak{r}}$, אלא יכול להתקיים גם שויון בין חזקות אלו. השוה A. Tarski ב *Fundam. Math.*, כרך 7, 1925. נקבל רביעיה כזו בקחתנו, למשל, כ $\mathfrak{r}$ את הערך דלעיל ובשימנו $\mathfrak{n} = \aleph_0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{q} = 2^{\mathfrak{r}}$.
המאמר ההוא של טרסקי מכיל משפטים רבים על החשבון באלפים, לרבות מכפלות אינסופיות של אלפים.

2. *Mathemat. Annalen*, vol. 95 (1925), p. 167.

המגלים, להפתעתם כביכול, בקרן־זווית צנועה ומרוחקת של התחום הענקי המיושב ע״י הקבוצות את מיודעיו מכבר: המספרים הטבעיים.

לא נתעמק בשאלה — שאפייה הוא הגיוני לא פחות ממתימטי — עד כמה צריך להניח מראש בביסוסה של תורת־הקבוצות את המספרים הטבעיים. (השימוש במספרים מסויימים מעטים, כגון 1, 2, 3, הוא מותר ללא פקפוק, באשר לא יביא לידי שיטה מעגלית.) מטרתנו צנועה יותר: לקבוע את מקומם של המספרים הטבעיים בתורת־הקבוצות הכללית.

דרכים שונות מובילות לתכלית זו. נבחר בשיטה הנראית פשוטה והסתכלותית על־פי מה שלמדנו בסעיף הקודם, אף כי מתוך השקפה הגיונית גרידא יש נקודות־מוצא פשוטות יותר. בשם „קבוצה סדורה היטב" כינינו קבוצה שבכל קבוצותיה החלקיות (פרט ל־0) יש איבר ראשון. נקרא באופן עקבי ל־F „קבוצה סדורה־היטב־כפליים" אם לכל קבוצה חלקית של F השונה מ־0 יש איבר ראשון ואיבר אחרון — בהוסיפנו לשם פשטות שגם קבוצת־האפס תיקרא סדורה־היטב־כפליים.

לכאורה מענינת הגדרה זו, שכן מסלקת היא אותה אי־סימטריה בהגדרת הקבוצה הסדורה היטב, שעליה עמדנו ב־§ 3: כנראה נקבל על־פיה סוג (מוגבל יותר) של קבוצות משוכללות מאד. אפס כי משוכללות הן יתר על המידה: ללא קושי (וללא שימוש בעקרון־הכפל) אפשר להוכיח, שכל קבוצה סדורה־היטב־כפליים היא קבוצה סופית[1]. חילוף הדבר הוא מובן מאליו; הרי אפשר לסדר כל קבוצה סופית, וכל סדר שלה הוא ממילא „סדר טוב כפול".

לפי שיטה זו או שיטות דומות לה אפשר להכניס את תורת הקבוצות הסופיות למסגרת של תורת הקבוצות הסדורות היטב, ולראות את תורת המספרים הטבעיים (לרבות את האינדוקציה השלימה; השוה I, פרק שני) כפירוט לתורת המספרים הסודרים. מי שרוצה לבנות מלכתחילה בדרך זו את תורת המספרים, יצטרך לבנות את תורת־הקבוצות הכללית ללא כל הסתמכות על המספרים הטבעיים — תפקיד מפוקפק ועל־כל־פנים מופשט וקשה; אחרת היה בונה לפי שיטה מעגלית. אך אין זו הגישה היחידה לענין. אפשר להחזיק באחת השיטות הרגילות בתורת המספרים, ואף־על־פי־כן להתענין בשאלה איך יכולה תורה זו להיתפס כחלק מתורת־הקבוצות, חלק המתקבל מתוך פירוט התנאים בתורת האקויולנטיות או בתורת הסדר.

התשובה שניתנה כאן על־סמך המושג של „קבוצה סדורה־היטב־כפליים" אינה התשובה היחידה הבאה בחשבון. אפשר להגדיר בכמה דרכים שונות את

1. נקח כאן „סופי" במובן אינדוקטיבי. לאמור: קבוצה נקראת סופית אם מספר איבריה הוא מספר טבעי או 0. ביתר דיוק: קבוצת־האפס נקראת סופית, וכן כל קבוצה הנוצרת מקבוצה סופית ע״י הוספת איבר יחיד.

המושג של קבוצה סופית; אחת מהן, שניתנה ע״י דידקינד, למדנו לדעת בעמ׳ 13. מתוך כך מתעורר ממילא הצורך להוכיח שההגדרות השונות לקבוצה סופית ולמספר סופי שקולות זו כנגד זו, וכאן מתגלה קושי מיוחד: לא תמיד נוכל להוכיח שויון־ערך זה בלא להזדקק לעקרון־הכפל. אם נשים לב לגורם זה, נקבל הדרגה טבעית להגדרות האפשריות השונות, והסוג הפשוט יכיל את ההגדרות שמהן אפשר להגיע לכל הגדרה אחרת ללא שימוש בעקרון־הכפל. על ההגדרות מסוג פשוט זה נמנית ההגדרה על פי סדר טוב כפול, וכן ההגדרה האינדוקטיבית — אך לא הגדרת דידקינד.

תרגילים ל־§4.

1) הוכח את אי־השויונות דלקמן בין מספרים סודרים על־סמך ההנחה $\mu < \nu$:

$$\varrho+\mu<\varrho+\nu, \qquad \varrho\cdot\mu<\varrho\cdot\nu \ (\varrho \neq 0),$$
$$\mu+\varrho\leqq\nu+\varrho, \qquad \mu\cdot\varrho\leqq\nu\cdot\varrho,$$

ואת היפוכם האומר: כל אחד מן היחסים

$$\varrho+\mu<\varrho+\nu,\ \mu+\varrho<\nu+\varrho,\ \varrho\cdot\mu<\varrho\cdot\nu,\ \mu\cdot\varrho<\nu\cdot\varrho$$

גורר אחריו $\mu < \nu$, וכל אחד מן היחסים

$$\varrho+\mu=\varrho+\nu, \qquad \varrho\cdot\mu=\varrho\cdot\nu \ (\varrho \neq 0)$$

גורר אחריו את השויון $\mu=\nu$. לעומת זאת אין, למשל, $\mu<\nu$ גורר אחריו $\mu+\varrho<\nu+\varrho$, ומן השויון $\mu+\varrho=\nu+\varrho$ אין להסיק ולא כלום לגבי היחס בין μ ו־ν.

2) הוכח את המשפט הבא (שלמעשה הופיע כבר בסעיפים האחרונים): תהא A איזו קבוצה שהיא (לאו דוקא סדורה) ו־V קבוצה סדורה היטב הקשורה ב־A ע״י שני התנאים האלה:

א) A מכילה את האיבר הראשון שב־V;

ב) אם A מכילה את כל איברי V הקודמים ב־V לאיזה איבר מסויים v, מכילה A גם את v.

לפי זה מכילה A את כל איבריה של V.

3) הוכח (על־סמך הגדרת החזקה, עמ׳ 112) שלעומת כל n סופי קיים היחס $n^\omega = \omega$.

4) הוכח את היחסים הבאים בין מספרים סודרים:

$$\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}, \qquad (\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}.$$

5) חשוב על ההבדל הגדול (ואולי גם על מקורו!) בקושי המתעורר בהוכחת המשפט „אם F היא קבוצה סופית, הרי גם קבוצת כל הקבוצות החלקיות של F היא קבוצה סופית" על־סמך כל אחת משלש ההגדרות לקבוצה

סופית שניתנו לעיל, והן: ההגדרה האינדוקטיבית, קבוצה סדורה־היטב־כפליים, הגדרת דידקינד.

§ 5. סידורה הטוב של קבוצה־סתם. השערת הרֶצף.

נשוב למשפט היסודי II שבסוף ה § 3! שם פתרנו באופן חלקי את הבעיה שהעסיקתנו מראשית תורת האקויוָלנטיות, והיא: האם כל שתי קבוצות ניתנות להשוואה בנוגע לעצמותיהן? לשון אחר: האם, מבין כל שתי עצמות שונות, קטנה אחת מאחותה?

תשובתנו היתה חיובית, אולם רק בתנאי שהקבוצות הנדונות הן סדורות היטב. לפיכך נשיג את מטרתנו, אם נצליח להוכיח שאפשר לסדר לפי סדר טוב כל קבוצה נתונה, בין אם סדורה היא בין אם לאו.

בטרם נגש לשאלה זו, עלינו לברר מה כאן משמעותו של המונח „אפשר". אם הקבוצה הנתונה היא, למשל, הרֶצף הקווי, שסידורו הטוב היה נותן גם פתרון ל„בעית הרצף" (עיין עמ' 43 ו 66), הרי מתקבל על הדעת מראש, שאין כל תקוה להשיג את המטרה בעזרת החוקים (כלומר, הפונקציות) הרגילים המופיעים באנליזה.[1] לכן יש לנסח הבעיה במובן מציאותי; דהיינו, יש לשאול אם, על פי קביעה מתאימה להיקפו של תחום הקבוצות הקיימות, יש קבוצה סדורה היטב המכילה את כל איברי הקבוצה הנתונה. התשובה החיובית לכך נקראת בשם המשפט של הסידור הטוב (בספרות הצרפתית על־פי רוב „משפטו של Zermelo"); משפט זה טוען אפוא:

כנגד כל קבוצה (סדורה או לא־סדורה) נתונה A יש קבוצה סדורה היטב W המכילה את כל איברי A.[2]

מסתבר לכאורה שיש לחשוב על הוכחה מסוג זה (השוה את ההוכחה בעמ' 19, שבה מופיעים ω הצעדים הראשונים בלבד): נוציא מ A איזה איבר w_0 ונקבע אותו כאיבר הראשון של הקבוצה W; מן השארית $A-\{w_0\}$ נוציא איזה איבר שהוא w_1, שנסדר אותו בתוך W אחרי w_0, וכו'; בדרך־כלל, אחרי המשיכנו תהליך זה של הוצאה מ A וסידור עד איבר $\bar{w}$ מסויים (או עד כולל איבריה של קבוצה חלקית מסויימת $\bar{W}$ של W), ועד בכלל, נוציא מתוך השארית, אם היא שונה מ־0, איזה איבר שהוא ונכניסו ל W כעוקבו של $\bar{w}$ (או כעוקבה של הקבוצה $\bar{W}$). לפי זה יוכל התהליך להיגמר רק מתוך מיצוי

1. כבר בשנת 1907 הוכיח Lebesgue טענה שלילית זו בניסוח מדוייק יותר; עיין בכרך 35 של *Bulletin de la Société Mathém. de France*.

2. בדרך כלל מדייקים יותר ודורשים כי W תכיל את איברי A בלבד, כך ש $W=A$ במובן ההגדרה מעמ' 6. אבל אי[illegible]בר זה כל חשיבות, הואיל וכל קבוצה חלקית של קבוצה סדורה היטב, אף היא סדורה הי[illegible]

הקבוצה A בשלימותה, כלומר מתוך הגיענו לשארית 0. והנה קבלנו $W=A$, מש"ל.

רעיון מעין זה היה מרחף בפני קנטור מאז החל לעסוק בשאלה זו[1], ועל־סמך זה כינה את המשפט של הסידור הטוב „חוק מחשבתי יסודי רב־תוצאות, המפליא בכלליותו". היה זמן (בשנת 1904, בקוגגרס העולמי של המתימטיקנים בהיידלברג) שבו הוכח לכאורה קבל עם ועדה, שיש קבוצות שאי אפשר לסדרן היטב. אולם זה לא מנעו מהאמין אמונה שלימה במשפט הנ"ל.

יש בספרות נסיונות להלביש את המחשבה דלעיל צורה מפורטת ושיטתית יותר על מנת לתתה כהוכחה־ממש למשפט הנידון. אבל כל נסיונות אלו לקויים בהנחת המבוקש (petitio principii) באשר הם מניחים שאפשר למצות כך את הקבוצה הנתונה A. והנה זהו העיקר שעלינו להוכיחו! ביתר דיוק: התהליך הנ"ל הולך ונמשך לפי שורת המספרים הסודרים; לכן, כדי להבטיח את אפשרות המשכו ככל הצורך, למשל בעזרת האינדוקציה העלסופית, היה עלינו להבטיח מראש את מציאותם של מספרים סודרים גדולים למדי; כלומר, גדולים במידה מספיקה כנגד A. והרי זוהי בדיוק הטענה שעלינו להוכיחה!

אולי יעלה על הדעת שכדאי לבתר את ההוכחה לשני חלקים: הראשון יראה שכל קבוצה ניתנת לסידור בכלל („משפט הסידור"); והשני שכל קבוצה סדורה ניתנת לסידור טוב. השערה זו יכולה לסמוך על כך, שעל־כל־פנים התפקיד הנשאר גדול מאד גם כלפי קבוצה שכבר הוגדר בה סדר. הרצף הקווי יוכיח. קבוצה שסידורה הטוב הוא המקרה החשוב ביותר למשפט הכללי. והרי רחוקים אנו מראות לו פתרון![2] אך ביתור זה לא יביא לנו תועלת ניכרת; שכן הוכח שכבר משפט הסידור בעלמא גורם קשיים מעין אלה הקשורים במשפט של הסידור הטוב.[3]

בשנת 1904 נתן E. Zermelo ברשימה קצרה, אך מלאת רעיונות כרמון, הוכחה למשפט של הסידור הטוב;[4] היא מסתמכת, כמו גם הוכחתו השניה, על עקרון־הכפל כמכשיר המכריע. מיד אחרי פרסום ההוכחה הזאת הופיעו טענות נגדה מצד כמה מתימטיקנים ועל־סמך נימוקים מנימוקים שונים – ברובן חסרות יסוד מספיק, פרט לאלה הנובעות מתוך התנגדות לעקרון־הכפל עצמו. צרמילו ענה ב 1908 על טענות אלו, ויחד עם זה נתן הוכחה שניה לאותו משפט.[5]

1. בדבר ה„פריהיסטוריה" של המשפט, השוה מאמרו של Jourdain ב *Acta Mathematica* כרך 43 (1922).

2. גם באופן כללי אין משפט הסידור גורר אחריו את המשפט של הסידור הטוב. עיין במאמר המעמיק של A. Mostowski ב *Fundamenta Mathematicae* כרך 32 (1939).

3. עיין A. Fraenkel ב *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wiss.* מחלקה פיסיקלית-מתימטית, שנה 1928.

4. ב *Mathem. Annalen*, כרך 59, עמ' 514—516.

5. באותו כתב־עת, כרך 65, עמ' 107.

