מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

מחצית ראשונה: אריתמטיקה ואלגברה

כרך ראשון המספר והפונקציה

הוצאת „מסדה" בע"מ, רמת־גן

INTRODUCTION TO MATHEMATICS

PROBLEMS AND METHODS OF MODERN MATHEMATICS

BY

ABRAHAM A. FRAENKEL, PH. D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS,
HEBREW UNIVERSITY

VOLUME I

NUMBER AND FUNCTION

WITH 57 DIAGRAMS

MASSADAH LTD., TEL-AVIV

מבוא למתימטיקה

בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה

מאת

אברהם הלוי פרנקל

כרך ראשון: המספר והפונקציה

עם 57 ציורים

מחצית ראשונה: אריתמיטיקה ואלגברה

הוצאת "מסדה" בע"מ, תל-אביב, תשכ"ו

כל הזכויות, לרבות זכות התרגום, שמורות למחבר

Copyright, 1942 by A. A. Fraenkel, Jerusalem

I PRINTED IN ISRAEL

©

כל הזכויות שמורות

נדפס במפעלי דפוס פלאי-פי.אי.סי. בע"מ, רמת-גן

PELI-P.E.C PRINTING WORKS LTD., RAMAT-GAN

PRINTED IN ISRAEL

מהדורה שלישית

כל הזכויות, לרבות זכות התרגום, שמורות למחבר
Copyright, 1942 by A. A. Fraenkel, Jerusalem
PRINTED IN ISRAEL

©
מפעלי דפוס פלאי-פי. אי. סי. בע"מ, גבעתיים—רמת-גן
PRINTED IN ISRAEL

לדעיתי

הקדמה

סופר צרפתי ידוע (*Beaumarchais*) דמה את הספרים לפרי־הבטן: „הורתם בעדנים, הֵרונם בעצבון, לידתם בחבלים." ואמנם נוצר הספר הזה בקלות ובטוב־לב: אחרי ששדלני יהודה אבן שמואל (ד"ר י. קופמן) בשנת תרצ"ו לחבר ספר עברי על מתימטיקה חדישה (אז בקשר עם ה„מוסד להשכלה עצמית"), שימשו חוט־השדרה לספר ההרצאות על „בעיות ושיטות מתוך המתימטיקה החדישה" שמסרתין מדי פעם בפעם באוניברסיטאות חו"ל ובאוניברסיטה העברית לפני תלמידי „כל החוגים" (כלומר, בצורה שאינה דורשת ידיעות מקצועיות קודמות). סדרתי את החומר בהתאם לצרכי הקהל בארץ, ונסיתי למצוא צורה עברית מתאימה — זוהי בעית הסגנון המתימטי בעברית יותר מבעית מונחים (טֶרמינולוגיה).

מיד התברר כי כרך רגיל קטן מהכיל את כל הנושאים; לכן חלקתי את החומר לשני כרכים. זהו הכרך הראשון (הנחלק לשנים), והוא מקיף בשלשה חלקים את תורת המספרים הטבעיים, את הרחבת מושג־המספר (לרבות אלגברה), ואת תורת הפונקציות והטורים עם החשבון הדיפֶרֶנציאלי והאינטֶגרלי („האינסוף בכח"). ידיעה ברורה יותר על החומר הנמצא בכרך זה יש לקבל מ„תוכן העניינים" (עמ' X), וביתר פירוט ממפתח המונחים (עמ' 354). אם יופיע בזמן מן הזמנים גם הכרך השני, אערוך שם שנים מבין שלשת החלקים הנותרים, המוקדשים לתורת־הקבוצות („האינסוף המוחלט"), לשיטות השונות בגיאומטריה, וליסודות המתימטיקה וקשריה אל הפילוסופיה. החלק האחרון יופיע לחוד.

את רובו המכריע של החומר הכתבתי בזמנו, לפני חמש שנים, לתלמידתי ברוריה קופמן (עתה אשת הפרופ' הֶריס בפילַדֶלפיה, וחוקרת חריפה בפיסיקה עיונית) אשר זיכתני בכמה הערות מועילות; תודתי נתונה לה, וכמו־כן לתלמידי דוב יוז'וק, שכתב מפי את הפרק האחרון (י"ב). במיוחד הנני מודה לגב' רחל גַנז, M. A., מחַברת הספר „בניות גיאומטריות" (ירושלים תש"א), על המסירות (וההצלחה) שבה שרטטה את כל הציורים המופיעים בספר.

בבחירת החומר ועריכתו שמתי שלש מטרות לנגד עיני. ראשית, לסלול דרך להבנת מהות המתימטיקה ולקליטת חומר נבחר מבין בעיותיה ושיטותיה לפני צעירים וצעירות קוראי עברית — בין אם בקרו בבית־ספר תיכון בין אם התרגלו לאורחות המחשבה המופשטת באופן אחר, כגון ע"י לימוד גמרא וכדומה. (מדובר על צעירים דוקא, הואיל והגיל הרצוי כדי לחדור למחשבה המתימטית נמצא בין 15 ו 30 שנה, ורק יחידי סגולה יצליחו למעלה מגיל זה.) שנית, לתת חומר מועיל (ואף דרוש, כפי שהוגד לי מחוגי מורים) למורים בבתי־הספר התיכונים באי: לא

על־מנת למסרו בכיתה כמו שהוא, אלא על־מנת להעשיר את ידיעות המורה בדבר התפתחותם החדישה של הכוונים המתימטיים הקשורים בנושאים מתכנית ביה"ס, וכדי לאפשר לו לעבד מצדו בצורה מתאימה פרקים מסויימים—לשם שימוש בלימוד הרגיל או בשעורי־רשות בחוגים („נושאים לבחירה"). שלישית פונה הספר גם אל אנשים מבוגרים, אשר אינם בעלי המקצוע מתימטיקה אבל שמרו על יחס חיובי למקצוע זה מנעוריהם: בעזרת הספר יהיה לאל ידם ליצור להם השקפה עצמאית על קשרי המתימטיקה אל התרבות החדישה בכלל, ואל הפילוסופיה בפרט[1]. הם יבינו כי פלאי המתימטיקה וסודותיה נובעים, לא כפלאי הטבע מאת עושה בראשית, כי אם מתוך שכלנו אנו, ולכן חובת־כבוד עלינו לפענחם. (אולי צפון רעיון זה בדרשת חז"ל למה שכתוב „כי היא חכמתכם ובינתכם לעיני העמים".)

המטרות האלה נבדלות למדי, ולכן השפיעו על תוכן הספר בכוונים שונים. למטרה הראשונה והשלישית משותפת הדגשת אותם הקוים העקרוניים והפילוסופיים (גם ההיסטוריים) הכולטים בחלק הראשון ובמחציתו הראשונה של החלק השלישי. כאן יווכח הקורא, כמה מוטעית דעה נפוצה למדי על המתימטיקה: כאילו היא עתיק המדעים וה„קלסי" ביניהם, שאליו יש להתיחס בבחינת „מפני שיבה תקום והדרת פני זקן". ואולם מתוך ההכרה כי התפתחותה נגמרה והגיע תורם של מדעים „צעירים". אם הצלחתי להשיג במידת־מה את מטרתי, יתגלה לעיני הקורא מצב הפוך כמעט. „רומנטי" ולא „קלסי". בעץ המתימטיקה מתפתחים מדי פעם בפעם, ודוקא גם בדורות האחרונים, ענפים חדשים בלתי־צפויים מראש; נוצרות שיטות חדשות הנותנות סוף־סוף גישה אל בעיות נושנות בנות מאות ואף אלפי שנים; צצים מושגים חדשים המאפשרים ניסוח לבעיות אשר עד הנה לא היו בתחום ההשגה; ואף גם זאת: שרשי העץ, היסודות שעליהם מתרוממת המתימטיקה כאילן אשר לכאורה כל הרוחות שבעולם נושבות בו ואין מזיזות אותו ממקומו, יסודות אלו מתנענעים ומתערערים; והנה ויכוחים, מחלוקת ומשבר תחת בטחון מוצק! הצורך ב„העמקת" יסודותיו של המדע עתיק־הימים פיתח אסכולות שונות, ביניהן מהפכניות, בדבר מהות המתימטיקה ודרכי ביסוסה. (אמנם תופעה זו תבלוט יותר בחלק הרביעי והששי.)

בעבור סוגי־הקוראים האלה נחוץ היה לכתוב את הספר ללא דרישה של „ידיעות קודמות"; לאמור: כך שיוכל להבינו מי שיודע אך את התחלות „הטכניקה" החשבונית כפי שילמדה בערך תלמיד המחלקה הששית של בית־ספר תיכון. ואולם לא יוכל להבינו אלא על־סמך התאמצות במשך הקריאה, התאמצות במחשבה

1. מומחה כמו Cassius J. KEYSER במאמרו The rôle of mathematics in the tragedy of our modern culture (*Scripta Math.*, 5, 1939) ראוה מצב טרגי בזה כי אף לבעלי תרבות גבוהה אין בזמננו בדרך־כלל, מטעמים „טכניים", גישה אל מדעים מרכזיים כמתימטיקה, פיסיקה עיונית, אסטרונומיה; הוא מציע לשם הקלת המצב הזה (אך אין בכך ישום תיקון אמיתי) לעורר את האהבה להבנת הבעיות, מאין אפשרות להבנת דרכי הפתרון.

מופשטת: מי שקרא והבין את הספר עד תומו (אף בלי „המלואים"), למד לא רק עניינים מתימטיים רבים גם מחוץ לתכנית המחלקות ז' וח' (מגמה „ריאלית"). אלא עבר על מפתן תורת־ההגיון וכוונים פילוסופיים שכנים. הויתור על ידיעות קודמות גרר אחריו בחירה מסויימת של החומר ומנע הכנסת כמה נושאים חשובים שאין להשיגם בלי טכניקה מקצועית.

מאידך: דוקא אותם הפרקים שהם שניים במעלה מהבחינה הנ"ל, הפרקים אשר בהם עודף „החשבון" על „המחשבה" (רוב החלק השני, הפרקים י"א וי"ב—פרט ל§5 —, וכן המלואים לשלושת החלקים), חייב הייתי לשים עיני עליהם ברצותי לשרת את המורה בא"י, אשר איננו מבורך בשפע של ספרי־עזר לעבודתו הקשה. בייחוד נוגע זה לפרקים ו', ז', י"א, י"ב. מי שאין לו ענין בצד הטכני־סימבולי של המתימטיקה, ידלג נא על הרבה מן החשבונות שבפרקים הנ"ל, והפסדו יצא בשכרו. לשם נוחיות ציינתי במיוחד ב„מפתח המונחים". תחת הכותרת „פילוסופיה", את המקומות בעלי ערך עקרוני והגיוני.

המבקר ימצא באותו מפתח גם כמה ענינים שאין להם לכאורה קשר אל המתימטיקה, כגון „צלילי", „רגע", „תמותה", „הלוח העברי", „ספירת העומר", „החלפת־תאריך". בכמה מקרים כרוך הדבר בשימושי המתימטיקה לצרכי מדעי־הטבע, באשר לאחרים אצטדק בכך שהספר נכתב בא"י ואינו בא להתעלם מן הקשרים שבין המדעים המדוייקים למסורת האומה ונכסיה התרבותיים.

את הדברים הכלליים אסיים בהערה הפונה אל המתימטיקנים־ממש בין הקוראים: בדבר הדיוק בהוכחות נמצאתי לפני ברירה קשה. לא יכלתי לדייק בכל מקום במלוא מובן־המלה (אשר גם הוא יחסי, ותלוי בתקופה), אולם לא הייתי רשאי לכחד מן הקוראים כאשר לא דייקתי (ואמנם בכמה מקומות העירותי על־כך). מצד אחד אמת כי המוסיף דיוק יוסיף פשטות בנושאים רבים; מצד שני שכיחים גם המקרים בהם יעמיד דיוק מלא את התלמיד בסכנה שמא לא יראה את היער מרוב עצים. צודק HERMITE באמרו (עיין ב *Oeuvres*, כרך ראשון, עמ' XXXVII): תמוה, זוהי ראשית המדע; לכן יש להקדים בהדרכת התלמידים נושאים פשוטים ויפים לדיוק הקיצון אשר את ערכו לא יבינו המתחילים.

אך בראשית ההדפסה (1938) התחילו „חבלי ההריון והלידה". על כך תעיר כבר העובדה כי עצם ההדפסה נמשכה ארבע שנים כמעט. אמנם חלו כמה הפסקות בהדפסה, מטעמים חומריים או טכניים; אחת מהן נמשכה יותר משנה, ולולא עזר אז מתוך הבנה רבה יו"ר הועד הפועל של האוניברסיטה העברית, לא יצא אולי הספר לאור כל עיקר. תקופה ממושכת זו של ההדפסה גררה אחריה אי־התאמות אחדות בין הפרקים הראשונים והבאים: רק אחרי הדפסת כמה גליונות הופיע המלון של ועד הלשון (עיין בעמ' 354); באמצע הסידור הזמין בית־הדפוס סימנים אחדים ($\neq$, $\leq$, וכו') שלא עמדו לרשותנו בגליונות הראשונים; בפרקים האחרונים

יכלתי לצטט ספרים (לועזיים) שהופיעו אחרי הדפסתם הסופית של הפרקים הראשונים; הצורך לחסוך נייר, לרגל המלחמה, הורגש רק החל מאמצע הספר; ואחרון אחרון: המחבר מצא את דרכו בבעיה הקשה של סגנון מתימטי עברי בתוך העבודה עצמה ו„התפתח" במובן זה במשך זמן כה ארוך. לכן אין דעתו נוחה מכמה דברים שהתקין בגליונות הראשונים; הקורא המתעמק ירגיש בהבדלים. בפרט השתמשתי יותר ויותר בכתיב מלא קיצון בשעת הצורך, אף אם קשה על העין לסבול זאת; נוחיות הקורא, אשר בלאו־הכי מוכרח הוא להתאמץ, דוחה כל טענות אחרות.

בחו"ל ישנם בכל מדינה רק בתי־דפוס מעטים שהתמחו בסידור מתימטי, ואוי לו למחבר המנסה את מזלו בבית־דפוס אחר, אף מן הגדולים והמנוסים. בארץ אין „התמחות" במקצוע זה, ומצד שני גדולים יותר הקשיים בעצמם: כוונים שונים בסידור הטכסט והנוסחות באותה השורה, פסיקים נבדלים לעברית ולועזית וכו'. זוהי הפעם הראשונה בה מופיע בעברית ספר מתימטי, לא לצרכיו המצומצמים של בית־הספר ולא במקצוע מיוחד וצר, כי אם ספר כולל[1]. אין לתמוה ולהתאונן אפוא על כי קשייה הטכניים של ההדפסה היו ענקיים, ולפרקים עלולים לגרום יאוש. היו בעוכרינו הן חוסר הסימנים הן קשיי הסידור בעצמו: סימנים בתשעה א"בים, מלבד הסימנים המתימטיים בעצמם, ובארבע ויותר דרגות־גובה באותה השורה! המסדרים למדו, לא פחות ממני, פרק גדוש בהלכות ההדפסה. בשנים תש"א/ב הקדשתי את מיטב כוחי לתיקון ההגהות. אם הושגה צורה חיצונית וסידור־דפוס המניחים את הדעת מכמה בחינות, הרי עלי להודות על כך ל„דפוס הספר", לבעליו שכטר את פינברג ולמסדרים (בראשם לפועל הראשי), אשר לא התיאשו אף בתנאים החמורים ביותר. מצד שני נתונה תודתי לאנשי הוצאת־הספרים על־יד האוניברסיטה, ובראשם לידידי ארי אבן־זהב וא. י. פוזננסקי, אשר הקלו מעלי כמה סידורים טכניים ועזרוני על־סמך נסיונם הרב.

על הקורא לשים לב לכללים הבאים (השוה גם המלון הנ"ל): נוסחות וביטויים מתימטיים נכתבים משמאל ימינה. אך אם הביטויים והסימנים באים בתוך הטכסט העברי, סדרם מימין שמאלה כדרך הכתיבה העברית — ואילו הביטויים בעצמם נכתבים משמאל ימינה[2]. במקרים רבים יוכל הקורא לסמוך על צורת ה„פסיק":

1. אמנם יש לציין את המאמרים המתימטיים שב„כתבי האוניברסיטה ובית־הספרים בירושלם" (מתימטיקה ופיסיקה, כרך א' [יחיד], ירושלם התרפ"ד), וכן את מאמרי חברי, פרופ' מ. פקטה, ד"ר י. לויצקי וד"ר ת. מוצקין, ב„ספר מאגנס" (ירושלם תרח"ץ).

2. דוגמה: „a, b, c מסמנים מספרים"; „(a, b, c) היא שלישיה". מאידך יש להדגיש כי חוסר עקביות ידועה בכתיב עצמו, כמו כתיבת אנליזה ב„ז" ולא ב„ס", תלויה בהחלטות ועד הלשון, שלא ראיתי לי זכות לסטות מהן. רק בכללי הפיסוק העזתי לסטות מהצעות הועד („לשוננו" כרך י') ונקטתי בשיטה, מעשית יותר מעקבית, המתקרבת במקצת לכללים שבאנגלית.

הפסיק העברי (,) מורה על קריאה מימין, הלועזי (,) על קריאה משמאל. היו גם קשיים בקביעת המין; למשל: פונקציה, כגון $ax+b$ או e^x, מופיעה כנושא במין נקבה (כמין „פונקציה"). אלא אם כן יש לפונקציה הנידונה מין זכר בשפה אחרת, כגון $\sin x$.

באשר למפתחות המונחים והשמות שבסוף הספר, ראיתי צורך להאריך ממה שנהוג בחו"ל. היה הכרח לתרגם את כל המונחים לשפה לועזית אחת, ובמקרים רבים לשתים או שלש; בייחוד על הקורא שלא למד בבית־ספר עברי להרבות ולהשתמש במפתח זה. בסופו נמצאת רשימת הסימנים העקריים, לרבות אותיות הא"ב היווני והגוטי. — במפתח שמות־המחברים הוספתי פרטים ביוגרפיים, בהתחשבי בקושי להשיג בא"י ידיעות מסוג זה.

אותו הנימוק המריצני לתת רשימות־ספרים אצל נושאים רבים בתוך הספר, וכן כמה ספרים היסטוריים וכלליים בעמ' 365/6; מטעמים מעשיים ניתן משפט הבכורה לספרות הכתובה אנגלית.

ולבסוף יעמדו על הברכה אלה שעזרוני בקריאת ההגהות: ד"ר ת. מוצקין אשר קרא מערכת שלמה של ההגהה הראשונה וזיכני במספר גדול של הערות חשובות; ד"ר יהודה אבן שמואל שקרא הגהה של ארבעת הגליונות הראשונים; ד"ר יעקב לויצקי אשר קרא את הספר אחרי ההדפסה.

אה"פ

ירושלם, ערב זמן מתן תורתנו התש"ב (21.5.1942).

אחרי שהספר אזל מן השוק (חלק נמכר וחלק נשאר באביב תש"ח בבניני האוניברסיטה בהר הזיתים ללא אפשרות להורידו), הוציאה עתה חברת „מסדה", המוציאה לאור (בחדשים הקרובים) את הכרך השני, גם כרך ראשון זה מחדש — מטעמים מעשיים בשני חצאי־כרכים.

מכיון שהכרך יוצא מחדש דרך צלום, לא היתה אפשרות לשינויים של ממש: תקנתי רק טעויות קטנות, בעיקר שגיאות דפוס, והוספתי ספרות חדשה בהיקף מצומצם. (הכתיב „עם כי" אינו שגיאת דפוס.)

אה"פ

ירושלם, אלול התש"ג

המהדורה השניה (של מחצית ראשונה זו) אזלה מן השוק לפני זמן ניכר. מכיון שגם המהדורה השלישית הזאת יוצאת דרך צילום, מוכרח הייתי אף הפעם להסתפק בשינויים קטנטנים, תחת תיקון יסודי יותר שרציתי בו.

ידידתי ברוריה קופמן (עיין בעמ' V) מכהנת עתה כפרופסור במכון ויצמן. בינתים יצא הכרך השני בשלש חטיבות (תשי"ד—תשי"ח). מן הראשונה, הדנה בתורת־הקבוצות, תופיע בקרוב מהדורה שניה.

אה"פ

ירושלים, אלול התשכ"ה.

תוכן העניינים

(מחצית ראשונה זו של הכרך הראשון נגמרת בעמ' 224,
והמחצית השניה נמשכת מעמ' 225 עד 380.)

הקדמה - - -

ט"ו) המשפט היסודי של האלגברה לאור האלגברה המופשטת. 223 — ט"ז) פתירת המשוואה של חילוק המעגל ל 17 חלקים בעזרת משוואות ריבועיות. 224.

חלק שלישי: פונקציות. מושג הגבול.

החשבון האינפיניטסימלי (גדלים „קטנים לאינסוף") 225—353

פרק תשיעי: פונקציות 225—259

§ 1. דוגמות לשם בירור המושגים - - - - - - - - - - - - - 225
§ 2. הגדרות יסודיות ביחס לפונקציות - - - - - - - - - - - 243
§ 3. מיון הפונקציות לסוגים שונים
א) הפונקציות הרציונליות והאלגבריות - - - - - - - - - 245
ב) פונקציות טרנסצנדנטיות. רב־ערכיותו של הלוגריתמוס - - 250

פרק עשירי: דוגמות לשיטה האינפיניטסימלית 259—282

§ 1. דוגמות של סדרות וטורים אינסופיים - - - - - - - - - 259
§ 2. דוגמות לחשבון הדיפרנציאלי (חשבון־הגזירה) - - - - - - 264
§ 3. דוגמה מן החשבון האינטגרלי (חשבון־הסכימה) - - - - - - 271
§ 4. דוגמות לאפיין של פונקציות - - - - - - - - - - - - 278

פרק אחד־עשר: מושגי הגבול והרציפות. טורים אינסופיים 283—304

§ 1. מושג הגבול לגבי סדרות ולגבי פונקציות - - - - - - - - 283
§ 2. המספר e. הלוגריתמים הטבעיים - - - - - - - - - - - 287
§ 3. טורים אינסופיים של מספרים ושל פונקציות. התכנסות במידה שוה 290
§ 4. פונקציות רציפות. פיתוח פונקציה רצונית לפי מערכת של פונקציות נתונות 298

פרק שנים־עשר: בעיות מן החשבון האינפיניטסימלי 305—345

§ 1. מציאות הנגזרת והסכם. משפטים על ערכי־ביניים - - - - - - 305
§ 2. הגזירה והסכימה בתחום הפונקציות האלמנטריות - - - - - - 312
§ 3. ערכיה הקיצונים של פונקציה. נגזרות בנות סדרים שונים - - - 325
§ 4. משואות דיפרנציאליות - - - - - - - - - - - - - - - 331
§ 5. בעיות שונות הקשורות בחשבון האינפיניטסימלי - - - - - - 339

מלואים לחלק השלישי: א) נוסחת־השיריוב של ניוטון. 346 — ב) הוכחה כי $\sin x$ פונקציה טרנסצנדנטית. 347 — ג) על טורים שאיבריהם מתחלפי־סימן. 347 — ד) חישוב e בעזרת רבית־דרבית לפי „תשלום־מראש". 348 — ה) על פונקציות רציפות ולא־גזירות. 349 — ו) הוכחה כי כל פונקציה רציפה גם סכימה. 350 — ז) משפט־ערך־הביניים של חשבון־הגזירה. 351 — ח) גזירת מכפלה של n פונקציות. 351 — ט) גזירתן של פונקציה „מורכבת" ושל הפונקציה „ההפוכה". 352 — י) הוכחת המשפט ה„יסודי" של החשבון האינפיניטסימלי. 353.

מפתח המונחים והסימנים 354—364

מפתח השמות 365—380

חלק ראשון: מספרים טבעיים.

פרק ראשון: מספרים מונים.

נתחיל במספרים הרגילים (השלמים החיוביים): 1, 2, 3, 4, ... הנקראים מספרים טבעיים[1]. דעת המדע היא גם כיום, כדעה השוררת במדע זה כמה מאות שנים, שהמספרים הטבעיים מהווים את חוט השדרה של כל המתימטיקה; או כדברי וייל[2]: „המתימטיקה תלויה לגמרי, ואפילו לגבי התכניות ההגיוניות שבהן היא מובעת, במהות המספרים הטבעיים". ואולם איך אנו סוברים כקדמונינו שלפני שני דורות, כי המדע המתימטי מבוסס כביכול על המספרים הטבעיים ומתפתח מתוכם, ורק מתוכם, דרך בנינם של המקצועות המתימטיים השונים. אדרבה, לפי הדעה החדישה, נמצא מקומם של המספרים הטבעיים כמעט במרכז המתימטיקה: הקומות התחתונות מיועדות ליסודות המדע ולביסוסו על ידי המקצועות הכלליים (כתורת היחסים, תורת הסדר, תורת הקבוצות, תורת החבורות; ביניהם גם תורת ההגיון), שעל ידם נוצר גם מושג המספר; בקומות העליונות, הנמצאות מעל למקום המספר, נבנים אחר כך המקצועות הפרוטים (כתורת המספרים, האלגברה, תורת הפונקציות למיניהן), וגם רוב המקצועות הגיאומטריים מקומם כאן. יש להעיר אמנם, כי חלק הגון של העולם המתימטי נוטה גם היום לדעה, שאי־אפשר לבסס את המספרים הטבעיים ביסוס אמיתי, ושעלינו לראותם כיצירה הנובעת מטבע השכל האנושי, או אפילו כחומר הנתון לנו בעל כרחנו — כמו שניסח זאת קרוניקר[3] במימרתו המפורסמת: „את המספרים הטבעיים יצר הקדוש ברוך הוא, כל יתר המושגים הם יצירת בני האדם".

על כל פנים, כדאי לפתוח מבוא למתימטיקה במספרים הטבעיים, ביחוד מטעמים דידקטיים; כי תיאור מקצועות המתימטיקה הכלליים ביותר, אף על פי שאינו דורש ידיעות קודמות, הריהו ענין מופשט עד מאד, וגורם אפוא לקשיים בהבנה. יקל עלינו לבנות את מושג המספר על יסוד מופשט לגמרי, אחרי התודענו

---

1. מונחים שיש להם חשיבות גדולה ואשר נשתמש בהם בספר זה לעתים קרובות, מופיעים בדפוס „איטליקס", כמו המונח דלעיל. את המונחים האלה ועוד כמה מונחים אחרים ימצא הקורא, יחד עם תרגומיהם ללועזית, ברשימה מיוחדת בסוף הספר.
2. H. Weyl — ידיעות ביוגרפיות על המתימטיקנים ששמותיהם מופיעים בספר זה ימצא הקורא בסוף הספר.
3. L. Kronecker

אל המספרים עצמם, ואחרי שנפתח את כוחנו לרגל עבודתנו בספר זה, להבין דברים עיוניים. לכן נשוב אל המספרים הטבעיים עוד פעם בסוף (חלק ששי, כרך השלמה).

§ 1. שיטת הפוזיציה.

לתיאור מהותם של המספרים הטבעיים נקדים מלים אחדות על סימונם. כלומר, על סימני המספרים. הקשי שעלינו להתגבר עליו הוא: לפנינו אינסוף מספרים שונים, ואנו צריכים לסמן אותם בעזרת מערכה סופית של סימנים שונים. נוסף על זאת אנו דורשים מאת מערכת הסימנים המבוקשת שתי תכונות: א) שמספר הסימנים לא יגדל ביותר, כדי שלא לגרום אי־נוחיות לזכרון; ב) שתיאורו של מספר נתון, ויהי המספר גדול למדי, בסימני המערכת לא יתפוס מקום רב, כדי שלא לגרום אי־נוחיות לכתיבה. את המטרות האלה יחד השיגו ביחוד מתימטיקני הודו[1] על ידי כך שהמציאו את שיטת הפוזיציה. כלומר, שלאותו סימן מספרי (ספרה) ניתנים מובנים שונים לפי המקום שבו מופיע הסימן (הספרה), והיינו — בהתאם למספר יסודי קבוע, j. ספרה כל שהיא s תסמן אפוא את המספר s עצמו (או $s.j^0$) רק אם s נמצא במקום הראשון (הקצה הימני לסימון המספר כולו); אם יעמוד s במקום השני, יסמן את המספר $s.j$ (או $s.j^1$); במקום השלישי יסמן s את המספר $s.j^2$, וכו'; ובכן במקום ה־n'י — את המספר $s.j^{n-1}$. לפי זה יסמן, למשל, $s_2\ s_1\ s_0$ את המספר $s_0+s_1.j+s_2.j^2$, בתנאי ש־s_0, s_1, s_2 תהיינה „ספרות", ז. א. מספרים הקטנים מ־j (לרבות את הספרה 0, עיין לקמן). יוצא מזה, שהמובנים השונים של אותו הסימן המתחלפים לפי מקומו, שונים זה מזה אם, ורק אם, המספר היסודי j יגדל מ־1; שהרי החזקות השונות של 1 שוות ביניהן.

ואולם לא די לנו בעיקרון הנ"ל. לו היינו משתמשים בתוך שיטת הפוזיציה, הבנויה על המספר היסודי j, רק בספרות 1, 2, 3, ..., $j-1$, כמו שאפשר לכאורה להסיק ממה שאמרנו, כי אז היינו פוגשים במהרה מספרים שאי־אפשר לתארם על פי עקרוננו. אם נשים, למשל, כמו שאנו נוהגים בשיטה ה„דֶקַדית"[2] (העשרונית) שלנו, $j=10$, אז נמצא בשביל המספר שלש עשרה את הסימן 13, ובשביל המספר מאה ושלוש אין בידנו סימון מתאים אחר. לכן אחת ההמצאות החשובות ביותר למחקר המדעי כולו היא המצאת האפס, ז"א הרעיון שאת המקומות, שבהם איננו רוצים לשים ספרה, עלינו לתאר בסימן מספרי מיוחד, היינו בסימן 0. המצאה זו, שבלעדיה אי־אפשר להשתמש בשיטת הפוזיציה, באה מהודו באמצעות

1. ראה למשל B. Datta: Testimony of early Arab writers on the origin of our numerals. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* 24 (1933).
גם אומות אחרות המציאו, בלי קשר עם אנשי הודו, את שיטת הפוזיציה: ביניהן, מלבד בני בבל, גם אומה שגרה באמריקה התיכונית ושמה מָיָה. הם השתמשו גם בספרת האפס לפני כאלפים שנה.

2. דקדית: 10 ברומית decem, וביונית δέκα

המלומדים הערבים אל המערב. עד כמה חשובה וכבירה המצאה זו, נוכל להסיק מן העובדה שגאוני המתימטיקנים היוונים — אפילו ארכימדס[1] ואפולוניוס[2], שלא קמו כמותם אחריהם במשך 1800 שנה — לא הגיעו לידי המצאה זו, אף על פי שארכימדס בספרו על „חשבון החול" היה זקוק לשיטת הפוזיציה. אולם אנחנו, האחרונים, מתוך ההרגל המתמיד מילדותנו, חדלנו להרגיש את גודל ההישג המדעי הזה.

אחרי שהגענו אל המטרה העיקרית, עלינו להתחשב עוד עם שתי הדרישות הנוספות הנ"ל; לשון אחר, עלינו לקבוע את המספר היסודי j. לבעיה זו אין תשובה חד־ערכית, אלא תשובות שונות יש לפי התפקיד שלפנינו: צורך המדע או צורך החיים. מהשקפה עקרונית ומדעית יש להעדיף את המספר המצטיין בהחלט בין כל אינסוף המספרים היסודיים האפשריים, היינו את הקטן שבכולם; כלומר, את המספר 2. עד כמה שיש צורך במתימטיקה המדעית להשתמש בשיטת הפוזיציה, בוחרים באמת בשיטה ה„דואלית"[3] הבנויה על $j=2$. למשל, המספר עשרים ושבע יקבל בשיטה הדואלית את הסימון:

$$11011 = 1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+0\cdot 2^2+1\cdot 2^3+1\cdot 2^4 = 1+2+8+16.$$

דוגמה זו לבדה מראה, כי לתפקידים מעשיים אין המספר היסודי 2 מתאים, משום שהוא גורר אריכות בסימונם של מספרים גדולים. למעשה יתכן, לפיכך, לבחור במספר יסודי גדול יותר; ועם זאת יש לשים לב שיהיו למספר היסודי, ביחס לגדלו, מחלקים רבים עד כמה שאפשר. מתוך השקפה זו באים בחשבון, בראש וראשונה, המספרים 6, 12, 24, 60 וכו', ומאלה זוכים שני הראשונים גם ביתרון, שמספר הספרות השונות (כלומר, הסימנים השונים הדרושים) לא יגדל יותר מדי. על סגולות פוזיציה מעין אלה מבוססת השיטה הסֶכְסָגֶזימלית[4] ($j=60$), שעודנה נוהגת כעת בחלוק היום לשעות, השעות לדקות, והדקות לשניות; וכמו כן בחלוק היקף המעגל ל־360 מעלה[5]. אותו העיקרון, העדפת מספר מרובה־מחלקים ביחס לגדלו, מתגלה גם בחלוק השעה הנהוג בלוח העברי, דהיינו, בחלוק השעה ל־1080 „חלק"; כי המספר $1080=360\cdot 3=2^3\cdot 3^3\cdot 5$ הוא בעל מחלקים מרובים[6]. לעומת זאת, למספר היסודי 10, שעליו מבוססת השיטה העשרונית שלנו, יש רק חסרונות בהשוואה למספרים 6 ו־12, והעדפתו מסתמכת אך על העובדה המקרית

1. Archimedes
2. Apollonios
3. דואלית: 2 ברומית duo, וביונית δύο.
4. סכסגזימלית: ברומית sexaginta = 60, והמספר הסודר sexagesimus.
5. בתקופת המהפכה הצרפתית, שבה השליטו את השיטה העשרונית כמעט בכל תחומי החיים, לא הצליחו לגבי המקרים האמורים, מפני שלמעשה אי־אפשר היה לתקן את כל השעונים וכו' על פי השיטה החדשה.
6. חלוק ה„חלק" ל־76 „רגע" מבוסס על טעמים שונים לגמרי, הקשורים בטיב הלוח שלנו, ביחוד ב„מחזור הקטן", שהוא בן 19 שנה.

שהאדם הוא בעל עשר אצבעות ושהאדם הפרימיטיבי משתמש באצבעותיו כבאמצעי עיקרי לחישוב [1].

עוד בסוף התקופה הרומית השתמשו לשם סימון המספרים ב„ספרות הרומיות", שבהן יסומן למשל המספר 78 כך: LXXVIII. הדוגמה מראה באופן בולט את יתרונות החידוש, אף בשביל מספרים קטנים למדי. – בחסרון אחר לקוי השמוש באותיות האלפא־ביתא לשם ספרות, אף אם נצרף לו את שיטת הפוזיציה, כמו שהתחיל אברהם אבן עזרא לעשות בספרות העברית, בסמכו על ההמצאה ההודית [2]. החסרון הוא: אם נותנים לאותיות האלפא־ביתא את המובן של מספרים קבועים, הרי אי־אפשר להשתמש באותן האותיות לשם סימון מספרים כל שהם, כלומר להנהיג את „החשבון באותיות", שהתחילו להשתמש בו באירופה מראשית המאה ה־13 לספירת הנוצרים; והן בלעדיו לא נוכל לתאר לנו היום שום חשבון מתימטי!

נקח למשל את הנוסחה הידועה $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$! בשביל היוונים היה מובנה רק $4+4+1=(1+2)^2$, ז"א נוסחת חשבון מיוחדת, המחוסרת כל ערך כללי – הואיל ומובנה של α היה 1, ושל β היה 2^2.

§ 2. מושג המספר המונה (הקרדינלי).

קודם כל נבנה אותו מושג־המספר, שתפקידו הוא להגיד לנו את סך האיברים שבתוך מערכת או קבוצה נתונה, כלומר שתפקידו הוא להשיב על השאלה: „כמה איברים נמצאים בתוך המערכת או הקבוצה?". כדי להגיע לבנין הגיוני של המושג הזה, בנין שלא ירחק גם מן הצד הפסיכולוגי של מושג המספר, עלינו לזכור, שהשוואת קבוצות שונות לגבי מספר האיברים הנכללים בהם, אינה זקוקה דוקא למושג המספר, אלא אפשרית היא גם בלעדיו. אומרים כי עוד היום נמצאות אומות פרימיטיביות המסמנות מספרים בשלוש מלים בלבד, והן: „אחד", „שנים", „רבים". מובן שלשם מטרות שמושיות (כגון משא ומתן לחליפין) יש גם לאומות כאלה צורך להשוות קבוצות השונות בהיקפן. האמצעי להשוואה כזו הוא ה ת א מ ה חד־ערכית, אחת הפעולות הפשוטות והדרושות ביותר של המחשבה האנושית

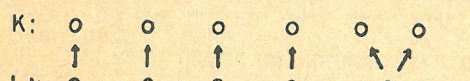
1. בשביל נסיון חדיש להשליט את השיטה המבוססת על המספר היסודי 12 השוה את הספר:
F. E. ANDREWS: New numbers. How acceptance of a duodecimal base would simplify mathematics. New York 1935.

2. ראה למשל את הוצאת „ספר המספר" לרבי אברהם אבן עזרא ע"י משה זילבערבערג (פפר"מ תרנ"ה) ואת המאמר של A. LOEWY:
Über die Zahlbezeichnung in der jüdischen Literatur. *Jeschurun* (Berlin) 17 (1930).
גם הרלב"ג השתמש באותו הסימון.

3. לשאלת סימון המספרים ולשאלות דומות עיין בחוברת קלת־ההבנה:
D. E. SMITH and J. GINSBURG: Numbers and numerals. (Contributions of Mathematics to Civilisation. No. 1.) New York 1937.

בכלל. בפעולה זו אנו מתאימים לכל איבר מקבוצה K איבר מסוים מקבוצה אחרת L כבן זוגו באופן חד־ערכי, ז"א כך שלאותו האיבר מ K לא יהיו שני בני זוג שונים בתוך L. מלבד זאת, ההתאמה היא גם חד־חד־ערכית (או חד־ערכית הדדית), ז"א (נוסף לתנאי הקודם): לשני איברים שונים מ K לא יהיה אותו בן זוג בתוך L. אם קיימת התאמה כזו בין איברי K ואיברי L, אז ברור ששתי הקבוצות הן בעלות אותו מספר האיברים. נניח, למשל, ששני אנשים רוצים להחליף קבוצה K של תפוחי זהב כנגד קבוצה L של בננות, על הבסיס, שתפוח זהב אחד שקול כנגד בננה אחת.

קבוצת התפוחים תהי מצורה זו:



קבוצת הבננות מצורה זו:

אז ההתאמה המסומנת בחצים היא התאמה חד־ערכית של בננות לתפוחים, הואיל ולכל תפוח מתאימה בננה אחת ויחידה, והיא הנמצאת תחתיו – רק שלתפוח האחרון מתאימה שוב אותה הבננה האחרונה שהותאמה גם כן לתפוח הקודם. מתוך כך יוצא שהתאמה חד־ערכית זו אינה חד־חד־ערכית; כי, אם נהפכנה, כלומר אם נחליף את כוון החצים, נמצאת בננה אחת אשר לה מתאימים שני תפוחים ולא אחד בלבד. אולם אם מקבוצת התפוחים נוציא את התפוח האחרון (או תפוח אחר), אז תהיה לנו התאמה חד־חד־ערכית בין שתי הקבוצות, ומציאות התאמה כזו מוכיחה שלשתיהן אותו מספר האיברים.

בדרך זו מתפתח מושג המספר בהדרגה. בדרגה הראשונה התפקיד הוא להשוות קבוצות מסוג איברים אחד, כגון שתי קבוצות של תפוחים, לגבי כַּמותן. במקרה זה עומד תפוח כנגד תפוח ואין אנו יוצרים מושג כללי יותר. בדרגה השניה התפקיד הוא להשוות קבוצות של עצמים מסוגים שונים, ולשם כך עלינו ליצור מושג עליון הכולל את הסוגים השונים של עצמים הבאים בחשבון. צורך זה יקרה, בבואנו להשוות קבוצת תפוחים עם קבוצה אחרת שאיבריה בננות (או בננות ואגוזים, או בננות ואגוזים ותפוחים); במקרה זה ייווצר המושג העליון „פירות", ועל ידי התאמה חד־חד־ערכית אנו משווים שתי קבוצות של פירות. המקרה הכללי ביותר יושג, אם לא איכפת לנו כל עיקר מהו סוג העצמים שאנו באים להתאימם איבר איבר, אלא נשווה קבוצות „איברים" סתם. הצעד הזה המתחיל בדרגה השניה ונגמר בשלישית הוא עצם הולדתו של מושג המספר: על ידי התעלמות מטיב העצמים המנויים הצלחנו לציין את המשותף לשתי קבוצות, שאת איבריהן נוכל להתאים התאמה חד־חד־ערכית. המשותף הוא: מספר האיברים שבקבוצות. נוכל לצעוד – ולמעשה אנו צועדים – עוד צעד רביעי, שלכאורה יחזירֵנו לדרך בה צעדנו. הפעולה החדשה היא: הכנסת קבוצה אוניברסלית – או, ביתר דיוק, אוצר של קבוצות אוניברסליות – כך, שנוכל להשתמש בקבוצה זו, כדי להשוות אתה כל קבוצה נתונה, יהיו איבריה מכל סוג שהוא; ונוכל להשתמש בה גם

כמתווכת בין שתי קבוצות שונות, שנרצה להשוותן זו עם זו. לאיברי הקבוצות האוניברסליות לא תהיינה כל תכונות מקריות, אלא תפקידם היחידי הוא לשמש מתווכים לשם תהליך המניה; אלה הן הקבוצות של n המספרים הטבעיים הראשונים, היינו

$$\{1\},\ \{1, 2\},\ \{1, 2, 3\},\ \{1, 2, 3, 4\},\ \ldots\ldots,\ \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

ואמנם בתקופת התרבות שלנו ילמד התינוק בגיל רך מאד להשתמש בקבוצות האוניברסליות האלה על ידי זה, שהוא „מונה" את העצמים שבקרבתו.

במקרה של התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי קבוצות אנו אומרים: ישנו העתק בין שתי הקבוצות. ברור הדבר ששתי הקבוצות הן שוות־זכויות כלפי יחס זה, כלומר שאין ההעתק (או ההתאמה) מפלה בין אחת הקבוצות ובין חברתה. ועוד מונח אחרון: המתימטיקן קורא לשתי קבוצות שביניהן קיים העתק, בשם קבוצות אקויולנטיות[1].

אם, לעומת זאת, בכל נסיון להתאים התאמה חד־חד־ערכית את איברי L לאיברי K, ישארו באחת הקבוצות האלה איברים (או איבר) שאין להם בני זוג בקבוצה האחרת, הרי ברור – מבלי שנשתמש במספרים – שהקבוצות שונות בהיקפן; ואפילו קבענו ע"ז סדר מסוים לגבי היקפן, מה שחשוב בדוגמתנו הנ"ל של מסחר בחליפין.

מתקבל על הדעת, שמן הרעיון הפשוט הנ"ל נבוא לבנין מושג המספר כדלקמן: לכל קבוצת איברים נתונה K נתאים סמל (סימן) k שנקרא לו בשם „סך האיברים של K" או המספר המונה; ועם זה נקבע שהמספרים המונים של שתי קבוצות יהיו שווים אם, ורק אם, שתי הקבוצות הן אקויולנטיות. ז"א אם ישנה התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן. על פי מה שהוגדר לעיל נוכל גם לומר: המספרים המונים של שתי קבוצות הנם שווים. אם קיים העתק בין הקבוצות. בצורה פחות מדויקת יש לתאר את אשר עשינו תיאור כזה: קבוצת איברים נתונה (האיברים יכולים להיות עצמים ממשיים או מופשטים) יש לה תכונות שונות, כגון טבעם המיוחד של האיברים השונים הכלולים בה, ואולי גם הסדר שבו מופיעים האיברים בתוך הקבוצה. אם נתעלם מכל התכונות האלה, ייהפך מושג הקבוצה הנתונה למושג כללי יותר ומגוון פחות; לכל איבר בודד של הקבוצה יתאים אז רק המושג „יחידה" סתם, וכל הקבוצה תהיה אפוא לאוסף של יחידות. לפיכך יהיה המושג החדש, הנוצר על ידי הפשטה, שווה בשביל שתי קבוצות, אם הן אקויולנטיות; מושג זה נקרא „המספר המונה של הקבוצה".

(אם נתבונן ביצירת־מושג זו מן ההשקפה של שיטת־ההגדרה הכללית בתורת ההגיון, נוכל למחוה בקורת על השיטה שהחזקנו בה: הַתאם למושג נתון סמל שמלכתחילה אין לו מובן, או הגדר „דרך הפשטה"[2]. על בקורת כזו אפשר

1. מן המלה הרומית aequi-valens שמובנה: שוה־ערך.

2. השוה לנושא זה, גם לגבי רשימות ביבליוגרפיות (עיין גם כרך שני, פרק ב'):
W. DUBISLAV: Über die Definition. 3. Aufl., Leipzig 1931.

לענות, שבין כל הקבוצות האקויולנטיות זו לזו נוכל לציין קבוצה מסויימת אחת ולהגדיר אותה כמספר המונה של כל הקבוצות. למשל, כבא־כחם של כל הזוגות (ז"א כמספר המונה 2) נוכל להגדיר את הקבוצה שאיבריה הם השמש והירח; כמספר המונה 5 — קבוצת חלקי תבל. ברור ששיטה זו, מלבד מה שאינה נוחה, תהיה גם מלאכותית ביותר, הואיל והקבוצה שבחרנו בה כבאת־כח לכל חברותיה, אינה עולה מבחינה אוביקטיבית על הקבוצות האקויולנטיות לה. ובכל זאת, אפשר ללכת בדרך הזאת אם נשתמש גם במושג ה„מספר הסודר", או בבנין האינדוקטיבי של המספרים (ראה להלן, פרק שני): את כל מספר מונה n נוכל להגדיר כקבוצת כל המספרים הקודמים לו, ז"א כקבוצה $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. לשם הגשמת הרעיון הזה, וכמו כן לשם מטרות אחרות, נוח ומועיל להכניס גם את המספר 0 (אפס) כמספר מונה, כלומר כמספר המונה של קבוצה חסרת איברים בכלל — אם נרחיב כך את מושג הקבוצה.)

נחזור לפי שעה לבעיה שהצגנוה לעיל, היינו, לנתח מתימטית והגיונית את המעבר מן הקבוצה למספר המונה. אין בדעתי לגשת אל הבעיה הזאת מן ההשקפה הכללית של הפילוסופיה, אבל אדגיש, שבמתימטיקה יוצרים תדיר מושגים בדרך כעין זו. כך למשל, לכל הקוים הישרים (בעלי־כיוון) המקבילים זה לזה, נוהגים להתאים את „כיוונם" המשותף כמושג מופשט חדש; כמו כן לכל הציורים הגיאומטריים המישוריים הדומים זה לזה — את „צורתם" המשותפת; לכל המספרים השלמים הקונגרואַנטיים ביניהם לגבי מודול מסויים (במובן תורת המספרים; עיין להלן, פרק שלישי, § 3) את „מחלקת המספרים" המשותפת; לכל „הסימבולים הממשיים" ה„שווים" ביניהם (פרק ששי, § 3) — אותו „המספר הממשי", וכו'. נברר ונצדיק שיטת־הגדרה זו בצורתה ההגיונית!

גם בתורת ההגיון שבפילוסופיה היונית (ביחוד, בזו של אריסטו)[1] גם בתקופות הפילוסופיות שאחר כך, עד לפני דור אחד, לא שמו החוקרים לב כראוי להבדלים הגדולים שבין הפרַדיקָטים האפשריים ביחסם לסוביקטים (נושאים) שונים, אלא הסתמכו בטעות על הצורה הדקדוקית שבה מופיעים המשפטים ב ש פ ה. מהשקפת הדקדוק בנויים אמנם בצורה דומה שני המשפטים: „אחַי הנם אנשים קשי־עורף" ו„אחי הנם דומים בקלסתר פניהם"; לשניהם יש נושא (אפילו אותו הנושא: אחי) ויש פרדיקט. תורת ההגיון ראתה מלפנים כל פרדיקט כזה כ ת כ ו נ ה. באמת, במשפט הראשון תכונת כל אח היא קשיות עורף; לעומת זאת ברור, שבמשפט השני אין מייחסים לכל אחד מן האחים תכונה ידועה! (עובדה זו מובלטת דרך בדיחה בספור על אשה אשר בבקרה אצל חברתה היולדת קראה: „כמה דומים תאומיך אלה, ביחוד זה השוכב לימינך"). במקרים כאלה מדובר לא על תכונת נושא אחד, אלא על יחסים (רילציות) בין נושאים שונים השקולים זה כנגד זה מהשקפה הגיונית. והלא גם במשפט „אני אוהב את ילדי" ישנו בעצם יחס בין שני סוביקטים

1. Aristoteles

„אני" ו„ילדי", שיחס האהבה קושר אותם בכיוון ידוע. לפיכך עלינו לעסוק, לא לבד בפרדיקטים בעלי „מקום פנוי אחד" המביעים תכונה (כגון „x הוא יפה"), אלא גם בפרדיקטים בעלי „שני מקומות פנויים" (כגון „x דומה לy"), בעלי „שלשה מקומות פנויים" (כגון „y נמצא בין x לz") וכו'. אם רק מקום פנוי אחד לפרדיקט, קוראים לו „תכונה"; ואילו ביתר המקרים קוראים לפרדיקט „יחס של שנים, שלושה, וכו', מקומות פנויים"[1].

בין היחסים השונים מדגישים במתימטיקה ביחוד את היחסים בעלי תכונות מסויימות. יחס יכול להיות קודם כל סִימֶטרי או לא־סימטרי או אַסימטרי[2]. נסמן יחס כל שהוא בסימן R, כך שxRy פירושו: x נמצא ביחס R לy. אז נקרא לR יחס סימטרי, אם תמיד (דהיינו בשביל כל הערכים של x וy) xRy גורר אחריו yRx, ז"א אם R הוא יחס הדדי. למשל, יחס הדמיון ויחס ההקבלה הם יחסים סימטריים. לעומת זאת ייקרא R יחס אסימטרי, אם מנכונותו של xRy יוצא תמיד שyRx אינו נכון. ככה „x הוא אבי y" או „x קטן מy" או „x נמצא משמאל לy" הם יחסים אסימטריים. אפשר גם שיחס לא־סימטרי אינו בכל זאת אסימטרי, או, לפחות, אינו מודגש כך; למשל, „x הוא אחי y" מסמן יחס xRy לא סימטרי ולא אסימטרי, מפני שyRx יוכל להיות נכון או לא נכון אם xRy נכון; כבדוגמות: $x =$ משה, $y =$ אהרן, מצד אחד; $x =$ משה, $y =$ מרים, מצד שני.

יחס R נקרא יחס טרַנסיטיבי אם שני היחסים xRy וyRz יחד גוררים אחריהם תמיד xRz. לפיכך היחסים „x הוא מצאצאיו של y" ו„x קטן מy" הם טרנסיטיביים, אבל היחס „x הוא בנו של y" אינו טרנסיטיבי. גם יחס הדמיון שבגיאומטריה הוא טרנסיטיבי; ואולם לא הדמיון במובן הרגיל: הלא על תינוק רגילים לאמר, שהוא דומה גם לאביו וגם לאמו, בלי היות ההורים דומים זה לזה.

יחס שהוא סימטרי וטרנסיטיבי גם יחד קושר כל אוביקט לעצמו, ז"א: בשביל כל x קיים xRx; כי מxRy יוצא על פי הסימטריה yRx, ומשניהם על פי הטרנסיטיביות: xRx[3].

בין היחסים החשובים ביותר במתימטיקה נציין שני סוגים: היחסים שהם גם סימטריים וגם טרנסיטיביים, והיחסים שהם גם אסימטריים גם טרנסיטיביים. לחשיבותו של הסוג השני, סוג היחסים „הסודרים", נשים לב בסעיף הבא. כאן נעסוק ביחסים שהם סימטריים וטרנסיטיביים גם יחד, הנקראים גם בשם יחסי אקויולנטיות (כאן אנו משתמשים במלה „אקויולנטי" במובן מקיף יותר מזה שהובא לעיל).

1. חשיבותו של מושג היחס יוצא ביחוד מאמריו וספריו של BERTRAND RUSSELL. ראה גם למשל: Studies in the problems of relations. *University of California Publications in Philosophy*, 13 (1930).

2. ה„א" בתחלת המלה „אסימטרי" הוא האלפא ה„privativum" של היונים, השולל בהחלט את התכונה הנדונה.

3. בקריאה הראשונה יוכל הקורא לדלג על מה שיבוא מכאן עד סוף הסעיף הזה.

נניח שנתון לנו יחס־אקויולנטיות R כל שהוא, ותהיה K קבוצת איברים, כך שלכל שנים מאיבריה a וb נכון יהיה היחס aRb. במקרה זה כל איבר a מK יוכל לקבוע „טיפוס", והיינו, את „הטיפוס של a לגבי היחס R".

נתאר זאת בפרוטרוט: לכל תכונה אשר, בהתייחסה לעצם־מה a, תתיחס גם לכל עצם הקשור אל a על ידי היחס R, נקרא „טיפוסית לגבי היחס R". לפיכך כל תכונה שהיא טיפוסית לגבי R ומתייחסת לאיבר כל שהוא מן הקבוצה K, תתייחס לכל איברי K. את הקבוצה K נוכל לראות אפוא כבאת־כחן של כל התכונות הטיפוסיות לגבי היחס R. נבאר זאת בדוגמאות!

אם נסמן בR את יחס־ההקבלה ונגדיר את K כקבוצת כל הקוים הישרים (בעלי־כיוון) שבמרחב המקבילים לקו ישר מסויים נתון, אז הכיוון המשותף לקוים הישרים של K הוא הטיפוס לכל אחד מהם לגבי R (בתנאי שנקשור אל המושג „מקביל" גם כיוון מסויים). כמו כן יוצר יחס־הדמיון במישור, שהוא גם כן יחס של אקויולנטיות, מתוך מצולע נתון את המושג של צורה מסוימת למצולעים; יחס הקונגרואנציה למודול מסויים g שבתורת המספרים (עיין בפרק שלישי) יוצר מתוך מספר שלם נתון את המושג של מחלקת קונגרואנציה mod. g; היחס של „קרבת משפחה מצד הזכרים" יוצר מאיש מסויים את מושג המשפחה, במובן הזכרים הנקראים בשם־משפחה אחד.

לכן, אם נשוב להבין את יחס האקויולנטיות במובן הצר המוגדר בתחילת הסעיף הזה, ייצור יחס האקויולנטיות מתוך קבוצה נתונה כטיפוס את מושג הסך או המספר המונה של הקבוצה. למשל, המספר 5 הוא הטיפוס הנוצר לגבי יחס האקויולנטיות על ידי קבוצת האצבעות של יד אחת.

יתכן להגדיר את הטיפוס גם כמערכת כל העצמים הקשורים לעצם מסויים על ידי יחס R נתון. במקרה שלפנינו זאת אומרת: המספר המונה של קבוצה נתונה הוא מערכת כל הקבוצות האקויולנטיות לקבוצה זו. כך הגדירו פריגה[1] וברטרנד רוסל. היתרון לשיטה זו הוא, שהיא מתאימה לדרך־ההגדרה המסורתית מאריסטו ואילך, היוצאת מ genus proximum ומ differentia specifica. אולם מצד שני יש גם חסרון לשיטה זו, המקרבת את הגדרתנו לסתירות הגיוניות ידועות שעליהן נדבר בחלק הששי (כרך השלמה). בגלל זה התיאש פריגה מתורתו; ורוסל, כדי להציל את הגדרתו, ראה לעצמו צורך לבנות תורה חדשה של הגיון.

§ 3. סדור המספרים לפי גדלם.

למען הגדיר את המספרים המונים: 1, 2, 3, . . . , השתמשנו ביחס האקויולנטיות. כדי לסדר אותם בסדר הרגיל לפי גדלם, עלינו להשתמש ביחס אחר בין הקבוצות; ביחס שאף הוא טרנסיטיבי, אבל לא סימטרי, כי אם

1. G. Frege

דוקא אסימטרי. לשם כך נצא מעובדה זו: אם הקבוצה K מכילה רק חלק של איברי הקבוצה L, רגילים אנו לקרוא את המספר המונה של K „קטן" מן המספר המונה של הקבוצה L (המקיפה יותר). אם נביא בחשבון, שלכל קבוצה האקויולנטית לK יש, לפי ההגדרה בעמוד 6, אותו המספר המונה כמו לK, אז נוכל לוותר על התנאי, שאיברי K בעצמם נמצאים בתוך L, ונגדיר כך:

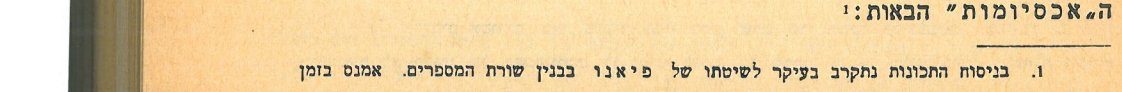
המספר המונה (הסופי) k נקרא קטן מן המספר המונה l (בסימן: $k < l$) אם משתי קבוצות K וL שהמספרים המונים שלהם הם k וl, הקבוצה K אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש של הקבוצה L. — אותו היחס בין k לl מבטאים גם בצורה: l גדול מ k (בסימן: $l > k$).

המלה „ממש" באה כאן להדגיש שאנו מתכוונים למקצת איברי L ולא לכולם; הדגשה זו נחוצה הואיל ואפשר — אף מועיל לכמה תפקידים — לראות את הקבוצה כחלק של עצמה.

היחס „x הוא אקויולנטי לקבוצה־חלקית־ממש של y" הוא יחס טרנסיטיבי ואסימטרי, כמו שיוכל הקורא להסביר לעצמו. שתי תכונות אלה הנן נחוצות ומספיקות כדי ליצור מה שנקרא, הן במדע הן בחיים, יחס „סודר". היחס שהגדרנוהו פה סודר את המספרים המונים לפי גדלם.

כאן עלינו להעיר הערה עקרונית שבפרוטרוט נחזור אליה בחלק הרביעי (כרך שני של הספר). לגבי כל מה שהגדרנו ובנינו בסעיף הקודם, לא הנחנו לא במפורש ולא בסתום, שכל קבוצה תכיל מספר איברים סופי בלבד. ואולם בהגדרה האחרונה השתמשנו למעשה בהנחה זו, שהרי הסתמכנו על תכונת היחס המוגדר להיות א ס י מ ט ר י; ז"א, אם נסמן את היחס שהגדרנוהו בR: לגבי כל שתי קבוצות x וy סותרים שני היחסים xRy וyRx זה את זה. קל לראות שהדבר הזה נובע מתוך התכונה הבאה: אין קבוצה יכולה להיות אקויולנטית לחלק־ממש של עצמה (או לחלק־ממש של קבוצה אקויולנטית)[1]. תכונה זו ידועה לכל תינוק מנסיונו היום־יומי, ובתורת החשבון מוכיחים אותה בהוכחה מדויקת (עיין להלן, במלואים לעמ' 22) — אבל רק עד כמה שהדבר הזה נוגע לקבוצות סופיות. התכונה בטילה במקרה שהקבוצה מכילה מספר איברים אינסופי, כגון קבוצת כל המספרים הטבעיים 1, 2, 3, ... נבאר את זה בצורה פשוטה והסתכלותית!

נקח מתוך קבוצת כל המספרים הטבעיים, אשר נסמנה בN, אותו החלק המכיל רק את המספרים הגדולים מ1; נסמן את החלק הזה בM. נוכל ליצור התאמה הד־חד־ערכית בין איברי M לאיברי N על ידי הכלל: לכל מספר n של N יותאם המספר $n+1$ של M; או חילוף: לכל מספר m של M יתאים המספר $m-1$ של N. בדרך ההסתכלות נוכל להשתמש בצורה



1. הלא היחסים xRy וyRx, לו התקיימו יחד, היו גוררים, מפני הטרנסיטיביות של R, את היחס xRx, המביע: x אקויולנטית לחלק־ממש של x עצמה.

נציג עוד דוגמה מסוג אחר, בעלת צורה ממשית כביכול! נתאר לנו בדמיוננו שק המכיל מספר אינסופי של תפוחי זהב — כך שלכל מספר טבעי יתאים תפוח אחד ויחיד, המסומן במספר המתאים לו כתָוית. נתאר לנו שק שני של תפוחים, כראשון בדיוק. נוציא את התפוחים מן השק הראשון ונסדרם לפי התויות 1, 2, 3, . . . ; אולם מן השק השני נוציא רק את התפוחים המסומנים בתויות זוגיות, כלומר את התפוחים 2, 4, 6, . . . , ונסדרם לפי גודל המספרים. אם נתאים את התפוח 1 מן השק הראשון לתפוח 2 מן השק השני, את התפוח 2 מן השק הראשון לתפוח 4 מן השק השני וכו' — ובדרך כלל, כשיסמן a מספר טבעי כל שהוא, אם נתאים את התפוח a מן השק הראשון לתפוח $2a$ מן השק השני: אז נקבל התאמה חד־חד־ערכית בין כל תפוחי השק הראשון ובין ה„מחצית" כביכול מתפוחי השק השני. התאמה זו מראה לנו שיש העתק בין קבוצת כל המספרים הטבעיים ובין קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים. נמצא שקבוצת כל המספרים הטבעיים אקויולנטית גם לקבוצה חלקית זו, המחוסרת — בזה היא מרחיקה לכת מהדוגמה הראשונה — אינסוף אברים מן הקבוצה השלימה.

בהתאם לדוגמאות אלה, אם נביא בחשבון גם קבוצות אינסופיות, לא תתקיים תכונת האסימטריה ליחס „x אקויולנטית לקבוצה־חלקית־ממש של y". לא נוכל אפוא להסתמך על יחס זה, כדי לסדר לפי גדלם את המספרים המונים של קבוצות אינסופיות. באמת תבואר בשביל קבוצות אלה בחלק הרביעי (כרך שני) שיטה אחרת, המאפשרת את סדורם של „המספרים המונים האינסופיים".

פרק שני. מספרים טבעיים כמספרים סודרים.

§ 1. האכסיומות של פֵּיאָנוֹ.

כשבנינו את מושג המספר בפרק הקודם, התכוונו לענות על השאלה: „כמה איברים ישנם בקבוצה נתונה?" אכן, המספרים הרגילים שלנו ממלאים מלבד זאת עוד תפקיד אחר, דהיינו, לספור אחד אחד איברי קבוצה נתונה: ראשון, שני, שלישי וכן הלאה, ולהביאם ע"י כך לסדר מסוים. נפנה עתה להגדרת המספרים לשם תפקיד זה, ז"א לבנין המספרים הסודרים! יתברר שטיבם שונה לגמרי מטיב המספרים המונים, אף על פי שבחיי יום־יום אין אנו מרגישים בכך. את הקשר הקיים בין המספרים המונים למספרים הסודרים ננתח בסוף הפרק.

נרשום לפנינו את התכונות האפיניות של שורת כל המספרים הסודרים! לשם כך נצא מדברים הידועים לנו היטב, ונקבע את התכונות או ה„אכסיומות" הבאות:[1]

1. בניסוח התכונות נתקרב בעיקר לשיטתו של פיאנו בבנין שורת המספרים. אמנם בזמן האחרון הצליחו לתקן תקונים יסודיים מהשקפה הגיונית בשיטה זו, ברם חקירות חדישות אלה קשות הן ומסובכות למדי. ובכן נצטט רק את הספרים הבאים: G. Peano: Formulaire de Mathématiques

I. לכל מספר סודר a ישנו מספר סודר אחד ויחיד העוקב לו, שנסמנהו ב $|a$.

II. ישנו לפחות מספר סודר אחד שאינו עוקב לשום מספר סודר, ז"א שאין לו הצורה $|a$ לגבי שום מספר סודר a. נסמן מספר סודר כזה ב 1 (יתברר שלא יוכל להיות יותר ממספר אחד כזה).

III. השויון $x| = y|$ גורר אחריו את השויון $x = y$, ז"א: מספרים סודרים שוי־העוקבים שוים הם בעצמם (לשון אחר: למספרים סודרים שונים יש עוקבים שונים).

IV. אין מספרים סודרים מלבד הנדרשים על ידי התכונות הקודמות. לשון אחר: שורת המספרים הסודרים היא השורה הצרה ביותר המקיימת את התכונות I—III.

נצרף לתכונה האחרונה הערה זו: שורת המספרים הסודרים צריכה להכיל על כל פנים, לפי II, את המספר 1, ולפי I לכל מספר a גם את עוקבו $|a$; לעומת זאת אין התכונה III דורשת כלום לגבי מציאותם של מספרים סודרים. לכן נוכל לנסח את IV גם בצורה זו: כל שורה המכילה את המספר 1 (כלומר: מספר שאין „קודם" לו) והמכילה מלבד כל מספר הנמצא בה גם את עוקבו בהתאם ל III, מכילה את כל המספרים הסודרים.

התכונה II אומרת ששורת המספרים הסודרים מתחילה במספר מסויים שהוא „הראשון" ביניהם[1]. מן התכונה III (בצרוף II) יוצא שעלינו להשתמש בסימנים שהם מתחדשים והולכים, בעברנו מ 1 לעוקבו $|1$, מ $|1$ ל $|(|1)$ וכו'; אחרת היינו מקבלים מספרים המסומנים באותו סימן ושקודמיהם שונים, בניגוד ל III, או היינו מקבלים פעם 1 כעוקב למספר מסוים, בניגוד ל II.

את התנאי הזה לסימון מתחדש והולך נוכל לקיים על ידי הסימון הרגיל: $2 = |1$; $3 = |2$; $4 = |3$ וכו'.

§ 2. תכונותיה של שורת המספרים הסודרים אינן תלויות זו בזו.

מובנה וערכה של כל אחת מארבע התכונות הנ"ל יתבלטו ביתר בהירות, אם נשתמש לגבי מערכת התכונות האלה בשיטה הגיונית, שהגיעה

(הופיע בפעם הראשונה בטורינו 1895, ומאז כמה פעמים). את ההתפתחות האחרונה של הנושא אפשר למצוא בספרים:
E. LANDAU: Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930. הוצאה אנגלית, 1951.
D. HILBERT u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, I. Band. Berlin 1934.
R. CARNAP: Logical Syntax of Language. London 1936.

1. הדברים אמורים כאן בקצור ובלי דיוק שלם, כדי להקל על ההבנה; כמו כן גם להלן בדוגמאות לאי־תלותן של האכסיומות. לו רצינו לדייק כל צרכנו, כי אז עלינו לומר: התחלת השורה במספר מסויים (הראשון) היא תוצאה מ II ו IV יחד; כי הלוא את II לחוד אפשר למלא גם ע"י איבר שאיננו הראשון בין כולם, כמו שיתברר מן הדוגמה ד) בסוף הסעיף הבא.

לחשיבות גדולה במתימטיקה החל מסוף המאה שעברה[1]. שיטה זו מתכוונת להראות שבתוך מערכת נתונה של אכסיומות או תכונות אין אחת מהן תלויה הגיונית בכל שאר האכסיומות יחד, ולפיכך אי־אפשר להסיק שום אכסיומה כמסקנה הגיונית משאר האכסיומות. יוצא מכאן שאי־אפשר לוותר אף על אחת מן האכסיומות הנתונות, ועל ידי כך מתבלטים יותר מובנה וכיוונה של כל אכסיומה בודדת. כדי להוכיח אי־תלות כזו, אנו בונים על־יד התורה שלבנינה מתכוונת מערכת האכסיומות הנתונה — עוד „תורות" אחרות; והיינו לגבי כל אחת מן האכסיומות תורה מיוחדת לחוד, שבה אותה האכסיומה אינה קיימת אבל מתקיימות כל שאר האכסיומות. מציאותה של כל תורה מיוחדת כזו — שאסור לה כמובן להכיל סתירה בפנימה — מעידה על כך שהאכסיומה הנדונה אינה מסקנה משאר האכסיומות: אילו היתה מסקנה מהן, כי אז גם בתורה המיוחדת שבנינו היו שאר האכסיומות גוררות אחריהן את האכסיומה הנדונה! אמנם מושגי התורה המקורית תכנם ומובנם משתנה בתורות המיוחדות, עקב השינוי המתהווה עם הפיכת אחת האכסיומות.

במקרה הנדון עלינו להראות, כי מארבע התכונות הקובעות את תבניתה של שורת המספרים הסודרים, כל אחת איננה תלויה בשלוש חברותיה[2]. על סמך הוכחה זו יצא, שלא נוכל לוותר אף על אחת מהתכונות הנ"ל, אם נרצה לקבוע באופן שלם וחד־ערכי את שורת המספרים הסודרים. אמנם, בדברנו כאן על קביעה חד־ערכית, הרינו מתכוונים רק לתבנית הסידורית של השורה, ולא לענינים אחרים, כגון סימון המספרים ו„מובנם": את המספרים נוכל לסמן גם באופן שונה מן הספרות הרגילות בלי נגוע בתבנית הסידורית של שורת המספרים, כלומר בתכונות המסומנות בסעיף הקודם; ואילו על מובן המספרים הסודרים, כגון על כושרם למנות גם איברי קבוצה כמספרים מונים, הרי על זה לא היה מדובר בכלל בתכונות הנ"ל. (השוה לזה מה שנאמר בעמ' 16.)

א) נכניס, כתורה המיוחדת לגבי I, מערכת M_I של „מספרים" המכילה רק מספר אחד; את המספר הזה נסמן ב 1. המושג „עוקב" והסימון $|a$ לא יהיה להם מובן בתוך המערכת מכיון שוותרנו על התכונה I. אז תתמלא התכונה II באופן טריביאלי, כי המספר הסודר היחיד הנמצא במערכת M_I אינו עוקבו של שום מספר. לעומת זאת תתמלא התכונה III „ריקם", ז"א: התנאי שלה לא יתקיים לעולם, ולכן אין התכונה דורשת כלום. אם נדרוש שמערכת M_I תמלא את התכונות II ו III אי־אפשר לה להיות צרה יותר ממה שהיא, ז"א: היא לא

1. הצעד ההיסטורי לתקון שיטה זו נעשה ב־1899 בספרו של D. HILBERT: Grundlagen der Geometrie (מהדורה שביעית, לייפציג וברלין 1930; הוצאה אנגלית לונדון 1902).

2. מובן כי בהוכחות אלה עלינו להבין את התכונה IV כך: שורת המספרים היא השורה הצרה ביותר המקיימת את האכסיומות הקודמות. פרט לאותה האכסיומה שעליה ועתרנו בהוכחה הנדונה.