ההוכחה הראשונה מסתמכת על תורת הקבוצות הסדורות היטב, בפרט על המשפט היסודי I (עמ׳ 106), ואילו ההוכחה השניה אינה תלויה בשום שיטות טכניות מתורת הקבוצות אלא נשענת על מחשבה כללית מאד, הגיונית יותר ממתימטית: „תורת השרשרות", שמקורה בספרו של ד י ד ק י נ ד המצוטט בעמ׳ 112. ואף על פי כן, או מחמת אפייה המופשט הזה דוקא, קשה להבין את ההוכחה השניה מאשר את הראשונה. תיאורן של הוכחות אלו היה חורג ממסגרת הספר הזה; אכן נגע בהן בחלק הששי, בכרך־ההשלמה.

גם שאר ההוכחות שניתנו למשפט של הסידור הטוב קרובות להוכחותיו של צרמלו, והן בעלות א ו פ י מ צ י א ו ת י ו ל א ב נ י י ת י. אפיין זה נובע מתוך כך שכולן מיוסדות על עקרון־הכפל, הטוען ל מ צ י א ו ת ה של קבוצה מסויימת („קבוצת־הבחירה") ללא כל נסיון או תקוה ל ב נ ו ת ה. לפיכך אין זה מפתיע ש ב ע י ת ־ ה ר צ ף לא הפיקה כל תועלת מן המשפט שלפנינו: הוא מבטיח רק ש י ש סידור טוב לרצף (למשל: לקבוצת כל המספרים הממשיים), ואינו מתימר לבנות סידור טוב כזה. לכן לא נקבל כל רמז למספרה הסודר או למספרה המונה (לאָלף) של קבוצה סדורה היטב המכילה את כל איברי הרצף. חוסר ההשפעה של המשפט על פתירת בעית־הרצף הוא הגורם הפסיכולוגי המכריע למלחמה הממושכת בהוכחות צרמלו ובמשפט עצמו — ללא הצדקה; שהרי משפט מציאותי אין לאל ידו לקרבנו במשהו לפענוחה של בעיה בניתית.

כשם שעקרון־הכפל מאפשר את הוכחת המשפט של הסידור הטוב, כן נובע ממשפט זה העקרון ההוא כמסקנה קלה. כדי להוכיח את הדבר נצא מן הקבוצה P המופיעה בניסוח העקרון (האכסיומה) בעמ׳ 71, ונסתמך על סידור טוב (איזה שהוא) של הקבוצה הכוללת (הסכום) של איברי P. ע״י זה נקבל סידור טוב לכל קבוצותיה החלקיות של הקבוצה הכוללת הנידונה, ביניהן לכל איברי P. לכן נוכל להגדיר באופן קבוע לחלוטין קבוצת־בחירה b של P כדלקמן: b תכיל מתוך כל איבר x של P את האיבר המופיע ב־x כאיבר ה ר א ש ו ן על־פי הסידור הטוב הנ״ל. יוצא מכאן, שעקרון־הכפל והמשפט של הסידור הטוב הם ע ק ר ו נ ו ת ש ק ו ל י ם ז ה כ נ ג ד ז ה.

באשר למשפט של השוואת העצמות, הריהו נובע מעקרון־הכפל דרך המשפט של הסידור הטוב (עמ׳ 107). אפשר להוכיח את ההשוואה גם ללא שימוש מפורש במשפט זה.[1] מאידך הראה F. Hartogs שאפשר גם כן להוכיח את המשפט של הסידור הטוב — ללא שימוש בעקרון־הכפל — מתוך המשפט של השוואת העצמות.[2] זאת אומרת: ש ל ש ת ע ק ר ו נ ו ת א ל ה, עקרון־הכפל, המשפט של הסידור הטוב, והשוואת העצמות, ש ו ו י ־ ע ר ך ה ם ז ה ל ז ה.

1. עיין בספר (מ 1953) של Fraenkel הנזכר לעיל בעמ׳ 41, עמ׳ 319—321.
2. *Mathem. Annalen*, כרך 76 (1915).

לחשיבותו ה ע ק ר ו נ י ת של המשפט של הסידור הטוב כבר רמזנו, ובחלק הששי יהיה מקום לחזור ולהדגישה. יצויין כאן, שלא פחות גדולה חשיבותו ה ש י מ ו ש י ת לגבי תחומי מתימטיקה שונים, לרבות האריתמיטיקה והאלגברה. כשמונים את משפטיה החשובים והמפורסמים ביותר של המתימטיקה בכלליותה, לא ייפקד מושב המשפט של הסידור הטוב.

לאחר שהמשפט של הסידור הטוב מבטיח את אפשרות ההשוואה בין כל שתי קבוצות ועצמותיהן, בטל הנימוק שהמריצנו להבדיל בין עצמות ואלָפים, או למנוע מאיזו עצמה את תאר הכבוד „ מ ס פ ר מונה". כל עצמה היא אלף — רק שבמקרים רבים לא נדע איזה אלף. באשר לעובדה המצערת, שלשם הוכחתו של משפט ההשוואה, שהוא משפט מתורת האקויולנטיות, נשענים על תורת הסדר — אם לא להלכה אך למעשה — אל נשכח שגם תורת־המספרים משיגה רבות ממסקנותיה בדרך לא־אריתמיטית, מתוך סיבוב באנליזה (I, פרק שלישי).

החשבון בעצמות מקבל אופי פשוט ביותר מתוך האפשרות לראות כל עצמה כאלף. עם זאת יש ענין גם היום לבעיות האריתמיטיקה בין עצמות־סתם, ללא הסתמכות על המשפט של הסידור הטוב, כפרק מיוחד מתוך בירור הבעיות (באנליזה, בגיאומטריה ובתורת־הקבוצות), ש א פ ש ר ל פ ת ר ן ל ל א ש י מ ו ש ב ע ק ר ו ן ־ ה כ פ ל.

על־סמך המשפט של הסידור הטוב לובשת בעית הרצף צורה מדויקת ובהירה יותר. אם עצמת הרצף $\aleph$ היא אחת מבין האלָפים, הריהי נמצאת במקום מסויים בשורת האלפים (עמ׳ 118). בפרט יש לשאול: ה ש ו ה $\aleph$ ל־$\aleph_1$ (לאלף העוקב את האלף הקטן ביותר $\aleph_0$), אם ג ד ו ל $\aleph$ מ־$\aleph_1$? העובדה היחידה הידועה לנו מתחום זה היא, ש־$\aleph$ שונה על־כל־פנים מ־$\aleph_\omega$, וכן מאלפים ידועים גדולים עוד יותר. השערת־הרצף של קנטור אומרת: $\aleph_1 = \aleph$.

העובדות החשובות ביותר בתחום זה הן אלו: אי אפשר להסיק את השערת הרצף מן הנוסחות הידועות לנו על מספרים מונים. לכן אפשר לפי שעה לשער גם השערת־רצף אחרת, כגון זו של Łusin האומרת: $\aleph = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$ (כלומר $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$). מצד שני הוכיח גידל בזמן האחרון משפט חשוב מאד שתכנו בערך זה: אם תורת־הקבוצות, לפי ביסוס והיקף מסויים שאינו מכיל את השערת־הרצף של קנטור ואף לא את עקרון־הכפל, מחוסרת־סתירה, הרי חוסר־הסתירה נשאר בתקפו גם אחרי צירוף ההשערה ההיא[1]. ה מ צ ב ד ו מ ה א פ ו א ב כ מ ה

1. K. Gödel: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Princeton, N. J., 1940. 2nd ed., 1951.
מסקנה זו כחה יפה גם בנוגע לעקרון־הכפל בלבד, וכן בנוגע להשערת־הרצף ה מ ו כ ל ל ת (עיין לקמן).

מובנים לזה של הגיאומטריה ביחס לאכסיומת המקבילים של אבקלידס (השוה להלן בפרק השמיני).

בכוון זה דלים ומאכזבים אפוא פירות המחקר, דבר התלוי כנראה בעצם המצב „האובייקטיבי" יותר מבחוסר חריפות ודמיון מצד החוקרים. לעומת זאת רבות ומסועפות הן המסקנות שנתגלו כלפי השאלה: אילו הנחות אחרות שקולות הן כנגד השערת־הרצף,[1] או כנגד עקרון־הכפל?

לבסוף יצויין, שבשם השערת־הרצף המוכללת מכנים את היחס $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ כלפי כל מספר סודר שהוא α; יחס זה כולל את השערת קנטור ($\alpha=0$). צירופה של השערה זו לעקרונותיה המקובלים של תורת־הקבוצות היה מכניס פשטות יתירה לתוך האריתמיטיקה של המספרים המונים העלסופיים.

אנו מסיימים בזה את תיאורנו לתורת־הקבוצות — פרט לכמה נקודות עקרוניות שמקומן בחלק הששי. נגענו במספר ניכר של בעיות המצפות עוד לפתרונן; הדבר נובע לא מגילו הצעיר של המקצוע בלבד כי אם גם מאפייו היסודי — מקצוע המשמש מסד ובסיס לאנליזה ולגיאומטריה גם יחד. ברם עצם אפייה זה של תורת־הקבוצות הקנה לה השפעה מעמיקה ביותר בין היצירות המתימטיות של המאה ה 19. וכשם שהפרתה מקצועות מתימטיים רבים ושינתה את דמות שיטותיהם, כן עוררה בעיות חדשות ופינתה דרכים לא־צפויות בתורת ההגיון ובתורת ההכרה.

1. עיין בספר: W. Sierpinski: Hypothèse du continu. Warszawa-Lwow 1934. 192 pp.

מילואים לחלק הרביעי.

א) היחס בין קבוצה סופית (פיניטית) לבין קבוצה אינ(על)סופית. (מילואים לעמ' 14)

כדי להוכיח שקבוצה עלסופית S אינה אֶקְוִיוָלֶנטית לשום קבוצה פיניטית נסמן ב S' קבוצה־חלקית־ממש של S, ש S אקויולנטית לה לפי ההגדרה V עמ' 13). תהא T איזו קבוצה אקויולנטית ל S. במקרה זה גם T היא עלסופית. כדי להראות זאת נסמן ב Φ העתק מסויים בין S ל T. על־סמך Φ יותאמו באופן חד־חד־ערכי, כמו לכל איברי S, כך בפרט לאיברי הקבוצה החלקית S' איברים ידועים מתוך T. קבוצתם של בני־זוג אלה של איברי S' תסומן ב T', והיא קבוצה חלקית של T. גדולה מזו: היא קבוצה־חלקית־ממש; כי על כן יש לפי ההנחה איברים בתוך S שאינם משתייכים ל S', ולכן בני־זוגם ב T אינם נמצאים ב T'. היחסים שנתקבלו:

$$T\sim S,\quad S\sim S',\quad S'\sim T'$$

גוררים אחריהם לפי הטרנסיטיביות את היחס $T\sim T'$; כלומר, T היא קבוצה עלסופית. כך מצאנו, שכל קבוצה שהיא אקויולנטית לקבוצה עלסופית, אף היא עלסופית; לשון אחר: קבוצה פיניטית אינה יכולה להיות אקויולנטית לקבוצה עלסופית.

שנית: כל קבוצה סופית היא גם פיניטית, ז"א אינה אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש. משפט זה ידוע לנו מן הכרך הראשון (I, 22 ו 54).

שלישית: כל קבוצה אינסופית היא גם עלסופית, ז"א אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש. משפט זה הוכח בעמ' 21 (משפט 6). השוה לכך מה שנאמר ב § 4 של הפרק השלישי (עמ' 75/6), ובמלואים שלפנינו מספר יא).

ב) הוכחת משפטו של קנטור על קבוצת־החזקה. (מלואים לעמ' 44)

נסמן את קבוצת־החזקה של איזו קבוצה (סופית או אינסופית) S ב U. נוכיח קודם כל שעצמותיהן של הקבוצות S ו U שונות זו מזו. זהו החלק המכריע (והקשה) של ההוכחה כולה.

נלך לפי השיטה שבהוכחות המשפט היסודי שב § 2 של הפרק השני

והמשפט 3 ב § 3 שם. נסמן אפוא ב U_0 איזו קבוצה חלקית של U, שהיא אקוילנטית ל S. מהנחה זו נסיק ש $U \neq U_0$; כלומר, ש U בעצמה אינה אקוילנטית ל S, בהתאם לטענתנו.

נצא מהעתק מסויים בין הקבוצות S ו U_0; על־פיו מותאם לכל איבר של S איבר ידוע של U_0, ז"א קבוצה חלקית ידועה של S. על־סמך העתק זה נבנה במפורש קבוצה חלקית מסויימת של S (כלומר, איבר מסויים של U) שאינה מופיעה בין איברי U_0. והנה זה מראה שקיים $U \neq U_0$.

נסמן ב s ו u שני איברים מ S ו U_0 המותאמים זה לזה ע"י ההעתק הנ"ל; לאמור: s יהיה איזה איבר שהוא מ S, והקבוצה u בת־זוגו של s ב U_0. קיימות שתי אפשרויות: או ש s הוא איבר של u או ש u אינה מכילה את s. נכנה את האיברים s בעלי התכונה הראשונה בשם איברים מן הסוג הראשון, את האחרים כאיברים מן הסוג השני. אם למשל מכילה הקבוצה U_0 את S בעצמה ואת קבוצת־האפס 0 בין איבריה, יהיה בן־זוגה של S מן הסוג הראשון, ובן־זוגה של 0 מן הסוג השני.

לבסוף נסמן ב u^* את הקבוצה החלקית של S המכילה את כל האיברים מן הסוג השני. (אם אין איברים כאלה בכלל, הרי $u^* = 0$.) הבה נוכיח, שהקבוצה u^*, שהיא על־כל־פנים איבר של U (של קבוצת כל הקבוצות החלקיות של S), אינה נמנית על איברי U_0!

כדי להראות זאת בדרך־השלילה, נניח שאכן היה u^* איבר של U_0. אם s^* הוא האיבר של S, המותאם ל u^* לפי ההעתק שיצאנו ממנו, ישתייך s^* או לסוג הראשון או לסוג השני. במקרה הראשון יהיה s^* איבר של u^*, לפי הגדרת הסוג הראשון; אבל דבר זה אינו אפשרי, הואיל והקבוצה u^* מכילה, לפי הגדרתה, רק איברים מן הסוג השני. לפי מסקנה זו צריך לכאורה s^* להיות מן הסוג השני; כלומר, s^* אינו מופיע בקבוצה u^*. אבל גם דבר זה גורר אחריו סתירה; שהרי בקבוצה u^* נמצאים, לפי הגדרתה, כל האיברים מן הסוג השני, ולכן גם s^*. האיבר s^* אינו קיים אפוא כל עיקר, כתוצאה מן הסתירה שהגענו אליה. לשון אחר: הקבוצה u^* אינה נמצאת ב U_0; מש"ל.