תוכל להכיל פחות מאיבר אחד (להיות ריקה); כי לפי התכונה II צריכה M_{I} להכיל איבר אחד לפחות. יוצא שגם התכונה IV מתמלאת, אחרי שהתעלמנו מן התכונה I. לעומת זאת התכונה I אינה מתמלאת: למספר 1 אין כל עוקב, ולא עוד אלא שאין כאן מובן כלל למלה „עוקב". המערכת M_{I} מוכיחה אפוא שאי־אפשר להסיק את התכונה I מן התכונות II, III, IV יחד.

ב) אם נהיה דייקנים נוכל להסיק את אי־תלותה של התכונה II בשאר התכונות מן המערכת הרי ק ה, ז"א מהצגת „מערכת מספרים" שאינה מכילה כל מספר. במקרה זה מתמלאות התכונות I, III, IV „ריקם" (עיין לעיל); כי אם אין מספר סודר במציאות, הרי אין התכונות I ו־III דורשות כלום, הואיל והתנאי (שישנו מספר סודר a; או ש־$y = x$) אינו יכול להתקיים. לכן מתמלאת גם התכונה IV; כי מתוך שהתכונות I ו־III אינן דורשות כלום, ובפרט אינן דורשות מציאותם של מספרים סודרים, הרי דוקא המערכת הריקה היא הצרה מכל המערכות האפשריות. לעומת זאת התכונה II אינה מתמלאת במערכת הריקה, ולכן אינה תלויה בשאר התכונות. עובדה זו יסודה בכך, שהתכונה II היא היחידה שיש לה אופי של „דרישת מציאות", ז"א היחידה הדורשת בהחלט ובלי שום תנאי את מציאותו של מספר סודר. כל שאר התכונות מכילות רק דרישות תלויות בתנאים, ובדוגמה שלפנינו לא יוכלו התנאים להתמלא.

אף כי באופן פורמלי כבר הוכחנו שאין II תלויה בשאר התכונות, בכל זאת לא תוכל הוכחה זו לסַפק אותנו, כיון שהתכונה II דורשת יותר ממציאותו של מספר סודר סתם. לכן נביא כדוגמה מערכת M_{II} המכילה מספרים, אלא ש כ ל מספר המוכל בה הוא עוקב למספר אחר, בסתירה לתכונה II. כ M_{II} נוכל לקחת את מערכת שני המספרים 1 ו־2 שעליהם תחולנה ההגדרות:

$$1' = 2, \qquad 2' = 1.$$

התכונות I ו־III וגם IV מתמלאות כאן, כמו שיש לראות מיד. – במקום מערכת M_{II} זו יכולים היינו להשתמש אפילו במערכת המכילה רק מספר אחד: 1, ועמו ההגדרה $1' = 1$; כי בתכונה I לא דרשנו שעוקבו של a יהיה דוקא שונה מ־a, אלא מסקנה זו יוצאת רק (השוה גם לקמן בסוף ג)) משתי התכונות II ו־III יחד[1].

ממה שנאמר כאן יוצא: אם נפרק את התכונה II לשתי תכונות חלקיות, שאחת מהן דורשת מציאותו של מספר בכלל (לפחות מספר אחד), והשניה – מציאותו של מספר שאין „קודם" לו, אז כל אחת מהתכונות החלקיות האלה אינה

1. במובן ידוע היתה יכולה לשמש לנו כדוגמה גם מערכת כל המספרים השלמים (החיוביים והשליליים, לרבות את 0), אם נסדר אותם בסדר הרגיל לפי הגודל היחסי של המספרים, ז"א בצורה (משמאל ימינה) $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. במערכת זו כל מספר בלי יוצא מן הכלל הוא עוקבו של מספר אחר, ובפרט 1 הוא עוקבו של 0; לכן אין התכונה II מתמלאת. התכונות I ו־III מתמלאות; ואולם הדבר צריך עיון לגבי התכונה IV (גם לגבי מערכת זו גם לגבי שתי הדוגמאות האחרונות שניתנו לעיל בשביל M_{II}); לא נאריך כאן, כי הדוגמה הראשונה כבר הספיקה להוכיח את אי־תלותה של התכונה II.

תלויה בכל שאר התכונות (חוץ ממה שהתכונה החלקית השניה מקיפה, כמובן, את הראשונה). אפשר אפוא להגדיל את מספר התכונות שלנו מארבע לחמש; ברם במקרה זה, אם נרצה שהמערכת בעלת חמש התכונות תהיה בלתי תלויה, עלינו לנסח את החלק השני של התכונה II בצורה זו: אם ישנו במציאות מספר סודר, אז ישנו בפרט מספר שאינו עוקב לשום מספר.

ג) נקבע כ M_{III} את המערכת בת שלושת המספרים השונים 1, 2, 3, יחד עם ההגדרות: $2' = 1$, $3' = 2$, $1' = 3$. לכל מספר ישנו על פי זה עוקב מסוים, ו־1 אינו עוקב לשום מספר. התכונות I ו־II מתמלאות אפוא, ואותו הדבר קיים לגבי IV; כי לפי הגדרתנו הנ"ל צריכים להמצא במערכת, מלבד 1 (לפי II), גם 2 כעוקב ל־1 ו־3 כעוקב ל־2, ומספרים אחרים אין בתוך M_{III}. אולם קיים $1' = 3$ במערכת זו, אף על פי ש־1 שונה מ־3. נמצא שהתכונה III אינה מתמלאת ב־M_{III}, ז"א אינה מסקנה משאר התכונות.

אילו הגדרנו $2' = 2$ היינו מקבלים את מערכת שני המספרים 1 ו־2, וגם היא היתה מובילה אותנו לאותה התוצאה: אי־תלותה של III.

ד) מה שנוגע לתכונה IV, הרי נוכל להראות את הצורך בה רק על ידי מערכת־דוגמה המכילה איברים „מיותרים", כלומר איברים שאין מציאותם נדרשת מטעם התכונות I–III. כך אפשר לקחת כמערכת M_{IV} את שורת כל המספרים השלמים (לרבות את השליליים ו־0); אבל לא בסדר הטבעי, כמו שהבאנוה בעמ' 14 בהערה (אז לא נתמלאה התכונה II), כי אם בסדר הבא, שבו 0 והמספרים השליליים מופיעים, למשל, אחרי (או לפני) כל המספרים הטבעיים:

$$1, 2, 3, 4, \ldots 0, -1, -2, -3, \ldots$$

ב M_{IV} יש עוקב מסוים לכל מספר; 1 אינו עוקב לשום מספר; וגם התכונה III מתמלאת. רק התכונה IV אינה מתמלאת, הואיל וגם אותו החלק של M_{IV} שיכולנו לקבלו עם מחיקתם של 0 ושל כל המספרים השליליים, היה ממלא את התכונות I עד III. לכן אין M_{IV} מהווה את המערכת הצרה ביותר הממלאת את שאר התכונות. עשירות מופרזת זו של M_{IV} בולטת גם בכך, שהיא מכילה לא מספר יחיד בלבד (1) שאינו עוקב לשום מספר; הלוא תכונה זו מציינת גם את המספר 0: אמנם מספרים הרבה, ואפילו אינסוף מספרים, נמצאים לפני 0, אבל אין מספר קודם לו („קודם" כמושג מקביל ל„עוקב"). אין זה סותר את התכונה II, הואיל ושם דרשנו רק שקיים ל פ ח ו ת מספר אחד שאינו עוקב לשום מספר, ומזה אמנם אפשר להסיק בעזרת כל התכונות פולן, שקיים ר ק מספר אחד כזה. (אכן, גם אילו הרחבנו – דבר המיותר בהחלט – את התכונה II על ידי הדרישה, שקיים מספר אחד ויחיד מן הסוג הנ"ל, גם אז לא היינו יכולים לוותר על התכונה IV. דבר זה יוצא מן המערכת:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, -6, -4, -2, 0, -1, -3, -5, \ldots$$

שבה ישנו לכל מספר עוקב מסויים, ולכל מספר השונה מ־1 גם קודם מסוים.)

נסיים בהערה כללית ועקרונית את הגדרת המספרים הסודרים על ידי

ארבע התכונות הנ"ל! אולי יטען מי על שיטתנו: נאמר כאן, כי ארבע התכונות קובעות באופן חד־ערכי את שורת המספרים; והרי שורת המספרים האי־זוגיים 1, 3, 5, 7, . . ., אם נסדרנה לפי גודל המספרים, ממלאת גם היא את כל התכונות! התשובה פשוטה למדי. לפי השקפתנו בפרק זה, הרואה את המספרים אך כסימנים חסרי תוכן, אין באמת כל הבדל בין שורה זו של המספרים האי־זוגיים ובין שורת המספרים הטבעיים 1, 2, 3, ... כולם. באיזו מן השורות האלה (או מאפשרויות אחרות) נשתמש, זה תלוי רק בכך איך נרצה ל ס מ ן את העוקב ל 1, את העוקב לעוקב זה, וכו'. אם נסמן את 1 ב 3, את 3 ב 5 וכן הלאה — דבר שאינו נמנע מאתנו על ידי שום איסור — אז נקבל את שורת „המספרים האי־זוגיים". מה שנקבע ע"י התכונות הנ"ל הוא: לא השורה ביחס לצורותיהם המיוחדות של הסימנים, אלא התבנית הסידורית של השורה עצמה. תבנית זו נקבעת לגמרי על ידי־כך, שהיא פותחת באיבר ראשון, שלכל אבר עוקב איבר אחר, שלא נחזור לעולם לאיבר שכבר הופיע, ושאין איברים מיותרים. לפי הערה זו נוכל לתת לַדוגמה M_{IV} (ראה לעיל, עמ' 15) צורה שתשתמש בסימני המספרים הטבעיים בלבד, והיינו:

$$1, 3, 5, 7, \ldots 2, 4, 6, 8, \ldots ;$$

גם המערכת הזאת אינה מספקת את דרישותינו משום שאינה ממלאת את התכונה IV.

§ 3. אינדוקציה שלימה. חיבור וכפל בין המספרים הסודרים.

אם נעלים את עינינו מבעיות ההגיון העדינות, שעליהן מדובר בספרים המצוטטים למעלה, נוכל לומר: מארבע התכונות הנ"ל של שורת המספרים הסודרים אפשר, בעזרת הגדרות מתאימות, להסיק את עובדות־היסוד של תורת החשבון כמסקנות הגיוניות, בלי לסמוך על הנחות נוספות. לשון אחר: את התכונות הנ"ל נוכל לראות כאכסיומות האריתמטיקה (למספרים הטבעיים), שמהן נובע כל המדע הזה. כדי להוציא את המסקנות האלה יש צורך, כאשר לבנין כל מדע דדוקטיבי, להשתמש בשיטה מתאימה של תורת הגיון, ומלבד זה להגדיר את המושגים „שווה" (=) ו„שונה" ($\neq$) כל צרכם; ענין שהוא מופשט למדי ושעוד נחזור אליו בהזדמנות אחרת (פרק חמישי).

ביאור הדרך הנ"ל לבנין אריתמטיקה בכל פרטיה ודקדוקיה דורש ספר בפני עצמו. לכן נסתפק כאן בהצגת דוגמאות אחדות המבארות בצורה אופינית, איך משתמשים בשיטת האינדוקציה השלימה, ומהו תפקידה הכפול: לשם הגדרות ולשם הוכחות. בשיטה זו תלויה כל האריתמטיקה, ולפי השקפת חוקר חשוב כ פ ו א נ ק ר ה[2] כל המתימטיקה כולה.

---

1. השתמשנו בפרק זה במלה הרגילה „שורה", כדי להקל על הקורא; בפרקים הבאים נשים במקומה את המונח „סדרה", שבו משתמשים היום במתימטיקה הגבוהה.

2. ראה למשל: H. POINCARÉ: Science et Hypothèse. Paris (1903) הספר הופיע מאז במהדורות שונות (הוצאה אנגלית, 1905; הוצאה גרמנית, 1904; הוצאה עברית, ע"י יחיאל גרינפלד, ת"א תרצ"ד). המלים אינדוקציה ודדוקציה הן רומיות: deductio, inductio.

קודם כל נגדיר את ה ח י ב ו ר של שני מספרים על ידי ההגדרות:

$$(1)\quad a+1 = a', \qquad (2)\quad a+b' = (a+b)'.$$

המשואה השניה מביעה את הרעיון, שברצותנו לבנות את הסכום של המספר a ושל עוקב המספר b, עלינו לחשב ראשונה את הסכום של a ו b וליצור אחר כך את עוקב הסכום הזה.

לא יקשה לראות, כיצד בונים לפי זה לגבי כל מספר שהוא a את הסכום $a+b$, בסמכנו על מקומו של המספר המסוים b בשורת המספרים; ז"א על האפשרות לבנות את המספר b מן המספר 1 ע"י יצירת עוקבים למספרים. כדי לבאר זאת ולהראות כיצד מקבלים בכל מקרה את הסכום $a+b$, נשתמש בדוגמה מסוימת כגון $3+5$, המופשטת פחות ומאלפת אולי יותר מן המקרה הכללי. נשתמש כאן, כמו תמיד, בסימון הרגיל למספרים הטבעיים, היינו: בקיצור 2 במקום $1'$, 3 במקום $2'$, 4 במקום $3'$ וכן הלאה.

$$5+3 = 5+2' = (5+2)' = (5+1)' = [(5+1)'] = (5')' = (6')' = 7' = 8.$$

לפי (1) לפי (2) לפי (2)

אמנם כדי להוכיח שהגדרותינו (1) ו (2) מספיקות לא לבד בכל מקרה פרוט מסוים כי אם נתונות לשימוש גם במקרה הכללי $a+b$, יש צורך — כמו שהוברר רק בשנות העשרים — להכניס רעיונות נוספים שלא נתעכב עליהם כאן[1].

על מה מבוססת האפשרות להגדיר לכל המקרים את הסכום $a+b$ על ידי שתי המשואות המגדירות (1) ו (2)? והרי הסכום הזה, שבו a ו b יכולים לקבל כל ערך שהוא בין המספרים הטבעיים, כולל בתוכו אינסוף מקרים שונים, ולכן יתקבל על הדעת כי זקוקים אנו גם לאינסוף הגדרות? התשובה מסתמכת בעיקר על התכונה IV של שורת המספרים. שהרי על פי תכונה זו נוכל לצעוד „דרך עליה" (באופן „אינדוקטיבי")[2] מן המספר 1 עד כל מספר b שהוא, או — אם נשקיף על הענין מן הכוון ההפוך — „דרך ירידה" (באופן „ריקורסיבי")[2] מכל מספר b שהוא עד המספר 1. עד כמה אנו זקוקים לתכונה IV לשם כך, יוצא מן המערכת M_{IV} (לעיל עמוד 15) שאינה ממלאת את התכונה IV. שם אי־אפשר להשיג, למשל, את המספר 1 — מן המספר 1 דרך עליה, או את 1 מ1 — דרך ירידה, במספר סופי של צעדים. על סמך זה קוראים לפעמים לתכונה IV בשם ע ק ר ו ן ה א י נ ד ו ק צ י ה ה ש ל י מ ה.

בעיקרון זה משתמשים במתימטיקה גם לשם הגדרות (כמו בדוגמה שהצגנו לעיל), גם לשם הוכחות במובן זה: כדי להוכיח באופן כללי משפט מסוים $\mathfrak{M}$ המתייחס למספרים טבעיים, די לנו אם נראה: ראשית כי $\mathfrak{M}$ נכון בשביל המספר 1, ושנית כי נכונותו של $\mathfrak{M}$ בשביל מספר n כל שהוא גוררת אחריה את נכונותו

---

1. ראה את ההערה בעמוד 12; עיין ביחוד בספרו הנ"ל של LANDAU או במאמרו של T. TAKAGI: *Proceedings of the Imperial Academy of Tokyo* 7 (1931).

2. מן המלים הרומיות inducere (הכנס), recurrere (רוץ אחור).

בשביל המספר העוקב $n|$. כי הרי על פי שתי ההנחות האלה כוללת קבוצת המספרים, שבשבילם המשפט נכון, את המספרים הטבעיים כולם. בעזרת שיטה זו אפשר להוכיח, למשל, את שני המשפטים הבאים, שעליהם מבוססת בעיקר הגדרת החיבור של המספרים הטבעיים:

העוקב למספר n שונה מ n.

לגבי כל מספר n השונה מ 1, ישנו מספר אחד ויחיד שעוקבו הוא n (הוא המספר הקודם ל n).

כאן נשתמש בשיטה האינדוקטיבית לא לגבי המשפטים האלה, כי אם להוכחת המשפטים המכונים „החוקים הפורמליים של החיבור", היינו

חוק הצרוף (החוק האסוציאטיבי[1]): $(a+b)+c = a+(b+c)$ (3)

חוק החילוף (החוק הקומוטטיבי[2]): $a + b = b + a$ (4)

נוכיח קודם כל, כי בשביל כל שלישיה (a, b, c) של מספרים טבעיים קיים החוק האסוציאטיבי; ז"א, שלא איכפת לנו לגבי התוצאה, איך נצרף שנים (סמוכים) מן המחוברים על מנת לחבר את סכומם לשלישי. נניח אפוא ש a ו b הם מספרים קבועים כל שהם. אז, ראשית, הנוסחה (3) נכונה בשביל הערך $c = 1$; כי על פי ההגדרות (1) ו (2) של החיבור (עיין בעמוד 17 למעלה) קיים:

$$(a + b) + 1 = (a + b)| = a + b| = a + (b + 1).$$

שנית, נניח שהנוסחה (3) נכונה בשביל ערך מסוים $c = n$, ז"א שקיים:

$$(a + b) + n = a + (b + n).$$

אז יוצא שוב על פי הגדרת החיבור:

$$(a+b)+n| = [a+(b+n)]| = a + [(b+n)|] = a + (b+n|)$$

לפי ההנחה

ז"א, על פי הנחתנו נכונה הנוסחה (3) גם בשביל הערך $c = n|$. לכן, על פי העיקרון של האינדוקציה השלימה, קיימת הנוסחה (3) באופן כללי, היינו בשביל כל ערכי a, b, c.

מכיון שלפי זה מקום הסוגריים בחבור שלשת המחוברים a, b, c (בסדר זה!) אינו משפיע על ערך הסכום, כמובע ב (3), הרי אין צורך בכלל לשים סוגריים, אלא נוכל לכתוב בפשטות: $a + b + c$. ואולם אין זה אלא קצור לערכם המשותף של הסכומים $(a + b) + c$ ו $a + (b + c)$; כי הלא בהגדרת החבור (ע"י (1) ו (2)) מבואר רק, מהו הסכום של שני מחוברים.

מסובכת קצת יותר תהיה הוכחת החוק הקומוטטיבי (4), והקורא שהתעייף כבר בהוכחה הקודמת יוכל לדלג על ההוכחה הבאה, בלי שיפסיד מתוך כך לגבי כל מה שיבוא אחרי כן.

---

1. מן המלה הרומית associare = שתף, צרף.
2. מן המלה הרומית commutare = החלף.

נחלק את הוכחת הנוסחה (4) לשני חלקים: בחלק הראשון נוכיח כי (4) נכון במקרה הפרוט $b = 1$, ז"א שקיים:

$$a+1 = 1+a.$$

על פי כל פנים נכונה נוסחה זו בשביל $a = 1$.

נניח שהיא קיימת בשביל ערך מסוים $a = n$, ז"א שקיים: $n+1 = 1+n$. מזה יוצא:

$$n|+1 = (n+1)+1 = 1+(n+1) = 1+(1+n) = 1+n|;$$

לפי הנוסחה (3) לפי ההנחה

ז"א: $a + 1 = 1 + a$ קיים בשביל כל מספר a.

מזוינים בתוצאה זו ניכנס לתוך חלקה השני של ההוכחה: נוכל להביע את התוצאה שלפנינו כך: הנוסחה $a+b = b+a$ קיימת בשביל $b = 1$. עלינו אפוא עוד להוכיח שנכונותה בשביל $b = n$ גוררת אחריה גם את נכונותה בשביל $b = n|$. לכן נניח, שבשביל ערך מסוים $a = n$ קיים $a+n = n+a$. מזה יוצא, על פי הגדרת החיבור ועל פי הנוסחאות שכבר הוכחו:

$$a+n| = a+(n+1) = (a+n)+1 = (n+a)+1 = n+(a+1) = n+(1+a) =$$
$$= (n+1)+a = n|+a.$$

גם החוק הקומוטטיבי קיים איפוא בשביל כל ערכי a ו b.

בעזרת אותה השיטה של האינדוקציה השלימה אפשר להוכיח גם את המשפט הבא:

שני החוקים הפורמליים הנ"ל קיימים לא לבד לגבי שנים או שלושה מחוברים, כי אם לגבי כל מספר (סופי) של מחוברים. לשם חיבור מספר כל שהוא של מספרים טבעיים אנו רשאים אפוא, בלי שנות את התוצאה, להכניס סוגריים כפי ראות עינינו, ולפיכך גם להשמיטם; וכמו כן לשנות כפי רצוננו את סדר המחוברים. במלואים (אחרי סוף הפרק השלישי) ימצא הקורא את הוכחת המשפט הזה[1].

אחרי שטפלנו בפעולת החיבור באופן כל כך מפורט, נוכל להסתפק לגבי פעולת הכפל ברמזים, כי רוב הדברים כאן אנלוגיים לעניני החיבור. הנוסחאות המגדירות את הכפל הן:

$$a \cdot 1 = a, \qquad a \cdot b| = a \cdot b + a.$$

על ידי שתי הגדרות אלו מוגדר הכפל, בעזרת האינדוקציה השלימה, בשביל כל אינסוף המקרים האפשריים. בצורה דומה להוכחות שהובאו לעיל יוכחו החוק האסוציאטיבי והחוק הקומוטטיבי של הכפל, היינו

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

---

1. בתוך הספר הזה ניתנות במלואים, המסודרים אחרי כל אחד משלושת החלקים, הוספות והוכחות מסוימות, שיקשה אולי להבינן על הקורא שלא עסק במתימטיקה עד הנה. אין צורך לקרוא את החומר שבמלואים; ז"א אפשר להבין גם בלעדיו את כל מה שנמצא בטכסט העיקרי של הספר כולו. בכל זאת יש ליעץ לקוראים שהתרגלו להבנת הוכחות מתימטיות, שינסו לעכל גם את החומר שבמלואים.

מלבד זאת צריכים להוכיח עוד חוק נוסף: חוק המקשר ביניהן את פעולות החיבור והכפל, חוק הפילוג או החוק הדיסטריבוטיבי[1]. נוכל להביעו בצורה

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

החוק הזה, כמו גם הגדרת הכפל בעצמה, מביע שפעולת הכפל נוצרת ע"י השָׁנות פעולת החבור. קל להוכיח גם את החוק הזה ע"י אינדוקציה שלימה.

לבסוף אפשר להגדיר את סדור המספרים הסודרים לפי גדלם ולהוכיח את תכונות הסדר היוצאות מהגדרה זו. הדרך הפשוטה לכך היא להסתמך על ההגדרה: המספר הטבעי a נקרא „קטן" מן המספר הטבעי b (ויחד עם זה: b „גדול" מן המספר a), אם ישנו מספר טבעי c שלגביו קיים: $a + c = b$.

בעזרת כל ההגדרות הקודמות ובעזרת החוקים הפורמליים הנובעים מהן מתקבלות נוסחות החיבור והכפל שבין המספרים הפשוטים (ביחוד בין המספרים למטה מ 10) שאנו זוכרים מילדותנו. במקרה זה פועל הזכרון כמכונה, מכונה לרעיונות, שבכמה מובנים יש לדמותה למכונת חשבון המבצעה את הפעולות ההן אף במקרים מסובכים יותר, היינו לגבי מספרים יותר גדולים. בחשבון ובמתימטיקה אין זה המקרה היחיד, שבו נשתמש במכונה לרעיונות. אדרבה, מנהג זה מתפשט והולך עם התפתחות המדע. במכונה אחת כזו, הסומכת על סימבוליות מיוחדת ושחשיבותה בולטת גם מחוץ לגבולות המתימטיקה, נעסוק בפרוטרוט בפרקים י' וי"ב: בסימבוליות של החשבון האינפיניטֶסימלי.

§ 4. הקשר שבין מספרים מונים ובין מספרים סודרים.

בפרק זה הכנסנו את המספרים הסודרים, היינו את המספרים הטבעיים 1, 2, 3 וכו', כסימנים סתם מחוסרי תוכן ומובן, בקבענו בעיקר את התנאים האלה: מופיע סימן ראשון, לכל סימן יש עוקב, אין שום סימן מופיע יותר מפעם אחת. לפיכך, שורת המספרים היא סידרה של סימנים (סימבולים) ריקים. לעומת זאת הכנסנו בפרק הראשון את המספרים המונים בצורה שונה לגמרי: לכל מספר מונה בודד ניתן מובן מסוים, ולא רק מקום מסוים בשורת סימנים ריקים; כי כל מספר מונה נותן לנו תשובה על השאלה, כמה איברים נמצאים בקבוצה ידועה (ובכל קבוצה האקויולנטית לה). מתמיה אפוא מאד איך קרה הדבר, כי בדיבור, בכתב ובכל רעיונותינו, נוכל להשתמש כמעט באותם הבטויים לשני סוגי „מספרים" שונים כל כך. והרי תופעה זו נמצאת בלי שינויים גדולים בכל הלשונות! כדי לבאר את זאת, עלינו לברר את הקשר שבין המספר המונה ובין המספר הסודר. (בירור זה יגרור אחריו ממילא את בירור הקשר, הקיים בין סדור המספרים הטבעיים על פי סוף הסעיף הקודם, ובין הסדור שהוגדר ב § 3 של הפרק הראשון.)

הקורא מצפה בודאי לתשובה מעין זו: באנו אמנם משני כוונים שונים לידי מושג המספר, אבל מהשקפה הגיונית עליונה מושג המספר הוא חד־גוני,

1. מן המלה הרומית distribuere = פלג, חלוק.

ואין הבדל עיקרי פנימי בין שמושו כמספר מונה לשמושו כמספר סודר. להפתעתנו התשובה היא אחרת. מה שהוברר אמנם כל צרכו רק לפני חמשים שנה לערך. באופן עקרוני אין שני תפקידים אלו מתלכדים כלל וכלל; העובדה — המתאשרת כל כך לכל הלומד שפות זרות, וכן לכל ילד הלומד את סימני הספָרות — שבסימני המספרים ובביטויהם המילוליים נוכל להשתמש לשני התפקידים גם יחד, בנויה כביכול רק על מקרה מוצלח בלבד.

נוכל לברר זאת בעזרת הדוגמה של קבוצת כל המספרים הטבעיים כולם:

1, 2, 3, 4, ...

לא כאן המקום לדבר על מספרים אינסופיים (עיין בחלק רביעי). אבל על כל פנים ברור, ש„המספר המונה" לקבוצה זו, הקובע כמה איברים מיכלים בה, הוא דבר מסוים הניתן להגדרה (כמו שעשינו במספרים המונים הסופיים) כתכונה משותפת לקבוצה זו ולכל הקבוצות האקויולנטיות לה. לעומת זאת, קל לראות שאפשר לסדר את הקבוצה הנ"ל באפנים שונים מאד, למשל באפנים הבאים:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

1, 4, 3, 2, 5, 8, 7, 6, 9, 12, 11, 10, ...

3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7, ...

וכו'. אמנם שלושת האפנים האלה, ורבים כמותם, אינם שונים זה מזה בעיקר, כי לכולם משותפות התכונות הללו: יש איבר ראשון, לכל איבר עוקב איבר מסוים, וכו' (בעיקר, תכונות שורת המספרים שבתחילת פרק זה). אבל את איברי אותה הקבוצה נוכל לסדר גם באפנים, השונים זה מזה בעיקר ולא רק בסימון. למשל:

1, 3, 5, 7, ... 2, 4, 6, 8, ...[1]

1, 3, 5, 7, ..., 8, 6, 4, 2

1, 4, 7, 10, ... 2, 5, 8, 11, ... 3, 6, 9, 12, ...

..., 7, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 8, ...

נברר לנו במה שונים זמ"ז חמשת הסידורים האלה. ז. א. הסידור הרגיל דלעיל וארבעת האחרונים! בארבעת אפני הסידור הראשונים יש תמיד איבר ראשון. בסידור האחרון אין איבר ראשון; בסידור השלישי יש איבר אחרון, בכל שאר הסידורים אין איבר אחרון; בסידור החמישי יש איבר „קודם" לכל איבר בלי יוצא מן הכלל, ואילו בסידור הראשון והשלישי יש איבר אחד ויחיד שאין לו קודם (האיבר 1). בסידור השני נמצאים שני איברים כאלה (1 ו 2), ובסידור הרביעי ישנם שלושה איברים כאלה (1, 2, 3). אם נרצה לדייק נוכל לנתח את מה שקראנו כאן „שנוי עיקרי" לגבי שני סידורים, בצורה זו: בין איברי שני הסידורים אין התאמה חד־חד־ערכית, שלגביה יהיה הסדר, שבו מופיעים שני איברים כל שהם (אחד ראשונה והשני אחריו) בסידור האחד, שוה תמיד לסדר בני זוגם בסידור השני.

1. השוה לסידור זה את הדוגמה של אינסוף תפוחי זהב שהובאה בעמ' 11!

התאמה השומרת במובן זה על הסדר נקראת בשם „העתק דומה" בין שתי הקבוצות המסודרות; עיין בחלק הרביעי. את אי־האפשרות של התאמה כזו נבאר בעזרת דוגמה אחת, כדלקמן:

אם לאיבר 2 בסידור השני נבחר באופן כל שהוא את בן־זוגו בסידור הראשון, לא נקבל לעולם העתק דומה. כי בסידור השני נמצאים אינסוף איברים גם לפני האיבר 2 וגם לאחריו; לעומת זאת נמצאים בסידור הראשון אמנם אינסוף איברים אחרי כל איבר, ולכן גם אחרי האיבר שיהיה בן־הזוג הנדון, אבל לפני איבר זה (אם בכלל נמצא לפניו איבר) נמצא רק מספר איברים סופי.

במובן זה, שאפשר להביעו גם בצורה מדויקת יותר, מתאים לקבוצה אחת מספר רב, ואפילו אינסוף, של קבוצות מסודרות שסידוריהן שונים בעיקר; לשון אחר: לאותו מספר מונה שייכים מספרים סודרים שונים.

ואולם הקבוצות הסופיות, היינו אותן שבמספריהן המונים והסודרים בלבד עסקנו כאן, מהוות מקרה מיוחד ופשוט ביותר לגבי השאלה שלפנינו, שאלת היחס בין מספר מונה למספר סודר: בתחום הקבוצות הסופיות שייך לכל מספר מונה רק מספר סודר אחד ויחיד. פשטות זו תלויה בעובדה ידועה מתורת האריתמטיקה, שאפשר להביעה בצורה זו: נסדר את איבריה של קבוצה סופית נתונה בכל אופן שהוא; אז, בין כל שתי קבוצות מסודרות המתקבלות על ידי כך, ישנו „העתק דומה" (לפי מה שהגדרנו את המושג הזה לעיל). לשון אחר: לקבוצה נתונה בת n איברים (n מסמן מספר טבעי כל שהוא) יש אמנם סידורים שונים, אבל לכל הסידורים האלה משותפת ה„תבנית הסידורית" שלהם, והתבנית הזאת היא: ראשית, שנית, שלישית, ..., n־ית; ז. א. לכל אחת מן הקבוצות האלה יש איבר ראשון, איבר שני, ..., איבר n־י, ואיברים אחרים אין להן. אולי יטען הקורא: „הרי דבר זה מובן מעצמו!" ואמנם משפט זה טעון הוכחה, כמו שמראים הסדורים השונים של קבוצת כל המספרים הטבעיים אשר הכרנום לעיל, או גם הדוגמה שבעמ' 11 על שק של אינסוף תפוחי זהב. את הוכחת המשפט הזה לא נבאר כאן, כי היא מסובכת למדי. פשוטה יותר היא הוכחת משפט אחר, בעל קשר אמיץ אל המשפט הנ"ל, אשר הבאנוהו לעיל (עמ' 10); היינו, שקבוצה סופית אינה יכולה להיות אקוויולנטית לשום קבוצה חלקית ממש שלה. על ידי הוכחת משפט זה נראה את שיטת האינדוקציה השלימה מהשקפת המספרים המונים ולא, כמו ברוב המקרים הקודמים, מבחינת המספרים הסודרים. את ההוכחה הזאת, שהיא ארוכה במקצת, ימצא הקורא המתענין במלואים שאחרי הפרק השלישי.

---

1) במונח „מספר סודר" השתמשנו כאן — לשם בירור הסתכלותי — לא בדיוק כמו בכל הסעיף הזה (סימן חסר־מובן מסוים בשורת המספרים הסודרים), אלא במובן: התבנית הסדורית שבה מופיעים הסימנים הללו עד הסימן המסוים הנידון, ועד בכלל.

פרק שלישי: תורת המספרים.

בפרקים הקודמים בנינו בשני אפנים שונים את מושג המספר הטבעי, וראינו בכל פעם שאפשר לבסס את המושג הזה על פעולה פשוטה למדי של כח־שכלנו: אם על פעולת ההתאמה בין הקבוצות ואם על הפעולה המצרפת איבר עוקב חדש לכל איבר נתון. לכאורה מתקבל מאד על הדעת שמושג המספר, הנוצר בדרך כל כך פשוטה, יהיה ברור ושקוף לשכלנו בכל היקפו; ושממלכת המספרים, עם כל היחסים והחוקים הקיימים בה, תהיה גלויה לעינינו. באמת אין הדבר כך, והמצב הזה מאשר את המימרה: מציאותה של המתימטיקה מעידה על חסרון עיקרי של שכל האדם. אותם המספרים שיצירתם פשוטה כל כך הם מלאי חידות בשבילנו, ועל אחדות מן החידות האלה נדבר בפרק זה. נצטמצם, כמובן, בחידות שנוכל להביע אותן ולתארן — אף כי ברוב המקרים לא לחקרן ולפתור אותן — בלי ידיעות קודמות מפורטות.

גאוס[1], שדורו והדורות הבאים אחריו כינוהו בשם „נשיא המתימטיקנים"[2], קרא את תורת המספרים, היינו אותו המקצוע המתימטי החוקר את תכונות המספרים, בשם „מלכת המתימטיקה". ספרו העיקרי „חקירות אריתמטיות"[3], שחיברו בהיותו בן עשרים, הוא — למרות הישגים חשובים שהגיעו אליהם ההודים והיונים העתיקים ולמרות מחקרים עמוקים של מתימטיקנים אחדים של המאות השבע עשרה והשמונה עשרה ששמותיהם ייזכרו בפרק זה — יסודה של תורת המספרים כמקצוע בפני עצמו; כינו את הספר ההוא בשם „מגנה כרטה"[4] של תורת המספרים. נעבור על בעיות שונות של תורת המספרים, לפחות כדי הכיר את הכוונים העיקריים לשאלותיה ולשיטותיה. מובן שהחומר שנכירנו על ידי כך מצומצם לא לבד באיכותו (על פי מה שנאמר לעיל), אלא גם בכמותו הוא כטיפות בודדות באוקינוס הענקי של תורת המספרים. כמה עצום בשטח תורה זו מספר הבעיות שבהן עסקו החוקרים, ביחוד במשך מאת השנים האחרונות, יוצא ברור מתוך ספרו של דיקסון שבו מובאות רק תוצאות, בלי הוכחות, על 1300 עמוד בערך[5].

§ 1. המספרים הראשוניים ופילוגם.

החומר אשר בו מטפלים ואותו חוקרים בתורת המספרים, הוא אוסף אותם המספרים הטבעיים 1, 2, 3, 4, ... שבהגדרתם עסקנו עד הנה. מלך השולט על אוכלוסיה גדולה בממלכתו, או אפילו ראש עיריה שעליו לדאוג לענייניהם של

---

1. C. F. Gauss
2. Princeps Mathematicorum
3. Disquisitiones Arithmeticae (הופיע 1802)
4. Magna Charta
5. L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers. 3 vols., Washington (הוד"ם מחדש ניו־יורק 1934) 1919—1923

תושבי עירו, אינם יכולים להביא בחשבון כל נפש בזו אחר זו בלי מיון. איך הם מסדרים את הדבר? המלך מחלק את ממלכתו לפלכים וכל פלך למחוזות, ובכל עיר של המחוז מסמנים את הרחובות השונים בשמות וקובעים מספרים לבתים בכל רחוב. קיצורו של דבר: לשם סקירה על כל בני האדם הנמצאים במדינה משתמשים בעקרוני סידור, המקילים את הדרך מן המרכז אל כל פרט ופרט.

על אחת כמה וכמה נחוצים עקרוני סידור במלכת המספרים, שבה נמצאים מספרים לא רק לרוב, אלא לאין־סוף. שאיפתנו תהיה למצוא עיקרון אחד שעל פיו תיוצר דרך המלך אל כל מספר ומספר באופן חד־גוני. האמצעי הטבעי לכך הוא: לפרק כל מספר לחלקיו הפשוטים ביותר; לשון אחר, להכין מין חומר של מספרים שהוא פשוט ביותר, ולבנות מן החומר הזה בשיטה חד־גונית את כל המספרים השונים. בידינו נמצאים מן המוכן שתי שיטות כאלה להרכבת מספרים, והן: החיבור והכפל.

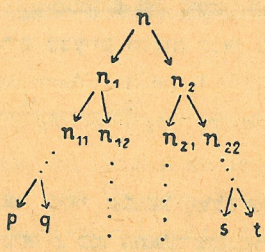
מה שנוגע לחיבור, הרי אין כל קושי בדבר. החלקים הפשוטים ביותר, שלהם אפשר לפרק כל מספר דרך חיבור, הם כולם מסוג אחד, והיינו: המספר 1; ז"א המספר הטבעי הקטן ביותר. מצד שני נוכל להגיע באמת, דרך חיבור, אל כל מספר נתון אם נציג אותו כסכום יחידות, ז"א כסכום מחוברים השווים כל אחד ל 1. פשטותה של עובדה זו היא היא מקום תורפתה. קיים אמנם המשפט: אפשר לתאר כל מספר טבעי באופן חד־ערכי כסכום של יחידות. אבל המשפט הזה הוא פשוט יותר מדי; פשוט ביחוד במובן זה, שלשם בנין כל המספרים, השונים כל כך זה מזה, נמצא ברשותנו רק סוג אבנים אחד (המספר 1). והרי עניות כזו היתה מגבילה יותר מדי גם את האדריכל העוסק בבנין בתים ממש! שיטת הפרוק ה„אדיטיבי" (שבחיבור) של המספרים אינה מועילה לנו כמעט בשום מקרה; ולכן קשות כל כך, ולפעמים מחוסרות כל דרך וכל גישה אליהן, הבעיות בתורת מספרים שטיבן אדיטיבי ושאין ביכלתנו להפוך את צורתן האדיטיבית ל„מולטיפליקטיבית" (שבכפל).

המצב שונה לגמרי, אם תחת החיבור נפנה אל הכפל. כחומר הפשוט ביותר לשם בנין המספרים השונים יעמדו אז לפנינו לא היחידה — המספר הטבעי היהידי שחוץ מעצמו אין לו מחוברים טבעיים —, כי אם אותם המספרים שאין להם מחלקים (גורמים) חוץ מעצמם (וחוץ מן המספר 1, שבו מתחלק כל מספר). מספר כזה, שאין לו „מחלק אמיתי", נקרא, כידוע, מספר ראשוני. לעומת זה מספר לא־ראשוני, כלומר מספר שיש לו מחלק אמיתי, נקרא מספר פריק. המספרים הראשוניים האלה, שמערכתם פותחת ב 2, 3, 5, 7, 11 וכו'[1], הם האבנים שמהן נבנים המספרים בדרך כפל, ולכן הם החומר העיקרי בשיטותיה של תורת המספרים.

1. את המספר 1 אין רואים כמספר ראשוני; כי מתוך שכל מספר מתחלק בו, אינו לא מעלה לא מוריד לבנין המספרים דרך כפל.

המספרים הראשוניים מהווים אפוא את הנושא הראשון והחשוב ביותר של תורת המספרים. קודם כל מתעוררות כאן שתי בעיות: בעית פירוקם של המספרים הטבעיים לגורמים ראשוניים, ובעית מספרם הכולל של המספרים הראשוניים ופילוגם בין כל המספרים הטבעיים.

הבעיה הראשונה קלה למדי. ראשית כל ברור שאפשר לתאר כל מספר טבעי n כמכפלה של מספרים ראשוניים, הואיל ועל ידי מספר נסיונות מוגבל נוכל לקבוע דרך חשבון אם בין כל המספרים הטבעיים הקטנים מ n יש מספרים (מלבד 1) ש n מתחלק בהם. אם אין שום מספר כזה, יוצא על פי הגדרת המספרים הראשוניים ש n הוא מספר ראשוני, ואז הפירוק המבוקש הוא פשוט $n = n$. אם יש ל n לפחות מחלק אמיתי אחד n_1, כך ש $n = n_1 \cdot n_2$[1] (n_1 ו n_2 שונים מ 1, ולכן גם מ n), אז נוכל לחזור אצל המספרים n_1 ו n_2 על אותו הנסיון של פירוק. אבל הרי n_1 קטן מ n, וכמו כן כל מחלק אמיתי של n_1 קטן מ n_1 וכו'; וכך הוא המצב לגבי n_2. לכן דרך זו של פירוק תיגמר בודאי אחרי מספר סופי של נסיונות, הואיל ומספר המספרים הקטנים מ n הוא סופי. נגיע אפוא בכל קצות הדרכים השונות שצעדנו בהן מן המרכז n, אל מספרים ראשוניים. לשון אחר, נקבל פירוק בצורה $n = p \cdot q \cdot r \cdots t$, בו „הגורמים" $p, q, r, \ldots, t$ הם כולם מספרים ראשוניים (שאינם צריכים להיות כולם שונים זה מזה); הם נקראים גורמים ראשוניים של n. על דרך־פרוק זו נוכל לרמוז באופן הסתכלותי כדלקמן[2]:



עד כאן הדבר פשוט עד מאד. לעומת זאת לא כל כך פשוט להוכיח, שפירוק זה של המספר הנתון n הוא חד־ערכי; היינו ששני פירוקים כל שהם של אותו המספר n לגורמים ראשוניים מתלכדים זה עם זה — פרט להבדלים בנוגע לסדר, שבו מופיעים הגורמים השונים בכל מקרה. אולי יַדמה הקורא בנפשו שדבר זה מובן מעצמו; איך אפשר כי מספר ראשוני מסוים, המופיע

1. הקטן שבין הגורמים n_1 ו n_2 הנהו גם קטן מן השרש הרבועי $\sqrt{n}$; ואם $n_1 = n_2$, אז שניהם שוים ל $\sqrt{n}$. לכן בשביל הבדיקה, הבאה לברר אם n הוא מספר ראשוני ושעליה דובר לעיל, די לעבור על כל המספרים הטבעיים עד $\sqrt{n}$, ואין צרך לעבור עד n עצמו.

2. ה„ציונים" (אינדיצֶס) 11, 12 וכו' שבטוויים n_{11}, n_{12} וכו' אינם מורים על המספרים אחת עשרה, שתים עשרה וכו', אלא מוסיפים לציון הראשון 1 וכו', עוד ציון שני, מטעם שקל להבינו. n_{11}, למשל, מתבטא: n אחת אחת.

בפירוק אחד של n, לא יופיע גם בכל פירוק אחר של מספר זה? בסוף הפרק נראה מתוך דוגמה לקוחה משטח מסובך יותר, שחד־ערכיותו של הפירוק לגורמים ראשוניים אינה מובנת כלל וכלל מעצמה! חד־ערכיות זו היא רק כעין מזל טוב ומוצלח, שבלעדיו יהיו החוקים של תורת המספרים מסובכים עד בלי די. הוכחת המשפט על חד־ערכיותו של הפירוק אינה קשה ביותר אבל מכבידה קצת באופיה המופשט. הוכחה פשוטה תנתן במלואים לחלק זה; הוכחות בנויות על שיטות אחרות ימצא הקורא בפרק הראשון של כל ספר־למוד בתורת המספרים[1]. נזכיר כי ברוב הספרים מתבססת ההוכחה על האפשרות לחלק כל מספר טבעי a בכל מספר טבעי b באופן אחד ויחיד[2]:

$$a = b \cdot c + d \qquad (c \text{ מספר טבעי או } 0)$$

כך, ש„שארית" d של החלוק תהיה קטנה מן המחלק b. ($d=0$ אם החלוק „נֶפֶה"; אז אומרים: a מתחלק ב b.) מן העובדה הנ"ל מגיעים בדרך קלה למדי אל התוצאה המשמשת כבסיס לתורת המספרים:

כל מספר טבעי הגדול מ 1 אפשר לפרקו באופן חד־ערכי (פרט לסדר) לגורמיו הראשוניים, ז"א לתארו בצורה אחת ויחידה כמכפלה של מספרים ראשוניים.

אפשר שבין הגורמים הראשוניים של המספר הנתון n יש גורמים השווים ביניהם, היינו ש n מתחלק בחזקה ידועה של מספר ראשוני מסוים. כדי להקיף את המקרה הזה, כדאי להביע את פירוקו של n לגורמיו הראשוניים ע"י הנוסחה הבאה, שבה $p_1, p_2, \ldots, p_k$ מסמנים את גורמיו הראשוניים השונים של n, ו $s_1, s_2, \ldots, s_k$ הנם מספרים טבעיים (השוה לכאן עמ' 86, הערה 1.)

$$n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}.$$

באופן זה מצאנו תאור כללי שבכפל (מולטיפליקטיבי) לכל מספר טבעי, תאור לא של־מה־בכך (טריביאלי), כמו התאור־שבחבור (האדיטיבי) של כל מספר כסכום $1+1+1+\ldots$; כי בעוד שבסכום כזה מופיע רק המחובר היחיד 1, מופיעים

---

1. ספרי־למוד כאלה הם למשל:
P. Bachmann: Grundlehren der neueren Zahlentheorie. 2. Aufl., Berlin 1921.
R. D. Carmichael: The theory of numbers. New York and London 1914.
M. Kraïtchik: Théorie des nombres. 2 vols., Paris 1922 et 1926.
T. Nagell: Introduction to number theory. New York 1951.
B. M. Stewart: Theory of numbers. New York 1952.
כראי גם לציין, כסקירה מענינת על בעיות שונות מתורת המספרים, את מאמרו של
G. H. Hardy: *Bulletin of the American Mathematical Society*, 35 (1929).

2. אמנם את החשבון במספר 0 נכנים רק בפרק הבא. כאן תספיק ידיעת הנוסחות:
$a+0=a$, $a \cdot 0 = 0$.

כאן בדרך כלל מספרים ראשוניים שונים, כגורמי התאור שבכפל. אבל עלינו לברר אם מספר המספרים הראשוניים, שהם אבני הבנין למספרים הטבעיים בכללם, הוא סופי, או אם יש אינסוף מספרים ראשוניים שונים. לו היה המקרה הראשון קיים, כי אז היינו גם כאן, לגבי הכפל, קרובים מאד למצב שלגבי החיבור. זה היה נותן לנו בודאי עובדות פשוטות למדי בתורת המספרים, ועם זאת היתה תורה זו מקבלת אופי חדגוני ופשוט ביותר.

ברור שמן הנסיון, למשל על פי חשבונות, לא נוכל להכריע אם המקרה הזה קיים או אם יש אינסוף מספרים ראשוניים שונים, אמנם קל למצוא כמות גדולה מאד למספרים ראשוניים; ואם נקדיש לדבר זמן וטורח במדה מספיקה, נמצא מספרים ראשוניים ענקיים. המספר הראשוני הגדול ביותר שהיה ידוע לנו עד 1950, הוא המספר $2^{127}-1$, שהוא בן 39 ספרות אם נכתוב אותו בשיטה העשרונית[1]. אכן, בו בזמן שנגלה מספרים ראשוניים גדולים, יוברר לנו שצפיפות המספרים הראשוניים ברווחים שווים — כגון כמות המספרים הראשוניים במיליון מספרים טבעיים רצופים — פוחתת והולכת, במדה שנצעד קדימה בשורת המספרים. בין מאת המספרים הטבעיים הראשונים יש 25 מספרים ראשוניים, כאשר יבדוק הקורא בנקל; מן 101 עד 200 נמצאים רק 21 מספרים ראשוניים, ולא יקשה לבדוק תופעה זו גם לגבי מספרים הגדולים למדי בעזרת לוחות (טבלאות) המכילים את כל המספרים הראשוניים זה אחר זה (או גם פירוקי כל המספרים לגורמים ראשוניים), יש לוחות המכילים את המספרים הראשוניים עד לתחום המיליונים[2].

---

1) קרייטשיק מציג ב *Mathematica* (Cluj) 7 (1933), עמ' 92—94, רשימה של 94 מספרים ראשוניים שכולם גדולים מ 10^{12}. ב 1952 נתגלה המספר הראשוני $2^{2281}-1$ בעל 700 ספרות כמעט

2) הלוח המודפס הרחב ביותר הוא D. N. Lehmer: Factor Table for the first ten millions, published by the Carnegie Institute of Washington 1909. ראה גם List of Prime Numbers from 1 to 10.006.721 לאותו המחבר. (רשימה זו יצאה לאור בעזרת אותו מכון בשנת 1915.) מלבד זה נמצא בכתב יד בספריה של האקדמיה למדעים שבווינה לוח לפירוקי המספרים עד מאה מליונים מאת J. P. Kulik —. עד כאן מדובר על רשימות המביאות בחשבון את כל המספרים הראשוניים העוקבים. לעומת אלה ידועים לנו מספרים ראשוניים בודדים, הגדולים הרבה יותר. אבל לגבי המספרים בני 15 ספרות ויותר (היינו אלפי ביליונים ויותר) דרושה הבדיקה, אם המספר הוא ראשוני, חשבונות ארוכים, עד שבשנים האחרונות הכניסו המכונות החשמליות והאלקטרוניות הקלה מהפכנית.

בין הלוחות המכילים את פירוקי המספרים הרצופים לגורמיהם הראשוניים, נזכיר:
G. Kaván: Factor Tables, giving the complete decomposition into prime factors of all numbers up to 256000. London 1937. (514 עמ')

לשם דוגמה נציג מתוך הספר הזה שורה אחת, המכילה את פירוקי המספרים מ־57710 עד 57719:

5771	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 199$	$3 \cdot 19237$	$2^4 \cdot 3607$	57713	$2 \cdot 3 \cdot 9619$	$5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 97$	$2^2 \cdot 47 \cdot 307$	$3^2 \cdot 11^2 \cdot 53$	$2 \cdot 28859$	57719

שנים מן המספרים האלה הנם ראשוניים.

החומר שבלוחות אלה מאשר שהצפיפות פוחתת והולכת. (מדת הפחתה זו היא אטית מבחינה יחסית; למשל, בתוך 1000 המספרים שבין 10^{12} — $10^{12}+1000$ עד 10^{12} נמצאים עוד 41 מספרים ראשוניים.) על סמך זה יכולנו לחשוב כדבר שלא מן הנמנע, שהפחתה זו תביא סוף סוף לידי הצפיפות 0, ז"א שמספר ראשוני מסוים יהיה המספר הראשוני האחרון בכלל. בניגוד לאפשרות מדומה זו נוכיח עתה את המשפט, היסודי גם הוא כמעט כמשפט הקודם:

יש אינסוף מספרים ראשוניים שונים.

כדאי לציין שהוכחת משפט זה נמצאה בספרי אבקלידס[1], כמו שאף לפני אבקלידס הכירו היונים, כי כל מספר טבעי מתפרק באופן חד־ערכי לגורמים ראשוניים.

הוכחה: נניח שיש רק מספר סופי של מספרים ראשוניים. במקרה זה קיים מספר ראשוני אחרון, הגדול בין המספרים הראשוניים. נסמן מספר זה ב P. ניצור את מכפלת כל המספרים הראשוניים עד P ועד בכלל, ואל מכפלה זו נחבר את המספר 1, כך שנקבל את הסכום $S = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdots P + 1$. המספר S אינו מתחלק בשום מספר ראשוני עד P; כי החלוק של S בכל אחד מן המספרים הראשוניים האלה נותן את השארית 1. קיימות אפוא רק שתי אפשרויות: או S (הגדול מ P) הוא בעצמו מספר ראשוני, או, אם אין הדבר כך, S מתחלק במספרים ראשוניים שהם קטנים אמנם מ S, אבל גדולים מ P[2]. כל אחת מהאפשרויות האלה סותרת את הנחתנו, שלפיה P הוא המספר הראשוני הגדול ביותר, וסתירה זו מראה שההנחה אינה נכונה, ז"א שאין מספר ראשוני אחרון. לכן יש אינסוף מספרים ראשוניים, כמו שטענו.

הערה לגבי השיטה: הוכחנו את המשפט בדרך השלילה, כלומר, על ידי כך שפתחנו בהנחה שהמשפט אינו נכון והסקנו סתירה מהנחה זו. היינו יכולים אמנם לתת להוכחה גם כיוון חיובי, דהיינו להראות שאחרי כל מספר ראשוני נתון, P, יבואו עוד מספרים ראשוניים הגדולים ממנו. זה יוצא בלי כל שנוי מן הדברים הקודמים, וגם מסקנה זו אומרת שיש אינסוף מספרים ראשוניים.

ההוכחה שלפנינו — בין בדרך השלילה בין בדרך החיוב — מרחיקה לכת אפילו מלהגיד סתם: ישנו במציאות מספר ראשוני גדול מ P. היא מאפשרת לנו ל**מצוא** מספר כזה בתוך הריוח המוגבל מ $P+1$ עד S, ועד בכלל. לשון אחר:

---

1. Euclides. ה $\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ של אבקלידס המתחלקים ל 13 ספר הם, כפי שאומרים, — מלבד התנך — הספר הנפוץ ביותר בעולם. די להזכיר את הוצאת המקור מאת I. L. HEIBERG בחמשה כרכים, שהופיעה בלייפציג בשנות 88—1883. תרגום לאנגלית: T. L. HEATH: The 13 Books of Euclid's Elements with introduction and commentary. 3 vols., Cambridge 1908. תרגום לגרמנית: Cl. THAER: Die Elemente von Euclid. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bdde. 235 ff. Leipzig 1933 ff.

2. האפשרות הראשונה מתגשמת בשביל חמשת המספרים הראשוניים: $P = 2, 3, 5, 7, 11$; האפשרות השניה למשל בשביל $P = 13$. יבדק נא הקורא את העובדות האלה ע"י חשבון!

המשפט שלנו הוא לא משפט של „מציאות", כי אם משפט של „בניה" (משפט קונסטרוקטיבי), הקובע דרך למצוא ולבנות, ע"י מספר סופי של צעדים, את העצם המבוקש (כאן: מספר ראשוני מסוים הגדול מ P). מהשקפה עקרונית צריך לתת את זכות הבכורה למשפטים בונים (קונסטרוקטיביים). — בקרוב נעסוק בבעיה, איך להקטין את הריוח הזה שבו בטוחים אנחנו למצוא מספר ראשוני הגדול מן המספר הנתון P.

המשפט האמור נותן לנו הזדמנות נוחה להבליט אופי מוזר של המצב המדעי שבו נתון חלק חשוב של תורת המספרים החדישה. לשם כך נביע את המשפט האחרון בצורה זו: „יש אינסוף מספרים ראשוניים בסדרה $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, או גם בסדרה $(1, 3, 5, 7, \ldots)$."[1] לסדרה כזו, למשל לסדרה $(1, 3, 5, \ldots)$, נוהגים לקרוא סדרה אריתמטית. בכל סדרה אריתמטית ההפרש בין שני איברים עוקבים הוא קבוע; בסדרה $(1, 3, 5, \ldots)$ הוא שוה ל 2. לכן נוכל לכתוב סדרה זו בצורה $(n\,2+1)$, שבה n עובר את כל המספרים הטבעיים, לרבות 0. המשפט היסודי אומר אפוא: בסדרה האריתמטית $(n\,2+1)$ נמצא אינסוף מספרים ראשוניים.

אם נשקיף לאור זה על המשפט האחרון יתקבל על הדעת להציג, דרך הכללה, את הבעיה הזאת: יהיו a ו d שני מספרים טבעיים; היש בין כל המספרים שבסדרה האריתמטית

$$(a+dn) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

אינסוף מספרים ראשוניים, או רק כמות סופית מהם?

מסתבר מיד ששני המקרים האלה הם אפשריים. האפשרות הראשונה, למשל, תתגשם במקרה האמור: $a=1,\ d=2$; או גם במקרה $a=1,\ d=1$ (סדרת המספרים הטבעיים כולם). אבל גם המקרה השני יוכל לקרות; כי אם ל a ו d יהיה מחלק משותף q גדול מ 1, הרי יתחלקו כל מספרי הסדרה ב q, ולכן: או שהסדרה אינה מכילה שום מספר ראשוני, או שהיא מכילה את המספר הראשוני היחיד q (אם q הוא מספר ראשוני ו $a=q$). נשארת אפוא השאלה: מהו המצב בשאר המקרים, היינו אם ה„הפרש" d הוא זר (בלי מחלק משותף) לאיבר הראשון a?

בסוף המאה השמונה עשרה כבר חשבו המתימטיקנים כדבר ודאי, ואחדים מהם אפילו כדבר המובן מעצמו, שכל סדרה אריתמטית מן הסוג האחרון מכילה אינסוף מספרים ראשוניים. יתכן לגשת אל הוכחת דבר זה כך, שננסה להכליל את הוכחת אבקלידס ולמצוא בדרך זו הוכחה אלמֶנטרית גם בשביל המשפט הכללי. אבל בזאת הצליחו רק לגבי מקרים בודדים ופשוטים ביותר של a ו d. לעומת זאת עלה בשנת 1837 בידי דיריכלֶה[2] להוכיח, שהכללתו הנ"ל של המשפט

---

1. אין הבדל בין הנוסח הראשון לאחרון, חואיל ובין המספרים הזוגיים נמצא רק מספר ראשוני אחד, המספר 2.

2. P. G. Lejeune-Dirichlet. ראה את ההוכחה הנמצאת בכרך הראשון ל„כל כתבי דיריכלה", והמובאת בשנויי־צורה בספרי לימוד רבים. A. Selberg הפך ב 1949 את ההוכחה לצורה „אלימנטרית".

היסודי נכונה תמיד, בתנאי ש a זר ל d. קדמו אמנם להוכחת דיריקלה הוכחות של ל ג ׳ נ ד ר ׳ משנות 1788 ו 1808, אבל שתיהן בעלות לקויים. הוכחת דיריקלה קשה ומסובכת מאד. אמנם, במשך מאת השנים שעברו מאז הופיעה הוכחתו, הצליחו להכניס בה הקלות ידועות, הן לגבי השיטה והן לגבי פרטים שונים; אבל הקושי העיקרי לא תוסר עד 1949, ואילו הייתי מרצה כאן את ההוכחה, הייתי צריך להקדיש לה את הספר בחלקו הגדול ולדרוש עם זאת ידיעות מתימטיות נוספות מאת הקורא.

עובדה זו כשהיא לעצמה מפתיעה, בדברנו על משפט אשר קל כל כך להביעו, וכל אדם יבינהו בלי כל הכנה מתימטית. הפתעתנו תגדל עוד, אם נביא בחשבון גם עובדה זו: המשפט על המספרים הראשוניים שבסדרה אריתמטית הריהו משפט של ה א ר י ת מ ט י ק ה הטהורה: הוא מתכוון רק למספרים טבעיים. לעומת זאת, הוכחת דיריקלה וכל הצורות שניתנו להוכחה במשך מאה שנה שאולות כולן מעולם ה א נ ל י ז ה, ז״א הן מבוססות על תחום המספרים הממשיים (השוה פרק ששי), ומשתמשות ביחוד בתורת הטורים האינסופיים (השוה פרק י״א) אשר אי־אפשר לה לוותר על מושג המספר האירַציונלי. לכאורה זכאים אנו לדרוש, שאם משפט מסוים מתכוון רק למספרים הטבעיים, תסתפק גם הוכחתו בשיטות המבוססות על מספרים אלה, ולא תזדקק לשיטות המכניסות גורם כל כך זר ורחוק כתורת האנליזה[2]. ואולם במשך תקופה ארוכה כל כך לא יכלו המתימטיקנים אפילו לחלום על האפשרות להוכיח את משפט דיריקלה בשיטה אריתמטית.

אם בהוכחה זו וכמו כן בחקירות אחרות של דיריקלה בתורת המספרים יש מצד אחד תפקיד בולט לשיטות אנליטיות, הרי מצד שני את השלב העיקרי שבאחת מהוכחות אלה מהווה עיקרון מסוג אריתמטי, שכבר השתמש בו א ו י ל ר[3] ראשון, והוא: אם מוטל עלינו להכניס באופן כל שהוא עצמים נתונים לתוך n תיקים, ואם מספר העצמים הנתונים גדול מ n, אז,

---

1. A. M. Legendre. מספרו "Essai sur la théorie des nombres", שהופיע ב 1798, לקוח שם המקצוע „תורת המספרים".

2. הדרישה הזאת איננה טבעית בשבילנו, במדה שהיתה טבעית בשביל הדור הקודם; כי בינתים למדנו ממשפט כללי ועמוק שגלה או. K. Gödel (עיין בתיאורו בחלק הששי) שבדרך כלל מקצע מתימטי מסוים אינו מקיף ושלם עד כדי כך שישלוט על כל הבעיות המתעוררות בתוכו. ובאמת המקרה שלפנינו והמקרים הדומים לו בתורת המספרים אינם יחידים במינם: גם בתורת הַקְוִיבָּלֶנטיות של קבוצות לא הצלחנו להוכיח את המשפט היסודי (שכל שתי עצמות ניתנות להשוואה; עיין בחלק הרביעי, כרך שני) באמצעי התורה עצמה. ולגבי המשפט חגאומטרי המפורסם של Desargues הן על תכונה של משילשים במישור, אנו יכולים אפילו ל ה ו כ י ח שאיננו ניתן להוכחה (בלי אכסיומות החפיפה) בתוך הגאומטריה של המישור, אלא אנו זקוקים לשם כך למרחב בן שלשה ממדים!

3. L. Euler

על כל פנים, יהיה בין התיקים לפחות אחד שיכנסו לתוכו לפחות שני עצמים. לעיקרון זה, שהוא כל כך פשוט ומובן, יש חשיבות יסודית. מסתמך הוא על תכונות המספרים הטבעיים, ודוקא כמספרים מ ו נ י ם. מכאן ראיה, שלא דיינו להכניס לתוך המתימטיקה את המספרים כסודרים בלבד (אף כי את מושג המונה נוכל לבנות על מושג הסודר, כפי שבארנו בפרק השני, עמ׳ 22).

משפט דיריקלה הוא תוצאה מיוחדת בכוון הבעיה הכללית של פ י ל ו ג המספרים הראשוניים בין כל המספרים הטבעיים. בעיה זו היא מן המעניינות ביותר, אבל גם מן הקשות ביותר בתורת המספרים, ואפילו במתימטיקה כולה. במשך הדור האחרון הופיעו מספר גדול של מאמרים וגם ספרים אחדים המטפלים בבעיה זו; נציין בין המחברים רק את ה ר ד י ׳, ל י ט ל ו ו ד[4] ו ל נ ד א ו[5].

הזכרנו לעיל (עמ׳ 28) תוצאה פשוטה בכוון הנ״ל שהיתה ידועה כבר למתימטיקני יון, והיא: בין כל מספר ראשוני P ובין המספר $1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdots P$, לרבות את המספר האחרון, ישנו לפחות מספר ראשוני אחד. באופן קל למדי אפשר להקטין קצת את הריוח הזה המכיל בודאי מספר ראשוני; על דבר זה ועל מסקנה ממנו — המתכוונת לתכונה מפליאה של המספר 30 — נרחיב את הדבור במלואים. בזמן האחרון הצליחו המתימטיקנים לדייק עוד הרבה יותר לגבי אורך הריוח, שבו נמצא לפחות עוד מספר ראשוני אחד: ה„דרישה של בֶּרטרן״ (1845)[4] הטוענת שבין n ל $2n$ ישנו תמיד מספר ראשוני — אם n מספר ממשי כל שהוא גדול מ 1 — הוכחה כבר ב 1852 ע״י צ׳ביש׳ף[5]; אחר כך מצאו שלמעלה מ $n=23$ יש מספר ראשוני אף בין n ל $n+\frac{n}{4}$, למעלה מ $n=47$ אפילו בין n ל $n+\frac{n}{8}$. ובכל זאת אפילו תוצאות אלו אינן מרחיקות לכת בהשוואה לנסיון, לפחות בתחומי המספרים הניתנים לחשבונותינו למעשה; בשביל $n=10^8$ (מאה מיליונים), למשל, יש בין n ל $n+\frac{n}{2}$ עוד כמיליון מספרים ראשוניים, ולא רק אחד או ארבעה. לעומת זאת אין אנו בטוחים אם, למשל, בין כל שני מספרים רבועיים עוקבים, כלומר: בין n^2 ו $(n+1)^2$, נמצאים תמיד מספרים ראשוניים.

כדי להוכיח את התוצאות השונות שזה עתה דברנו עליהן יש צורך בשיטות עמוקות ומסובכות של האנליזה, ורק את התוצאות אפשר להביע באופן

---

1. G. H. Hardy 2. J. E. Littlewood

3. ב 1909 הופיע בשני כרכים ספרו של לנדאו: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.
ראה גם את ספרו (3 כרכים): Vorlesungen über Zahlentheorie (Leipzig 1927)
וכמו כן A. E. Ingham: The distribution of prime numbers 1932.
T. Estermann: Introduction to modern prime number theory. 1952.
השוה R. G. Archibald ב *Scripta Math.*, כרך 11, 1945.

4. J. L. F. Bertrand

5. P. L. Tchebycheff

פשוט כל כך. אכן, רוב הבעיות בדבר פילוג המספרים הראשוניים זקוקות לשפתה הסימבולית של האנליזה, לא בלבד כדי להוכיח את המשפטים כי אם גם כדי לנסח את התוצאות עצמן. לכן לא נוכל להרחיב את הדיבור בענין זה. נזכיר רק עוד בעיה אחת בודדת מן התחום הזה, שקל להבינה, בעיה המצפה זה מאות בשנים לפותר.

כאמור לעיל, צפיפותם של המספרים הראשוניים בתוך כל המספרים הטבעיים פוחתת והולכת באופן ממוצע, ז"א אם נביא בחשבון רווחים גדולים למדי בין מספרים. לעומת זאת אפשר לשאול גם לצפיפות המקומית, ז"א לצפיפות בסביבה הקרובה למספר ראשוני נתון, שמדתה היא ההפרש בין מספר ראשוני זה למספר הראשוני הקודם לו. לגבי מספרים גדולים מ 3 תקבל הצפיפות המקומית את ערכה המינימלי, בהיות לפנינו שני מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא רק 2, כגון בזוג (3, 5), או (11, 13), או (101, 103). (אגב: שלושה מספרים ראשוניים סמוכים במדה כזו נמצא רק פעם אחת בשורת כל המספרים, היינו בשלישיה (3, 5, 7); שהרי בשביל כל ערך n, אחד מן המספרים n, $n+2$, $n+4$ מתחלק ב 3, ואיננו אפוא מספר ראשוני אלא אם כן הוא שוה ל 3.) מתעוררת השאלה, אם בתוך שורת המספרים יימצא פעם זוג אחרון של מספרים ראשוניים סמוכים (שההפרש ביניהם רק 2), המכונים בשם „מספרים ראשוניים תאומים" — אפשרות המתקבלת אולי על הדעת מפני צפיפותם היורדת של המספרים הראשוניים בכלל; או אם יימצאו זוגות כאלה אפילו אחרי כל מספר נתון, ויהי גדול כמו שיהיה (אף כי המרחק הממוצע בין שני זוגות כאלה יגדל סוף סוף עד מאד). שאלה זו לא מצאה עד הנה את פתרונה. בכל זאת מצא החוקר הנורבגי ברון[1] בשנת 1919 תוצאה חלקית לגבי הבעיה הזאת: לפחות את נוסח התוצאה הזאת, אם גם לא את הוכחתה, נבאר במלואים לחלק הזה.

לעומת בעית המספרים הראשוניים התאומים, ז"א ההפרש הקטן ביותר שיוכל להיות בין שני מספרים ראשוניים, מתעוררת השאלה, אם בתוך שורת כל המספרים הראשוניים תמצאנה קפיצות גדולות עד בלי די; כלומר, אם כנגד כל מספר טבעי נתון n נוכל למצוא n מספרים טבעיים רצופים, שביניהם אין מספר ראשוני. לשאלה זו נוכל לענות מיד בחיוב, ואפילו בלי כל קושי: יהיה n מספר טבעי נתון (גדול מ 1) ונשתמש, כנהוג במתימטיקה, בקצור $n!$ (קרא: n עצרת) כדי לסמן את מכפלת כל המספרים הטבעיים עד n, היינו: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. אם נבדוק את n המספרים העוקבים: $(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$, ..., $(n+1)!+(n+1)$, הרי ברור שאין ביניהם שום מספר ראשוני, הואיל וכל אחד מן הסכומים האלה מתחלק במחובר השני שלו.