(הקורא ייטיב לעשות אם ינתח יפה את חלקה של הוכחה זו העוסק ב s^*, ובעכלו את הרעיון כל צרכו — לא רק מחמת הקושי שבהבנת החלק הזה, כי אם גם משום שאותו הרעיון יופיע בהזדמנות אחרת (בחלק הששי): לא לשם הוכחת משפט אלא לשם יצירת סתירה. אפשר לתאר את הרעיון העיקרי כך: מתוך ההנחה שב U_0 מופיעה הקבוצה החלקית u^* של S, יוצא שבן־זוגה s^* אינו איבר של u^* [illegible] עם זה שהוא איבר של u^* — וזוהי הסתירה.)

עלינו להראות עוד, שעָצמת S, שהיא שונה מעצמת U, גם קטנה ממנה. לשם כך שומה עלינו לציין קבוצה חלקית של U, שהיא אקוילנטית ל S.

כקבוצה זו תשמש, למשל, קבוצת כל הקבוצות בעלות איבר יחיד $\{s\}$, כעבור s על כל איברי S; נבנה העתק בינה ובין S בהתאימנו $\{s\}$ ל s, וחילופו.

ועתה, לשם גמר ההוכחה למשפטו של קנטור, מצויה ברשותנו הברירה בין שתי דרכים. ראשית, נוכל להסתמך על המשפט 4 בעמ' 46 שממנו נובע: האקויולנטיות בין S וקבוצה חלקית של U, פירושה שעצמת S קטנה או שווה לעצמת U. מאחר שכבר סתרנו את השויון, הרי הוכחנו את המשפט. שנית, אם יש את נפשנו להסתמך במישרין על ההגדרה מעמ' 42, נכליל את החלק הראשון (העיקרי) של הוכחתנו כך שהיא תראה כי U לא־אקוילנטית לא רק ל S אלא גם (כל־שכן) לכל קבוצה חלקית של S. פרוש הדבר, לפי ההגדרה הנ"ל, שעצמת S קטנה מעצמת U, מש"ל.

לשם הבנת ההוכחה כדאי לעבור עליה כלפי קבוצה סופית S; למשל, כלפי קבוצה בעלת ארבעה איברים.

ג) הוכחה למשפט־האקויולנטיות. (מלואים לעמ' 46)

נניח, כפי שהנחנו במקום הנ"ל, שהקבוצה S אקוילנטית לקבוצה־חלקית־ממש T_1 של T, ושהקבוצה T אקוילנטית לקבוצה־חלקית־ממש S_1 של S. הוספנו כאן את ההגבלות „ממש"; שהרי בלעדיהן אין מה להוכיח!

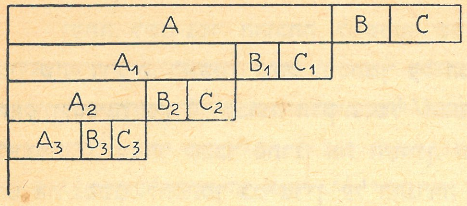
קודם כל נלביש את המשפט צורה פשוטה יותר. אם Θ מסמן העתק (איזה שהוא) בין T ל S_1, תועתק הקבוצה־החלקית־ממש T_1 של T ע"י Θ לקבוצה־חלקית־ממש מסויימת S_2 של S_1, ולכן של S; לפי זה קיים $T_1 \sim S_2$, ו S_2 היא קבוצה־חלקית־ממש של S. מאידך נובע מתוך $S \sim T_1$ ו $S_2 \sim T_1$ היחס $S \sim S_2$. מספיק להראות $S \sim S_1$ כדי להוכיח את משפט־האקויולנטיות; שכן הנחנו $T \sim S_1$, ומכאן נובע, על־סמך $S \sim S_1$, היחס $S \sim T$ שבאנו להוכיחו. (היסק זה נתון גם להיפוך.) מוטל עלינו אפוא להוכיח את הטענה הבאה, שעל־פי צורתה הפשוטה מתקבלת על הדעת, ואולם על צד האמת אינה כה פשוטה:

אם הקבוצה S אקוילנטית לקבוצה־חלקית־ממש S_2, הרי אקוילנטית היא לכל קבוצה S_1 „בין S ו S_2"; כלומר לכל קבוצה־חלקית־ממש S_1 המקיפה את S_2.

לשם פשטות הסימון נכתוב מעתה A במקום S_2, $A+B$ במקום S_1, $A+B+C$ במקום S. לשון אחר: קבוצת אותם איברי S שאינם נמצאים ב S_1 (ז"א $S-S_1$) תסומן ב C, וקבוצת אותם איברי S_1 שאינם ב S_2 תסומן ב B. עלינו להפיק מן היחס $A+B+C \sim A$, הקיים לפי הנחתנו, את היחס $A+B+C \sim A+B$, בהתאם למשפט 3.

יהא Ψ העתק מסויים של $A+B+C$ ל A. אם נפלג (צעד ראשון) העתק זה לשלשת חלקיה הזרים של הקבוצה $A+B+C$, דהיינו ל A, ל B ול C, הרי נמצאים מועתקים: A לקבוצה אקוילנטית A_1, B לקבוצה אקוילנטית

B_1, C לקבוצה אקויולנטית C_1, כך שקיים $A_1+B_1+C_1=A$; שלוש קבוצות חלקיות אלו של A זרות זו לזו לפי הגדרתן. בצעד השני (השוה את ההמחשה בציור 7) נשתמש באיזה העתק מסויים[1] Ψ_1 המעתיק את הקבוצה $A=A_1+B_1+C_1$ לקבוצה האקויולנטית לה A_1, ונפלגו שוב להעתקיו החלקיים, המעתיקים את A_1 (שהיא קבוצה חלקית של A) לקבוצה חלקית ידועה A_2, את B_1 ל B_2, את C_1 ל C_2; הקבוצות החלקיות A_2, B_2, C_2 של A_1 זרות הן ומקיימות את היחס $A_1=A_2+B_2+C_2$.



ציור 7

הצעד השלישי יפלג העתק מסויים Ψ_2 בין A_1 ל A_2 לחלקיו הנוגעים לקבוצות החלקיות A_2, B_2, C_2 של A_1; תועתק אפוא A_2 ל A_3, B_2 ל B_3, C_2 ל C_3, ושוב קיים $A_2=A_3+B_3+C_3$. וכך נמשיך. היחסים $A\sim A_1\sim A_2\sim\ldots$ מבטיחים לנו שבהמשך התהליך הזה לא תתרוקנה לאט־לאט הקבוצות A_k, ואפילו עצמותיהן לא תוקטנה – אף־על־פי שכל קבוצה A_k $(k=1,2,3,4,\ldots)$ מתקבלת מן הקודמת A_{k-1} ע״י הוצאת חלק מאיברי A_{k-1} (שהם אותם איברי A_{k-1} המשתייכים ל B_k ול C_k). לכן אין מניעה להמשכת התהליך בלי־קץ; כלומר, תיווצר סידרה של קבוצות A_k, וכן סדרות של קבוצות B_k ושל קבוצות C_k. נרשום לפנינו גם את היחסים $C\sim C_1\sim C_2\sim\ldots$.

נבדיל עתה בין שתי האפשרויות הבאות: יתכן שהקבוצה A מכילה איברים משותפים לכל הקבוצות A_k. במקרה זה נסמן ב D את קבוצת האיברים המשותפים האלה, כלומר את המשותף (עמ׳ 11) של כל הקבוצות A_k. שנית, אם אין איברים משותפים כאלה, הרי $D=0$. לפי זה (השוה את הציור 7) אפשר לתאר את הקבוצה $A+B+C$ שממנה יצאנו בתחילה, כסכומן (קבוצתן הכוללת) של כל הקבוצות, המופיעות כאיברי סידרה:

$$D,\ C,\ B,\ C_1,\ B_1,\ C_2,\ B_2,\ldots;$$

קבוצות אלו הן זרות לחלוטין.

כמו־כן תהיה הקבוצה $A+B$ סכום הקבוצות

$$D,\ C_1,\ B,\ C_2,\ B_1,\ C_3,\ B_2,\ldots;$$

מטעם שיתברר מיד, החלפנו כאן את הסדר הקודם בין כל שתי קבוצות B_{k-1} ו C_k, והחלפה זו לא תשפיע על הסכום (עמ׳ 51).

1. אפשר לקחת את Ψ_1, המעתיק A ל A_1, כחלק של ההעתק Ψ בין $A+B+C$ ל A; וכן את Ψ_2 כחלק של Ψ_1, וכו׳.

לבסוף נוכיח את טענתנו $A+B+C\sim A+B$, בבנותנו העתק בין שתי קבוצות אלו. כל איבר של $A+B+C$ נמצא בקבוצה אחת ויחידה מתוך הקבוצות D, B, C, B_k, C_k, ובהתאם לכך לגבי $A+B$. לפיכך נתאים, ראשית, התאמה חד־חד־ערכית את אינסוף „המחוברים", שכסכומיהם הצגנו זה עתה את הקבוצות $A+B+C$ ו $A+B$, לפי התבנית

$$\begin{array}{lccccccc} A+B+C: & D & C & B & C_1 & B_1 & C_2 & B_2\ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ A+B: & D & C_1 & B & C_2 & B_1 & C_3 & B_2\ldots \end{array}$$

שנית, נעתיק כל קבוצה מבין מחוברי $A+B+C$ לבת־זוגה מבין מחוברי $A+B$; בדרך זו ייקבע בן־זוגו (בתוך $A+B$) של כל איבר מתוך $A+B+C$ באופן חד־ערכי, וחילופו. לשון אחר: בכללנו יחד את ההעתקים בין המחוברים הנ״ל, נקבל העתק מסויים בין $A+B+C$ ו $A+B$.

ההעתקים הנ״ל יווצרו בלי כל קושי. שהרי נוכל להשתמש בהתאמה „הזהותית", המתאימה כל איבר לעצמו, כדי להעתיק D ל D, B ל B ו B_k ל B_k; מה שנוגע לקבוצות C, הנה קבלנו לעיל את היחסים $C\sim C_1\sim C_2\sim\ldots$ המבטיחים מציאותם של העתקים (ואפילו של העתקים מסויימים) בין C ו C_1, בין C_1 ו C_2, ובאופן כללי בין C_{k-1} ו C_k. בכך גמרנו את ההוכחה.

כדי להקל על תפיסת המשותף D ועל הצגת הסכום $A+B+C$ (וכן $A+B$) מתוך המחוברים D, C, C_k, B, B_k, נתן שתי דוגמות למשותף; בפרט נבחר בהן כך שגם פה תופיע סידרה של מחוברים M_k, וכל מחובר M_k יהיה קבוצה חלקית של קודמו M_{k-1}.

א) נקח $M_k=\{k,\ k+1,\ k+2,\ldots\}$ כבדוגמה ד) בעמ׳ 12. לפי זה מכילה כל קבוצה M_k אינסוף מספרים טבעיים, ואעפ״י כן המשותף D ריק הוא.

ב) נצא משטח מישורי מסויים, למשל מעמוד זה, ונסמן ב M_1 את קבוצת כל המצולעים שיש לציירם בעמוד זה; ב M_2 את קבוצת כל המצולעים, פרט למשולשים שווי־הצלעות; ב M_3 את קבוצת כל המצולעים, פרט למשולשים שווי־הצלעות ולריבועים; בדרך־כלל ב M_k את קבוצת כל המצולעים, פרט למצולעים המשוכללים (I, 199) בעלי n_k צלעות כעבור n_k על הערכים $3, 4, \ldots, k+1$. המשותף של כל הקבוצות M_k מכיל כאיברים את כל המצולעים שבעמוד, פרט לכל המצולעים המשוכללים; כלומר, המשותף אינו ריק.

הוכחה זו[1] למשפט־האקויולנטיות נשענת היא באופן יסודי על תכונותיה של סידרת (או קבוצת) המספרים הטבעיים; בפרט על כך שקבוצה זו אקויולנטית

1. היא מבוססת על ההוכחה הראשונה שניתנה למשפט זה ע״י F. Bernstein; לכן נקרא על שמו גם המשפט בעצמו (אף כי קנטור טען את עצם הטענה לפני כך). ההוכחה פורסמה אז בספר: E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions. 1898. (3e éd. 1928.)

לקבוצתה החלקית המתקבלת ע״י הוצאת איבר אחד, תכונה שהשתמשנו בה להעתקת $A+B+C$ אל $A+B$. אסמכתא זו על המספרים הטבעיים מגדילה, כמובן, את הצד „ההסתכלותי" שבהוכחה ומקילה בדרך זו על תפיסתה. ואולם אל נא יחשוב הקורא שיש הכרח עקרוני לבסס את המשפט – ומתוך כך את תורת האקויולנטיות בכללה – על המספרים! נתן עתה הוכחה שאינה תלויה בסידרת המספרים[1].

נשוב אל הסימון שבראשית ההוכחה ונבליט העתקים מסויימים, Φ בין T לS_1 (בתנאי $S_1 \subset S$)[2] וX בין S לT_1 (בתנאי $T_1 \subset T$) ע״י הכתיב:

$$S_1 = \Phi(T), \qquad T_1 = X(S).$$

Φ מעתיק כל קבוצה חלקית של T לקבוצה חלקית של S_1, וכן לגבי X. מטרתנו להוכיח: יש קבוצות חלקיות $S_0 \subset S$ ו$T_0 \subset T$ כך שקיים

$$T_0 = X(S_0), \qquad S - S_0 = \Phi(T - T_0).$$

בהתאם לכך נקבל העתק בין S וT, בהשתמשנו לגבי איברי S_0 בהעתק X, ולגבי איברי „השארית" $S - S_0$ בהעתק Φ (בחילוף הכוון).

לשם הוכחת טענתנו נתאים, ראשית, לכל קבוצה חלקית U של S באופן חד־ערכי קבוצה חלקית U^* של S לפי הבניה:

$$(1) \qquad Y = X(U), \qquad S - U^* = \Phi(T - Y).$$

(Y מסמן אפוא קבוצה חלקית של T.) קל לראות שעל־פי (1) $U_1 \subset U_2$ גורר אחריו $U_1^* \subset U_2^*$[3]; לכן:

$$(2) \qquad \text{אם } U_1 \subseteq U_2 \text{, יהיה } U_1^* \subseteq U_2^*.$$

בין שתי הקבוצות החלקיות של S, U (איזו קבוצה חלקית שהיא) וU^* (קבועה ע״י U), יכול להתקיים היחס $U \subseteq U^*$. במקרה זה נכנה את U בשם קבוצה־חלקית־מצויינת של S.