בקרבה ידועה לבעית־התאומים הנ"ל נמצאת הבעיה של גולדבך[2], שגם

1. V. Brun
2. Chr. Goldbach. יש לציין שכבר Descartes הציע השערה דומה לזו.

היא לא קרבה אל פתרונה עד השנים האחרונות. בשנת 1742 הציע גולדבך במכתב אל גדול המתימטיקנים של זמנו, אוילר, את ההשערה שאפשר לתאר, בדרך אחת או בדרכים שונות, כל מספר זוגי (פרט ל 2) כסכום של שני מספרים ראשוניים, כמו שמראות הדוגמאות: $5 + 3 = 8$, $11 + 5 = 13 + 3 = 16$. מן ההשערה הזאת, אם היא נכונה, אפשר להסיק מיד: כל מספר טבעי, פרט ל 1, אפשר לתאר כסכום של שלושה מספרים ראשוניים לכל היותר. עד לפני שנים מעטות היינו רחוקים מאד מלהוכיח את השערת גולדבך, על אף מאמציהם של גדולי המתימטיקנים[1] במשך דורות. ואולם בשנת 1930 הצליח המתימטיקן היהודי הצעיר שברוסיה, שנירלמן[2], להוכיח את המשפט הבא (הטוען אמנם הרבה פחות ממשפט גולדבך): יש במציאות מספר טבעי N, כך שאפשר לתאר כל מספר טבעי (פרט ל 1) כסכום של N מספרים ראשוניים, לכל היותר. תגלית זו היתה חשובה עד מאד, לא לבד כשהיא לעצמה, כי אם גם מפני שהצליח שנירלמן לבצע את ההוכחה באמצעים אלמנטריים למדי. (אשר לגודל המספר N, צריך היה להניח, לפי הוכחת שנירלמן, שיהיה קרוב למיליון; אבל בשנת 1936 הצליחו חוקרים אחרים להוכיח באמצעים חריפים במדה יוצאת מן הכלל, שדי לקחת בשביל N לכל היותר את המספר 71, לפחות אם המספרים המבוקשים נמצאים מעל לגבול ידוע.) ע"י זה למדנו אפוא, שכל מספר טבעי „גדול למדי" אפשר לתאר כסכום של 71 מספרים ראשוניים, לכל היותר. והנה במשך התקופה שבה נכתב הספר הזה, הצליח באמת המתימטיקן הרוסי וינוגרדוב[3] להוכיח ש„כמעט" כל מספר זוגי אפשר לתאר כסכום של שני מספרים ראשוניים, וכל מספר אי־זוגי „גדול" כסכום של שלושה מספרים ראשוניים; ז"א N שווה או קטן מ 4. בזה קרב לממושו חלום מתימטי בן מאות בשנים!

§ 2. חילוק המעגל, ובעיות אחרות.

גולדבך הביע בזמנו את השערתו על פי נסיון „אינדוקטיבי". במלה אינדוקטיבי אנו מתכוונים כאן לא, כמו בדרך כלל במתימטיקה, לאינדוקציה השלימה (שהיא באמת שיטה דדוקטיבית; עיין לעיל, פרק שני, עמ' 17) כי אם למובן הנוהג במדעי הטבע, והוא: על סמך מספר גדול של נסיונות;

1. הצעד הראשון שהתקרב באופן מכריע לעצם הבעיה הוצא לפועל רק ב 1922, הודות לשיטה חדשה — עמוקה ופוריה גם יחד — של Hardy, Ramanujan, Littlewood.
2. L. Schnirelmann. השוה למשפט שנירלמן את מאמרו של Landau שהופיע ב *Nachrichten der Ges. der Wissensch. zu Goettingen*, Math.-Phys. Klasse, 1930, p. 255—276.
3. J. M. Vinogradov. המאמר הופיע בכרך ה 15 (1937) של *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* (p. 169—172).

T. Estermann: *Proceed. of the London Math. Society*, Ser. 2, Vol. 44 (1938), p. 307—314 (1937). השוה גם את מאמרו של וספרו שצוין בעמ' 31.

כאן: נסיונות של חשבונות במספרים. על ידי נסיונות כאלה נתאמתה השערת גולדבך עד למספרים גדולים למדי[1]. הרבה משפטים בתורת המספרים נתגלו בתחילה באופן אינדוקטיבי על ידי חשבונות, ורק אחר כך נמצאה הוכחתם המתימטית. גם גאוס, שאת זכותו כמיטד תורת המספרים — במובן מקצוע שיטתי — הדגשנו לעיל, הרבה להשתמש בחשבון לתפקיד הנ"ל והצליח בזה בכמה מקרים. הודות לכשרונו הגדול בחשבונות מספריים שבהם היה מוצא תענוג אמתי. אולם אסור לשכוח, שהתוצאות שנמצאו באופן אינדוקטיבי, אפילו ע"י מספר גדול מאד של נסיונות שלא איכזבו, אינן יציבות כלל וכלל, ובתורת המספרים הן בטוחות הרבה פחות מאשר במדעי הטבע הנסיוניים. כאן מותר לנו להאמין לתוצאה רק אחרי שהצלחנו להוכיחה בדרך מתימטית ממש. נציג שתי דוגמאות לכך:

אוילר מצא, בנסותו את כל המספרים עד 2500, שכנראה אפשר לתאר כל מספר אי־זוגי n כסכום של מספר ראשוני p מצד אחד, ושל מספר ריבועי m^2 כפול שתים, מצד שני; היינו בצורה

$$n = p + 2m^2.$$

אז לא הטילו ספק בכך, שהתאור הזה אפשרי תמיד. בתקופה מאוחרת יותר הרחיבו את החשבונות הנ"ל לגבי כל המספרים האי־זוגיים עד 9000, והתברר שיש ביניהם שני מספרים, ולא יותר, שאי־אפשר לתארם כך, והם 5777 ו־5993. נמצאו אפוא בין 4500 נסיונות רצופים רק שתי תוצאות שליליות, בעוד שכל האחרות היו חיוביות!

ישנה דוגמה אחרת מפורסמת הרבה יותר והיא: המספרים הראשוניים בני הצורה 2^m+1. קודם כל קל להראות שאם המעריך m מכיל מחלק אי־זוגי, אז 2^m+1 איננו מספר ראשוני[2]. לפיכך יוכל מספר בעל הצורה 2^m+1 להיות מספר ראשוני רק אם המעריך m בעצמו הוא חזקה של 2, לרבות את הערך $m = 1 = 2^0$. לכן דיינו להסתכל במספרים בעלי הצורה $2^{2^n}+1$, ששם עובר n את הערכים 0, 1, 2, ... פֶרְמַה[3], שהיה מגדולי המתימטיקנים של המאה ה־17,

---

1. עובדו גם טבלאות המראות באופן נסיוני את נכונות משפטו של גולדבך עד למספר מסוים. די להזכיר את חשבלאות של R. HAUSSNER, שהופיעו ב־1899; שם נמצאים לגבי כל מספר זוגי עד 3000 כל הצגותיו כסכומי שני מספרים ראשוניים, ולגבי כל מספר זוגי עד 5000 לפחות מספרן של ההצגות השונות. בעצם נתאמתה השערת גולדבך כבר עד 60,000.

2. נניח ש־m מתחלק במספר האי־זוגי $2k+1$, דהיינו, שיהיה $m=h\cdot(2k+1)$. כמו שנוכל להווכח על ידי חישוב המכפלה העומדת בשמאל, קיים „באופן זהותי" (ז"א לכל ערך של x)

$$(x+1)\,(x^{2k}-x^{2k-1}+\ldots-x+1) = x^{2k+1}+1.$$

אם נכניס כאן במקום x את הערך 2^h, יוצא כי $2^{h(2k+1)}+1$ מתחלק ב־2^h+1.

3. P. de Fermat

ואולי החוקר הצרפתי הגדול ביותר בשדה תורת המספרים, קבע שחמשת המספרים הראשונים מן הסוג הנ"ל הם מספרים ראשוניים, והם:

$$2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3 \qquad 2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5 \qquad 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$$

$$2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257 \qquad 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 = 65537.$$

פרמה הביע את אמונתו השלמה שכל המספרים מן הסוג הנ"ל, יהיה n כל מספר שהוא, הם מספרים ראשוניים. (דרך אגב: לו נתאמתה אמונה זו, כי אז היתה כאן גם הצלחה לשאיפת המתימטיקנים למצוא פונקציות פשוטות של משתנה, הנותנות רק מספרים ראשוניים בשביל כל הערכים השלמים של המשתנה.) בפרמה עצמו נתעוררו אחרי כן ספקות בכנות השערתו; ואמנם בשנת 1732 הראה אוילר, שהמספר בן הסוג הנ"ל העוקב למספרים שנבדקו על ידי פרמה — הוא $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1$ — אינו מספר ראשוני, אלא מתחלק ב־641. במשך ששים השנים האחרונות נעשו חשבונות לגבי יותר מעשרה מספרים אחרים בני הצורה $2^{2^n}+1$; ביניהם, למשל, לגבי הערכים $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12$. הבדיקות האלה הוצאו לפועל כמובן לא על פי חישוב סתם (הרי בשביל כך היה צורך בזמן ענקי, לפי הגודל היוצא מן הכלל של המספרים האלה), כי אם מצד אחד בעזרת כמה שיטות חריפות ומיוחדות של תורת המספרים, מצד שני על ידי שמוש במכונות, וביניהן אחדות שתוצאות פעולתן מפליאות ממש[1]. בכל המקרים האלה הוברר, שהמספרים הנבדקים הם מספרים פריקים, ולא מספרים ראשוניים, אלא שהמחלקים שנמצאו הם על פי רוב גדולים עד מאד. בכל זאת נעלם מאתנו, אם בין המספרים בני הסוג הנ"ל יש אינסוף מספרים ראשוניים או רק כמות סופית, אולי רק חמשה אלה שנרשמו לעיל. אין לנו כל מושג, איך נוכל לגשת אל הכרעת שאלה זו באמצעי המדע שבימינו. כמעט כל המספרים האלה, אשר נבדקו והוברר כפריקים, מקבילים לערכי n למטה מ־25. מלבד זה נבדקו המקרים $n = 36$[2] ו־$n = 38$, ובשנת 1905 הראה מוֹרֶהיד[3] שגם המספר $2^{2^{73}}+1$ אינו מספר ראשוני, אלא מתחלק ב־$5\cdot 2^{75}+1$. קשה לתאר את גדלו העצום של המספר הנ"ל. אם נכתבנו על פי השיטה העשרונית, נקבל אלפי טריליונים של ספרות (ביליון הוא מיליון מיליונים; טריליון הוא מיליון בילונים). לו רצינו לסמן מספר זה בספרות רחבות 5 מילימטרים ללא הפסק ביניהן, היינו מגיעים לאורך העולה על 5000 ביליונים קילומטר; כדי לכתוב כך את המספר היינו צריכים לכסות את הקו המשוה של כדור הארץ יותר ממאת אלף מיליוני פעם.[4]

---

1. ראה למשל את המאמר LEHMER: *Scripta Mathematica* 1 (1933), p. 229–235:

2. $2^{2^{36}}+1$ מתחלק, למשל, במספר הראשוני 748 779 069 441.

3. Morehead

4. השוה KRAÏTCHIK, *Scripta Mathem.*, כרך 18 (1952), עמ' 39—52.

עד כאן הדגשנו את ערכם האריתמטי של המספרים 2^m+1. אבל מלבד זה יש להם תפקיד מדעי חשוב מאד באשר הם סוללים דרך מתורת המספרים אל הגיאומטריה. דרך זו עוברת בתחום האלגברה; כי בעזרת שיטות אלגבריות עמוקות למדי אפשר להוכיח את סגולתם הבאה של המספרים הראשוניים p בעלי הצורה $p=2^m+1$: אפשר לחלק את המעגל ל p חלקים שווים או — מה שהוא הוא — לשרטט את המצולע המשוכלל בן p צלעות בסרגל ובמחוגה בלבד. מה שאי־אפשר לעשות לגבי כל שאר המספרים הראשוניים. אפשרות זו היתה ידועה למתימטיקני יון במקרים $m=2^0=1$ ו $m=2^1=2$, היינו בשביל $p=3$ ו $p=5$ (חיתוך הזהב). את התוצאה הכללית האמורה מצא גאוס בסוף המאה השמונה עשרה, בהיותו בן שמונה עשרה שנה, ועל ידי כך הוסיף, אחרי אלפיים שנה, את החידוש הראשון בכוון זה. עוד יזדמן לנו לרמוז לשיטתו של גאוס בפרק השמיני. נציין כאן בקשר עם העובדות שהוזכרו לעיל, שתגלית זו מגידה לנו כיום רק שלוש עובדות נוספות על הידועות ליוונים, והן: בעזרת סרגל ומחוגה בלבד אפשר לחלק את המעגל ל 17 או ל 257 או ל 65537 חלקים שווים. אם נמצא עוד מספר ראשוני מהסוג הנ"ל נקבל על ידי כך עוד עובדה גיאומטרית נוספת. דומני שאין צורך להדגיש, כי כבר כדי לחלק את המעגל ל 17 חלקים שווים לא ישתמש איש למעשה בשיטות עיוניות אלה, אלא בדרך מעשית יותר (שיטת קירוב, או מכשירים נוספים על סרגל ומחוגה).

נזכיר עוד משפט אלמנטרי מתורת המספרים, שלכתחילה הנהו בעל אופי של חיבור; בכל זאת אין ההוכחה קשה, הואיל ובנקל אפשר להפוך אותו לצורה של כפל. כל מספר ראשוני פרט ל 2 הוא בעל הצורה $4n+1$. אם בהחלקו ב 4 מתקבלת השארית 1, או בעל הצורה $4n+3$. אם בחילוק זה מתקבלת השארית 3. המשפט אומר: כל מספר ראשוני שצורתו $4n+1$ אפשר לתאר כסכום של שני רבועים, q^2+r^2, אבל לא שום מספר ראשוני שצורתו $4n+3$. (את המספר 2 אפשר לתאר בצורה 1^2+1^2.) הקורא יברר לו את העובדות האלה בנקל על ידי דוגמאות שייצור לו. אנו מכירים מכתב מענין של החוקר היהודי איזנשטיין[1], שמת בן 29 שנה ושגאוס הוקיר אותו כמתימטיקן המוכשר ביותר שבדורו. במכתב זה הוא מספר איך השתדל להסביר את המשפט הנ"ל בחוג משפחתו, ומוסיף: „יש לי דוד הטוען, כי דיינו שנקח את מי שהוא מבית המשוגעים; זה יהיה בודאי מתימטיקן מצוין. לעומת זאת אומר אני — ודיריקלה מסכים לדעתי — שיתכן שהמתימטיקה היא מין שגעון, אבל לא לכל שגעון צריך להיות אופי מתימטי."

על הכללה מעמיקה של בעיה זו, בה עומדות חזקות כלשהן במקום רבועים, נצביע בעמוד 50.

1. G. Eisenstein

§ 3. המשפט „קטן" והמשפט „גדול" של פרמה. מושג הקונגרואנציה ומאזני חשבון.

כבר דברנו לעיל על חשיבותו של פרמה כחוקר בתורת המספרים. מלבד תגליות חשובות אחרות זכה להכניס לתוך תורה זו שני משפטים הנקראים על שמו, אחד בתואר „הקטן", ואחד, שעוד כיום הוא השערה בידינו, בתואר „הגדול".

המשפט הקטן של פרמה אומר:

יהי p מספר ראשוני כל שהוא, ו a מספר טבעי כל שהוא. אז ההפרש a^p-a מתחלק תמיד ב p.

משפט זה מציין תכונה מענינת של המספרים הראשוניים; בשביל המקרה המיוחד $a=2$ כבר היתה תכונה זו ידועה לסינים לפני יותר מאלפיים שנה. אכן אין לנו בתכונה זו מבחן (קריטריון) למספר ראשוני, ז"א לא כל מספר p בעל תכונה זו (לגבי כל ערכי a) הוא בהכרח מספר ראשוני. (אמנם למטה מ 2000 יש רק שלושה מקרים יוצאים מן הכלל, היינו מספרים פריקים בעלי התכונה הנדונה.)

הוכחת המשפט הקטן של פרמה פשוטה למדי, ובקויה העיקריים נרשמנה במלואים לחלק זה. חשיבותו רבה בכמה מקצועות מתימטיים.

במשפט הקטן אפשר להשתמש לבעיה הידועה בודאי לקורא, והיא: לפתח שבר רגיל $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני. נניח, לשם פשטות, שהמכנה p הוא מספר ראשוני (שונה מ 2 ומ 5); ושהמונה m אינו מתחלק ב p (אחרת הרי $\frac{m}{p}$ שווה למספר שלם). אם נהפוך את השבר $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני, נקבל פיתוח המהווה שבר עשרוני מחזורי; כלומר, אותה הסדרה הסופית של ספרות הולכת וחוזרת בלי סוף. מספר הספרות של הסדרה הנ"ל נקרא בשם אורך המחזור. בדרך פשוטה למדי אפשר להעלות מן המשפט הקטן של פרמה את המסקנה שאורך המחזור בפיתוח של $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני הוא תמיד מחלק של $p-1$, היינו $p-1$ או מחלק אמתי של $p-1$ (לרבות 1). גם את זאת נוכיח במלואים. — דוגמאות:

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}142857\ldots$ (אורך המחזור 6, שוה ל $p-1$)

$\frac{1}{11} = 0.\overline{0909}\ldots$ (אורך המחזור 2, הוא מחלק אמתי של $p-1=10$)

$\frac{3}{41} = 0.\overline{07317}\ldots$ (אורך המחזור 5, הוא מחלק אמתי של $p-1$ 40)

בקשר אמיץ עם משפטו הקטן של פרמה נמצא „משפט וילסון"[1] אשר היה ידוע כבר ללייבניץ[2] והוכח בפעם הראשונה על ידי לגרנג'[3] בשנת 1773. משפט זה אומר שבשביל כל מספר ראשוני p הסכום $1\cdot2\cdot3\cdots(p-1)+1$ מתחלק ב p. קל להוכיח משפט זה בעזרת המשפט הקודם. ואולם מבחינה

1. J. Wilson
2. G. W. Leibniz
3. J. L. Lagrange

עקרונית חשובה האפשרות לבסס את משפטו של וילסון על יסודות בלתי תלויים במשפטו של פרמה. כי בין שני המשפטים ישנו הבדל עקרי, והוא: משפט וילסון מהוה גם מבחן למספרים ראשוניים; המספר הטבעי p הוא תמיד מספר ראשוני אם הסכום הנ"ל מתחלק ב p. הקורא ינסה להוכיח בעצמו את זאת!

פשוט יותר לנסח את המשפטים האחרונים. אם נשתמש בהגדרה אשר שמה גאוס בראשית תורת המספרים: בכתיב $a \equiv b \pmod m$, או במלים: a קונגרואנטי ל b מודולו m[1], אם ההפרש $a-b$ מתחלק במספר הטבעי m. במקרה זה נותנים a ו b, אם נחלקם ב m, שאריות שוות. בשביל הגדרה זו אין צורך להצטמצם במספרים טבעיים a ו b, אלא כחה יפה לגבי כל המספרים השלמים.

דוגמה פשוטה למושג זה נקבל אם נסמן את כל ימות השנה, החל בראש השנה ועד סופה, במספרים 1, 2, 3, ... אז נוכל לאמר: שני ימים מסוימים של אותה השנה חלים להיות באותו היום של השבוע אם, ורק אם, מספריהם קונגרואנטיים מודולו 7. דוגמה אחרת קרובה לזו: בספירת העומר עלול היהודי לטעות, וטעות זו אינה אפשרית כמעט. אם יתחשבו בכלל הבא: בכל שנה ישנו מספר מסויים s (s שווה ל 0 או ל 1 או ל 3 או ל 5), כך שבין המספר n בספירת העומר של יום מסויים ובין יום־השבוע m שבו חל אותו היום קיים היחס

$$n+s \equiv m \pmod 7.$$

($s=0$ אם יום ראשון של פסח חל להיות בשבת; בשאר המקרים מסמן s את יום השבוע, שבו חל יום ראשון של פסח. הקורא הבקי קצת בסידור הלוח העברי מבין מדוע יש רק ארבעה ערכים ל s: ראשון של פסח אינו חל אלא בארבעה ימים של השבוע בגלל ה„דחיה" אד"ו.)

כמו כן שתי שנים של הלוח העברי, שמספריהן קונגרואנטיים זה לזה mod. 19, הן שתיהן שנים פשוטות, או שתיהן מעוברות (ביתר דיוק, יש להן אותו מקום במחזור הלבנה). פחות פשוט להבין את המבחן הבא לבירה. אם שנה עברית נתונה A (למשל: $A=5699$) היא שנה פשוטה או מעוברת: תסומן ב r השארית החיובית הקטנה ביותר (לרבות את השארית 0). המתקבלת בחלקנו את הסכום $7A+1$ ב 19; אז תהיה שנת A פשוטה אם $r>6$, ומעוברת אם $r<7$[2].

בהשתמשנו במושג הקונגרואנציה, נוכל לכתוב את המשפט הקטן של פרמה בצורה: $a^p \equiv a \pmod p$, ואת משפט וילסון בצורה:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

---

1. מן המלים הרומיות congruens = מתאים, modulus = אופן, מדה.
2. עיין בהוכחה שנתן M. HAMBURGER בשנת 1896 בכרך ה 116 של ה Journal f. d. reine u. ang. Mathematik (עמ' 90—96) לנוסחה של גאוס משנת 1802, הקובעת את התאריך הנוצרי לראשון של פסח של שנה עברית נתונה; ואת מאמרו של מחבר הספר הזה שהופיע ב 1910 בכרך ה 138 של אותו העתון (עמ' 133—146). השוה גם ספרו של CH. S. SLONIMSKY: יסודי העיבור (ווארשא תרי"ג — 1852).

קל לראות כי, בדיוק כמו לגבי השויון, קיימים גם לגבי הקונגרואנציה הכללים: אם אל מספרים קונגרואנטיים זה לזה נחבר מספרים קונגרואנטיים זה לזה, נקבל גם סכומים הקונגרואנטיים זה לזה; והוא הדין, אם נחסר — לגבי ההפרשים, ואם נכפיל לגבי המכפלות. (מובן שהכוונה תמיד לגבי אותו המודול.) יוצא מזה שאם a, b, c, d וכו' הם מספרים שלמים, ואם תהיינה a', b', c', d' וכו' השאריות שנקבל מהם על ידי חילוק במספר הטבעי m, אז קיים:

$$a\cdot b \pm c\cdot d \pm \cdots \equiv a'\cdot b' \pm c'\cdot d' \pm \cdots \pmod m.$$

על פי זה קל מאד להוכיח שתי שיטות פשוטות שבהן יש לבחון את נכונות החשבונות במספרים שלמים. אם החשבונות מבוססים רק על החיבור, החיסור והכפל. למעשה יש להן חשיבות רק לגבי הכפל, וזאת במדה כזו, שכדאי היה להורות את שתיהן, או לפחות את השיטה הראשונה, בכל בתי הספר העממיים.

יהי נתון לנו מספר טבעי בכתיב עשרוני, שהספרה הראשונה שלו מימין היא a, השניה b, השלישית c, וכן הלאה. אז, על פי השיטה העשרונית, מסומן על ידי כך המספר שערכו הוא:

$$a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + \ldots$$

למשל, 275 שווה לסכום $2\cdot 100+7\cdot 10+5$. אבל, הרי קיימות הקונגרואנציות

$$10 \equiv 1 \pmod 9, \quad 100 \equiv 1 \pmod 9, \quad 1000 \equiv 1 \pmod 9, \ldots$$

לכן המספר הנתון קונגרואנטי למספר

$$a+b+c+d+\ldots \pmod 9.$$

למשל: $275 \equiv 5+7+2 = 14 \equiv 5 \pmod 9$. יוצא מזה שכל מספר, הכתוב על פי השיטה העשרונית, נותן אותה השארית לגבי החילוק ב 9 כמו סכום־הספרות שלו; בפרט, המספר עצמו מתחלק ב 9, אם — ורק אם — סכום־הספרות מתחלק ב 9. לכן, אם הכפלנו שני מספרים גדולים למדי זה בזה וקבלנו את המכפלה P, וספק בידנו אם חישבנו אל נכון, נוכל לעשות את המבחן הקל הבא המכונה בספרות העברית בשם מאזני חשבון: במקום להכפיל שנית את המספרים נכפיל רק את סכומי־הספרות שלהם; אז מכפלת שני סכומים אלה צריכה להיות קונגרואנטית מודולו 9 למספר P או, יותר פשוט, לסכום־הספרות של P. אם סכומי־הספרות שעלינו להכפילם גדולים מ 9, נוכל לקחת במקומם את סכומי־הספרות שלהם, היינו, את סכום־הספרות של סכום־הספרות.

דוגמה: $7744\cdot 88 = 681472$. מבחן: סכום הספרות של 7744 הוא 22, וסכום הספרות של 22 הוא 4. סכום הספרות של 88 הוא 16, וסכום הספרות של 16 הוא 7. סכום הספרות של 681472 הוא 28. והרי באמת קיים $4\cdot 7 = 28$[1].

---

1. לו לקחנו במקום 28 שוב את סכום הספרות שהוא 10, או אפילו את סכום הספרות של 10 שהוא 1, היה חשבוננו מתאשר גם על סמך זה, כי $4\cdot 7 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 9$.

מה שנאמר כאן לגבי 9 קיים גם לגבי 3, הואיל ו 10 קונגרואנטי ל 1 גם מודולו 3. אלא שמבחן זה אינו מועיל כל כך; כי אף אם לא חישבנו אל נכון, יש אפשרות של $\frac{1}{3}$ שהתוצאה האי־נכונה קונגרואנטית במקרה לנכונה מודולו 3.

מבחן אחר מתכוון לבדוק, אם מספר נתון מתחלק ב 11. אנו סומכים על הקונגרואנציות

$$10 \equiv -1 \pmod{11},\ 100 \equiv 1 \pmod{11},\ 1000 \equiv -1 \pmod{11},\ 10000 \equiv 1 \pmod{11},$$

וכן הלאה. אם נכתוב שוב מספר כל שהוא, הנתון בכתיב העשרוני: $\ldots . d\,c\,b\,a$, כפי גדלו האמתי, היינו בצורה

$$a+10b+100c+1000d+\cdots$$

אז יצא, שהמספר הזה קונגרואנטי ל

$$a-b+c-d+\cdots \pmod{11}.$$

לכן ברצותנו לבדוק, אם המספר הנתון מתחלק ב 11, עלינו רק לחשב את סכום הספרות של היחידות, המאות, הרבבות וכן הלאה, ולחסר מן הסכום הזה את סכום הספרות של העשרות, האלפים וכן הלאה. אם, ורק אם, הבדל זה מתחלק ב 11, מתחלק המספר עצמו ב 11. אם לא, אז נקבל כך אותו המספר מתוך הסדרה $(1, 2, \ldots, 9, 10)$ אשר המספר הנתון קונגרואנטי לו מודולו 11. בצורה הדומה לגמרי למאזני החשבון שהכרנום לעיל, אפשר לבסס גם על זה מבחן לנכונות הכפל. אם שני המבחנים האלה, שנוכל לבצעם בעל פה בן רגע, מאשרים את החשבון המקורי, אז נוכל לאמר באפשרות של $\frac{98}{99}$ כי חישבנו אל נכון.

דברנו לעיל על משפטו הקטן של פרמה. שם זה רומז כי, בין המשפטים השונים שגילה פ ר מ ה, ישנו גם „משפטו הגדול של פרמה". תהום ממש מפרידה בין שני המשפטים האלה: בעוד שהוכחת הראשון, כמו שראינו, קלה למדי, טרחו החוקרים מאות בשנים בהוכחת השני (שקוראים לו גם „המשפט האחרון של פרמה"); ועד היום לא הצליחו ל ה ו כ י ח ו לגמרי. לעומת זאת קל מאד להבין מה ט ו ע ן משפט זה.

דוגמאות כמו:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \qquad 12^2 + 5^2 = 13^2,$$

שאפשר להוסיף עליהן אינסוף אחרות, מראות שאת המשואה ה„דיופַנטית"[2] $x^2+y^2=z^2$ בעלת שלושת הנעלמים x, y, z אפשר למלא באופנים שונים. כך ששמים במקום הנעלמים מספרים טבעיים. כל שלישיה (x, y, z) הממלאת את המשואה הזאת נקראת „שלישית־מספרים פיתגורית"; כי על פי המשפט הגיאומטרי הידוע של פיתגורס[1] נוכל לראות x ו y כארכי שני הניצבים ו z כאורך היתר

1. Pythagoras

במשולש ישר־זוית מסוים[1]. (אגב: זמן רב לפני שהוחל לעסוק בגיאומטריה כבמדע עיוני, ידעו המצרים העתיקים מן הנסיון, שהרוצה ליצור – למשל, לשם מקצוע הבנין – זוית ישרה, דיו לבנות משולש שצלעותיו הן פי 3, פי 4 ופי 5 מאורך מסוים.)

טבעי הדבר להביא בחשבון, על יד המשואה הדיופנטית הנ"ל, גם את המשואות: $x^3+y^3=z^3$, $x^4+y^4=z^4$, וכן הלאה, או באופן כללי את המשואה: $x^n+y^n=z^n$ (n גדול מ 2), ולשאול: האפשר למלא אותה על ידי ערכים טבעיים של x, y, z?

פ ר מ ה נתן תשובה שלילית לשאלה זו, אמנם בצורה קצת מוזרה. בזמן ההוא, לפני שלוש מאות שנה בערך, לא היו במציאות עתונים למתימטיקה כדי לפרסם בהם תגליות חדשות. הדרך הנהוגה לפרסומים כאלה היתה אז חליפת מכתבים עם המתימטיקנים החשובים שמספרם בכל דור היה קטן מאד. פרמה השתמש מלבד זאת גם בדרך אחרת, כדי לקבוע את תוצאות חקירותיו: החוקר היווני ד י ו פ נ ט[2] הביא בספרו העקרי „אריתמטיקה" חדשות חשובות בשדה האלגברה ותורת המספרים, ביניהן שיטה כללית לקביעת פתרונותיה של המשואה $x^2+y^2=z^2$ הנזכרת לעיל. היה לו לפרמה טופס של ספר זה, ובשולי העמודים של ה„אריתמטיקה" רשם כמה מתגליותיו. בעמוד שבו ידובר במשואה הפיתגורית הנ"ל, כתב פרמה את הדברים האלה: „אי־אפשר לתאר מעוקב (חזקה שלישית של מספר) כסכום שני מעוקבים, או חזקה רביעית כסכומן של שתי חזקות רביעיות, או באופן כללי, לתאר חזקה z^n שבה n גדול מ 2, כסכומן של שתי חזקות בנות אותו המעריך n. למשפט זה מצאתי הוכחה מפליאה באמת, אפס כי השולים הצרים אינם מרשים לי לכתוב אותה כאן."

חוסר המקום בשולי הספר הנדון מנע מאתנו עד היום ודאות גמורה על כך, אם באמת מצא פרמה הוכחה נכונה למשפטו זה. „המשפט הגדול של פרמה" – דבר שאנו מטילים בו היום ספק גדול – או אם טעה בהערתו הנ"ל (אף על פי שבדרך כלל לא היה מדרכו לטעות). עוד אי־נעימות אחרת הביא עלינו חוסר מקום זה: הנדיב היהודי וולפסקיהל[3] שהתענין מאד במתימטיקה, קבע בשנת 1907 פרס של 100.000 מרק[4] למי שיפתור את בעית המשפט הגדול של פרמה (על ידי הוכחה, או על ידי בירור עד כמה אין משפט זה נכון), ומסר את הסכום הזה לאקדמיה למדעים בגֶטינגן, שתשמור על הפרס ועל חלוקתו הנכונה במשך מאה שנה לכל היותר. במשך שבע השנים שבין 1907 ועד פרוץ מלחמת העולם היו לא לבד האקדמיה

1. עיין בספרו הקטן והקל של W. LIETZMANN אשר תורגם עברית ע"י ב. אמירה (B. AMIRA): ליצמן, משפט פיתגורס. ת"א וירושלים (הוצאת „מדע ואמנות") תרפ"ו.
2. Diophantos
3. P. Wolfskehl
4. הסכום התאים אז ל 5000 £ (או 5000 לא"י).

הנ"ל, כי אם גם מערכות רבות של עתונים למתימטיקה ומספר גדול של מתימטיקנים בודדים מקבלים בלי הפסק מאנשים שונים, רובם לא־מתימטיקנים (אבל גם פרופסורים למתימטיקה בכללם), מאות כתבי־יד ומדפסים, המכילים לדעת מחבריהם הוכחות למשפט הגדול של פרמה. אפס כי כל ההוכחות האלה היו אי־נכונות; בהן שגיאות משגיאות שונות, למן הגסות ביותר עד דקות למדי; מאמרים אחדים מלאי חריפות, ובין המחברים היו שאיימו בתביעה משפטית במקרה שלא יקבלו את הפרס. אי־הנעימות שהביא הפרס הזה על מתימטיקנים רבים, נתבטלה אמנם מאז הורידה האינפלָציה בגרמניה עד אפס את פרסו של וולפסקיל. בכל זאת, עד היום מקבלות עוד פעמים האקדמיות והאוניברסיטאות השונות, וביניהן האוניברסיטה העברית, הוכחות כביכול של משפט פרמה.

לעומת החסרונות האלה, הנובעים מחוסר מקום בספרו של פרמה, עומד יתרון כביר. אמנם לגבי עצם הענין: למצוא הוכחה למשפט פרמה, לא הצליחו נסיונות המתימטיקנים, ביניהם גדולי הדורות, במשך מאות בשנים; לעומת זאת בנו, מתוך מאמציהם להוכיח את המשפט, סעיפים חדשים שערכם המדעי עולה בהרבה על ערך משפטו של פרמה עצמו. את אי־האפשרות למלא את המשואה $x^n + y^n = z^n$ במקרים $n = 3, 4, 5$, הוכיחו כבר אוילר ודיריקלה בעזרת שיטות שאינן עמוקות ביותר. ואולם יותר מזה לא ידעו המתימטיקנים לפני מאה שנה, והשיטות שבהן הצליח קומר[1], תלמידו של דיריקלה, להשיג תוצאות מקיפות הרבה יותר, היו מסוג עמוק עד מאד, שאת רעיונו היסודי הכניס כבר גאוס אל תורת המספרים (ראה להלן, § 5). בעזרת השיטות האלה עלה בידי קומר ובידי הנלוים עליו אחר כך, להוכיח שטענתו של פרמה נכונה לגבי מחלקה כללית מסוימת של מספרים ראשוניים[2] n, ומלבד זה לגבי סוגים נוספים. בין המספרים האלה נמצאים, למשל, כל המספרים הראשוניים עד $n = 607$[3]. בכל זאת נשארו לנו עוד מספרים רבים n שאין אנו יודעים עדיין אם יש פתרונות למשואת פרמה לגביהם, וגם נעלם מאתנו אם כמות המספרים האלה אינסופית היא או רק סופית[4]. נוכל להעיר שוב, כמו במקרים קודמים, שהקושי המיוחד לבעיה זו יסודו באופי־החיבור שלה, שלא בנקל עולה בידינו להפכו אל אופי של כפל.

1. E. E. Kummer

2. מלבד הערך $n = 4$, די להוכיח את משפטו של פרמה בשביל מספרים ראשוניים n. כי לו נתמלאה המשואה $x^{p \cdot q} + y^{p \cdot q} = z^{p \cdot q}$ ע"י הערכים $x = a$, $y = b$, $z = c$, הלא אז היה קיים: $(a^q)^p + (b^q)^p = (c^q)^p$, ז"א משואת פרמה היתה מתמלאת בשביל המעריך $n = p$. המעריך $n = 4$ יוצא מן הכלל מכיון שבשביל $n = 2$ הרי המשואה הנדונה מתמלאת.

3. בהנחה שאף אחד מהמספרים x, y, z אינו מתחלק ב n, הוכח הדבר עד למעלה מ 253 מליון השוה H. S. Vandiver ב *Am. Math. Monthly*, כרך 53 (1946).

4. את מצב הבעיה לפני שנה מצייר ספר
P. BACHMANN: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Berlin 1919.
השוה גם L. J. MORDELL: Three lectures on Fermat's last theorem. London 1921.

§ 4. מספרים משוכללים ורֵעים.