תהא S_0 הקבוצה הכוללת של כל הקבוצות החלקיות המצויינות של S. הבה נוכיח שגם S_0 היא מצויינת! ואמנם, אם Z היא איזו קבוצה מצויינת, כלומר אם $Z \subseteq Z^*$, הרי היחס $Z \subseteq S_0$ (הקיים על־פי הגדרת S_0) גורר אחריו את היחס $Z^* \subseteq S_0^*$ על־סמך (2). לגבי כל קבוצה־חלקית־מצויינת Z של S

---

1. הוכחה מסוג זה ניתנה עוד במאה ה 19 ע״י Dedekind, אך לא פורסמה בזמנה. בדפוס הופיעו הוכחות מסוג זה מ 1908 ואילך. ההוכחה שלפנינו הומצאה למחבר הספר הזה ע״י מחברה, הפרופסור J. M. Whittaker, במכתב בזמן שרותו במזרח התיכון כקצין בריטי (1943). חשוה גם את מאמרו ב *Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society*, סדרה שניה, כרך 1 (1927).

2. הסימון $\subseteq$ לגבי [illegible]ה חלקית, ובפרט $\subset$ לגבי קבוצה־חלקית־ממש, הוכנס בעמ׳ 9/10.

3. מסקנה זו מתק[illegible] מתוך היחסים, הנובעים כל אחד מקודמו:

$$U_1 \subset U_2, \quad Y_1 \subset Y_2, \quad T - Y_2 \subset T - Y_1, \quad S - U_2^* \subset [illegible] U_1^*, \quad U_1^* \subset U^*.$$

קיים אפוא היחס $Z \subseteq S_0^*$, ולכן קיים הוא גם לגבי הקבוצה הכוללת של כל הZ שכינינוה בS_0; לאמור:

$$(3) \qquad S_0 \subseteq S_0^*.$$

לפי זה S_0 עצמה היא קבוצה מצויינת, מש״ל.

מן היחס (3) נובע על־פי (2): $(S_0^*)^* \subseteq S_0^*$. לשון אחר: גם S_0^* היא קבוצה מצויינת. לכן, לפי הגדרת S_0, צריך להיות $S_0^* \subseteq S_0$, ובצרפנו יחס זה ל(3), נקבל $S_0^* = S_0$.

בהכניסנו מסקנה זו לגבי $U = S_0$ לתוך (1), נשיג סוף־סוף, אם הקבוצה $X(S_0)$ תסומן בT_0:

$$T_0 = X(S_0), \qquad S - S_0 = \Phi(T - T_0);$$

והנה זוהי הטענה של משפט־האקויולנטיות, כפי שבארנו לעיל.

ד) החוק האסוציאטיבי לחיבורם של קבוצות ושל מספרים מונים. (מלואים לעמ׳ 51)

העיקר כאן לא הוכחת החוק אלא ביטויו; שהרי מן הצורה הנהוגה באריתמטיקה, $a+(b+c)=(a+b)+c$, לא נוכל לעבור במישרין למקרה הכללי של אינסוף מחוברים. לפיכך נגדיר את הקבוצות הבאות:

$$N = \{N_1, N_2, \ldots\}; \quad P = \{P_1, P_2, \ldots\}; \quad Q = \{Q_1, Q_2, \ldots\}; \ldots$$

לא נניח מאומה לגבי מספר הקבוצות N, P, Q,... וכן לא לגבי היקפן של קבוצות אלו; כל אחת מהן יכולה להיות סופית או בת־מנייה או בלתי־ניתנת־להימנות. (בציונים 1, 2,... השתמשנו רק לשם נוחיות.) ואולם נניח שכל איבר של אחת הקבוצות N, P, Q,... יהיה זר לכל איבר אחר[1] (של אותה הקבוצה, או של קבוצה אחרת מביניהן). כשניגש לחיבורם (במובן של יצירת קבוצות כוללות) של איברי הקבוצות N,P,Q,... יחד, פתוחות לפנינו שתי דרכים. הראשונה: לבנות את הקבוצה הכוללת כנגד כל אחת מן הקבוצות, דהיינו לבנות את הקבוצות:

$$N_1 + N_2 + \ldots, \quad P_1 + P_2 + \ldots, \quad Q_1 + Q_2 + \ldots, \ldots,$$

ולחבר אחרי כך את כל הקבוצות הכוללות האלה; הדרך השניה: ליצור בבת אחת, ללא תשומת לב לפילוג הקבוצות N_k, P_k, Q_k,... בין הקבוצות N,P,Q,..., את הקבוצה הכוללת של הקבוצות N_k, P_k, Q_k,... כולן. החוק האסוציאטיבי כלפי קבוצות שנוכיחנו עתה, טוען שכל אחת מדרכים אלו מובילה לאותה הקבוצה.

מזה יוצא מיד, דרך פירוט, החוק האסוציאטיבי כלפי מספרים מונים, שהרי הקבוצות N_k, P_k, Q_k,... זרות כולן לחלוטין, ולכן גורר אחריו שויון

---

1. הנחה זו באה רק לשם חיבור המספרים; לשם חיבור הקבוצות אין בה צורך.

הקבוצות הכוללות אף את שויון מספריהן המונים. לאמור, הסכום של מספרי כל הקבוצות הנ״ל יחד ישוה לסכום המספרים המתקבלים מתוך חיבור מספריהם של איברי N, P, Q, ... לחוד.

והנה החוק האסוציאטיבי כלפי קבוצות, המתבטא לפי הנ״ל בצורה

$$(N_1+N_2+\ldots)+(P_1+P_2+\ldots)+(Q_1+Q_2+\ldots)+\ldots=$$
$$=N_1+N_2+\ldots+P_1+P_2+\ldots+Q_1+Q_2+\ldots+\ldots,$$

נובע מיד מתוך הגדרת השויון בין קבוצות. נחוץ רק להראות שכל איבר המופיע בקבוצה הכוללת הנבנית באגף השמאלי מופיע גם בקבוצה הנבנית באגף הימני, וחילופו — דבר המתקבל מתוך שיקול קל.

ה) החוקים הפורמליים לכפל של קבוצות ושל מספרים מונים. (מלואים לעמ׳ 54 ועמ׳ 55)

מה שנוגע למשפט 4, הרי הקומוטטיביות של הכפל נובעת גם היא, כמו זו של החיבור, מתוך כך שבהגדרות III ו IV (עמ׳ 52 ו 53) אין זכר לסדר שבו יופיעו גורמי המכפלה; ואמנם הזוגות והצירופים המשמשים איברים למכפלה החיצונה הדרושה הם קבוצות, כלומר לא נקבע לאיבריהם כל סדר. לפיכך גם עצמת המכפלה החיצונה, שהוגדרה כמכפלת המספרים (העצמות) הנתונים, אינה תלויה בסדר אפשרי לגורמים.

נוכיח את החוק האסוציאטיבי של הכפל, ראשית, לגבי שלשה גורמים זרים. באשר למכפלות החיצונות המתאימות, הרי קיימת האקויולנטיות:

$$S\times T\times U\sim S\times(T\times U)\sim(S\times T)\times U.$$

כדי להוכיח זאת נבנה את ההעתקים בין שלש קבוצות אלו, המתאימים לאיבר $\{s,t,u\}$ של $S\times T\times U$ את האיבר $\{s,\{t,u\}\}$ של $S\times(T\times U)$, ואת האיבר $\{\{s,t\},u\}$ של $(S\times T)\times U$. s מסמן כאן איזה איבר שהוא מ S, t איבר מ T ו u איבר מ U. יחסי־אקויולנטיות אלו בין קבוצות גוררים אחריהם שויון בין מספריהן המונים של הקבוצות, וכך הוכחנו את התכונה האסוציאטיבית.

יצויין כי לאמיתו של דבר היו לפנינו כאן שתי טענות — בניגוד לאריתמיטיקה שבה $a\cdot b\cdot c$ הוא אך סימון חדש לערכן המשותף של המכפלות $a\cdot(b\cdot c)$ ו $(a\cdot b)\cdot c$; שהרי שם הוגדרה פעולת־הכפל מראש לגבי שני גורמים בלבד, ואילו כאן לגבי כל מספר שהוא של גורמים.

המעבר משלשה גורמים לכל מספר סופי או אינסופי, בהתאם להגדרה IV, אינו קשה כל עיקר, [illegible]ם רק תנוסח הטענה כהוגן — ודבר זה יבוצע בדיוק כמו לגבי החיבור. ב[illegible]בלה לסימון שבעמוד הקודם נקבל אפוא, בהניחנו שכל הקבוצות הן זרות לד[illegible]וין:

$$(N_1\times N_2\times\ldots)\times(P_1\times P_2\times\ldots)\times(Q_1\times Q_2\times\ldots)\times\ldots\sim$$
$$\sim N_1\times N_2\times\ldots\times P_1\times P_2\times\ldots\times Q_1\times Q_2\times\ldots\ \ldots.$$

לשם שימוש נוח למטרה אחרת (במספר ז) של מילואים אלה) נסמן את מכפלתם החיצונה של כל איברי N, כלומר את $N_1\times N_2\times\ldots$, ב $\mathbf{P}N$, וכן כלפי כל קבוצה של קבוצות (זרות). לפי הסימון הקודם נקבל, בהכניסנו מימין את הקבוצה הכוללת של כל הקבוצות N, P, Q, ... הזרות לחלוטין:

$$\text{(A)}\quad \mathbf{P}N\times\mathbf{P}P\times\mathbf{P}Q\times\ldots\sim\mathbf{P}(N+P+Q\ldots).$$

באשר לחוק הדיסטריבוטיבי. קיים השויון בין קבוצות:

$$R\times(S_1+S_2+\ldots)=R\times S_1+R\times S_2+\ldots;$$

כי המכפלה החיצונה שבאגף השמאלי והקבוצה הכוללת שבאגף הימני מכילות אותם האיברים (זוגות), כפי שיוצא מתוך ההגדרות II ו III בעמ׳ 50 ו 52. כל שכן ששווים מספריהן המונים, כטענת החוק הדיסטריבוטיבי.

לבסוף נוכיח את המשפט 6 בעמ׳ 55. נסמן ב $\mathbf{s}$ ו $\mathbf{t}$ מספרים מונים, ב S ו T קבוצות זרות בעלות המספרים $\mathbf{s}$ ו $\mathbf{t}$. על־פי ההגדרה III יהיה $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}$ המספר המונה של הקבוצה $S\times T$, המכילה את כל הזוגות $\{s,t\}$ כעבור s על איברי S, ו t על איברי T. מאידך, אם t_0 הוא איבר מסויים של T, יוצרים אותם זוגות $\{s,t\}$ שלגביהם $t=t_0$, קבוצה חלקית T_0 של $S\times T$ האקויולנטית ל S. דבר זה מוכח ע״י ההעתק המתאים את הזוג $\{s,t_0\}$ של T_0 לאיבר s של S. אם נגדיר לפי זה קבוצה T_0 כנגד כל איבר t_0 של T, נקבל קבוצות חלקיות זרות T_0 של $S\times T$ — שקבוצתן הכוללת היא $S\times T$ עצמה — באופן שקיימת התאמה חד־חד־ערכית בין הקבוצות T_0 לבין איברי T, בהתאם לאיברים השונים t_0 הקובעים את T_0. הואיל ועצמת כל קבוצה T_0 היא $\mathbf{s}$, הרי יש לקבוצה הכוללת של כל הקבוצות T_0 לפי ההגדרה II (עמ׳ 50) המספר המונה $\mathbf{s}+\mathbf{s}+\mathbf{s}+\ldots$, ומספר המחוברים כאן מתאים לעצמת T; מש״ל.

דוגמה: אם $\mathbf{s}=\aleph_0$, $\mathbf{t}=2$, נוכל לתאר את המכפלה $\aleph_0\cdot 2$ כעצמת הקבוצה שאיבריה הם הזוגות $\{s,t\}$, כעבור s על המספרים הטבעיים ו t על איברי קבוצה בת שני איברים, כגון $\{a,b\}$. $\aleph_0\cdot 2$ אפשר להגדיר אפוא כעצמת הקבוצה הכוללת $T_0+T'_0$ אם T_0 היא קבוצת הזוגות $\{s,a\}$ ו T'_0 קבוצת הזוגות $\{s,b\}$, כעבור s על המספרים הטבעיים. מכיון שהקבוצות T_0 ו T'_0 ניתנות להימנות, מתקבל השויון $\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\cdot 2$.

ו) הוכחת השויון א = א·א. (מלואים לעמ׳ 56)

נפרש את הטענה, כבעמ׳ 57, בצורה זו: קבוצת הזוגות $\{x,y\}$ בהגבלות $1<x\leq 2$ ו $0<y\leq 1$ אקויולנטית היא לרצף קווי, למשל לקבוצת המספרים z בהגבלה $0<z\leq 1$. עצמת הקבוצה הראשונה שוה ל א·א על־פי ההגדרה III, ואילו עצמת הקבוצה השניה שוה ל א.

נתאר את המספרים הממשיים x, y, z ע״י שברים עשרוניים אינסופיים. תיאורי x מתחילים ב ....1; תיאורי y ו z ב ....0. (המספר הממשי 1, למשל, יתואר רק ע״י השבר העשרוני ...0.999, ולא יופיע אפוא בקבוצת ה־x־ים; דבר זה מתאים למה שנאמר בעמ׳ 57 על שולי הריבוע המוגדר שם.) עם כי אין סדר בזוגות הנ״ל, ברור תמיד מהו x ומהו y, בהיות קבוצת ערכי x וקבוצת ערכי y זרות זו לזו. מטעם זה בלבד הגדרנו את הקבוצות הללו כפי שהגדרנו (השוה ההערה השניה בעמוד הבא).

ובכן, אם נתונים המספרים

$$x = 1 . x_1 x_2 x_3 \ldots, \qquad y = 0 . y_1 y_2 y_3 \ldots,$$

ניצור משניהם את הערך

$$z = 0 . x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots ;$$

כלומר, נתאים לנקודה P של הריבוע, בעלת הקואורדינטות x ו y, את הנקודה z של קטע־היחידה. לפיכך נוכל להפוך כלל זה, בהתאימנו לערך נתון $0 . z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 \ldots$ את הערכים $x = 1 . z_1 z_3 z_5 \ldots$ ו $y = 0 . z_2 z_4 z_6 \ldots$, הקובעים נקודה מסויימת $\{x, y\}$ של הריבוע. בדרך זו יצרנו העתק בין קבוצות בעלות העצמות א · א ו א, ובכך הוכחה הטענה.

הוכחה זו, שפשטותה מפתיעה ברגע הראשון, מסתמכת על היחס החיבורי $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, כלומר על הפרדתה של קבוצת המספרים הטבעיים (המופיעים כאן כמקומותיהן של הספרות בשבר עשרוני) לקבוצות המספרים האי־זוגיים והמספרים הזוגיים. לשון אחר: העמדנו חישוב מכפלה על חישוב סכום, כנהוג בחשבון הלוגריתמים. ואמנם יש כאן יותר מהקבלה־סתם ללוגריתמים; בצענו ממש מעין חשבון לוגריתמי.

הערות להוכחה זו. ראשית: ההוכחה, כפי שניתנה לעיל, לקויה היא. שכן לא מתוך כל ערך נתון z נקבל, לפי השיטה הנ״ל, שני מספרים x ו y מן הסוג הדרוש: אם z שבר עשרוני שבכל מקומותיו הזוגיים (או האי־זוגיים) אחרי הנקודה — או „כמעט" בכל המקומות הללו — מופיעה הסיפרה 0, כגון

$$z = 0.73401040104010 \ldots$$

נקבל ממנו את הערכים $x = 1.74141 \ldots$ ו $y = 0.30000 \ldots = 0.3$; ובדרך כלל יהיה אחד המספרים x ו y שבר עשרוני סופי, בניגוד להגדרת הזוגות $\{x, y\}$. בכוון ההפוך יוצא שמתוך כל הזוגות $\{x, y\}$ הנידונים לא נקבל את כל ערכי z הדרושים; ייפקד מקומם של אותם z המכילים „כמעט" רק את הסיפרה 0 במקומות הזוגיים או האי־זוגיים של התיאור העשרוני.

ואולם קל לגדור פרץ זה. דרך אחת לכך היא שנשים לב לא לספרות הבודדות x_k, y_k, z_k כי אם לצירופי ספרות, באופן שכל צירוף יגמר

בסיפרה שונה מ 0, בעוד ששאר ספרותיו, אם יש כאלו, תהיינה כולן 0. חלוקה זו של שבר עשרוני לצירופי ספרות תתואר ע״י הדוגמה

$$z = 0.1 \,|\, 03 \,|\, 4 \,|\, 5 \,|\, 0007 \,|\, 8 \,|\, 02 \,|\, 7 \,|\, \ldots .$$

אם המעבר מ $\{x, y\}$ ל z וחילופו ייעשה לפי צירופים אלו, תושג התאמה חד־חד־ערכית בין כל ערכי $\{x, y\}$ ו z המופיעים בשתי הקבוצות, כפי שקל לראות. בדוגמה הנ״ל נקבל:

$$x = 1.14000702 \ldots, \qquad y = 0.03587 \ldots .$$

דרכים אחרות לסילוק הליקוי הן: הסתמכות על משפט האֶקויולנטיות, או על העובדה שאותה קבוצה של זוגות $\{x, y\}$, וכן אותה קבוצה של מספרים z, שבהן נמצא הליקוי, הן בנות־מנייה, ולפי המשפט 5 בעמ׳ 20 לא תוכלנה אפוא קבוצות אלו להשפיע על מסקנת ההוכחה.

הערה שניה: כדי להקל על הקורא, המסתמך על הגדרת הכפל פשוטה כמשמעה, קבענו את הריבוע בצורה מלאכותית קצת, כדי שכל ערכי x יהיו שונים מכל ערכי y. באמת אין כל צורך בכך. נוכל להעביר גם x גם y על אותו הריוח, למשל מ 0 עד 1, ולהסתכל אפוא בריבוע בעל הקדקדים $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. אמנם במקרה זה יחדלו גורמי המכפלה החיצונה מהיות זרים (הם אפילו שווים!), ולכן עלינו לשים לב לסדר בזוגות; בְיֶתר דיוק: עלינו להקפיד ולהבחין מאיזו קבוצה לוקח האיבר הנידון. אפשר לנהוג כך לא רק במקרה של שני גורמים אלא גם במקרה הכללי של ההגדרה. תנאי הזרות הוכנס מטעמי נוחיות בעלמא ולא מנימוקים הקשורים בגוף הענין.

ז) הוכחת החוקים הפורמליים להעלאה לחזקה. (מלואים לעמ׳ 62)

הוכחת היחס (1) יכולה להתבסס על היחס (A) במלואים, עמ׳ 135. אם, לפי הסימון שהוכנס שם, יש לקבוצות $N, P, Q, \ldots$ (הזרות לחלוטין) העצמות $\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$, ואם כל איבריהן של קבוצות אלו כולם קבוצות אקויולנטיות זו לזו בעלות העצמה המשותפת $\mathbf{a}$, תהיה לקבוצה הכוללת S $N + P + Q + \ldots$ העצמה $\mathbf{n} + \mathbf{p} + \mathbf{q} + \ldots$, בעוד שלמכפלות החיצונות $\mathbf{P}N, \mathbf{P}P, \mathbf{P}Q, \ldots$ יש העצמות $\mathbf{a}^{\mathbf{n}}, \mathbf{a}^{\mathbf{p}}, \mathbf{a}^{\mathbf{q}}, \ldots$, ולמכפלה החיצונה $\mathbf{P}S$ העצמה $\mathbf{a}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}+\mathbf{q}+\ldots}$. לכן, אם נהפוך את היחס (A) מאקויולנטיות בין קבוצות לשויון בין עצמותיהן, נקבל את השויון:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}^{\mathbf{q}} \cdot \ldots = \mathbf{a}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}+\mathbf{q}+\ldots}$$

והלא זהו היחס (1) בשינוי־מה בסימון.

אם בפרט גם הקבוצות $N, P, Q, \ldots$ אקויולנטיות זו לזו, לאמור: אם כולן הן בעלות העצמה $\mathbf{b}$, ואם $\mathbf{d}$ היא עצמת הקבוצה שאיבריה הם $N, P, Q, \ldots$, נקבל לפי המשפט 6 בעמ׳ 55 את השויון (3): $(\mathbf{a}^{\mathbf{b}})^{\mathbf{d}} = \mathbf{a}^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}$.

לא יקשה להוכיח גם את השויון (2) על־סמך ההגדרה I; נוח יותר להוכיחו בעזרת ההגדרה II והמשפט 1 (עמ׳ 64).

ח) עצמת קבוצת־ההרכבה של S על T. (הוכחת המשפט 1 בעמ' 64)

ניצור קבוצה $\bar{T}$ האקויולנטית ל T ושאיבריה הם קבוצות, בדרך זו: נבנה כלפי כל איבר מסויים t של T את קבוצת הזוגות הסדורים $(t\ s)$ כעבור s על איברי S ונסמנה ב S_t. הקבוצה S_t היא אקויולנטית ל S; אם נסמן ב $\bar{T}$ את הקבוצה שאיבריה הם כל הקבוצות S_t (כעבור t על איברי T), הרי קיים $T \sim \bar{T}$, כפי שנובע מן ההעתק המתאים S_t לאיבר t של T. למכפלה החיצונה $\mathbf{P}\,\bar{T}$ של כל איברי $\bar{T}$ יש אפוא, לפי ההגדרה I בעמ' 61, העצמה $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}$, אם $\mathbf{s}$ היא עצמת S ו $\mathbf{t}$ עצמת T.

מצד שני נוכל לראות את המכפלה החיצונה הנ"ל גם כקבוצת־ההרכבה של S על T, שהרי איבריה של קבוצת־ההרכבה הם כל הפונקציות (החד־ערכיות) המוגדרות ב T שערכיהן לקוחים מתוך S. נוכל לראות כל פונקציה כזו כקבוצת זוגות סדורים (t, s) שבהם עובר t על כל איברי T, בו בזמן שערכי s לקוחים מ S – דהיינו כקבוצת־זוגות האקויולנטית ל T. והנה כל קבוצה כזו היא אחד הצירופים המהווים לפי ההגדרה IV בעמ' 53) את איברי המכפלה החיצונה של איברי $\bar{T}$. מאידך כל אחד מצירופים אלו מהווה גם פונקציה כנ"ל, שהרי הוא קבוצת זוגות (t, s) שבהם מופיעים כל איבריה t של T, וכל איבר פעם אחת בלבד. לכן קיים: $\mathbf{P}\,\bar{T} \sim (S \mid T)$, מש"ל.

ההוכחה תקבל אופי שקוף יותר אם נכניס במקום $\mathbf{P}\,T$ את המכפלה החיצונה שכל גורמיה שווים לקבוצה S עצמה, ושמספר גורמיה מתאים שוב לעצמת T. במקרה זה עלינו לתפוס את ההגדרה IV הנ"ל במובן המוכלל שעליו דובר בעמוד הקודם; דהיינו, בלי הנחת הזרות – שהרי הגורמים כאן אפילו שווים זה לזה, ואין צריך לומר שאינם זרים.

קל להבין את משמעות המשפט 1 במקרה שהקבוצות S ו T סופיות. הדוגמה א) בעמוד 62 ממחישה משמעות זו. במקרה זה של מספרים סופיים $s = \mathbf{s}$ ו $t = \mathbf{t}$ יתארו איברי קבוצת־ההרכבה $(S \mid T)$ את מה שנקרא בתורת הצירופים (הקומבינטוריקה) בשם „חליפות (ואריאציות), מן המחלקה t, של s עצמים, ברשות חזרה"; באמת יש בדיוק s^t חליפות כאלה.

ט) הוכחה לשויון $\aleph = l^{\aleph_0}$. (מלואים לעמ' 66)

[illegible] l מספר טבעי השונה מ 1 ומ 10. אחרי שבעמ' 66 הוכח היחס $\aleph = 10^{\aleph_0}$, נוכיח את היחס $\aleph = l^{\aleph_0}$ בדרך פורמלית, מבלי להזדקק לתיאור המספרים הממשיים כשברים שיטתיים. לשם פשטות נבחר ערך מסויים ל l, למשל $l = 2$. (חשיבותו של ערך זה הודגשה בעמ' 64.) דרך ההוכחה תַראה איך מעבירים את השיטה לכל ערך אחר של l.

תארנו את קבוצת־ההרכבה של הקבוצה $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ על קבוצת

המספרים הטבעיים, שהשתמשנו בה כדי להוכיח את היחס $\aleph = 10^{\aleph_0}$, כקבוצת הסדרות

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots). \qquad [a_k = 0, 1, 2, \ldots, 9] \qquad (1)$$

לפי אותה שיטה נבאר את החזקה $2^{\aleph_0}$ כעצמתה של קבוצת־ההרכבה הנוצרת בהרכיבנו את הקבוצה $\{0, 1\}$ על קבוצת המספרים הטבעיים; כלומר, כעצמתה של קבוצת הסדרות

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots). \qquad [b_k = 0, 1] \qquad (2)$$

(ברצותנו נוכל להבין (2) כשבר הדואלי $0.b_1 b_2 b_3 \ldots$, כשם שהבינונו את (1) כשבר העשרוני $0.a_1 a_2 a_3 \ldots$.)

והנה קודם כל קבוצת הסדרות (2) היא קבוצה־חלקית־ממש של קבוצת הסדרות (1); הלא היא מכילה אותן מבין הסדרות (1), ורק אותן, שבהן מופיעים הערכים $a_k = 0$ ו $a_k = 1$ בלבד. מאידך אפשר ליצור העתק בין קבוצת הסדרות (1) לבין קבוצה חלקית של קבוצת הסדרות (2) כדלקמן: נחליף כל איבר a_k בסידרה מן הסוג (1), בסידרה הסופית המכילה a_k פעמים את 0 ואחרי כן פעם אחת את 1; לכן, אם $a_k = 0$, נחליפנו ב 1, ובמקום $a_k = 3$, למשל, תעמוד הסידרה $(0, 0, 0, 1)$. הסידרה החדשה בשלימותה מופיעה על־כל־פנים בקבוצת הסדרות (2).

דוגמה: נחליף את הסידרה מן הסוג (1): $(3, 2, 0, 2, 1, \ldots)$ בסידרה:

$$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots).$$

כלל זה מתאים לכל סידרה (1) באופן חד־ערכי סידרה מסויימת (2); ההתאמה היא אף חד־חד־ערכית, במובן שלעולם לא תותאם לסדרות שונות (1) אותה סידרה (2). לכן אקויולנטית קבוצת הסדרות (1) לקבוצה חלקית של קבוצת הסדרות (2).

בצרפנו זו לזו את שתי העובדות שהודגשו, נקבל על־פי משפט האקויולנטיות: קבוצת הסדרות (2) אקויולנטית היא לקבוצת הסדרות (1) לאמור: $\aleph = 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, מש"ל.

י) עצמתה של קבוצת הפונקציות הרציפות.

(הוכחת המשפט 5 בעמ' 68)

פונקציה רצונית (חד־ערכית) תווצר ע"י התאמת ערכים רצוניים (שרירותיים) לתחום־ההגדרה של הפונקציה; למשל, לקבוצת כל המספרים הממשיים (I, 244 ו 258). במקרה זה הפונקציה היא הרכבה איזו שהיא של של מספרים (ממשיים) על הרצף. בניגוד לכך לא תוכל ההרכבה להיות רצונית במקרה של פונקציה רציפה $f(x)$ (I, 298); שהרי בהתקרב x לערך מסויים

a, יתקרבו ערכי $f(x)$ לערך הקבוע $f(a)$. לא יתכן אפוא להתאים לערכי x שבסביבה ידועה של a ערכי $f(x)$ שאינם קשו בזה כל עיקר.

נוכל לתאר תלות זו בין ערכיה של פונקציה רציפה כנגד ערכים שכנים של הגורם x לפי הרעיון הבא (שאמנם מפיץ אור חלקי בלבד על מצב הדברים, עיין לקמן): אפשר לתאר כל מספר אירציונלי A כגבול של סידרה שאיבריה a_k הם מספרים רציונליים (I, 283, דוגמה 4); לאמור: $A = \lim a_k$. מחמת הרציפות יהיה אפוא ערך הפונקציה אצל $x = A$ קבוע לחלוטין מתוך ערכיה אצל כל המקומות $x = a_k$, ואמנם קיים: $f(A) = \lim f(a_k)$. לפיכך, אם נתונים ערכי הפונקציה הרציפה בכל המקומות הרציונליים, קבועים בזה אף ערכיה בכל המקומות האירציונליים. — בירור זה הוא חלקי בלבד; הלא גם ערכי הפונקציה במקומות הרציונליים אינם שרירותיים ובלתי־תלויים זה בזה, כי הערך במקום רציונלי מסוים תלוי בערכי הפונקציה במקומות הרציונליים שבסביבה. תלות זו מסובכת היא במקצת, ואין לנו צורך לעמוד על טיבה; דיינו בבירור החלקי שהגענו אליו.

על פי מה שנאמר עד כה, נוכל לראות כל פונקציה רציפה כהרכבת ערכים ממשיים ידועים על קבוצת המספרים הרציונליים R — אף־על־פי שלא נהיה רשאים להרכיב כל צירוף של מספרים ממשיים על R. לפיכך אפשר לתאר את קבוצת כל הפונקציות הרציפות כקבוצה חלקית של קבוצת־ההרכבה $(C|R)$; כאן מסמן C את הרצף (קבוצת כל המספרים הממשיים), ואילו R ניתנת להימנות. עצמת הקבוצה $(C|R)$ היא אפוא $\aleph^{\aleph_0}$, ולכן שוה ל $\aleph$ (דוגמה ג) בעמ׳ 67).