נעסוק עוד בשתי בעיות מיוחדות ומבודדות, שכבר טפלו בהן מתימטיקני יון ואשר לגביהן התקדמנו מעט מאד במשך אלפיים השנים האחרונות. בשם „מחלקים" של מספר n נתכוון כאן למחלקים אמיתיים, לרבות את המחלק 1, אבל לא ל n עצמו. לפיכך מחלקי המספר 10 הם: 1, 2, 5, וסכומם $1 + 2 + 5$ קטן מ 10. לכל מספר כזה, הגדול מסכום מחלקיו, קוראים בשם „עודֵף". לעומת זאת כל מספר הקטן מסכום מחלקיו ייקרא „חסר", כגון המספר 12; כי סכום מחלקיו $1 + 2 + 3 + 4 + 6$ גדול מ 12. בין שני הסוגים האלה נמצאים המספרים השווים לסכום מחלקיהם; כל מספר כזה נקרא מספר משוכלל. שני המספרים המשוכללים הקטנים ביותר כבר היו ידועים לאומות עתיקות שונות; הם 6 (שווה ל $1 + 2 + 3$), ו 28 (שווה ל $1 + 2 + 4 + 7 + 14$). היוונים גילו גם את שני המספרים המשוכללים העוקבים: 496 ו 8128. המספר המשוכלל החמישי הוא 33 550 336. בספרו של אבקלידס נמצאת כבר תוצאה כללית מענינת מאד לגבי המספרים המשוכללים, והיא ההוכחה שכל מספר בעל הצורה $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ הוא מספר משוכלל, בתנאי שהגורם השני $(2^n - 1)$ הוא מספר ראשוני. בתתנו ל n ערכים מתאימים, נקבל את כל שלשה־עשר המספרים המשוכללים הידועים בכלל עד היום; לגדול בהם כמעט 400 ספרות. כולם נגמרים בספרה 6 או 8, ולא קשה להוכיח שזוהי תכונת כל מספר משוכלל זוגי. הרבה מתמטיקנים עסקו במספרים המשוכללים במשך הדורות, ומתוך מאמצים בכוון זה נתגלה משפטו הקטן של פרמה (עיין בעמ' 37) שחשיבותו עולה בהרבה על פרשת המספרים המשוכללים. אכן רק כאלפיים שנה אחרי אבקלידס הצליח אוילר להשלים את התגלית הנדונה בהוכיחו את המשפט הבא:

לא רק כל מספר בעל הצורה $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ ($2^n - 1$ מספר ראשוני) הוא מספר משוכלל, אלא גם להיפך: כל מספר משוכלל זוגי הוא בעל צורה זו.

אם, לעומת זאת, נשאל מה הוא המצב לגבי מספרים משוכללים אי־זוגיים, הרי התשובה היא, שעליהם אנו יודעים בדיוק מה שידעו היוונים העתיקים, והוא: לא כלום! לא ידוע לנו שום מספר כזה, ואולם גם לא מצאנו הוכחה, כי אין מספרים כאלה במציאות כל עיקר.

נוכיח כאן לפחות את תוצאתו של אבקלידס, היינו כי $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ מהווה מספר משוכלל, בתנאי ש $2^n - 1$ הוא מספר ראשוני. לשם כך נפתור ראשית באופן כללי את הבעיה: מהו סכום כל המחלקים של מספר טבעי נתון n (לרבות את n עצמו בין המחלקים)? נסמן את הסכום הזה ב $S(m)$!

אם $m = p^s$ הוא חזקה של מספר ראשוני, אז הדבר קל. כי מחלקי p^s הלא המה: $1, p, p^2, \ldots, p^s$; ומכיון שקיים: $(1 + p + p^2 + \ldots + p^s)(p - 1) = p^{s+1} - 1$,

הרי נקבל: $S(p^s)=\frac{p^{s+1}-1}{p-1}$.[1] נפרק עתה את המספר הנתון m, אם איננו חזקה של מספר ראשוני יחיד, לחזקות של כל גורמיו הראשוניים (השוה עמ' 26): $m=p_1^{s_1}\cdot p_2^{s_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{s_k}$, ונרשום לפנינו את השויונות הבאים:

$$1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{s_1}=\frac{p_1^{s_1+1}-1}{p_1-1}$$

$$1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{s_2}=\frac{p_2^{s_2+1}-1}{p_2-1}$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{s_k}=\frac{p_k^{s_k+1}-1}{p_k-1}.$$

נכפיל ביניהם את כל הסכומים המהווים את האגפים השמאליים של k שויונות אלה; ע"י זה נקבל ס"ה סכום של $(s_k+1)\cdots(s_2+1)\cdot(s_1+1)$ מחוברים[2] שכל אחד מהם הוא מכפלה של k גורמים (אחד אחד מתוך כל שורה); המחובר הראשון יהיה $1=1\cdot1\cdot\ldots\cdot1$, האחרון $m=p_k^{s_k}\cdots p_2^{s_2}\cdot p_1^{s_1}$. והנה מתברר שבין המחוברים האלה מופיעים כל המחלקים של m, ורק הם, וכל מחלק רק פעם אחת; כי הלא כל מחלק של m הוא מכפלה של חזקה מסוימת של p_1 (לכל היותר החזקה הs_1-ית; לרבות את $p_1^0=1$), של חזקה מסוימת של p_2, ..., ושל חזקה מסוימת של p_k. אבל הרי כל מכפלה כזו מופיעה בתוך הסכום שקבלנו ע"י הכפלת כל האגפים השמאליים. יוצא מזה שמכפלת כל האגפים השמאליים הנהו סכומם של כל מחלקי m, ז. א. $S(m)$. לכן $S(m)$ שווה גם למכפלת כל האגפים הימניים, לאמור:

$$S(m)=S\left(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_k^{s_k}\right)=\frac{p_1^{s_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{s_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{s_k+1}-1}{p_k-1}.$$[3]

1. מובן לפי זה שהמנה $\frac{p^{s+1}-1}{p-1}$ מהווה תמיד מספר שלם.

2. דרך אגב יוצא מזה, שמספרם של כל מחלקי m הוא $(s_k+1)\cdot\ldots\cdot(s_2+1)\cdot(s_1+1)$; ז"א מספרם איננו תלוי בגודל הגורמים הראשוניים של m. למשל, ל$2^2\cdot3^4\cdot5^6$ יש לא פחות ולא יותר, מחלקים מאשר ל$7^2\cdot13^6\cdot19^4$. בנגוד לכך סכומם של כל מחלקי m תלוי, כמובן, בגודל הגורמים הראשוניים, כאשר תַּראה הנוסחה בשביל $S(m)$ שנקבלנה מיד.

3. קל להסיק מזה, אם נסמן P ב$p_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{s_k}$:

$$S(p_1^{s_1}\cdot P)=S(p_1^{s_1})\cdot S(P).$$

אחרי הכנה זו נפנה לעצם בעיתנו! את תכונתו של מספר m, להיות מספר משוכלל, נוכל לבטא בצורה[1]: $S(m)-m=m$, או $S(m)=2m$. יהי עתה $m=2^{n-1}(2^n-1)$, ויהיה 2^n-1 מספר ראשוני. אז מתחלק m רק בשני מספרים ראשוניים, 2 ו(2^n-1); לפי הסמון הקודם יהיה: $p_1=2$, $s_1=n-1$, $p_2=2^n-1$, $s_2=1$. לכן יוצא בשביל סכומם של מחלקי m, לפי מה שמצאנו בעמוד הקודם ולפי הנוסחה $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$:

$$S(m)=\frac{2^{(n-1)+1}-1}{2-1}\cdot\frac{(2^n-1)^2-1}{(2^n-1)-1}=(2^n-1)\cdot2^n.$$

את המכפלה שבאגף הימני נוכל לכתוב גם בצורה $(2^n-1)\cdot2^{n-1}\cdot2$, וזה שווה ל$2m$. לכן m ממלא את תכונת המספרים המשוכללים $S(m)=2m$; ז"א הוכחנו את תוצאת אבקלידס (עמ' 43) לגבי מספרים אלה.

את היפוך התוצאה הזאת שהזכרנוה לעיל – היינו שאין מספרים משוכללים זוגיים מלבד אלה – נוכיח במלואים.

מכל זה מתברר כי חיפוש המספרים המשוכללים הזוגיים תלוי בחיפוש המספרים הראשוניים בעלי הצורה 2^n-1. (השוה את בעית המספרים הראשוניים בעלי הצורה 2^n+1 שעליה הרחבנו את הדבור לעיל ב§ 2!) המספרים האלה נקראים בשם „מספרי מֶרְסֶן"[2]. מספר מן הצורה 2^n-1 יוכל להיות מספר ראשוני רק אם n מצדו הוא מספר ראשוני (השוה את ההערה בעמ' 34); ברם לא תמיד, אם n ראשוני, יהיה גם 2^n-1 ראשוני. מ1950 ואילך השתמשו במחשבים אלקטרוניים כדי לגלות מספרים ראשוניים מסוג זה; כבר ב1952 נתגלה שהערך $n=2281$ נותן מספר ראשוני. השוה H. S. Uhler ב*Scripta Math.*, כרך 19 (1953).

בצאתנו מן התאור $m=2^{n-1}(2^n-1)$, נוכל להוכיח בלי קושי את המשפטים הבאים:

א) בשביל כל מספר משוכלל זוגי m, פרט ל6, קיים: $m\equiv1\pmod9$, וm קונגרואנטי מודולו 13 לאחד המספרים 1, 2, 3, 8.

ב) כל מספר משוכלל זוגי, פרט ל28, קונגרואנטי מודולו 7 ל1 או ל6.

ג) כל מספר משוכלל זוגי, פרט ל6 ו496, קונגרואנטי מודולו 100 לאחד המספרים 16, 28, 36, 56, 76; אלה הן אפוא שתי הספרות האחרונות בכתיב העשרוני של כל מספר כזה.

1. כאן עלינו לחסר m מ$S(m)$, הואיל ובהגדרת המספרים המשוכללים (עמ' 43) לא הבאנו בחשבון בין מחלקי m את m עצמו, בנגוד להגדרת $S(m)$.

2. M. Mersenne

3. לבעית פירוקם של המספרים בעלי הצורה 2^n-1 השוה את הספר של קרייטשיק (שהוזכר בעמ' 26), כרך א', עמ' 218, ומאמרו שצויין בעמ' 35.

לבסוף נזכיר בלי הוכחות תנאים אחדים, אשר צריך למלא אותם כל מספר משוכלל אי־זוגי x, אם בכלל ישנו במציאות מספר כזה (מה שלא ידוע, כאמור לעיל):

1) x קונגרואנטי מודולו 12 או ל 1 או ל 9, ואינו מתחלק ב $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

2) x מתחלק לפחות בששה מספרים ראשוניים שונים.

3) אם x אינו מתחלק ב 3, אז יש ל x לפחות תשעה גורמים ראשוניים שונים.

4) אם x אינו מתחלק לא ב 3 ולא ב 5, אז יש ל x לפחות ארבעה עשר גורמים ראשוניים שונים.

5) אם x אינו מתחלק לא ב 3 ולא ב 5 ולא ב 7, אז יש ל x לפחות עשרים ושבעה גורמים ראשוניים שונים (ולכן קיים אז $x > 10^{44}$).

6) אם יש ל x בדיוק r גורמים ראשוניים שונים, אז הקטן ביניהם קטן מ $(r+1)$[1].

לא פחות מאשר במספרים המשוכללים התעניינו היוונים, ולפניהם אנשי הודו, בזוגות של מספרים „רעים" כמו שקראו להם בבית מדרשו של פיתגורס. נבאר את טיבם על פי דוגמה: 220 ו 284. סכום כל המחלקים של 220 הוא: $110+55+44+22+20+11+10+5+4+2+1$, ושווה אפוא ל 284. בעוד שסכום כל מחלקי 284 הוא $142+71+4+2+1 = 220$. כן בדרך כלל מכילים הזוגות האלה שני מספרים m ו n כך, שסכום מחלקי m שווה ל n, וסכום מחלקי n שווה ל m — אם, כמו בהגדרת המספרים המשוכללים, נוציא מכלל מחלקיו של מספר את המספר בעצמו. כעת אנו מכירים כמות הגונה של זוגות כאלה, בערך 70 זוג; אבל עד היום לא יכלו החוקרים לברר אם יש רק מספר סופי של זוגות מספרים רעים, או אם הם נמצאים במספר אינסופי.[2]

§ 5. מספרים אלגבריים ואידיאליים.

אנו גומרים בזה את שורת הבעיות מתוך תורת המספרים המובאות כאן, אף כי נוכל להאריך עוד הרבה הן לגבי השאלות אשר מצאו את פתרונן, והן לגבי אותן מהן המחכות עוד לתשובה. ואולם לבסוף נרמוז עוד על ענף שבעצם שייך גם הוא לתורת המספרים, אף על פי שאינו מטפל דוקא במספרים שלמים. בשנת 1831 כבר מצא גאוס למועיל, ואפילו לנחוץ, להכניס חומר חדש של מספרים לתוך תורת המספרים לשם פתרון בעיה מסובכת שמדובר בה רק על מספרים טבעיים. את החומר החדש מהוים המספרים בעלי הצורה $a+bi$, שבה a ו b מסמנים מספרים שלמים (לא רק חיוביים), ו $i = \sqrt{-1}$.

כמו שהזכרנו לעיל בקשר עם משפטו הגדול של פרמה, הכניס קומר, בנסותו להוכיח משפט זה, מספרים בני סוג כללי יותר; למשל: מספרים בעלי הצורה

1. בזמן האחרון הקטינו את החסם הזה עוד למטה מכך.
2. השוה E. B. Escott ב *Scripta Math.*, כרך 12 (1946), עמ' 61—72.

$a+b\alpha$, שבה α יוכל להיות השורש הרבועי ממספר שלם כל שהוא, חיובי או שלילי. למספרים כאלה וגם למספרים מסוג כללי הרבה יותר, שעליהם נדבר בפרק השמיני, קוראים בשם „מספרים אלגבריים"; בפרט בשם „מספרים אלגבריים שלמים" אם a ו b יהיו מספרים שלמים. בשביל מספרים כאלה או, ליתר דיוק: בתוך תחומים ידועים של מספרים כאלה, מגדירים את פעולות החיבור והכפל וגם את המושג של „מחלקי" מספר נתון, בצורה שהיא מתאימה לגמרי לאותם המושגים בין המספרים השלמים הרגילים, היינו: בין המספרים $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. למשל, אומרים שהמספר האלגברי השלם A מתחלק במספר אחר כזה B, אם ישנו בתוך התחום שמטפלים בו מספר אלגברי שלם C כך שקיים $A = B \cdot C$. על ידי זה נוכל להגדיר גם את מושג המספר הראשוני כלפי מספרים אלגבריים שלמים בדיוק כמו שהגדרנוהו לעיל. בעזרת המושגים האלה עיבד קומר בזמנו הוכחה, שלמה כביכול, למשפטו האחרון של פרמה ומסר אותה למורו, לדיריקלה. ואולם אחרי עיון החזיר דיריקלה את ההוכחה לתלמידו, בהעירו שנשארה בה נקודה לא ברורה: קומר הסתמך גם כלפי המספרים האלגבריים והמספרים הראשוניים שביניהם על המשפט היסודי, שעל פיו אפשר לפרק כל מספר שלם לגורמים ראשוניים באופן אחד ויחיד (עיין עמ' 26); דיריקלה העיר שאת המשפט הזה הוכיחו עד כאן רק לגבי המספרים הטבעיים (או המספרים השלמים הרגילים), ושאפשר להטיל ספק בכך אם המשפט ישאר נכון גם כלפי המספרים האלגבריים. כשבדק קומר את הדבר הזה מצא שבאמת אין המשפט נכון בדרך כלל לגבי מספרים אלגבריים. כאן אפשר שהמספר האלגברי השלם A מתפרק בצורה $A = B \cdot C$, שבה B ו C הם מספרים ראשוניים אלגבריים, ושישנם גם שני מספרים ראשוניים אלגבריים אחרים D ו F כך שגם $A = D \cdot F$ — אף על פי ש C ו B, בהיותם מספרים ראשוניים, כמובן אינם מתחלקים לא ב D ולא ב F. את האפשרות לכך נסביר על פי דוגמה במלואים לחלק זה.

מתעוררת אפוא השאלה איך נוכל לתקן מעוות זה. שבתחומים כאלה אין עוד תוקף למשפט היסודי, המבטיח שרק באופן יחיד אפשר לפרק כל מספר שלם לגורמיו הראשוניים? הרי המשפט הזה המופיע בראש תורת המספרים הוא האמצעי החשוב ביותר והכללי ביותר לכל ההוכחות הנמצאות בתורת המספרים המולטיפליקטיבית! איך בפרט יכול היה קומר, אחרי כשלונו הגדול הנ"ל, לחזור לתפקידו: להוכיח את משפטו האחרון של פרמה בעזרת תחומים מוכללים של מספרים, וביניהם לרוב דוקא תחומים שבהם המשפט היסודי אינו קיים? לשאלה זו, לפחות בשביל מקרים רבים למדי, השיב קומר עצמו תשובה, המפליאה בחריפותה ובמקוריותה. השיטה לתשובה זו התפתחה אחר כך בכוונים שונים, ביחוד על ידי החוקרים דדקינד[1], קרונקר והנזל[2], ונהיתה למקצוע חדש, עמוק ורחב.

1. R. Dedekind
2. K. Hensel

בתורת המספרים: המספרים האלגבריים, ותורת האידיאלים. לא נוכל להכנס לתוך הרעיונות המופשטים האלה; אבל רמז קל על רעיונו של קומר עצמו יספיק כדי לתת לנו מושג אל מה שואפות כל השיטות האלה.

נניח, שבתחום ידוע $\mathfrak{A}$ של מספרים אלגבריים שלמים ישנם שני פרוקים של המספר A מתוך $\mathfrak{A}$ בעלי הצורה: $A = B \cdot C = D \cdot F$, וש F, D, C, B הם מספרים אלגבריים ראשוניים (לאו דוקא כולם שונים), כך שלמשל B (וכמו כן C) אינו מתחלק לא ב D ולא ב F. (אם נקח את דוגמת התחום $\mathfrak{B}$ המכיל את המספרים $a+b\sqrt{-6}$, כמבואר במלואים, נוכל לקחת 2 תחת B, 3 תחת C, $-\sqrt{-6}$ תחת D, $\sqrt{-6}$ תחת F.) בחקור קומר תופעה מוזרה זו הגיע לידי הפלפול הבא: אם למספרים B ו C, אף על פי שהם מספרים ראשוניים, ישנה בכל זאת התכונה, שמכפלתם מתחלקת במספר ראשוני אחר D, הרי אנו מוכרחים להסיק, שיש איזו קורבה פנימית בין המספרים הראשוניים B ו C מצד אחד ובין D מצד שני, אף כי קורבה זו אינה מתגלה בהתחלקות. אמנם קשה לכוח דמיוננו לתאר זאת, אבל מדוגמת התחום של המספרים $a+b\sqrt{-6}$ (המופיעה במלואים) נוכל לקבל רמז איך להדריך את דמיוננו; ואפילו דוגמה פשוטה לגמרי כמו $10 \cdot 9 = 6 \cdot 15 = 90$ תוכל לשמש לנו כמדריך. כאן אף אחד מן המספרים 6 ו 15 אינו מתחלק ב 10; אם בכל זאת מכפלתם מתחלקת ב 10, הרי זה תלוי בעובדה, ש $2 \cdot 3 = 6$ ו $3 \cdot 5 = 15$, וכן במכפלה $6 \cdot 15$ מופיעים הגורמים 2 ו 5 שמכפלתם 10. אמנם כאן 6, 15 ו 10 אינם מספרים ראשוניים, בניגוד למקרה $B \cdot C = D \cdot F$ שעלינו לטפל בו. ומשום כך העז קומר לומר: אם המספרים B ו C הם מספרים ראשוניים ואינם מתפרקים אפוא לגורמים פשוטים יותר, בכל זאת נתאר לעצמנו כאילו אפשר לפרקם לגורמים פשוטים יותר; לשון אחר, ניצור לנו מספרים מלאכותיים שאינם במציאות ונקרא להם בשם „מספרים אידיאליים"! במקרה שלפנינו נאמר: את המספר הראשוני B נתאר כמכפלת שני מספרים אידיאליים $\varkappa$ ו λ; את המספר הראשוני C כמכפלת המספרים האידיאליים μ ו ν; כך ש $B \cdot C = \varkappa \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \nu$. אז נוכל לפרש את העובדה ש $B \cdot C$ מתחלק ב D, על ידי ההנחה שגם D מתפרק לגורמים אידיאליים, וזאת בצורה $D = \varkappa \cdot \mu$ (כמו שלעיל השתמשנו ב $2 \cdot 5 = 10$). מתוך הנחה זו נוכל להבין באופן קל, כביכול, את המצב: D הוא מספר ראשוני, ולכן אין מתחלקים בו לא B ולא C; אבל D מתפרק לגורמים אידיאליים $\varkappa$ ו μ, ומכיון שהגורם האידיאלי $\varkappa$ נמצא בתוך B, הגורם μ בתוך C, הרי אין לתמוה שבמכפלתם D מתחלקת המכפלה $B \cdot C$. בודאי היה זה רעיון נועז ומפתיע בשביל בני דורו של קומר, להכניס מספרים שאינם במציאות לתוך תורת המספרים בצורת מספרים אידיאליים. אכן הרעיון הזה לא היה נועז יותר ממה שהיה במאה הי"ח הפרוק $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ או $(-\sqrt{-1}-2)(-\sqrt{-1}+2) = 5$, היינו המצאת המספרים המדומים והמרוכבים (עיין בפרק השביעי); או ממה שהיה, מאות אחדות קודם לכן, השמוש במספרים השליליים.

מובן שהכנסת המספרים האידיאליים טעונה הכשרה מספיקה על ידי הגדרה לפעולות־חשבון מתאימות במספרים האידיאליים. לשם כך מצאו המתימטיקנים בדורות האחרונים דרכים מתוקנות יותר. לכל התוצאות שמקבלים על ידי הטפול במספרים האידיאליים אין ערך כשהן לעצמן, חשיבותן תלויה רק במסקנות המתקבלות בדרך זו כלפי המספרים הטבעיים והאלגבריים.

נגמור בזה את טיולנו בגן תורת המספרים; מטיבות חיצוניות — שלא להכנס לתוך קשיי החשבון המתימטי — הסתפקנו בכך שנהנינו בתוך גן רב גוני זה מאותם הפרחים שביפים הם מושכים את עינינו ביותר, ועם זאת נמצאים הם קרובים לדרך הסלולה. קרבה זו תרשנו להשקיף בלי כל קושי על יפי הפרח, אף כי ברוב המקרים לא עלה בידינו להסתכל ולראות כיצד הם משתרשים בקרקע. היינו מוכרחים אמנם לדלוג על פרחים אחרים — אשר מקצתם מזהירים עוד יותר — הרחוקים יותר מדי מכל אורח מתאים לטיול קל; דלגנו גם על פרחים שאינם מושכים את עין המטייל ביפים החיצוני, אבל מהנים הם תחת זאת הנאה כפולה ומכופלת את הטורח להכנס לעמקי סודותם. אין דרך המלך אל שפונים-טמונים כאלה; שושנים בין חוחים הם, הניתנות להקטף רק בידי האיש המזוין בכלי האנליזה הגבוהה ובשיטות המופשטות והמפותלות של האריתמטיקה החדישה.

מחובתנו להעיר, בסוף סקירתנו על תורת המספרים ועל שיטותיה, הערה בעלת אופי פילוסופי יותר ממתימטי: החומר שבו עוסקת תורת המספרים הלא הוא מן הסוג הפשוט ביותר, הוא תחום המספרים הטבעיים, שלמעשה ידועים הם לנו היטב מנעורינו, ושגם להלכה בנויים הם על תהליך אלמנטרי כל כך: המעבר ממספר כל שהוא לעוקבו. מתקבל על הדעת שהמספרים האלה, על סמך התהליך הפשוט הנ"ל, הם פריו של כח יצירתנו האנושית. בנוהג שבעולם, לא יוכל איש להבין ולדעת את החומר שביד היוצר על בוריו יותר מן היוצר עצמו, אשר מידיו יצאה היצירה. ועד כמה מפתיע הדבר שהאדם אשר יצר את המספרים, וחשב שפשוטים הם ושקופים לגמרי לנגד עיניו, מוצא, בעמדו לפני הבעיות המסובכות של תורת המספרים, שחומר המספרים כולל וטומן בתוכו המון סודות ומסתורין, שבתקופתנו אין לחוקר אפילו צל של תקוה לגלות אותם ולהוציאם לאור היום; ולא עוד, אלא שאפילו לגבי רוב אותם הסודות שהצלחנו לבררם, קיימת אי־התאמה בולטת בין החומר והבעיות הכרוכות בו מצד אחד ובין השיטות שעל ידיהן הצלחנו לפתור בעיות אלו מצד שני. הבעיות מכוונות לחומר הפשוט של המספרים הטבעיים, ודרכי ההוכחות מעוקלות בסבך המחריד של האנליזה המתימטית הגבוהה. מצב הדברים האלה מראה עד כמה פעולותיו הפשוטות של השכל האנושי הן בכל זאת מסובכות ומורכבות, עד כמה הן מכילות צדדים שהשכל ההוגה אינו מרגיש בהם, והוא רוקם אותם כאילו מתחת לסף ההכרה. בניגוד למדעי הטבע (ואפילו לשאר מדעי הרוח), שבהם הקשיים מובאים לפנינו מן החוץ,

נובעים הקשיים במתימטיקה מתוך עצמנו. ודוקא משום כך יש לראות במחקר המתימטי חובת כבוד של בני האדם לגבי עצמם, חובה מוחלטת שאינה קשורה בשום תועלת חיצונית כי אם במצוות־עשה: „דע את עצמך!" ואם לגבי הטבע אין לנו שום תקוה להתקרב בזמן מן הזמנים לגילוי אמתי של תכונותיו, הרי לפחות אין זאת תקוה משוללת יסוד שבשדה המתימטיקה — יצירתנו אנו — נוכל להתקרב הלוך וקרוב לסילוק כל המחיצות המתרוממות בין שכלנו ובין האמת. או ביתר ענוה וצמצום: שאין בעיה במתימטיקה אשר באופן עקרוני אי אפשר לנו למצוא את פתרונה.

תורת המספרים — המקצוע המתימטי הרחוק מכל תסבוכת טכנית במוצאו — מעוררת בנו רעיונות יסודיים כאלה על טיב המתימטיקה יותר מכל שאר מקצועותיה. לעומת זאת, ואולי בקשר עם זאת, רחוקה היא יותר מכל חברותיה מן המעשה בחיים, ביחוד מן הבעיות שבמדעי הטבע. אמנם מינקובסקי[1], שחקר באותה הצלחה בתורת־היחסות הפיסיקלית כמו בשדה המספרים, הגה את ההשערה, שפעם יגלו מדעי הטבע בתרכובת החומר הגלמי שבעולם את חוקי תורת המספרים; אבל לעת עתה עלינו לראות השערה זו כמעוף נועז של כח הדמיון, ולסכם בזה, שבתורת המספרים עוסקים בעיקר לא לשם תועלת מעשית, כי אם בחינת תורה לשמה, המספקת רק הנאה אסתיטית והמשביעה את תאות הסקרנות שבאדם.[2]

השלמה לעמוד 36.

E. Waring קבע ב1770 שכל מספר טבעי הוא הסכום של 9 חזקות שלישיות (חיוביות) לכל היותר, וטען: כנגד כל מספר טבעי k קיים מספר טבעי r באופן שאפשר לתאר כל מספר טבעי n כסכומם של r, לכל היותר, חזקות k־יות: כאן תלוי r בk בלבד ולא בn. טענה זו הוכחה בראשונה ב1909 ע"י הילברט.

בעזרת שיטה חדשה בתורת־המספרים החיבורית שהומצאה ב1916 ע"י Ramanujan ו Hardy — השיכה התקיפה ביותר בתחום זה מאז אוילר — הצליחו הרדי ו Littlewood להרחיב מאד את מסקנותיו של הילברט. החל מ1924 הלך Vinogradoff בדרך חדשה שאיפשרה את השימוש בשיטות אלמנטריות; מאז הובאה הבעיה לפתרון סופי, מתוך מחקריהם של Landau, Heilbronn, Estermann, Dickson, Pilai, Niven.[3]

---

1. H. Minkowski

2. לספרים על תורת המספרים אשר צוינו בעמ' 26, יש להוסיף עוד:
L. E. Dickson: Modern elementary theory of numbers. Chicago 1939.
G. H. Hardy and E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers. 2nd ed. Oxford 1945.
J. V. Uspensky and M. H. Heaslet: Elementary number theory. London 1939.

3. השוה הספר הקצר וה„אלמנטרי" שתורגם מרוסית:
A. Y. Khinchin: Three pearls of number theory. Rochester N. Y., 1952.

מלואים לחלק הראשון

הקדמה: המלואים האלה באים לפסק הוכחות והוספות שלא הובאו בגוף החיבור, הן מפני שאינן פשוטות כרוב דברי החיבור, הן כדי שלא להפסיק את מהלך הרעיונות. בתוך מלואים אלו נשתמש יותר בחשבונות מתימטיים, וגם לא נמנע מלדרוש פעמים מן הקורא התאמצות הגיונית. הקורא המתקשה להבין את המלואים, כולם או מקצתם, יוכל לדלוג עליהם וימצא נחמה פורתא בכך שאין הבנת החיבור תלויה בידיעת המלואים.

א) הכללת החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי של החבור ליותר מ2 או 3 מחוברים (מלואים לעמ' 19).

יהיו נתונים n מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (בסדר זה); n יסמן כאן מספר טבעי כל שהוא הגדול מ2. אז לא נוכל, בצאתנו מהגדרת החבור (1) ו(2) בעמ' 17), לחשב את סכומם של n המחוברים בבת אחת; כי ההגדרה הנ"ל מתכוונת רק לשני מחוברים. מאידך גיסא ברור הדבר שאפשר ליצור את הסכום הדרוש לנו, צעד אחרי צעד, ע"י כך שנצרף בכל פעם רק שני מחוברים; ברם שיטה זו סובלת מכך שהצעדים האלה אינם קבועים באופן מסוים ויחיד, אלא שיש דרכים שונות להגיע אל המטרה. ישנן, למשל, במקרה $n=3$ שתי הדרכים: $a+(b+c)$ ו$(a+b)+c$; במקרה $n=4$, חמש הדרכים: $a+[b+(c+d)]$, $a+[(b+c)+d]$, $(a+b)+(c+d)$, $[a+(b+c)]+d$, $[(a+b)+c]+d$. בכוונתנו להוכיח כאן שכל הדרכים השונות האלה מובילות לאותה המטרה, היינו שהסכומים השונים שיתקבלו כך שווים ביניהם, יהי מספר המחוברים מה שיהיה.

בשביל המקרה הפשוט ביותר, נוכחנו בזה בעמוד 18 בהכירנו את החוק האסוציאטיבי הפשוט $(a+b)+c=a+(b+c)$, או $(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$, לכן קיים המשפט הדרוש לנו, אם $n=3$.

כדי להוכיח שהמשפט קיים גם בשביל כל n הגדול מ3, די לנו להראות, כמו בהוכחות שבעמ' 18, שנכונות המשפט בשביל ערך מסוים $n=k$ (והערכים הקטנים מk) גוררת אחריה את נכונותו בשביל הערך $n=k+1$. ע"י זה נשתמש אמנם בשיטת האינדוקציה השלמה באופן השונה קצת ממה שבארנו שם: השינוי הוא בזה שהכוונה אינה למספרים הטבעיים כולם אלא לכל המספרים הגדולים מ2. ברור שלשם זה עלינו לצאת, לא כמו שם מ1, כי אם מן המספר הקטן ביותר הגדול מ2, הוא המספר 3; וכך עשינו באמת זה עתה. — הרעיון הזה מתבטא בכלליותו בצורה זו, המקבילה לצורה שהופיעה בעמ' 18/17: כדי להוכיח משפט $\mathfrak{M}$, המתייחס למספרים טבעיים, בשביל כל מספר הגדול ממספר נתון r, די

להראות: ראשית כי $\mathcal{M}$ נכון בשביל $r+1$, ושנית כי נכונותו של $\mathcal{M}$ בשביל מספר טבעי k כל שהוא (הגדול מ r) ובשביל המספרים בין r ל k, גוררת אחריה את נכונותו בשביל המספר העוקב $k+1$.

נניח אפוא שהחוק האסוציאטיבי קיים עד למספר מסוים k של מחוברים; היינו, שלסכום $a_1+a_2+\ldots+a_k$ ישנו „תמיד" (ז"א, בשביל כל ערכי המחוברים) ערך קבוע, התלוי רק במחוברים עצמם ובסדר שביניהם, ולא באופן שבו נצרפם שנים שנים ע"י סוגריים — וכן לסכומים „קצרים" יותר. ע"פ הנחה זו נבדוק את המצב כלפי $k+1$ מחוברים! עלינו להביא בחשבון רק את k האפשרויות הבאות של צרופי המחוברים $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1+(a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1})\\
S_2 &= (a_1+a_2)+(a_3+\ldots+a_k+a_{k+1})\\
&\vdots\\
S_{k-1} &= (a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})+(a_k+a_{k+1})\\
S_k &= (a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k)+a_{k+1}
\end{aligned}$$

כי כל שאר האפשרויות מתיחסות רק לצרוף האיברים הנמצאים כאן בתוך אותו הזוג של סוגריים; ומכיון שכל זוג כזה מקיף לכל היותר k איברים, הרי לא איכפת לנו איך נצרפם, ע"פ הנחתנו דלעיל. נשאר לנו אפוא רק התפקיד להוכיח את השויונות:

$$S_1=S_2=\ldots=S_{k-1}=S_k.$$

לשם כך יסמן m מספר טבעי כל שהוא בין 1 ובין $k+1$. אז, בהשתמשנו בחוק האסוציאטיבי לגבי ש ל ש ה איברים, נקבל[1]:

$$\begin{aligned}
&[(a_1+\ldots+a_{m-1})+a_m]+(a_{m+1}+\ldots+a_{k+1})=\\
&=(a_1+\ldots+a_{m-1})+[a_m+(a_{m+1}+\ldots+a_{k+1})].
\end{aligned}$$

אם נתחשב בזה, שמספר המחוברים שבתוך סוגריים מרובעים הוא לכל היותר k, וכי אפשר אפוא, ע"פ הנחתנו, לבטל את הסוגריים העגולים ש ב ת ו ך סוגריים מרובעים, מתברר מהשויון האחרון מגיד, אם $m=2$: $S_2=S_1$; אם $m=3$: $S_3=S_2$; ...; אם $m=k$: $S_k=S_{k-1}$. לכן הוכחנו את המבוקש — היינו שהחוק האסוציאטיבי קיים, כמו בשביל שלשה מחוברים, כך בשביל כל מספר גדול יותר של מחוברים. לכן מיותר הדבר להציג סוגריים בפעולת החבור.

נפנה עתה אל החוק הקומוטטיבי, שהוכחנוהו בעמ' 19 רק בשביל שני מחוברים, ז"א בצורה $a+b=b+a$, או $a_1+a_2=a_2+a_1$. נוכיח גם אותו בשביל כל מספר n של מחוברים!

1. כל סכום הנמצא בין סוגריים ע ג ו ל י ם משמש לנו כביטוי אחיד.