בסמננו ב $\mathfrak{f}$ את עצמת הקבוצה שאיבריה הם כל הפונקציות הרציפות, נקבל $\mathfrak{f} \leqq \aleph$. מאידך קיים $\aleph \leqq \mathfrak{f}$; שהרי קבוצת כל הפונקציות הקבועות, שעצמתה היא $\aleph$, מהווה על כל פנים קבוצה־חלקית־ממש לקבוצת כל הפונקציות הרציפות. שני אי־השויונות יחד גוררים אחריהם את השויון $\aleph = \mathfrak{f}$, מש״ל.

בהוכחה זו נודע תפקיד מכריע למשפט האקוילנטיות. כדי ליצור העתק־ממש, היינו צריכים לנתח ולברר בפרוטרוט, באיזו מידה רשאים אנו להרכיב ערכים כרצוננו על ערכי־הגורם הרציונליים — דבר שהוא מסובך למדי.

יא) הוכחה שכל קבוצה עלסופית מקיפה קבוצה בת־מנייה.

(מלואים לעמ׳ 76)

עיקר ההוכחה הבאה הוא שלא נשתמש בעקרון־הכפל. אמנם המשפט המתאים „הוכח" (ואף לגבי הקבוצות האינסופיות) כבר בעמ׳ 20; אבל שם השתמשנו בעקרון־הכפל, וזהו מקום־התורפה של אותה הוכחה. ברם לגבי הקבוצות העלסופיות אפשר לוותר על עקרון זה.

יסמן R איזו קבוצה עלסופית (טרנספיניטית; עמ׳ 13) ויהא Φ העתק

מסויים בין R לקבוצה־חלקית־ממש ידועה של R שתסומן ב U. אם r מסמן איזה איבר שהוא מתוך R יסומן ב $\varphi(r)$ בן־זוגו בתוך U; לאמור: $\varphi(r)$ הוא האיבר של U המותאם ל r על־סמך ההעתק Φ.

נסמן ב w_1 איזה איבר מסויים [1] מתוך הקבוצה הלא־ריקה $R - U$, ונכניס את הסימון:

$$\varphi(w_1) = w_2,\ \varphi(w_2) = w_3, \ldots, \varphi(w_k) = w_{k+1}.$$

כל ה־w_k־ים הם איברים של R (וגם של U, פרט לאיבר w_1). לכן, אם כולם שונים, יוצרים הם קבוצה בת־מנייה $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ שהיא קבוצה חלקית של R — כפי שרצינו להוכיח.

והנה באמת שונים כל ה־w_k־ים זה מזה. נוכיח זאת דרך שלילה, בהניחנו כאילו היה w_q הראשון ביניהם השווה לאחד מקודמיו; דהיינו $w_q = w_p$ עם $p < q$. (לכן $q > 1$.)

הואיל וקיים $w_q = \varphi(w_{q-1})$, הרי w_q הוא איבר של U, ולכן שונה w_q מ w_1 [2] שאינו איבר של U. דבר זה גורר אחריו, על סמך הנחתנו $w_q = w_p$, את המסקנה $w_p \neq w_1$; לפיכך $p > 1$, ז״א $w_p = \varphi(w_{p-1})$. אפשר לכתוב אפוא את הנחתנו בצורה: $\varphi(w_{q-1}) = \varphi(w_{p-1})$.

וכך הגענו לסתירה הדרושה, המראה שאין במציאות איבר w_q השווה לאחד מקודמיו. שהרי לפי חד־חד־ערכיותו של ההעתק Φ בין R ל U גורר אחריו $\varphi(w_{q-1}) = \varphi(w_{p-1})$ את היחס $w_{q-1} = w_{p-1}$. מכיון ש $p < q$, סותר דבר זה את ההנחה שלפיה w_q הוא הראשון בעל התכונה הנידונה. בכך נסתיימה ההוכחה.

הראינו אפוא ללא שימוש בעקרון־הכפל שכל קבוצה עלסופית היא גם אינסופית; לאמור: אינה אקויולנטית לשום קבוצה סופית, כגון $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. שהרי כל קבוצה עלסופית מקיפה היא, כפי שראינו כאן, קבוצה חלקית בת־מנייה, וזו ודאי אינה אקויולנטית לקבוצה סופית. מאידך הוכחנו (עיין בעמ׳ 12) ללא שימוש בעקרון־הכפל, שכל קבוצה סופית היא גם „פיניטית", כלומר לא אקויולנטית לשום קבוצה־חלקית־ממש. לפיכך נשארה רק הבעיה אם יש קבוצות „בינוניות" שאינן לא סופיות ולא עלסופיות. התשובה השלילית לשאלה זו מסתמכת בכל משקלה על עקרון־הכפל; למשל: על המשפט 4 מעמ׳ 20.

1. אמנם w_1 לא יהיה קבוע באופן חד־ערכי בדרך־כלל; לכן יש לטעון לכאורה: הרי גם w_1 הוא פרי „בחירה", והאין כאן שימוש בעקרון־הכפל? התשובה היא: כאן יש צעד אחד של בחירה, ולא אינסוף צעדים כבעקרון־הכפל. ואמנם ניתוח מדוקדק לאור תורת־ההגיון מראה שצעד בודד כזה אינו זקוק כל עיקר לתהליך הגיוני מיוחד של „בחירה"; העקרונות המקובלים של הלוגיקה מאפשרים ומצדיקים צעד בודד, ואף מספר סופי של צעדים, אבל לא אינסוף צעדים.

2. דבר זה מרחיק לכת מ $q \neq 1$, באמרו ש w_1 ו w_q הם ערכים שונים.

יב) הוכחה שלכל מספר מונה סופי מתאים מספר סודר אחד בלבד. (מלואים לעמ׳ 83/6)

נבטא את המשפט בצורה זו:

אם נספור (נסדר), באיזה אופן שהוא, את איבריה של קבוצה סופית נתונה, באופן שיתקבל איבר ראשון, שני וכו׳, נגיע תמיד לאותו המספר הסודר המציין את האיבר האחרון שבספירה הנידונה.

נפלג את ההוכחה לשני חלקים ונוכיח כל חלק בעזרת המשפט (עמ׳ 12) האומר: אין העתק בין קבוצה סופית לבין קבוצה־חלקית־ממש ממנה. תהא N איזו קבוצה סופית בעלת n איברים. (n מספר טבעי; כנגד $n = 0$ ו $n = 1$, הטענה מובנת מאליה.) ברור שיש סידור מסויים N^* לאיברי N, שבו מופיע האיבר האחרון כ־n־י לספירה; סידור כזה מתקבל מתוך שימוש (בתורת ציונים) בקבוצת המספרים הטבעיים מ־1 עד n, שהיא לפי ההנחה אקויולנטית ל N.

יהא N^{**} איזה סידור אחר לאיברי N. (אפשר לקיים תמיד הנחה זו אם $n > 1$.) ראשית, נוכיח שבסידור N^{**} מופיע בכלל מספר מסויים כאיבר האחרון, ולא נוכל אפוא לספור איבר אחרי איבר בלי קץ. אילו יכולנו לספור כך, היינו מקבלים קבוצה־חלקית־ממש של N, בעלת המספר המונה n, בקחתנו אך אותם איברים המקבלים בספירה N^{**} את המקומות: ראשון, שני, ..., n־י. לפי זה היתה N אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש, בניגוד למשפט הנ״ל.

שנית, יופיע בסידור N^{**} איבר אחרון ויהא מקומו ה־m־י לספירה. עלינו להוכיח כי $n = m$. אילו היה $n \neq m$, למשל $n > m$, היתה הקבוצה־החלקית־ממש, המכילה רק את n האיברים הראשונים של הספירה N^{**}, אקויולנטית ל N בניגוד למשפט הנ״ל. (בכוון ההפוך תתקבל הסתירה על־סמך ההנחה $m > n$.)

יג) על הגדרת הכפל בין טיפוסי־סדר. (מלואים לעמ׳ 93)

קודם כל נניח שנתונים טיפוסי־סדר במספר סופי ובסדר מסויים:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n.$$

נתאים לכל אחד מהם (σ_k) איזו קבוצה סדורה S_k בעלת הטיפוס σ_k ובאופן שכל הקבוצות S_k תהיינה זרות לחלוטין! ניצור את מכפלתן החיצונה של הקבוצות על־פי ההגדרה IV בעמ׳ 53; כלומר: ניצור את קבוצת כל הקבוצות c המכילות איבר אחד ויחיד s_k מתוך כל קבוצה S_k, ונכתוב אותן בצורה:

$$c = \{s_n, s_{n-1}, \ldots, s_2, s_1\}.$$

אחר כך נסדר את קבוצת כל הקבוצות c בשני צעדים: ראשית, נראה כל קבוצה c כקבוצה סדורה $(s_n, \ldots, s_1)$ לפי סדר האיברים הכתוב כאן; כלומר, בהקדימנו s_k בעל ציון k גדול יותר לחברו בעל ציון קטן יותר (מבין ציוני הגורמים הנתונים, דהיינו מ n עד 1). שנית, נסדר את ה־c־ים השונים

בינם לבין עצמם כפי הסדר שבמִלון (סדר לֶכסיקוגרפי); לאמור: c (דלעיל) יקדם ל $c' = (s'_n, s'_{n-1}, \ldots, s'_2, s'_1)$,

אם $s_n \prec s'_n$ ב S_n; או אם $s_n = s'_n$, ו $s_{n-1} \prec s'_{n-1}$ ב S_{n-1}; ...;

או אם $s_n = s'_n$, $s_{n-1} = s'_{n-1}, \ldots, s_2 = s'_2$, ו $s_1 \prec s'_1$ ב S_1.

(סדר זה הלא הוא הסדר שבו מופיעות במלון מלים בנות n אותיות לפי סדר האותיות בא״ב, בהקבלה לציונים מ n עד 1 שב c.) קל לראות שמתוך כלל זה נוצרת קבוצה סדורה; הטיפוס שלה יסומן ב $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1} \cdot \sigma_n$ וייקרא מכפלת הטיפוסים $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n$ בסדר זה מ־1 עד n. על־פי הגדרה זו מוגדרת גם כל חזקה σ^n אם המעריך n סופי הוא.

כדי להסביר את כוונתה של הגדרה זו ולהצדיקה, נקח $n = 2$. במקרה זה נקבל $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ כטיפוס של קבוצת הזוגות הסדורים (s_2, s_1) כעבור s_2 על איברי הקבוצה S_2 (בעלת הטיפוס σ_2) ו s_1 על איברי S_1 (זרה ל S_2, ובעלת הטיפוס σ_1) — בתנאי שהזוגות יסודרו בינם לבין עצמם לפי סדר האיברים s_2 בתוך S_2, ורק בין זוגות מן הצורה (s_2, s_1) ו (s_2, s'_1), בעלי אותו האיבר מתוך S_2, יכריע הסדר שבין s_1 ל s'_1 ב S_1. לאמור: כנגד כל איבר קבוע s_2 נקבל קבוצה חלקית בעלת הטיפוס σ_1 בהעבירנו את s_1 על כל איברי S_1. לכן גם לפי ההגדרה III בעמ׳ 92 היה עלינו לסמן את הטיפוס של קבוצת־הזוגות הנ״ל ב $\sigma_1 \cdot \sigma_2$.

מקרה פרוט זה מוסר לנו את המפתח לא רק להבנת ההגדרה שלפנינו במקרה הכללי, כי אם גם לפתרון השאלה, המתעוררת מיד מתוך נוסח ההגדרה: למה נערכו בתוך c האיברים לפי הסדר מ n עד 1, על־מנת לקבל את מכפלת הטיפוסים הנתונים לפי הסדר מ 1 עד n (דהיינו, לפי הסדר ההפוך)? התשובה היא: אם לפי המקובל נכתוב את הכופל אחרי הנכפל, מתאים $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ לשורת טיפוסים σ_1 המופיעים לפי הסדר σ_2, ולא לשורת טיפוסים σ_2 לפי הסדר σ_1. מאידך, מלון המכיל מלים בנות שתי אותיות בלבד, מתחיל במלים בעלות האות הראשונה א, ומתקבלת בזה קבוצה הסדורה לפי תחום־ההשתנות של האות השניה; וכן לגבי המלים המתחילות ב־ב וכו׳. כלומר, נקבל שורת קבוצות שכל אחת מהן סדורה לפי תחום ההשתנות של האות השניה, בעוד שקבוצות אלה סדורות בהתאם לאות הראשונה[1]. לכן יש צורך להפוך את הסדר בזוגות — או לסמן את המכפלה ב $\sigma_2 \cdot \sigma_1$ (במקום $\sigma_1 \cdot \sigma_2$) ללא היפוך הסדר. מובן שאפשר לבטל טרדה זו כולה ולהחליפה בטרדה אחרת, והיא: סידורם של הזוגות, ובמקרה הכללי: של הקבוצות c, לפי סדר „אנטי־לכסיקוגרפי״, דהיינו החל באות האחרונה של כל מלה וכלֵה באות הראשונה. איזו דרך נעדיף, זהו ענין שבטעם. — בעברנו מזוגות (מלים בנות שתי אותיות) לקבוצות סדורות סופיות c בכללן, לא ישתנה מאומה בהסבר הנתון כאן.

---

1. אמנם במקרה של מלון מתלכדים שני התחומים (הקבוצות), בהקיפם שניהם את הא״ב.

קשיים אלה הם קשיים של מה־בכך. הדורשים מאתנו רק תשומת־לב לענין פורמלי ותו לא. בניגוד לכך נילכד ברשת שאין ממנה מפלט, בעברנו למקרה הכללי של מכפלת אינסוף טיפוסים.

אמנם במקרים מיוחדים — מעוטי חשיבות דוקא — נוכל להצליח גם כאן. אם למשל נתונים הגורמים σ_k לפי הטיפוס ω^*, דהיינו בסדר (קרא משמאל ימינה!)

$$\ldots, \sigma_{k+1}, \sigma_k, \sigma_{k-1}, \ldots, \sigma_2, \sigma_1,$$

נקבל את המכפלה $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \cdots \cdot \sigma_k \cdot \cdots$ כטיפוס של קבוצת הסדרות $c = (s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots)$ הסדורות לפי סדר לכסיקוגרפי: בהינתן שתי סדרות כאלה, עלינו לשים לב לאותם איברים s_k שציונם k הוא הראשון אשר לעומתו מופיעים איברים שונים s_k. ואולם אם הגורמים σ_k נתונים, למשל, לפי הטיפוס ω, יהיה תלוי סידור הקבוצות (לשם קבלת המכפלה הדרושה $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_k \cdots$) בציון הראשון k שלעומתו שונות הקבוצות הסדורות (בעלות הטיפוס ω^*)

$$(\ldots, s_k, \ldots, s_2, s_1), \qquad (\ldots, s'_k, \ldots, s'_2, s'_1).$$

מהיכן יש לנו וודאות שקיים ציון ראשון כזה? אדרבה, אין ציון ראשון מסוג זה בדרך־כלל, כגון אם כנגד כל k (או כנגד כל k זוגי) קיים $s_k \neq s'_k$, וקושי זה במקומו עומד כלפי מיני סדר אחרים של אינסוף הגורמים הנתונים — פרט למקרה שהסדר הוא הפוך ל„סדר הטוב" (עמ' 97).

המסקנה המעציבה היא שבדרך כלל אין אפשרות להגדיר, באופן מועיל ומתקבל על הדעת, את מכפלתם של אינסוף טיפוסי־סדר; לכן גם לא חֶזקה שמעריכה הוא טיפוס אינסופי. לשם תפקידים מסויימים (למדנו לדעת את החשוב ביניהם בתורת המספרים הסודרים, בעמ' 112) מכניסים תחליף למושגי המכפלה והחזקה, תחליף אומלל למדי, שבדרך־כלל אינו משיג אפילו את העצמה הדרושה לנו: עצמת המכפלה החיצונה. Hausdorff המציא את התורה החריפה של תחליפים אלו לגבי המקרה הכללי[1]. במקרה הפרוט, וקל באופן יחסי, של מספרים סודרים כבר השתמש קנטור בחזקות אינסופיות כאלה.

יד) הטיפוס η של הקבוצה הסדורה של המספרים הרציונליים.

(מלואים לעמ' 94)

הטענה העומדת להוכחה היא: נניח ש N היא איזו קבוצה סדורה בעלת שלש התכונות א) עד ג) שנמנו בעמ' 93 לקבוצה R של המספרים הרציונליים בסדרם הרגיל (לפי הגודל); במקרה זה דומה N ל R.

לשם הוכחת הדבר נבנה העתק דומה מסויים בין N ל R. שיטת־בניה זו,

1. השוה Math. Annalen כרך 65 (1908), ואת הפרק הששי בספרו של האוסדורף מ־1914 (עיין לעיל עמ' 41); במהדורות הבאות של ספר זה דן המחבר בתורה זו אך בקיצור.

שניתנה ע"י קנטור ב 1895, אינה קלה, ורק קוראים מאומנים במקצת מתבקשים לרדת לעומקה.

ראשית כל נשתמש בתכונה א) כדי למנות את איבריהן של R ו N; נוכל אפוא לכתבן כסדרות:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots), \quad (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots).$$

מובן שסדר זה שונה מן הסדר בו מופיעים האיברים בקבוצות הסדורות R (של המספרים הרציונליים הסדורים לפי גדלם) ו N; הרי קבוצות אלה הן צפופות, בניגוד לסידרה.

הצעד הראשון בבניתנו יהא להתאים את האיבר n_1 ל r_1. הצעד השני יתאים למספר r_2 איבר ידוע של N, המתיחס ל n_1 בתוך N כהתיחס r_2 ל r_1 בתוך R, כלומר לפי גודל המספרים r_1 ו r_2. אם למשל קיים $r_1 < r_2$, נקח כבן־זוגו של r_2 ב N איבר מסויים העוקב ל n_1; ביתר דיוק: מבין כל האיברים הללו (העוקבים ל n_1 במקרה דידן) נתאים ל r_2 את האיבר n_k בעל הציון k הקטן ביותר. (דוגמה: אם $r_1 < r_2$, ואם n_2, n_3, n_4, n_7 קודמים ל n_1 ב N, בעוד ש n_5, n_6, n_8 עוקבים ל n_1, יותאם n_5 ל r_2.) נסמן את בן־זוגו זה של r_2 גם ב $n_{(2)}$, ולשם אחידות נסמן את n_1 גם ב $n_{(1)}$.

בצעד השלישי נצא מיחסי־הסדר בין r_1, r_2, r_3. יש ששה מקרים אפשריים: שלשה על־פי ההנחה $r_1 < r_2$, ושלשה על־פי ההנחה $r_2 < r_1$. על־פי ההנחה הראשונה, למשל, שלשת המקרים הם: $r_3 < r_1 < r_2$, $r_1 < r_3 < r_2$, $r_1 < r_2 < r_3$. קודם כל יש ב N איברים (אפילו אינסוף איברים) השונים מ $n_{(1)}$ ומ $n_{(2)}$, והמתיחסים ב N ל $n_{(1)}$ ול $n_{(2)}$ כהתיחס r_3 ל r_1 ול r_2: איברים בין $n_{(1)}$ ו $n_{(2)}$ על־פי התכונה ב) של N; איברים לפני $n_{(1)}$ ו $n_{(2)}$, או אחרי שניהם, על־פי התכונה ג). מתוך איברי N הבאים בחשבון נבחר n_k בעל הציון k הקטן ביותר, ונסמנו ב $n_{(3)}$, בהתאימנו אותו למספר r_3. בהתאם לכך יהיה היחס הסידורי בין $n_{(1)}$, $n_{(2)}$ ו $n_{(3)}$ כיחס הסידורי שבין r_1, r_2 ו r_3.

אחרי תארנו צעדי־פתיחה אלה נשתמש באינדוקציה השלימה, כדי להראות שאפשר להמשיך את התהליך בלי קץ. נניח שלמספרים $r_1, r_2, \ldots, r_m$ מ R כבר הותאמו באופן חד־חד־ערכי איברים $n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots, n_{(m)}$ מ N באופן כזה, שכיחסם הסידורי של המספרים ההם כן יהיה יחסם הסידורי של בני־זוגם ב N. לפיכך יהיה יחסו של r_{m+1} למספרים $r_1, r_2, \ldots, r_m$ או זה, ש r_{m+1} נמצא בין שנים (שכנים) מהמספרים הללו, או שיקדם לכולם, או שיעקוב לכולם. על־פי התכונות ב) ו־ג) של N יש ב N איברים n_k (ואף אינסוף איברים) המתיחסים ל $n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots, n_{(m)}$ כהתיחס r_{m+1} ל $r_1, r_2, \ldots, r_m$. מבין אותם איברים n_k נבחר באיבר בעל הציון k הקטן ביותר, ונסמנו ב $n_{(m+1)}$,

בהתאימנו אותו ל r_{m+1} נגיע לכך שהיחס הסידורי בין האיברים $n_{(1)}$, $n_{(2)}$, ..., $n_{(m)}$, $n_{(m+1)}$ יהיה כיחס הסידורי בין המספרים r_1, r_2, ..., r_m, r_{m+1}.

בהתאם לכך נקבל לא רק העתק, אלא העתק דומה, בין R לקבוצה חלקית של N. השתמשנו לתכלית זו בתכונה א) כלפי שתי הקבוצות R ו N, בתכונות ב) ו־ג) כלפי N בלבד. ואמנם על התכונות ב) ו־ג) של R נסתמך בחלקה האחרון של ההוכחה שתפקידה להראות: עתידים אנו למצות את הקבוצה N כולה בקחתנו את בני־זוגם של כל המספרים שב R. לשון אחר: הקבוצה החלקית של N המתקבלת מתוך שנמשיך בלי קץ בתהליך־ההתאמה דלעיל, היא N עצמה. נוכיח גם זאת בדרך האינדוקציה השלימה, בהשתמשנו במנייתה של N שהופיעה בראשית ההוכחה; כלומר: תהי זאת אינדוקציה לפי ציוניהם k של האיברים n_k בסידרה דלעיל, ולא לפי הציונים בסוגריים שהוגדרו מתוך תהליך־ההתאמה.

ראשית, n_1 הופיע כבר בצעד הראשון. נניח שעד הצעד ה־l־י, ועד בכלל, השתמשנו לשם ההתאמה – בין שאר האיברים n_k מתוך $n_{(1)}$, $n_{(2)}$, ..., $n_{(l)}$ – כבר בכל האיברים n_1, n_2, ..., n_p, אך לא ב n_{p+1}. ברור שקיים $l \geqq p$. לפי זה עלינו להוכיח שגם באיבר n_{p+1} נשתמש באחד הצעדים הבאים (אחרי הצעד ה־l־י).

לשם הוכחת הדבר נחקור תחילה את היחס שלפיו מתיחס n_{p+1} אל האיברים $n_{(1)}$, $n_{(2)}$, ..., $n_{(l)}$. על פי תכונותיה ב) ו־ג) של הקבוצה R יש מספרים r_k ב R המתיחסים אל r_1, r_2, ..., r_l לפי היחס הנ"ל של n_{p+1}. מבין אותם המספרים r_k נקח את המספר בעל הציון k הקטן ביותר. הציון ההוא יהיה על־כל־פנים גדול מ l; נסמנו ב $l+\mu$, כך שהמספר הנידון יהיה $r_{l+\mu}$. לפי זה יהיה מקומו של n_{p+1} ביחס אפילו לאיברים

$$n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots, n_{(l)}, n_{(l+1)}, \ldots, n_{(l+\mu-1)}$$

מתאים למקומו של $r_{l+\mu}$ ביחס למספרים

$$r_1, r_2, \ldots, r_l, r_{l+1}, \ldots, r_{l+\mu-1}.$$ [1]

כי המספרים r_{l+1}, ..., $r_{l+\mu-1}$ (וכן בני־זוגם ב N) לא יכלו להיכנס בין האיברים בעלי ציונים נמוכים יותר באותו המקום השמור למען $r_{l+\mu}$ (ובהתאם לכך למען n_{p+1}); שהרי, לולא כך, היה מספר r_k בעל ציון k קטן מ $l+\mu$ גורם לשימוש באיבר n_{p+1}, לפי מה שנאמר לעיל. לכן יותאם n_{p+1} דוקא כבן־זוג למספר $r_{l+\mu}$; לאמור: הגע יגיע פעם תורו של n_{p+1}, וביתר דיוק: יגיע בצעד ה־$(l+\mu)$־י, כך ש n_{p+1} יסומן גם ב $n_{(l+\mu)}$. לפיכך יגיע תורו של כל איבר מתוך N; נמצה ונרוקן את N בהוציאנו את בני־זוגם של כל איברי R. באופן זה יצרנו העתק דומה בין R לבין הקבוצה N כולה, מש"ל.

---

1. זהו למעלה מהדרוש. שכן ההוכחה הדרושה מופנית כלפי יחסו של n_{p+1} אל האיברים $n_{(1)}$, $n_{(2)}$, ..., $n_{(l)}$ בלבד; ואילו היחס המתאים גם לאיברים הבאים עד $n_{(l+\mu-1)}$ מתקבל בלאחר־יד.

טו) הוכחה שיש העתק דומה אחד בלבד בין קבוצה סדורה היטב W לבין עצמה. (הוכחת המשפט 6 בעמ' 101)

מכיון שההעתק הזהותי, המתאים כל איבר לעצמו, על־כל־פנים דומה הוא, אומרת הטענה: אין העתק דומה בין W לעצמו, פרט להעתק הזהותי.

ואמנם כל העתק לא־זהותי יתאים איבר ידוע w של W לאיבר אחר w'. קיים אפוא: או $w' \prec w$, או $w \prec w'$. בשני המקרים יתאים ההעתק איבר של W לאיבר קודם, דבר שאינו אפשרי אם ההעתק דומה (לפי מה שהוכח בהוכחה הקודמת למשפט 6; כאן מתלכדת הקבוצה עם קבוצתה החלקית). לכן ההעתק הדומה היחיד בין W לעצמו הוא ההעתק הזהותי.

מזה נובע מיד, כפי שטוען המשפט 6, שאין העתקים דומים שונים בין W וקבוצה אחרת דומה V. שכן אילו התקיימו שני העתקים דומים שונים, היינו יוצרים העתק דומה לא־זהותי של W לעצמה בהתאימנו זה לזה, כנגד כל איבר v מ V, את שני האיברים w_1 ו w_2, שלהם מותאם v ע"י שני ההעתקים. לכן צריך להיות תמיד $w_1 = w_2$; לאמור: יש העתק דומה אחד בלבד.

למשפט 6 אין, כמובן, תוקף כלפי קבוצה סדורה בדרך־כלל. למשל, בין קבוצת כל המספרים השלמים לבין עצמה יש, מלבד ההעתק הזהותי, גם ההעתק המתאים לכל מספר m את המספר $m+n_0$ שבו מסמן n_0 איזה מספר טבעי קבוע, וגם העתק זה הוא דומה. כן הדבר לגבי כל קבוצה בעלת הטיפוס η.

מצד שני אין המשפט 6 אפייני לקבוצות סדורות היטב דוקא; למשל קיים המשפט 6 גם לגבי הקבוצה הסדורה:

$$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots 0 \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

וכן לגבי כל קבוצה בעלת הטיפוס $\omega^* + n + \omega$ אם n סופי.

טז) הסכום של מספרים סודרים. (מלואים לעמ' 104)

כדי להוכיח את רישת המשפט 9, נניח שלכל איבר w של קבוצה סדורה היטב מסויימת W מותאם באופן חד־ערכי מספר סודר γ_w; עלינו להוכיח שסכומם של כל ה γ_w, אם נקחם לפי הסדר ב W, גם הוא מספר סודר. הקורא יקל על עצמו את הבנת ההוכחה הבאה, בקחתו כדוגמה מכינה קבוצה W בת שני איברים; כלומר, בהתכוונו לסכום של שני מספרים סודרים.

נתאים לכל γ_w קבוצה Γ_w (סדורה היטב) בעלת המספר הסודר γ_w באופן שכל קבוצות אלה תהיינה זרות לחלוטין. עלינו להראות שהסכום המסודר Σ של כל ה Γ_w הוא קבוצה סדורה היטב; כלומר, שכל קבוצה חלקית T של Σ מכילה איבר ראשון. אין ודאות שב T נמצאים איברים מכל אחת מן הקבוצות Γ_w. אבל הואיל וקבוצות אלו מופיעות בסדר טוב (כנגד הסדר של W), הרי יש ביניהן קבוצה מסויימת ראשונה Γ_0 הנותנת תרומה כלשהי

לT, כך שלפחות איבר אחד מΓ_0 נמצא בT. לשון אחר: T מכילה איבר(ים) מתוך הקבוצה Γ_0 ולא מתוך שום Γ_w קודמת לה. מכיון שΓ_0 גם היא קבוצה סדורה היטב, יש בין איבריה הנמצאים בT איבר ראשון מסויים c_0. מזה יוצא לפי הגדרת הסכום המסודר, כי c_0 הוא איברה הראשון של הקבוצה החלקית T של Σ, ופירוש הדבר, שהקבוצה Σ סדורה היטב, מש"ל.