נוכל להסתפק בזה שנראה, כי מותר להחליף את הסדר של כל שני מחוברים ה ש כ נ י ם זה לזה. כי הלא ע"י השנות תחליפים פרוטים כאלה אפשר להשיג כל סדר שהוא בין המחוברים. קל להיווכח בזה[1], ולכן נתן רק דוגמה פשוטה:

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3+a_4 &= a_2+a_1+a_4+a_3=a_2+a_4+a_1+a_3=\\
&=a_4+a_2+a_3+a_1=a_4+a_3+a_2+a_1.
\end{aligned}$$

יוצא אפוא, שדי לנו להוכיח (אם $n>k\leq 1$)[2]:

$$\begin{aligned}
&a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n=\\
&=a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}+a_k+a_{k+2}+\ldots+a_n.
\end{aligned}$$

והנה בהשתמשנו, מלבד בחוק האסוציאטיבי שהוכחנוהו כבר, בחוק הקומוטטיבי כלפי שני מחוברים, נקבל:

$$\begin{aligned}
&a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n=\\
&=(a_1+\ldots+a_{k-1})+(a_k+a_{k+1})+(a_{k+2}+\ldots+a_n)=\\
&=(a_1+\ldots+a_{k-1})+(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+2}+\ldots+a_n)=\\
&=a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}+a_k+a_{k+2}+\ldots+a_n,
\end{aligned}$$

מה שהיה עלינו להוכיח.

סוף דבר: בחבורם של שני מספרים טבעיים או יותר, נוכל לשנות הן את צרופם הן את סדרם של המחוברים כפי ראות עינינו, בלי שנשנה ע"י זה את ערך הסכום.

נסיים בהערה עקרונית: בהוכחות שלפנינו לא הסתמכנו לא על תכונתם של ה a_k שהם מסמנים מספרים טבעיים, ולא על תכונות החבור, פרט לחוק האסוציאטיבי לגבי שלשה מחוברים — ובחלק השני: גם לחוק הקומוטטיבי לגבי שני מחוברים. יוצא מזה שמסקנותינו נשארו בתקפן בשביל כל סוג של מספרים (רציונליים, ממשיים, וכו') ובשביל כל פעולת חשבון ביניהם, בתנאי שהפעולה יוצרת מתוך כל שני מספרים מספר מסוים (סכום, כפל, וכו') וממלאת את החוק האסוציאטיבי לגבי הפעולה הנדונה בשביל כל שלשה איברים — ובחלק השני: ממלאת גם את החוק הקומוטטיבי לגבי הפעולה הנדונה בשביל כל שני איברים. אין צורך אפילו שהאיברים יהיו דוקא מספרים, ולכן יש תוקף למסקנותינו גם כלפי חבורות מופשטות (עיין בפרק החמישי, § 1).

1. בעצם מוכיחים גם את זה בעזרת האינדוקציה, שתפקידה כאן פשוט ושקיף ביותר.
2. משמעות הסימן $\leq$ היא: שווה או קטן.

ב) הוכחה, שקבוצה סופית אינה אקויולנטית לשום קבוצה-חלקית-ממש שלה (מלואים לעמ' 22).

ראשית כל, נכון משפט זה בודאי בשביל כל קבוצה בעלת איבר אחד. כי הלא לקבוצה כזו אין קבוצה-חלקית-ממש, מלבד הקבוצה הריקה שהיא חסרת כל איבר, והרי ברור, שאין העתק בין הקבוצה הריקה לקבוצה בעלת איבר.

שנית, נניח שכבר הוכח משפט זה בשביל כל קבוצה שמספר איבריה פחות ממספר מסוים m. תהי K קבוצה כל שהיא בת m איברים, ונוכיח כי נכון המשפט גם בשביל K! כדי להראות את זאת נלך בדרך שהולכים בה לשם הוכחות רבות במתימטיקה, היינו: בדרך השלילה, המניחה שאין הדבר כך ומוציאה סתירה מהנחה זו. נניח אפוא שהקבוצה K היתה אקויולנטית לקבוצה-חלקית-ממש L של K. לפיכך צריכים להיות העתקים בין K ל L; נבחר לנו העתק קבוע כזה! אם z מסמן איבר כל שהוא ב K, אז נבדיל בין שני מקרים: יתכן ש z לא יימצא בקבוצה החלקית L, או ש z יימצא בה.

במקרה הראשון נוציא מתוך K את האיבר z, ומתוך L אותו האיבר שהוא בן־זוג לאיבר z של K. על ידי צמצום זה תישאר מן ההעתק בין K ל L שארית היוצרת העתק בין קבוצה בת $m-1$ איברים (השארית של K אחרי שהוצאנו את z) ובין קבוצה-חלקית-ממש ממנה. אבל העתק זה הריהו סותר את ההנחה, שלפיה נכון המשפט שלנו בשביל כל קבוצה בת פחות מ m איברים.

פשוט פחות יהיה המקרה השני[1], בו נמצא z גם בקבוצה החלקית L. אז נבדיל בין שני מקרים חלקיים: ראשונה, שבן־זוגו (בתוך L) של האיבר z של K יהיה z בעצמו; שנית, שבן־זוגו יהיה איבר אחר. המקרה החלקי הראשון פשוט מאד. כי אם בן־הזוג ל z הוא האיבר z של L, נוציא את z הן מ K והן מ L ונקבל, כמו במקרה הראשון, העתק בין קבוצה בת $m-1$ איברים ובין קבוצה-חלקית-ממש ממנה, בניגוד להנחה שבראש ההוכחה. ואולם במקרה החלקי השני, אם בן־הזוג לאיבר z של K יהיה איבר אחר y של L, אז נסמן ב x את האיבר של K שהוא בן־הזוג לאיבר z של L. ועתה נמיר את ההעתק בין K ל L שיצאנו ממנו בהעתק אחר, היוצא מן ההעתק המקורי על ידי כך שבמקום ההתאמות

z של K		x של K	
⋮	ו	⋮	
y של L		z של L	

נשים את ההתאמות

z של K		x של K	
⋮	ו	⋮	
z של L		y של L.	

1. אפשר לוותר על המקרה השני, אם נתכוון דוקא לאיבר z אשר לא יימצא ב L (שהיא מכילה רק חלק מאיברי K). ואולם יש ענין גם לשיטה הבאה.

על ידי כך נקבל העתק חדש הנותן, אחרי הוצאת z משתי הקבוצות K ו L, שוב העתק בין קבוצה בת $m-1$ איברים ובין קבוצה-חלקית-ממש ממנה, כמו במקרה החלקי הראשון.

קבלנו אפוא בכל מקרה אפשרי סתירה להנחתנו שלפיה K אקויולנטית כביכול ל L. הסתירות האלה מראות שההנחה הנ"ל אינה אפשרית, אלא שקבוצה בת m איברים לא תוכל להיות אקויולנטית לשום קבוצה־חלקית־ממש שלה.

סוף דבר: המשפט שהתכוונו להוכיחו נכון בשביל כל קבוצה בת איבר אחד, ונכונותו בשביל כל קבוצה בת פחות מ m איברים גוררת אחריה את נכונותו בשביל כל קבוצה בת m איברים. המשפט נכון אפוא בשביל כל קבוצה בת n איברים, אם n מסמן מספר טבעי כל שהוא.

ג) הוכחת המשפט על הפירוק החד־ערכי של כל מספר לגורמיו הראשוניים (מלואים לעמ' 26).

נוכיח את המשפט דרך שלילה, בהראותנו: לו היה במציאות מספר n בעל שני פירוקים השונים „בעיקר" (ז"א לא רק בסדר הגורמים), כי אז היה נמצא גם מספר n_0 קטן מ n, בעל אותה התכונה. המסקנה הזאת מביאה לידי סתירה, אם נבחור כ n את המספר הטבעי הקטן ביותר שיש לו שני פירוקים שונים.[1]

יהי אפוא

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot \ldots \cdot q_l \,. \qquad (1)$$

(כל ה p_i וה q_i, בשביל $i = 1, 2, \ldots$, הנם מספרים ראשוניים)

אז לא יופיע אותו מספר ראשוני גם בין ה p_i גם בין ה q_i; כי אחרת היינו יכולים לחלק את האגפים בגורמים המשותפים, והיינו מקבלים ע"י זה שני פירוקים שונים למספר הקטן מ n.

יסמן מעתה p גורם מסוים (כל שהוא) מבין ה p_i, ו q גורם מסוים מבין ה q_i; נוכל להניח, למשל, שיהי $p > q$[2]. נחלק את כל אחד מן המספרים הראשוניים p_i באותו המספר q, כך שנקבל (בציון השאריות r_i):

$$p_i = q \cdot a_i + r_i \,. \qquad (r_i < q\,;\ i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (2)$$

1. המספר הזה הקטן ביותר אי־אפשר לו על כל פנים להיות ראשוני; לכן הוא גדול, למשל, מ 3. — השתמשנו כאן בתכונה של המספרים הטבעיים האומרת: בכל קבוצה של מספרים טבעיים ישנו מספר קטן ביותר. תכונה זו היא תוצאה מהגדרת המספרים הטבעיים שבפרק השני.

2. בודאי p שונה מ q. אם יהיה אחרי בחירת p ו q: $p < q$, אז נוכל להחליף את הסימונים p_i ו q_i (ז"א, לכתוב $q_1, \ldots, q_k$ במקום $p_1, \ldots, p_k$, ו $p_1, \ldots, p_l$ במקום $q_1, \ldots, q_l$), ועל פי זה יהיה $p < q$.

אני טוען: בשביל כל i יהיה r_i שונה מ־0, כך שקיים: $0 < r_i < q$. כדי להוכיח את הטענה הזאת, נבדיל בין שלשה מקרים, והם:

א) בשביל i הנדון קיים $a_i = 0$. אז $r_i \neq 0$ מובן מאליו, מפני שאחרת היה $p_i = 0$.

ב) בשביל i הנדון קיים $a_i = 1$. לו היה $r_i = 0$, היה זה גורר אחריו $p_i = q$, מסקנה הסותרת את הנחתנו שכל ה־q_i שונים מכל ה־p_i.

ג) בשביל i הנדון קיים $a_i > 1$. אז $r_i = 0$ היה גורר אחריו $p_i = q \cdot a_i$, מה שסותר את ההנחה שלפיה p_i הנהו מספר ראשוני.

הערה. מלבד הטענה שהוכחנוה כאן, ברור עוד: לפחות אחד המספרים a_i, המופיעים ב־k השויונות (2), שונה מ־0, כך שבשביל אותו i יהיה $r_i < p_i$. (כי בין ה־p_i מופיע גם p, והרי קיים: $p > q$.)

כדי לגמור את הוכחת המשפט המבוקש, נכניס בשביל הגורמים p_i ב־(1) את הצגותיהם לפי (2), ונקבל:

$$n = (q \cdot a_1 + r_1) \cdot (q \cdot a_2 + r_2) \cdot \dots \cdot (q \cdot a_k + r_k) = q \cdot A + r_1 \cdot r_2 \cdots r_k. \quad (3)$$

לשם באור הצורה המופיעה כאן באגף הימני, נעיר: הכפלת כל הביטויים הנמצאים בסוגריים תתן לנו רק מחוברים המתחלקים ב־q, פרט למחובר אחד והוא: $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k = n_0$; לכן נוכל לסמן את סכומם של כל שאר המחוברים ב־$q \cdot A$. והנה לפי ההערה הקודמת קיים: $p_k \cdot \dots \cdot p_2 \cdot p > r_k \cdot \dots \cdot r_2 \cdot r_1$, או (לפי הגדרת n_0 ולפי (1)): $n > n_0$.

אכן למספר n_0, הקטן מ־n, ישנם שני פירוקים שונים לגורמים ראשוניים, בנגוד להנחתנו בראש כל ההוכחה, שלפיה n הוא המספר הקטן ביותר בעל שני פירוקים. באמת: לפי (1) והגדרת הסימן q הרי n מתחלק במספר הראשוני q; לכן לפי (3) גם n_0, השווה ל־$n - q \cdot A$, מתחלק ב־q. לשון אחר: ישנו פירוק של n_0 לגורמים ראשוניים שבו מופיע הגורם הראשוני q. מאידך גיסא נוכל לפרק את $n_0 = r_1 \cdot \dots \cdot r_k$ לגורמים ראשוניים ע"י זה שנפרק את כל r_i לגורמיו הראשוניים (לרבות את הפירוק $r_i = r_i$ במקרה ש־r_i יהיה בעצמו ראשוני), ושנשמיט כל r_i השווה ל־1. בפירוק זה של n_0 יהיו כל הגורמים הראשוניים קטנים מ־q, מפני שקיים לפי (2) בשביל כל ערך של i: $r_i < q$. לכן פירוק זה שונה מן הקודם.

הסתירה שהגענו אליה מעידה על השקר שבהנחה הראשית, כאילו קיים ככלל מספר בעל שני פירוקים שונים; לכן הוכח המשפט שאליו שאפנו.

לבסוף נעיר: ההוכחה הזאת, שצורתה חדישה[1], מסתמכת לא — כמו רוב ההוכחות למשפט זה — על מציאותו של „הגורם המשותף הגדול ביותר" לכל

1. G. KLAPPAUF: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **45** (1935).

שני מספרים טבעיים, כי אם רק על השויונות (2), ז"א על אפשרות ה„חילוק" של מספר במספר אחר וקבלת ה„שארית". (מזה אמנם מגיעים אל הגורם המשותף הגדול ביותר.) ואולם אפשר להוכיח את המשפט אפילו בלעדי זה, רק ע"פ העובדה שאי־השויון $a > b > 0$ גורר אחריו: $a > a - b > 0$[1]. — להערה המתודולוגית הזאת ישנה חשיבות כלפי מערכות אחרות של „מספרים" שבהן אין במציאות הגורם המשותף הגדול ביותר, ופעמים בכל זאת ישנו לכל „מספר" פירוק אחד ויחיד (השוה פרק שלישי, §5).

ד) על תכונה מופלאה של המספר 30 (מלואים לעמ' 31).

יסמן n אחד משמונת המספרים: 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30. לכל n כזה ישנה התכונה: כל המספרים הקטנים מ־n וזרים ל־n הנם מספרים ראשוניים[2]. נכנה לשם קצור את התכונה הזאת של מספר n בשם T; מובן שלא לכל מספר מגיעה התכונה T; למשל, לא למספרים 10, 28, 36, כי הלא 9 זר ל־10 ול־28, 25 זר ל־36, ועם זאת 9 ו־25 אינם מספרים ראשוניים. תכונתו המופלאה של המספר 30 שברצוננו לעסוק בה, היא: אין במציאות שום מספר למעלה מ־30 שיש לו התכונה T. לשון אחר:

30 הנהו המספר הגדול ביותר בעל התכונה T.

כדי להתקרב אל הוכחת המשפט הזה, נצא מעובדות פשוטות אלו: כל מספר בעל התכונה T הגדול מ־4, צריך על כל פנים להיות זוגי, מכיון שאחרת המספר 4 (שאיננו ראשוני) זר לו. מתוך נמוק דומה צריך כל מספר בעל התכונה T, הגדול מ־9, להתחלק ב־3; כי אחרת יהיה 9 זר לו. אם נצרף את שני התנאים האלה, יוצא כי כל מספר בעל התכונה T הגדול מ־9, מתחלק ב־$6 = 2 \cdot 3$. כמו כן צריכים למעלה מ־25 המספרים בעלי התכונה T להתחלק ב־$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, למעלה מ־49 להתחלק ב־$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, למעלה מ־121 ב־$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, וכן הלאה. לפי זה יבואו בחשבון בשביל התכונה T:

בין 4 ל־9 המספרים 6, 8;
בין 9 ל־25 המספרים 12, 18, 24;
בין 25 ל־49 המספר 30.

בין 49 ל־121 לא יבוא בחשבון שום מספר, מפני שכבר המספר הטבעי הראשון המתחלק ב־210 — הוא 210 עצמו — גדול מ־121. מתוך אותו הנמוק אי־אפשר למספר בעל התכונה T להימצא בין $11^2 = 121$ ל־$13^2 = 169$, היות והמספר 2310 הנהו גדול מ־169. הסברה משדלת אותנו להאמין, שאם נלך כך הלאה, לא נפגוש

1. E. ZERMELO: *Nachrichten v. d. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*, Math.–Phys. Kl., Fachgruppe I, N. F. **1** (1934), p. 43–44.

2. מן המספר 1 נעלים את עינינו גם כאן, כמו בכל מקום הדן על מספרים ראשוניים.

לעולם עוד מספר שיהיה בעל התכונה T. מאידך גיסא אנו רואים מיד כי המספרים הרשומים לעיל (6, 8, 12, 18, 24, 30) הנם באמת בעלי התכונה T. הוספנו עליהם את המספרים בעלי התכונה T שאינם עולים על 4, והם: 3, 4.[1]

הבעיה העומדת לפנינו היא להוכיח שההשערה הנזכרת לעיל נכונה היא. נוכל לבטא את ההשערה ההיא, אם נסמן ב p_n את המספר הראשוני ה n'י (ז"א: $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, וכו'), בצורה זו:

$$p_1\cdot p_2\cdots p_n > {p_{n+1}}^2. \qquad (n>3) \tag{1}$$

כך ראינו לעיל כי ($n=4$, ז"א $p_n=7$) קיים $2\cdot3\cdot5\cdot7>11^2$, וכמו כן כי ($n=5$, ז"א $p_n=11$) קיים $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11>13^2$. עלינו להוכיח אפוא שאי־השויון (1) נכון בשביל כל ערכי n הגדולים מ 3. (בשביל $n=1,2,3$ (1) איננו נכון, כאשר ראינו לעיל.)

כדי לתת לעצמנו חשבון על משמעותו של (1) ומשקלו, נזכור את הוכחת אבקלידס למציאות אינסוף מספרים ראשוניים (עמ' 28). שם ראינו, אם נשתמש בסימון p_n שהוכנס כאן, שישנו תמיד מספר ראשוני בין p_n ובין $1+p_1\cdot p_2\cdots p_n$, לרבות את הגבול האחרון. לשון אחר: המספר הראשוני העוקב ל p_n, הוא p_{n+1}, שוה או קטן מ $1+p_1\cdot p_2\cdots p_n$. והנה נוכל, בלי השפיע במשהו על רעיון ההוכחה של אבקלידס, להחליף בה את המספר $1+p_1\cdot p_2\cdots p_n$ במספר $1-p_1\cdot p_2\cdots p_n$, בתנאי שיהיה $n>1$, ז"א ${p_n}^2>2$; כי גם המספר החדש אינו מתחלק באחד המספרים $p_1, p_2, \ldots, p_n$. לכן אפשר לבטא את מסקנת ההוכחה של אבקלידס ע"י הנוסחה הזאת:

$$p_1\cdot p_2\cdots p_n > p_{n+1}. \tag{2}$$

אם נשוה את הנוסחה (2) לנוסחה (1), אשר נוכל לכתבה — אחרי הוצאת השרש הרבועי — גם בצורה $\sqrt{p_1\cdot p_2\cdots p_n}>p_{n+1}$, הרי מתברר שהחדוש של (1), לגבי הנוסחה של אבקלידס (2), הוא: לא רק המכפלה $p_1\cdot p_2\cdots p_n$ בעצמה, אלא כבר השרש הרבועי מן המכפלה הזאת גדול מן המספר הראשוני העוקב p_{n+1}, בתנאי שיהיה $n>3$. (1) נותן כך ריוח קצר יותר להימצאו של p_{n+1}, מן הריוח הניתן ע"י (2).

---

1. 2 לא יבוא בחשבון, מפני שבכלל אין מספר ראשוני למטה הימנו. — כל מספר רבועי m^2, הגדול מ 4, לא יוכל להיות בעל התכונה T, מפני ש $(m-1)^2$ זר ל m^2 ואיננו מספר ראשוני.

2. במקרה $n=1$ אין תקף למסקנתנו, כי אז יהיה $p_1\cdots p_n-1=p_1-1=1$, והרי 1 אינו מתחלק בשום מספר ראשוני. באמת (2) אינו קיים בשביל $n=1$, מכיון ש $3>2$ אינו נכון. ואולם כבר בשביל $n=2$ קיים (2); כי הלא $5>2\cdot3=p_1\cdot p_2$.

לבטוי זה של תכונת המספר 30 שאליה התכוונו, יש שני יתרונות:

א) במקום תכונה מבודדת של מספר מסוים אחד (30) בטאנו נוסחה כללית (1), שיש לה תוקף בשביל אינסוף הערכים של n הגדולים מ 3. ולא עוד אלא נוסחה זו מהווה אחד הצעדים השונים אשר נעשו כדי להקטין את הריוח המתחיל במספר ראשוני כל שהוא p_n והמספיק על כל פנים להכיל בתוכו את המספר הראשוני העוקב p_{n+1}; על צעדים כאלה דובר בעמ' 31.

ב) בעוד שרוב הצעדים הנ"ל הנם מסובכים למדי, ביחוד במובן זה שמושגי האריתמטיקה אינם מספיקים, אלא דרושות שיטות אנליטיות — הנה את הנוסחה (1) (ועי"ז את משפטנו על המספר 30) אפשר להוכיח בעזרת שיטה אריתמטית אלמנטרית[1]. (אמנם הנוסחה (1) באמת חלשה למדי, למשל חלשה בהרבה ממשפט צ'בישף האומר: $p_n 2 < {p_{n+1}}$.) אפשר להכליל את השיטה מהשורש הריבועי אל השרשים המעוקב, הרביעי והחמישי (עיין בהערה למטה).

ה) משפט ברון על מספרים ראשוניים תאומים (מלואים לעמ' 32).

כדי שנוכל להבין ולנסח את משפטו של ברון, נצטרך להקדים מלים אחדות שאינן שייכות לתורת המספרים, ושאינן מצטמצמות כלל בתחום המספרים הטבעיים, כי אם נכנסות לתוך תורת האנליזה. נקח את הערכים ההפוכים לכל החזקות של 2: 1, 2, 4, 8 וכן הלאה, או בלשון אחר, נקח את ה„סדרה הגיאומטרית": $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$! „הטור האינסופי" היוצא על ידי חיבור כל איברי הסדרה הזאת $\cdots+1/8+1/4+1/2+1$, הוא מה שקוראים בתורת הטורים: „טור מתכנס"; זאת אומרת, טור בעל סכום סופי מסוים. (לא נדייק כאן לגבי ההגדרה; עיין בחלק השלישי, פרקים י' וי"א.) הקורא, גם אם אינו בקי בתורת הטורים, יראה מיד ש„הסכומים החלקיים" (סכום שני האיברים הראשונים בטור, שלושת האיברים הראשונים, ארבעת האיברים וכו'; באופן כללי: סכומם של n האיברים הראשונים בשביל כל n סופי נתון) של הטור הזה אינם עולים על המספר 2, ואפילו אינם מגיעים אליו, אבל הולכים ומתקרבים אליו; לכן קוראים ל 2 „סכום" הטור הנ"ל. אם לעומת זאת נקח במקום כל החזקות של 2 את המספרים הטבעיים כולם, היינו, אם נצא מן הסדרה $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, אז נקבל על ידי הערכים ההפוכים את הטור האינסופי: $\cdots+1/4+1/3+1/2+1$, והסכומים החלקיים של הטור הזה לא יתקרבו לשום מספר, כי אם יעלו למעלה מכל מספר נתון, יהי גדלו מה שיהיה. קל להכיר את הדבר הזה: הלא הסכום $1/3+1/4$ הנהו גדול מ $1/2=2/4$; כמו

---

1. ההוכחה האלמנטרית הראשונה לנוסחה (1) ניתנה בשנת 1907 ע"י סטודנט באוניברסיטה של מינסטר ושמו H. Bonse; עיין *Archiv der Mathematik und Physik*, 3. Ser., 12, p. 292–295. — צורה פשוטה יותר נתן להוכחה הזאת Zermelo במקום שנזכר לעיל (עמ' 57).

מרחיק לכת S. Kaniel ב Scripta Math., כרך 21 (1956) עמ' 269.

כן $1/2 = 4/8 > 1/5+1/6+1/7+1/8$; גם סכומם של שמונת האיברים הבאים של הטור $(1/9+1/10+\cdots+1/16)$ גדול מ $1/2 = 8/16$, וכן הלאה. זאת אומרת: אם רק נרבה במדה מספיקה באיברי הטור, יעלו הסכומים החלקיים למעלה מן הערך $1/2+\cdots+1/2+1/2+1$, ונוכל לדאוג לכך, שהמחובר $1/2$ ימצא פעמים רבות כפי רצוננו, היינו שנעבור מעל לסכומים הגדולים כפי רצוננו. לטור כזה נקרא בשם „טור מתבדר". נשאל את עצמנו: מדוע משני הטורים המסומנים לעיל, הראשון מתכנס והשני מתבדר? יש לומר שההבדל הוא בכך, שהמספרים $1, 2, 3, 4, \ldots$, שמהם באנו לאיברי הטור השני, הם „רבים מאד", בעוד שליצירת הטור הראשון השתמשנו רק ב„חלק קטן" מן המספרים ההם, היינו במספרים $1, 2, 4, 8, \ldots$ המופיעים בנדירות גדולה למדי בין כל המספרים הטבעיים — אף על פי שגם מספרם הוא כמובן אינסופי. בלשון בני אדם נוכל לומר, שכל כמה שמופיעים פחות מכל המחוברים $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ כאיברי טור אינסופי נתון, ירבו הסיכויים לכך, שהטור הנתון יתכנס אל סכום סופי מסוים. או חלוף: אם ידוע לנו, שטור מורכב ממחוברים כאלה מתכנס, הרי יהיה זה סימן שאותם המספרים הטבעיים, אשר הערכים ההפוכים שלהם הם איברי הטור, מופיעים בנדירות יחסית בין כל המספרים הטבעיים.

עתה נוכל לנסח את משפטו של ברון. נקח את סדרת כל המספרים הראשוניים התאומים, היינו:

$$(3,5;\ 5,7;\ 11,13;\ 17,19;\ 29,31;\ 41,43;\ 59,61;\ \ldots),$$

ונתאר לנו כי ימשיכו אותה ככל האפשר; כלומר עד התאומים האחרונים, אם ישנם כאלה,[1] ואחרת — עד בלי סוף. מתוך הערכים ההפוכים של כל המספרים האלה מתקבל הטור

$$1/3+1/5+1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+\ldots$$

שהוא אם טור סופי או טור אינסופי. ברון הוכיח שעל כל פנים טור זה מתכנס, ואינו עולה אפוא למעלה מכל גבול. אמנם, תוצאה זו — שקשה למדי להוכיחה — אינה מבררת עדיין את השאלה, אם יש רק מספר סופי או מספר אינסופי של מספרים ראשוניים תאומים. היא רק מגידה לנו: אם המקרה השני הוא הנכון (דבר שאנו נוטים לקבלו), אז צפיפות המספרים האלה בתוך סדרת כל המספרים הטבעיים היא קטנה עד כדי כך, שהטור הנ"ל מתכנס ואינו מתבדר — מה שאין כך, למשל, לגבי המספרים הראשוניים כולם.

ו) הוכחת משפטו הקטן של פרמה (מלואים לעמ' 37).

יהי p מספר ראשוני, ו a מספר טבעי הקטן מ p. נכתוב מתחת ל $p-1$ המספרים:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$$

את מכפלותיהם ב a:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (p-1)a.$$

קל לראות שאם נחלק את $p-1$ המכפלות האלה ב p, נקבל שוב את השאריות $1, 2, 3, \ldots, p-1$; רק, בדרך כלל, לאו דוקא בסדר זה (עיין בפרק החמישי, § 2). יוצא מכאן, שאם נחלק ב p את המכפלה $P = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)$, נקבל אותה השארית כאילו חלקנו ב p את המכפלה

$$(a)\cdot(2a)\cdot(3a)\cdots\big((p-1)a\big) = P\cdot a^{p-1}.$$

לפי זה ההפרש בין הבטוי האחרון ובין P, היינו: $P\,(a^{p-1}-1)$, מתחלק ב p, ולכן (מכיון ש P זר ל p) גם $a^{p-1}-1$ מתחלק ב p, אם a הוא מספר טבעי קטן מ p.

הקורא ימצא בלי קושי גדול, שאת התנאי האחרון נוכל להרחיב למקרה שבו a מסמן מספר טבעי כל שהוא שאינו מתחלק ב p; כי לגבי החילוק ב p מתנהג כל מספר טבעי a בדיוק כמו השארית, המתקבלת מ a על ידי חילוק ב p.

כדי להחלץ לבסוף גם מן התנאי ש a אינו מתחלק ב p, נהפוך את התכונה „$a^{p-1}-1$ מתחלק ב p" על ידי הכפלה ב a לתכונה „a^p-a מתחלק ב p". והלא תכונה זו, שעד כאן הוכחנוה רק בשביל a שאינם מתחלקים ב p, מתקיימת גם בשביל שאר המספרים a המתחלקים ב p; כי בשבילם גם a^p, גם a, ולכן גם ההפרש ביניהם, מתחלקים ב p. יוצא שבשביל כל מספר טבעי a ההפרש a^p-a מתחלק ב p, כמו שטוען משפטו הקטן של פרמה.

כדאי לציין שאפשר להרחיב את משפטו של פרמה (בצורה הנ"ל: „$a^{p-1}-1$ מתחלק ב p") למקרים שבהם יעמוד במקום המספר הראשוני p מספר טבעי g כל שהוא $(g > 1)$. אז יש צורך לשנות שני דברים. ראשית תהיה הכוונה רק אל המספרים a הזרים ל g; שנוי זה הוא קטן, כי הלא גם מקודם היינו יכולים לומר „a זר ל p". שנית יבוא במקום המעריך $p-1$ לא $g-1$ אלא מספר אחר, שמסמנים אותו ב $\varphi(g)$; הוא המספר המגיד, כמה מן המספרים $1, 2, \ldots, g-1$ (לרבות את 1) הנם זרים ל g. המשפט המכלל של פרמה מביע אפוא, כי $a^{\varphi(g)}-1$ מתחלק ב g, וצורה זו כוללת את הקודמת (הואיל וקיים $\varphi(p) = p-1$). מהלך הרעיונות המביא לידי המשפט המכלל דומה לגמרי להוכחה דלעיל.

לפונקציה $\varphi(g)$ ישנה חשיבות מרובה בתורת המספרים. ערכיה בשביל כל g מתקבלים משני הכללים שלא קשה להוכיחם:

א) בשביל חזקה של מספר ראשוני $g = p^n$: $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.

ב) אם g_1 ו g_2 זרים ביניהם: $\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2) = \varphi(g_1\cdot g_2)$. כך נקבל, למשל, בשביל $g = 180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$:

1. יש בודאי תאומים גדולים למדי; למשל: 10 006 427 ו 10 006 429.

$$\varphi(180) = \varphi(2^2)\cdot\varphi(3^2)\cdot\varphi(5) = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 4 = 48,$$

ז"א למטה מ 180 נמצאים בדיוק 48 מספרים טבעיים הזרים ל 180.

ז) פיתוח שבר רגיל לשבר עשרוני (מחזורי) ואורך המחזור של השבר העשרוני (מלואים לעמ' 37).

אין כאן המקום לשאול את עצמנו מהו בעצם „שבר עשרוני אינסופי", מושג שאינו כל כך פשוט כמו שמציגים אותו בבית הספר. על הנושא הזה נדון בפרק הששי. כאן נצא משיטת הפיתוח של שבר רגיל חיובי $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני, כמו שהיא שגורה בפינו מלמודי בית הספר.

נניח, כמו בעמ' 37, כי p הוא מספר ראשוני ושונה מ 2 ומ 5[1]. כדי שלא להכניס עוד מחובר שלם שאינו משנה את תהליך החשבון, נניח שקיים: $p < m$. אזי פיתוחו של $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני, כידוע, יוצא לפועל ע"י חילוק ממושך ב p, כדלקמן:

למשל במקרה $\frac{6}{7}$, ז"א $m=6$, $p=7$:

$$\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857142\,8}\ldots$$

במקרה הכללי:

$$\frac{m}{p} = 0{,}\overline{a_1\, a_2 \ldots a_{l-1}\, a_l}\; a_1 \ldots$$

(1)

$m = p\cdot 0 + m$	$6 = 7\cdot 0 + 6$
$10\cdot m = p\cdot a_1 + m_1$	$60 = 7\cdot 8 + 4$
$10\cdot m_1 = p\cdot a_2 + m_2$	$40 = 7\cdot 5 + 5$
	$50 = 7\cdot 7 + 1$
	$10 = 7\cdot 1 + 3$
$10\cdot m_{l-2} = p\cdot a_{l-1} + m_{l-1}$	$30 = 7\cdot 4 + 2$
$10\cdot m_{l-1} = p\cdot a_l + m$	$20 = 7\cdot 2 + 6$
$10\cdot m = p\cdot a_1 + m_1$	$60 = 7\cdot 8 + 4$

לפיתוח זה, היוצר מתוך m ו p הנתונים באופן אחד ויחיד את שתי סדרות המספרים $(\ldots, a_1, \ldots, a_l, \ldots)$ ו $(\ldots, m, \ldots, m_{l-1}, m, m_1, m_2, \ldots)$, יש להעיר:

1. $\frac{m}{2}$ ו $\frac{m}{5}$ מתפתחים, כמובן, לשברים עשרוניים סופיים.

המספרים m_1, m_2, וכו', המתקבלים כשאריות ע"י החילוק ב p, הנם לפי טבעם קטנים מ p, כמו גם m עצמו (לפי הנחתנו). מאידך גיסא כולם שונים מ 0[1], ז"א קיים:

$$0 < m < p, \quad 0 < m_i < p. \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

אם נתבונן במשוואות (1), נראה שמן הנמנע כי תתקבלנה אינסוף שאריות שונות m_i; כי הרי יש רק מספר סופי — בדיוק: $p-1$ — מספרים טבעיים קטנים מ p. יוצא מזה שצריכה פעם להופיע שארית שנתקבלה כבר באחד השויונות הקודמים. נקבע בלי הוכחה (אשר לא יקשה ביותר על הקורא למצוא אותה בעצמו) את העובדה שהשארית הראשונה אשר תשוב ותופיע בפיתוח (1) היא m בעצמו, היינו: המונה שיצאנו ממנו[2]. ובכן, יהי l (מספר טבעי מסוים) מספר השויונות בהתחלת הפיתוח (1) שבהם מופיעות שאריות שונות $m, m_1, \ldots, m_{l-1}$, כך שבשויון ה $(l+1)$: $10m_{l-1} = p\,a_l + m$ תופיע בפעם הראשונה מחדש השארית m. (לפי זה הכנסנו את הסימון ב(1).) אז מן השויון ה $(l+1)$ ואילך חוזרות כל השאריות שקדמו; כי הרי השויון ה $(l+2)$ בא, כמו השויון השני $10m = p\,a_1 + m_1$, כדי לחלק $10m$ ב p, ונותן אפוא גם אותה המנה השלמה a_1 גם אותה השארית m_1 כמו השויון השני; וכך חוזר חלילה. — לעומת זאת אין צורך שגם כל l המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_l$ יהיו דוקא שונים ביניהם; שויון בין שני a_i אינו מחזיר בהכרח אל הצורה הקודמת את כל השויונות הבאים, כמו שיראה הקורא בנקל ע"פ דוגמאות[3].

לפי זה הוכחנו, קודם כל: פיתוח השבר $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני נותן שבר עשרוני מחזורי.