יז) קבוצת המספרים הסודרים הקטנים ממספר נתון.

(מלואים לעמ' 104)

תהא S קבוצה סדורה היטב בעלת המספר הסודר σ; כבמשפט 10 נסמן ב$W(\sigma)$ את קבוצת כל המספרים הסודרים הקטנים מσ, המסודרים לפי גדלם. כל שני איברים α וβ של $W(\sigma)$ נתונים להשוואה זה לזה לפי המשפט 4; שכן היחסים $\alpha < \sigma$ ו$\beta < \sigma$ אומרים לפי ההגדרה III, שα וβ הם מספריהם הסודרים של שני ראשים לקבוצה S. לכן אפשר לסדר $W(\sigma)$, כפי שדורש המשפט 10, ע"י הכלל: $\alpha \prec \beta$ אם $\alpha < \beta$.

המשפט שלפנינו טוען: $W(\sigma)$ דומה לS. נוכיח זאת בבנותנו העתק דומה בין שתי קבוצות אלו, שהשניה מהן בודאי סדורה היטב, בעוד שעל הראשונה ידוע עד כאן רק שהיא סדורה. ראשית, ניצור התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי הקבוצות, כדלקמן: כדי לקבוע את בן־זוגו ב$W(\sigma)$ של איבר נתון a של S נסמן בA את הראש של S הנקבע ע"י a, ובα את המספר הסודר של A. לפי ההגדרה III קיים $\alpha < \sigma$ ולכן נמצא α ב$W(\sigma)$. α זה יותאם לאיבר a של S. לפי כלל־ההתאמה הזה מותאם גם בכוון ההפוך לכל איבר α של $W(\sigma)$ — כלומר, לכל מספר סודר α הקטן מσ — איבר a של S באופן חד־ערכי; כי היחס $\alpha < \sigma$ אומר לפי ההגדרה III שα הוא מספרו הסודר של ראש ידוע (קבוע באופן חד־ערכי) של S, הואיל ולפי הנחתנו σ הוא מספרה הסודר של S. אם A הוא הראש הנידון, ואם a קובע בS את הראש A, הרי a הוא בן־זוגו של α לפי התאמתנו.

והנה התאמה זו יוצרת העתק דומה בין S ל$W(\sigma)$. כדי להראות זאת נסמן בa ובb שני איברים של S, בA ובB את ראשי S הנקבעים על־ידיהם, בα ובβ את מספריהם הסודרים של ראשים אלה; במקרה זה נובע מהוכחת המשפט 4 (עמ' 100) כי $a \prec b$ גורם לכך שA הוא ראש של B, ולכן קיים לפי ההגדרה III: $\alpha < \beta$; וחילופו. $W(\sigma)$ היא אפוא קבוצה סדורה היטב בעלת המספר הסודר σ, מש"ל.

יח) על קבוצות של מספרים סודרים.

(הוכחות למשפטים 1–3 בעמ' 108)

הוכחה למשפט 1: תהא A קבוצה של מספרים סודרים, סדורה לפי גודל המספרים, וA_0 קבוצה חלקית של A, שונה מ0. עלינו להראות שיש בA_0 איבר

ראשון. אם ν הוא איבר מסויים של A, נבנה את הקבוצה $W(\nu)$; היא אינה ריקה, אלא אם כן $\nu = 0$. יכול להיות שν בעצמו הוא איברה הראשון של A_0. אם לאו, יהיה המשותף P של A_0 ו$W(\nu)$ שונה מ0, ויש בקבוצה P איבר ראשון, הואיל והיא קבוצה חלקית של הקבוצה הסדורה היטב $W(\nu)$. והנה אותו איבר ראשון הוא גם איברה הראשון של A_0, מש"ל.

הוכחה למשפט 2: סכום המספרים הוא מספר סודר σ; לכן, אם הסכום אינו גדול ממחובר מסויים α ולא שוה לו, הריהו קטן מα לפי המשפט היסודי I. פירושו של דבר שהסכום הסדור S של קבוצות מתאימות, בעל המספר σ, דומה לראש של קבוצה בעלת המספר הסודר α; כלומר: לראש של קבוצה חלקית של S. ברם מסקנה זו מתנגדת למשפט 5 בעמ' 100. בפרט ברור שσ גדול מכל מחובר, אם אין בין אלה מספר גדול ביותר.

הוכחה למשפט 3: נחליף כל איבר β של הקבוצה הנתונה B, שאיבריה הם מספרים סודרים, ב$(\beta+1)$, הגדול מβ. יהא σ סכומם של כל המספרים $\beta+1$ (לקוחים בסדר לפי גדלם); על־פי המשפט 2 יהיה σ שוה או גדול מכל $\beta+1$, ולכן גדול מכל β.

אם σ הוא המספר העוקב את כל איברי B, הרי נסתיימה ההוכחה. אם לאו, יש בקבוצה הסדורה היטב $W(\sigma)$ מספרים הגדולים מכל איברי B, והקטן בין המספרים הללו הוא העוקב הדרוש.

יט) תהליך־ההגדרה דרך האינדוקציה העלסופית.

(מלואים לעמ' 112)

ננסח ביתר דיוק את הטענה שעלינו להוכיח, וננסחה לא בשפת המספרים (הסודרים) אלא בשפת הקבוצות.

משפט על תהליך־ההגדרה (הבניה) בעזרת האינדוקציה העלסופית: פונקציה שהגורם שלה s עובר על איבריה של קבוצה סדורה היטב S, תהא מיוצגת „דרך־נסיגה", כלומר לפי השיטה הבאה: נתון כלל מסויים[1] הקובע באופן חד־ערכי את ערכה של הפונקציה לגבי כל ערך s_0 מתוך S, על־סמך כל ערכי הפונקציה המתקבלים כעבור s על כל איברי S הקודמים לs_0. (לפי זה קבוע, בפרט, ערכה של הפונקציה לגבי האיבר הראשון של S.) על־פי הדברים האלה מוגדרת בכל הקבוצה S פונקציה חד־ערכית אחת ויחידה $f(s)$; כלומר קיימת פונקציה יחידה $f(s)$ שיש לה התכונה הנ"ל.

הוכחה: קודם כל, אם יש פונקציה $f(s)$ בעלת התכונה הנדונה, הריהי

1. יש, כמובן, אפשרויות שונות להגדיר (באופן חד־ערכי) פונקציות בS בעזרת כללים הבנויים דרך־נסיגה כנ"ל. הנחתנו היא שנתון כלל מסויים מסוג זה.

קבועה באופן חד־ערכי; לאמור: יש לכל היותר פונקציה אחת מן הסוג הנ"ל (לעומת הכלל הנתון). זה נובע מטיבו של הכלל: שכן, אם $f_1(s)$ ו $f_2(s)$ ממלאות את הכלל, תגרור אחריה ההנחה ששתיהן אינן מזדהות, את מציאותו של איבר ראשון s^* מ S כך ש $f_1(s^*) \neq f_2(s^*)$. ברם העובדה, שלגבי כל s בעל התכונה $s \prec s^*$ קיים $f_1(s) = f_2(s)$, מביעה לפי הכלל שגם $f_1(s^*) = f_2(s^*)$. הפונקציות f_1 ו f_2 מתלכדות אפוא בכל הקבוצה S.

על כן שומה עלינו לבנות פונקציה בעלמא (ממילא היחידה) הממלאת את תנאי המשפט בהתאם לכלל המיוחד הנתון. ראשית ברור, שקבוצת כל ראשיה של הקבוצה S דומה ל S; לכן סדורה היטב גם היא, אם משני ראשים שונים יקדם הראש שהוא קבוצה חלקית של חברו. אם נוסיף אחרי הראשים את הקבוצה S עצמה (דהיינו, אם נקח את הרישות תחת הראשים), תוסיף הקבוצה להיות סדורה היטב. הבה נראה שלעומת כל רישה I של S קיימת פונקציה $f_I(s)$ המוגדרת לגבי כל איברי I באופן שמתמלא תנאי המשפט ביחס לכלל הנתון.

נוכיח זאת בעזרת האינדוקציה העלסופית לגבי הרישות של S (עיין המשפט 5 בעמ' 110). נניח אפוא שהטענה הוכחה כבר כלפי כל הרישות (או הראשים; כאן אין הבדל בין שניהם) של S הקודמים[1] לרישה מסויימת I. כדי להוכיחה גם כלפי I, נבחין בין שני מקרים:

א) יש איבר אחרון i בתוך I. במקרה זה מוגדרת לפי הנחתנו בקבוצה $I' = I - \{i\}$ פונקציה $f_{I'}(s)$ מן הסוג הרצוי. מערכת כל הערכים שמקבלת פונקציה זו בקבוצה I', קובעת לפי הנחות המשפט גם את הערך $f(i) = f_I(i)$. לכן, לאחר הוספת הערך הזה, נקבל בקבוצה I כולה הגדרה ל $f_I(s)$ בהתאם לתנאינו.

ב) אין איבר אחרון ב I. במקרה זה משתייך כל איבר של I לראש ידוע H של I. לפי הנחתנו מוגדרת ב H פונקציה $f_H(s)$ מן הסוג הדרוש. כנגד כל בחירה של H מתלכדים הערכים של פונקציות אלו לגבי ערכי הגורם המשותפים; שהרי, אם H ו G הם שני ראשים של I, ואם H הוא ראש של G, מוגדרות ב H שתי הפונקציות $f_H(s)$ ו $f_O(s)$ בהתאם לתנאי המשפט ומייצגות אפוא שם אותה הפונקציה (על־סמך חד־הערכיות שהוכחה בהתחלה). לכן נוכל להגדיר, ללא כל שרירות לב, את הפונקציה $f_I(s)$ כדלקמן: אם האיבר s של I משתייך לראש H של I, יהא $f_I(s) = f_H(s)$. הואיל והפונקציות $f_H(s)$ ממלאות את תנאי המשפט, הוא הדין לגבי $f_I(s)$. לפיכך $f_I(s)$ היא פונקציה כפי שבקשנוה.

בכך גמרנו את ההוכחה; שהרי בקחתנו כרישה I את הקבוצה S עצמה, נקבל פונקציה $f(s)$ מן הסוג הדרוש, מש"ל.

---

1. לגבי הרישה הראשונה 0 אין מה להוכיח, הואיל ואין כאן תחום־הגדרה כל עיקר.

והרי עיקר חשיבותה של הוכחה זו: לפי טיבה של האינדוקציה העלסופית, כשהיא מבוססת על שני „עקרונות־היצירה" (עמ' 111), מבצעים אנו לכאורה רק פעולה של „צעד־אחרי־צעד", ויש אולי למצוא קושי הגיוני ופסיכולוגי כאחד ברעיון שעתידים אנו להגיע כך לכל מספר סודר, גם מעבר לתחום הסופי. המשפט שלפנינו והוכחתו מבטיחים תהליך כולל, „בבת־אחת" כביכול, תחת תהליך של צעדים ממושכים. אמנם אין זו אלא העברת הקושי ממקום למקום: ההיסק האפייני שבתורת הקבוצות הסדורות היטב (בעזרת הוכחה דרך־שלילה; עמ' 101) הוא הוא המבצע את מעשה־הכשפים שבאינדוקציה העלסופית.

כ) החילוק בין מספרים סודרים. (מלואים לעמ' 115)

כדי להוכיח את המשפט 7, בהנתן המספרים הסודרים μ ו α $(\alpha \neq 0)$, נקח $\beta = \mu + 1$; כוונתו של צעד זה היא: לקבל מכפלה המכילה את הגורם α והעולה על μ. במקרה זה קיים לפי התרגיל 1) בעמ' 121, שבו נשתמש גם להלן:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\mu + 1) \geqq 1 \cdot (\mu + 1) = \mu + 1 > \mu.$$

תהיינה A ו B קבוצות סדורות היטב בנות הטיפוסים α ו β. לפי הגדרת הכפל בטיפוסי־סדר, המכפלה $\alpha \cdot \beta$ (שגם היא מספר סודר) היא הטיפוס של המכפלה הסדורה $A \times B$ (עמ' 143) שאיבריה הם כל הזוגות הסדורים (b, a) בסדר לכסיקוגרפי. מכיון שקיים $\mu < \alpha \cdot \beta$, יש לקבוצה הסדורה היטב $A \times B$ ראש M בעל הטיפוס μ; נסמן ב (b_0, a_0) את האיבר הקובע את הראש M.

הבה נבדוק את הראש M! לפי הסדר שבתוך $A \times B$ מכיל M ראשית את כל הזוגות (b, a), שלגביהם קיים $b \prec b_0$ (בקבוצה B), כאשר a מסמן איבר איזה שהוא מתוך A. שנית, ואחריהם, מכיל M את כל הזוגות (b, a) שלגביהם $b = b_0$ ו $a \prec a_0$ (בקבוצה A); כלומר, את כל הזוגות (b_0, a) עם $a \prec a_0$. אם b_0 קובע ב B ראש בעל הטיפוס $\varkappa$, וכן a_0 ב A – ראש בעל הטיפוס ϱ ($\varkappa$ ו ϱ מספרים סודרים, בפרט ϱ קטן מ α), הרי M מתואר כסכום מסודר של קבוצה בעלת הטיפוס $\alpha \cdot \varkappa$ ושל קבוצה בעלת הטיפוס ϱ; שכן בחלק הראשון מתאימה לכל ערך מסויים של b קבוצה בעלת הטיפוס α, ולכולם יחד קבוצה בעלת הטיפוס $\alpha \cdot \varkappa$, בהתאם לסדר הלכסיקוגרפי. קבלנו אפוא $\mu = \alpha \cdot \varkappa + \varrho$ $(\varrho < \alpha)$, מש"ל.

כדי להוכיח שתיאור זה הוא חד־ערכי, מספיק להראות כי $\varkappa$ קבוע באופן חד־ערכי; במקרה זה נובע הדבר לגבי ϱ לפי התרגיל 1) הנ"ל. אבל מן ההנחה

$$\alpha \cdot \varkappa_1 + \varrho_1 = \alpha \cdot \varkappa_2 + \varrho_2 \qquad (\varrho_1 < \alpha,\ \varrho_2 < \alpha)$$

נובע, אם $\varkappa_1 < \varkappa_2$ ולכן $\varkappa_1 + 1 \leqq \varkappa_2$, לפי התרגיל הנ"ל והחוק הדיסטריבוטיבי

$$\alpha \cdot \varkappa_1 + \varrho_1 = \alpha \cdot \varkappa_2 + \varrho_2 \geqq \alpha \cdot (\varkappa_1 + 1) + \varrho_2 = \alpha \cdot \varkappa_1 + \alpha + \varrho_2,$$

כלומר: $\varrho_1 \geqq \alpha + \varrho_2$. והלא זה סותר את תנאי־ההנחה $\varrho_1 < \alpha$; מש"ל.