מה שנוגע לאורך המחזור השווה למספר l, הרי הכפלת הפיתוח $\frac{m}{p} = 0{,}a_1\, a_2 \ldots a_l\, a_1\, a_2 \ldots$ ב 10^l נותנת ע"פ הכללים המקובלים של החשבון[4]

$$10^l \cdot \frac{m}{p} = (a_1\cdot 10^{l-1} + a_2\cdot 10^{l-2} + \cdots + a_l) + 0{,}a_1\, a_2 \cdots = N + \frac{m}{p},$$

---

1. $m_i \neq 0$ אפשר לראות כמסקנה מזה שהמספר הראשוני p שונה מ 2 ומ 5. לו קבלנו $m_q = 0$, כי אז היה השבר העשרוני הסופי $0{,}a_1\, a_2 \ldots a_q$ מציג את $\frac{m}{p}$, מה שאיננו אפשרי כידוע.

2. במקרה זה מדברים על „מחזוריות טהורה". המקרה הזה יימצא אפילו אם המכנה אינו מספר ראשוני בתנאי שיהיה זר ל 10. ברם אם המכנה מתחלק ב 2 או ב 5 (בצורתו המצומצמת של השבר הרגיל העומד לפיתוח), אז, ורק אז, קודמות למחזור עצמו ספרה או ספרות אחדות — אם בכלל הפיתוח אינסופי (כלומר אם יש למכנה מחלקים ראשוניים מלבד 2 ו 5).

3. הלא השויון העוקב מתקבל ע"פ השארית m_i הקודמת, ולא ע"פ המנה a_i הקודמת.

4. על הכללים האלה, שבהם נשתמש גם בעמוד הבא, נדון בפרק הששי.

אם נסמן בN את המספר הטבעי המיוצג ע"י הסכום שבסוגריים. זאת אומרת: $\frac{m}{p}\cdot(10^l-1)$ הנהו מספר שלם[1]. נדייק יותר ונוכיח, כי l הוא המספר הקטן ביותר שבשבילו מהווה $\frac{m\,(10^l-1)}{p}$ (או $\frac{10^l-1}{p}$; כי הלא p הוא ראשוני ולכן זר לm) מספר שלם!

יהי אפוא k המספר הטבעי הקטן ביותר כך שההפרש 10^k-1 מתחלק בp; בתורת המספרים קוראים לk זה בשם "המעריך שאליו שייך 10 מודולו p". עד כאן נוכחנו רק כי $k \geq l$, ועלינו להראות כי בדיוק $l = k$. ברור קודם כל כי

$$\frac{m\,(10^k-1)}{p} = B \qquad (2)$$

הנו מספר טבעי קטן מ10^k (מפני ש$m < p$), עובדה אשר נוכל להביעה ע"פ השיטה העשרונית (עיין פרק ראשון, § 1) בצורה:

$$B = b_1\cdot 10^{k-1}+b_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+b_{k-1}\cdot 10+b_k,$$

שבה b_i מהווים ספרות מתוך (0, 1, ..., 8, 9). אולם מ (2) יוצא:

$$m\cdot\frac{10^k}{p} = B+\frac{m}{p};\quad \frac{m}{p} = \frac{B}{10^k}+\frac{\frac{m}{p}}{10^k} = \frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{b_k}{10^k}+\frac{\frac{m}{p}}{10^k}.$$

והנה האיבר האחרון מימין הוא מנה בעלת המכנה 10^k, שהמונה שלה בדיוק השבר הנמצא באגף השמאלי והעומד לפיתוח. לכן תחזור חלילה, בהוספת המכנה 10^k, התחלת הפיתוח הנמצא באגף הימני, ז"א:

$$\frac{m}{p} = \frac{b_1}{10}+\cdots+\frac{b_k}{10^k}+\frac{b_1}{10^{k+1}}+\cdots+\frac{b_k}{10^{2k}}+\frac{b_1}{10^{2k+1}}+\cdots.$$

קבלנו כך את פיתוחו של $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני מחזורי, ואורך המחזור שווה לk[2]. לכן יוצא שבאמת $l = k$ (ונוסף לזה, כמובן, $a_i = b_i$), ושקיים המשפט:

פיתוח השבר $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני נותן מחזור, אשר ארכו l הוא המעריך שאליו שייך 10 מודולו p, כלומר המספר הטבעי הקטן ביותר שבשבילו 10^l-1 מתחלק בp.

---

1. קל להוציא מן החשבון הזה את המסקנה: כל שבר עשרוני מחזורי מייצג שבר רגיל — מסקנה המשלימה (בכיוון הפוך) את מה שקבלנו לעיל לגבי פיתוחו של שבר רגיל.

2. בעצם מצאנו כאן רק $k \geq l$; כי לכאורה יכול להיות שהמחזור $b_1b_2\ldots b_k$ נחלק לשנים או יותר מחזורים קצרים יותר. אבל הרי כבר לעיל מצאנו $k \geq l$, מה שגורר אחריו, בצירוף $l \geq k$, את המסקנה $l = k$.

בטרם נוכל לברר את הקשר שבין משפט זה ובין משפטו הקטן של פרמה (עיין בעמ' 37), עלינו להוסיף הערה למשפט פרמה. נשתמש כאן בסימון הקונגרואנציה שהוכנס בעמ' 38! לפי זה אומר משפט פרמה: $a^p \equiv a \pmod p$. לשון אחר (עיין במלואים, עמ' 61): $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, בתנאי שa אינו מתחלק במספר הראשוני p. אין זאת אומרת, לפי הסימון שהכנסנוהו לעיל, כי a "שייך מודולו p אל המעריך $p-1$"; הרי אין זה מן הנמנע שכבר לגבי מעריך c אחר, הקטן מ$p-1$, מתחלק a^c-1 בp, כך ש$a^c \equiv 1 \pmod p$. מעתה יסמן c את המעריך הקטן ביותר מסוג זה. אז c הוא אחד ממחלקיו של $p-1$, לרבות את האפשרויות $c = 1$ (נכון בשביל $a = 1$) ו$c = p-1$.

כדי להוכיח את הטענה הזאת, נחלק את $p-1$ במעריך הנדון c, ונקבל r, $p-1 = c\cdot d+r$, כך שהשארית r קטנה מc. לפי חוקי החשבון בחזקות יוצא:

$$a^{p-1} = a^{c\cdot d+r} = (a^c)^d\cdot a^r. \qquad (3)$$

והנה קיים $a^c \equiv 1$ לפי הנחתנו שלגבי c, בעוד שעצם ההנחה הזאת אומרת: a^r אינו קונגרואנטי ל$1 \pmod p$; אמנם פרט למקרה שבו $r = 0$, כלומר שבו $p-1$ מתחלק בc. העובדות האלה מראות שנקבל ע"פ (3) סתירה אם r שונה מ0; כי הלא קיים $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ לפי משפט פרמה, בעוד שקיים $(a^c)^d\cdot a^r \equiv 1^d\cdot a^r \equiv a^r \pmod p$. $p-1$ מתחלק אפוא בc, מש"ל.

עתה נשוב אל פיתוחו של $\frac{m}{p}$ לשבר עשרוני. מצאנו לעיל (עמ' 64), שאורך המחזור l שווה למעריך שאליו שייך 10 מודולו p. מאידך גיסא אומר משפט פרמה: $10^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, מכיון ש10 אינו מתחלק ב$p$. המשפט שהוכחנוהו זה עתה מביע אפוא: אורך המחזור l בפיתוחו של $\frac{m}{p}$ שווה ל$p-1$ או למחלק אמיתי של $p-1$, מש"ל. גם $l = 1$ אפשרי, כפי שמראה הפיתוח $\frac{1}{3} = 0,\overline{33}\ldots$, שבו $2 = p-1$, אבל $l = 1$.

נציין בסוף הדברים האלה כי כל המסקנות שהגענו אליהן נשארות בתקפן, אם מכנה השבר הרגיל הוא לאו דוקא מספר ראשוני p, אלא מספר כלשהו g הזר ל10 (ז"א שאינו מתחלק לא ב2 ולא ב5). בהתאם למשפטו המוכלל של פרמה (עיין בעמ' 61) יעמוד אז $\varphi(g)$ במקום $p-1$. לכן יהיה אורך המחזור בפיתוחו של השבר המצומצם $\frac{m}{g}$: או $\varphi(g)$ עצמו, או מחלק אמיתי של $\varphi(g)$.

דוגמה: $\frac{1}{27} = 0,\overline{037}\ldots$; כאן $\varphi(27) = 9\cdot 2 = 18$, $l = 3$.

ח) משפט אוילר על צורת המספרים המשוכללים הזוגיים

(מלואים לעמ' 45—43).

נתאר את המספר הזוגי m בצורה: $m = 2^{n-1}\cdot u$, שבה $n > 1$ וu איננו זוגי. כדי שיהיה m מספר משוכלל, צריך להתמלא השוויון (עיין בעמ' 45 למעלה) $S(m) = 2m$, או, לפי הערך שקבלנוהו בעמ' 44 בשביל $S(m)$:

$$S(2^{n-1})\cdot S(u) = (2^n-1)\cdot S(u) = 2^n\cdot u. \qquad (1)$$

מכאן ש $S(u)$ מתחלק ב 2^n (הואיל ו 2^n-1 הנהו אי־זוגי), כך שנוכל לכתוב: $S(u) = 2^n\cdot v$. לפי (1) נקבל מזה:

$$u = (2^n-1)\cdot v, \qquad (2)$$

ז"א v הנהו מחלק של u עצמו (לא רק של $S(u)$). ואולם השויון $S(u) = 2^n\cdot v$ מביע ע"פ (2) שקיים $S(u) = u+v$; לשון אחר: סכום כל מחלקיו של u, אשר ביניהם נמצאים על כל פנים 1 ו u בעצמו, וכן על פי (2) גם v, שווה ל $u+v$. אילו היה v שונה מ 1, לא היה נשאר כלום בשביל המחלק 1; לפיכך צריך להיות $v = 1$, כלומר, ל u אין מחלקים מלבד עצמו ו 1; ז"א u הוא מספר ראשוני בעל הצורה 2^n-1. לפי התחלת ההוכחה הזאת נופק שהמספר המשוכלל הזוגי m צריך להיות בעל הצורה $(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$, שבה 2^n-1 מספר ראשוני; זוהי התוצאה של אויler.

ט) תחומים של מספרים אלגבריים שלמים (מלואים לעמ' 48).

נסתכל בתחום $\mathfrak{A}$ המכיל את כל המספרים M בעלי הצורה $a+b\sqrt{6}$, אם a ו b מסמנים מספרים שלמים רגילים כלשהם. שני מספרים כאלה, M_1 ו M_2, נקראים שווים אם, ורק אם, הם מתאימים בשני ה„מקדמים" a ו b; היינו, אם הם מזדהים. קל לראות שעל־ידי חיבור שני מספרים מתוך $\mathfrak{A}$ וכן על־ידי כפלם נקבל שוב מספר מתוך $\mathfrak{A}$. הנקרא „הסכום" או „המכפלה"; כי ע"פ חוקי החשבון הרגילים קיים:

$$(a+b\sqrt{6}) + (c+d\sqrt{6}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{6},$$

$$(a+b\sqrt{6})\cdot(c+d\sqrt{6}) = (a\cdot c+6\cdot b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\sqrt{6}.$$

לפי זה יוגדר גם כן כרגיל, מתי „מתחלק" מספר מתוך $\mathfrak{A}$ במספר אחר כזה. בפרט קוראים למספר M מתוך $\mathfrak{A}$ בשם „יחידה", אם מלבד M נמצא גם $\frac{1}{M}$ בתוך $\mathfrak{A}$; לפיכך המספרים: 1 ו 1− (ז"א $\sqrt{6}\cdot 0+1$ ו $\sqrt{6}\cdot 0+1\cdot(-1)$) הם יחידות, וכמו כן, למשל, $2\sqrt{6}+5$, מפני שקיים: $(5-2\sqrt{6})\cdot(5+2\sqrt{6}) = 1$. כל מספר מתוך $\mathfrak{A}$ מתחלק בכל יחידה.

באופן עקבי נקרא למספר מתוך $\mathfrak{A}$ „מספר ראשוני", אם הוא מתחלק רק בעצמו וביחידות (ובמכפלות של עצמו ביחידות).

בתוך התחום $\mathfrak{A}$ אפשר לפרק את המספר 6 לגורמים בשני האפנים השונים: $6 = 2\cdot 3$, $6 = \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$. אף־על־פי־כן אין זאת עדיין דוגמה לתופעה שהזכרנוה בעמוד 48; היינו לתופעה שבתחומים ידועים יש מספרים אלגבריים שלמים, שאפשר לתארם בשני אפנים שונים כמכפלות שני מספרים ראשוניים. באמת בדוגמה שלנו אף אחד מן המספרים 2, 3, $\sqrt{6}$ איננו מספר ראשוני בתוך התחום $\mathfrak{A}$ שהגדרנוהו. שהרי אפשר לפרק 2 בצורה: $2 = (\sqrt{6}+2)\cdot(\sqrt{6}-2)$; כמו כן קיים:

$3 = (3+\sqrt{6})\cdot(3-\sqrt{6})$, ולבסוף: $(3+\sqrt{6})\cdot(-2+\sqrt{6}) = (3-\sqrt{6})\cdot(2+\sqrt{6}) = \sqrt{6}$. כך מצאנו בסך הכל את הפירוק:

$$2\cdot 3 = [(3+\sqrt{6})\cdot(3-\sqrt{6})]\cdot[(-2+\sqrt{6})\cdot(2+\sqrt{6})] =$$

$$= [(3+\sqrt{6})\cdot(-2+\sqrt{6})]\cdot[(3-\sqrt{6})\cdot(2+\sqrt{6})] = \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}.$$

פירוק זה מבאר לנו שהשינוי הנדמה בין הפירוק $6 = \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$ לפירוק $6 = 2\cdot 3$ תלוי רק בעובדא, שלכל אחד מן הגורמים העומדים כאן יש גורמים פשוטים עוד יותר (והם גורמים ראשוניים); לפי האופן שבו נקשור את הגורמים הראשוניים האלה לזוגות, נקבל פירוקים של 6 (שוני הצורה החיצונית). דבר זה אינו מתמיה יותר מהפירוקים שבתחום המספרים הטבעיים: $6\cdot 15 = 9\cdot 10 = 90$, המבוססים שניהם על הפרוק לגורמים ראשוניים: $2\cdot 3\cdot 5\cdot 3 = 90$.

אבל לא בכל המקרים אפשר לתרץ כך את המצב, כאשר לאותו המספר האלגברי יש פירוקים שונים. אילו, במקום התחום $\mathfrak{A}$ של המספרים בעלי הצורה $a+b\sqrt{6}$, לקחנו למשל את התחום B המכיל את המספרים בעלי הצורה $a+b\sqrt{-6}$, כי אז היו שוב למספר 6 שני פירוקים שונים: $2\cdot 3 = \sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6} = -6$. ואמנם אפשר להראות שבתחום B אין במציאות פירוקי המספרים 2, 3, $\sqrt{-6}$ לגורמים פשוטים יותר; לכל שלושת המספרים האלה ישנו האופי של מספר ראשוני בתחום B. ואף על פי שמכפלת שני המספרים הראשוניים 2 ו 3 מתחלקת במספר הראשוני $\sqrt{-6}$, בכל זאת קל לראות שאף אחד משני המספרים הראשוניים 2 ו 3 לחוד אינו מתחלק ב $\sqrt{-6}$. התחום B מהווה דוגמה למערכת מספרים „שלמים", שבה אין המשפט היסודי של תורת המספרים הכפלית קיים; כלומר, המשפט הטוען (עמ' 26) שאפשר לפרק כל מספר שלם באופן אחד ויחיד לגורמיו הראשוניים. מתוך העדר משפט זה לא נוכל להוכיח כמה משפטים חשובים של תורת המספרים כלפי התחום B בדרך הרגילה, הואיל ורוב ההוכחות מבוססות על המשפט היסודי הנ"ל. ולא עוד, אלא שתחומים חסרי תוקף למשפט היסודי הם הכלל, ולא היוצא מן הכלל, בין התחומים אשר נקבלם בהרחיבנו את תורת המספרים מעבר למספרים השלמים הרגילים והלאה. אם למשל נעביר לפנינו את תחומי המספרים בעלי הצורות $a+b\sqrt{-D}$, בתנאי ש D יקבל כל ערך חיובי שלם שאינו מתחלק בריבוע, אז מתברר שהמשפט היסודי נשאר בתוקף רק בתחומים המתאימים לערכים:

$$D = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.$$

ביתר דיוק: עד הנה עלה בידינו להוכיח בשביל כל הערכים של D עד 10^9 (מיליארד אחד) ויותר, שאין ביניהם תחומים שבהם קיים המשפט היסודי, פרט לערכי D המסומנים לפנינו.

בעמ' 57 צוינה תכונה בעלת קשר לפירוק החד־ערכי: קביעת המחלק המשותף הגדול ביותר, עפ"י שיטת אבקלידס. בין כל תחומי המספרים בעלי הצורות $a+b\sqrt{-D}$ יש בדיוק 22 תחומים שבהם קיימת תכונה זו (Inkeri, 1947).

חלק שני: הרחבת מושג־המספר. אלגברה.

פרק רביעי: שברים רגילים ומספרים שליליים.

אינני יודע אם צדקו האומרים שהשירה היא האמנות המכנה דבר אחד בשמות שונים; אבל על כל פנים צדק פואנקרה באמרו שהמתימטיקה היא האמנות המכנה דברים שונים בשם אחד. לשון אחר: כחה המיוחד של השיטה המתימטית מתגלה באשר היא כוללת מושגים, השונים לכאורה זה מזה מאד, לאור השקפה אחת ואחידה, ומגלה על ידי כך קשרים פנימיים בין תחומים רחוקים; קשרים שעל פיהם נראה כל אחד מאותם התחומים שקוף משנראה בתחילה. יותר מאשר בכל כוון אחר, מופיע הכח המאחד הזה של השיטה המתימטית בהרחבת מושג המספר. אם מלכתחילה אנו קוראים בשם „מספר" את המספר הטבעי[1] הנתון לנו, בהכרח כביכול, מתוך תהליכי המניה והסידור (ואשר לו הקדשנו את החלק הראשון של ספר זה), הרינו באים עתה לחלוק את תואר־הכבוד „מספר" למושגים שהם מסובכים יותר ורחוקים מאד מן השכל הפרימיטיבי. מרחק זה אינו בולט לנגד עינינו מפני שאנו רגילים מבית הספר להשתמש במספרים שליליים, שברים עשרוניים, וכו', ואולם נזכור נא שאפילו בהכרת המספרים השלמים השליליים נלחמו עוד במאה השמונה־עשרה, ורק במאה התשע־עשרה ניתנה להם זכות־אזרח מלאה בתוך האריתמטיקה!

בעוד שהדברים המובאים בחלק הראשון, ביחוד בפרקים א' וג', היו מלאי תוכן והלבישו על ידי כך את המדע המתימטי חיים וצבע, הרי נוכל למלא את התפקיד המוטל עלינו בפרק זה רק על ידי מהלך־רעיונות המיוסד על בסיס פורמלי ועל חשבונות. הקורא צריך להתרגל לכוון זה, כי למתימטיקה יש פנים לכאן ולכאן. המתימטיקן צריך גם לחשוב, גם לחַשב, ובלי דו־פרצופיות זו אי־אפשר להכיר מהו אופיה של המתימטיקה.

§ 1. השברים החיוביים.

הצורך לחלק עצם שלם, כגון תפוח או עץ, לחלקים, ובפרט לחלקים שווים, הביא את האדם מאז ומעולם לידי המושג הנקרא באופן עיוני בשם „שבר" או „שבר רגיל". אף להלכה עסקו בשברים רגילים חיוביים כבמושג מתימטי החל מן התקופה הראשונה למדע החשבון והאריתמטיקה. בספר שחובר לפני 4000 שנה

1. השם „מספר טבעי", המראה על טיבם של מספרים אלו בניגוד לכל יתר סוגי המספרים, כבר נמצא בתחילת המאה הששית לסה"נ אצל הסופר הרומאי Boëtius (עיין *Scripta Math.*, 4, p. 105, 1936).

כמעט על ידי אָהמיס „הסופר"[1], נמצאת, בין הרבה דברים מעניינים אחרים, גם השיטה לתאר שבר חיובי רגיל כלשהו כסכום שברים שונים, שלכל אחד מהם המונה 1. במקום „שברים רגילים" (ובכללם המספרים השלמים) אומרים במתימטיקה „מספרים רציונליים"; בסעיף זה, שבו מדובר אך על שברים חיוביים, נשתמש לגביהם רק במלה „שבר", לשם קיצור. תפקידנו בסעיף זה: ל„הרהיב" את תחום המספרים הטבעיים לתחום כל השברים הנ"ל בדרך מדעית ועיונית, ולא מתוך האפשרות לחלק עצמים ממשיים לחלקים.

מערכת המספרים הטבעיים בקשר עם פעולת הכפל (מן החיבור נתעלם לעת עתה) מהווה תחום של עצמים מתימטיים, שבו הוגדרה פעולת־צרוף אחת — היינו הכפל —, פעולה שבה כרוכות ביחוד ארבע התכונות האלה:

1) אם נתונים שני עצמים a ו b של התחום (ז"א שני מספרים טבעיים בסדר מסויים), תיצור מהם פעולת־הצרוף עצם קבוע באופן חד־ערכי, $a \cdot b$, שגם הוא נמצא בתוך התחום; קוראים ל $a \cdot b$ „מכפלה של a ו b".

2) פעולת הצרוף היא אסוציאטיבית, ז"א: שתי המכפלות $(a \cdot b) \cdot c$ ו $a \cdot (b \cdot c)$ קובעות אותו העצם (השוה עמ' 18).

3) פעולת הצרוף היא קומוטטיבית כך שערך המכפלה אינו תלוי בסדר שבו מופיעים הגורמים a ו b; ז"א: שתי המכפלות $a \cdot b$ ו $b \cdot a$ קובעות אותו העצם (השוה עמ' 18).

4) ישנו בתוך התחום עצם „ניטרלי" אחד ויחיד, שצרופו לכל עצם של התחום אינו משנה את העצם. האיבר הניטרלי הוא המספר 1 שבשבילו קיימים, לגבי כל מספר טבעי a, היחסים: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

5) מן היחסים $a \cdot b = a \cdot c$ נובע $b = c$.

נעיר דרך אגב: החוק האסוציאטיבי והחוק הקומוטטיבי (התכונות 2) ו 3)) קיימים, כאשר הדגשנו בעמ' 19, לא לבד בשביל שלושה או שני גורמים כי אם בשביל כל מספר גורמים שהוא. את העובדה הזאת יש להוכיח — בלי להשתמש בעובדות אחרות, אלא אך על פי התכונות 1), 2), 3) אשר צוינו כאן — בעזרת האינדוקציה השלימה; השוה עמ' 51.

לבסוף נכניס עוד כרגיל את סימן־השויון $=$, כך שהיחס $a = b$ יציין, כי שני הסימנים a ו b מסמנים אותו המספר הטבעי[2]; השתמשנו בו כבר ב־4) וב־5). עתה נוכל לבטא את הראשונה מן התכונות הנ"ל בצורה זו: לפעולת הצרוף

1. טופס של ספר זה בשם Papyrus Rhind נמצא במוזיאון הבריטי בלונדון.

2. בסיס זה מבוסס על ההשקפה שהמספרים הטבעיים „נתונים" לנו כעצמיו של תחום מסויים. אין ברצוננו להכנס על ידי כך לפני ולפנים של הבעיות הקשות הקשורות בזהות ובשויון. הבעיות הללו מקומן מקצתן בתורת ההגיון ובתורת הסימון (סימַנטיקה) או הבלשנות (לינגויסטיקה), השוה למשל: יות

A. F. Bentley: Linguistic analysis of mathematics. Bloomington Ind. 1932;

K. Britton: Communication. London 1939.

שאנו עוסקים בה, מתאים ה„יחס" $a \cdot b = c$, ובתוך היחס הזה נקבע העצם c, העומד מימין, באופן חד־ערכי על ידי שני העצמים a ו b העומדים משמאל; בפרט, נקבע c כעצם בתחום שלנו. נוכל לעורר אפוא את השאלה, אם על ידי כל שנים משלושת העצמים המופיעים ביחס $a \cdot b = c$, קבוע תמיד העצם השלישי באופן חד־ערכי, וכעצם מתוך התחום עצמו; שאלה זו מתכוונת למקרים שנתונים a ו c, או b ו c. (דרך אגב: מן הקומוטטיביות — תכונה 3) — נופק ששני המקרים האלה אינם שונים זה מזה, אלא מהווים הם רק אפשרות אחת.)

נתבונן בדוגמות $2 \cdot b = 6$ ו $2 \cdot b = 3$! הן מראות שאין תשובה חד־גונית לשאלה שעוררנוה: יש מקרים שבהם, כמו בדוגמה הראשונה, נמצא בתוך התחום עצם מתאים b, ואז יימצא תמיד רק עצם יחיד, כפי שקל לראות. במקרים אחרים אין בתוך התחום כל עצם b המתאים לדרישה. נסכם: פעולת־הצרוף שלנו אינה ניתנת באופן כללי ל„היפוך" בתוך התחום.

טבעי הדבר שנשים לנגד עינינו את המטרה להרחיב את תחום המספרים הטבעיים כך, שבתוך התחום המורחב יהיה אפשר גם להפוך באופן כללי וחד־ערכי את פעולת הצרוף הנדונה, היינו הכפל. את מושג ההרחבה, שנשתמש בו תדיר גם בסעיפים ובפרקים הבאים, עלינו להבין בצורה מסוימת. כדלקמן: אם נרחיב את החוג של אגודה ידועה ע"י הכנסת חברים חדשים, הרי נדרוש שהחברים ההדשים יכנעו לתקנות הנוהגות כלפי חברי האגודה הישנים. בצורה דומה לזו אנו דורשים בשביל כל הרחבה של תחום־מספרים את עקרונו של הנקל[1] על „יציבות (פֶרמָנֶנציה) של החוקים הפורמליים של החשבון" הקובע: אותם חוקים פורמליים הקיימים בתוך התחום המקורי של מספרים, ישארו בתקפם ככל האפשר גם בתוך התחום המורחב. צריך להתחשב כאן עם ההגבלה „ככל האפשר" שפעמים נוטים לשכוח אותה. הרי בכל מדע, לא לבד במתימטיקה, הרחבת (הכללת) מושג כלשהי גוררת אחריה ויתור על חלק מהתכונות המיוחדות שישנן למושג הצר שיצאנו ממנו[2]. לכן בהרחיבנו תחום של מספרים, לא נוכל להשיג שכל החוקים הנוהגים בתחום המקורי ישארו בתקפם, בלי יוצא מן הכלל, גם בתחום המורחב; כאשר גם בהרחבתה של אגודה לא נוכל למנוע את הדבר שעל תכונות מסוימות של החברים (למשל תכונות התלויות בגילם) יחול שנוי

1. H. Hankel

2. ואולם לא יתכן לשים במקום הכלל הזה (המובן מעצמו), כביכול לשם דיוק, את החוק: כל ריבוי לגבי תכונו של מושג גורר אחריו מיעוט של היקף המושג. החוק הזה, המופיע לפעמים בספרות, אינו נכון. בולצנו (B. Bolzano) — שערכו כסוללי דרכים חדשות בתורת ההגיון ובמתימטיקה הוכר רק בדורנו זה — כבר הדגיש שה„חוק" הנ"ל אינו חוק, והצביע על כך ע"י דוגמה זו: המושג „בקי בכל השפות האירופיות החיות" מהוה, לפי דעתו, ריבוי בתוכן ביחס למושג „בקי בכל השפות האירופיות", ויחד עם זה הנהו עולה גם בהיקפו — כמות האנשים בעלי התכונה — על המושג הראשון. (עיין בסעיף 120 ל„תורת המדע" של בולצנו, אשר הופיעה בפעם הראשונה בשנת 1837.)

מה בגלל החברים החדשים. עקרון היציבות אינו חוק כי אם כלל מועיל; המדריך אותנו להגשים את ההרחבה כך, שמן החוקים הפורמליים החשובים של התחום המקורי ישאר בתוקף מספר גדול למדי גם בתחום המורחב. בהמשך הפרק הזה ובפרקים הבאים נמצא כמה דוגמות שבהן נשתמש בעקרון היציבות וגם נדע את גבולותיו.

לבסוף, נקדים לשיטות ההרחבה הבאות עוד הערה כללית אחרונה, שאת כל מובנה כולו נוכל אמנם לקלוט רק אחר כך. אם מרחיבים תחום עצמים במתימטיקה, אין בדרך כלל המצב בפשטות כך שעל האיברים הישנים נוספים איברים חדשים. אדרבה, גם אפיָם של האיברים הישנים ישתנה על ידי תהליך ההרחבה; לכן, אם נדייק, כולל התחום המורחב אך ורק איברים חדשים, או אפילו מערכות של איברים חדשים. ואף על פי כן הביטוי „הרחבה" הוא במקומו: אותם האיברים החדשים, המופיעים לא כחדשים לגמרי, אלא במקום איברים שכבר היו מקודם, נמצאים מותאמים לאיברים הישנים באופן חד־חד־ערכי, וגם כך שבתכונותיהם לגבי פעולות החשבון אין הבדל ביניהם ובין האיברים הישנים. אף כי להלכה יהיו אפוא כל איברי התחום המורחב חדשים, למעשה יופיעו כחדשים רק אלה שאינם מתאימים לאיברים הישנים.

נעזוב עתה את ההערות האלה, שהן חשובות אמנם אבל גם כלליות ביותר, ונחזור סוף סוף אל הבעיה שהצגנוה לעיל: להרחיב את תחום המספרים הטבעיים לתחום חדש, התחום S של השברים החיוביים (או: של המספרים הרציונליים החיוביים), כך שפעולת החשבון היחידה שלפנינו (היא הכפל) תינתן גם להיפוך באופן כללי וחד־ערכי בתוך S. הכלל המדריך אותנו בדרך־הרחבה זו יהיה, שנשתדל — וגם נצליח — להשאיר בתקפן אף בתחום המורחב את ארבע תכונות הכפל במספרים הטבעיים אשר צוינו לעיל; התכונות האלה, המכונות גם חוקים פורמליים של הכפל, תתקיימנה אפוא בשביל האיברים הישנים והחדשים גם יחד. כמו כן נשיג את האפשרות להפוך את הכפל לא רק בשביל המספרים הטבעיים, כי אם גם בשביל העצמים החדשים.

קשה במקצת לסמן דרך שיטתית וטבעית שמגיעים בה לידי פתרון הבעיה שלפנינו. נדלג על השאלה השיטתית הזאת, ונסתפק בתוצאה הסופית, שעלינו אמנם להוכיח כי פותרת היא באמת את הבעיה. עיקר הפתרון הוא שבמקום מערכת המספרים המקורית נשים תחום חדש S של זוגות־מספרים; או ביתר דיוק, של זוגות מסודרים (a,b), שבהם מסמנים a ו b מספרים טבעיים. הביטוי זוג מסודר מורה על הצורך להשגיח על הסדר שבו מופיעים המספרים a ו b בתוך הזוג; לשון אחר: על הצורך להבדיל בין הזוגות (a,b) ו (b,a). על פי הדברים האלה אמנם התחום החדש טרם הוגדר; כי לשם הגדרתו עלינו עוד לקבוע איך נבין את ה„כפל" בין זוגות־מספרים. מלבד זאת עלינו להגדיר גם את

השויון בין זוגות מספרים, הואיל ולא יתאים לצרכינו להגביל שויון בין הזוגות (a,b) ו (a',b') רק למקרה של הזהות, שבו $a=a'$ ו $b=b'$. נקבע אפוא:

ה ג ד ר ה I: השויון $(a,b)=(a',b')$ יביע שקיים השויון $a\cdot b'=a'\cdot b$, שהוא שויון בין מספרים טבעיים.

ה ג ד ר ה II: המכפלה של שני זוגות־מספרים $(a,b)\cdot(a',b')$ תסמן את הזוג $(a\cdot a',b\cdot b')$, שהוא זוג של מספרים טבעיים.

ה ע ר ה: בהגדרה I השתמשנו בסימן־השויון $=$ בשני מובנים שונים: בתחילה בשביל השויון בין זוגות־מספרים שעלינו להגדיר אותו (המוגדר, definiendum); אחר כך בשביל השויון בין מספרים טבעיים שידענוהו מקודם ושעליו ביססנו את ההגדרה (המגדיר, definiens). לו רצינו לדייק תכלית דיוק, היה עלינו להשתמש בשני סימנים שונים. בדרך כלל אין עושים כך ומסתפקים בסימן אחד, שהרי אין לחשוש לטעות.

כדי שנוכל לסמוך על הגדרות אלו בלי סכנת סתירה, עלינו להראות קודם כל שהגדרת השויון (I) היא „חוקית" במובן זה: כל יחס של שויון, המוגדר בכל מקצוע מתימטי שהוא, צריך להיות קודם כל יחס של „אקוויוַלנטיות" במובן הכללי המבואר בעמ' 8; כלומר, להיות חוזר על עצמו (רֶפליכסיבי[1]), סימֶטרי[2], טרַנסיטיבי[3]. שנית, נדרשת מכל שויון תכונה זו: במקום כל עצם המופיע בתוך משפט מן המקצוע הנידון, נוכל תמיד לשים עצם כלשהו השווה לו, בלי שנפגע ע"י המרה זו בנכונות המשפט. במלואים (בסוף החלק השני) נראה שלגבי השויון שהגדרנוהו ב I מתמלאות שתי התכונות הנזכרות כאן.

הבה נבדוק עתה אם השגנו באמת את המטרה שבגללה הכנסנו את זוגות־המספרים לתוך האריתמטיקה! אני טוען: בתחום $\mathfrak{S}$ של זוגות־המספרים אפשר לא רק להגשים את פעולת הכפל, כי אם גם להפכה באופן כללי וחד־ערכי. באמת: אם נתונים לנו הזוגות (a,b) ו (c,d), ואם מוטל עלינו לחפש זוג (x,y) המקיים את השויון:

$$(a,b)\cdot(x,y)=(c,d),$$

אז נניח קודם כל — לשם הקלת ההיסק — שישנו במציאות לפחות זוג אחד (x,y) הממלא את התנאי הנ"ל. מהנחה זו נקבל על פי ההגדרות I ו II יחד עם חוקי הכפל במספרים טבעיים, את השויונות הבאים זה אחר זה:

$$(a\cdot x,b\cdot y)=(c,d),\quad a\cdot x\cdot d=c\cdot b\cdot y,\quad x\cdot(a\cdot d)=(c\cdot b)\cdot y,\quad (x,y)=(c\cdot b,a\cdot d).$$

מצאנו אפוא: אם בכלל ישנם במציאות זוגות (x,y) הממלאים את התנאי הנ"ל, אז צריכים כולם להיות שווים לזוג $(c\cdot b,a\cdot d)$. מאידך גיסא מראה החשבון לפי ההגדרות I ו II: $(a,b)\cdot(c\cdot b,a\cdot d)=(a\cdot b\cdot c,a\cdot b\cdot d)=(c,d)$; זו"א הזוג $(c\cdot b,a\cdot d)$ — ולכן גם כל זוג השווה לו — ממלא באמת את התנאי שהיה עלינו

1. מן המלה הרומית reflectere = נטות אחור, החזיר.
2. מן המלה היוונית *σύμμετρος* = מתאים, שוה־מדה.
3. מן המלה הרומית transire = עבור.

לקיימו. כך באנו לידי המסקנה שאפשר לבצע תמיד בתחום זוגות־המספרים את הפעולה ההופכת את הכפל (פעולה הנקראת, כרגיל, בשם „חילוק"), ושהפתרון — הוא „המנה" (x,y) — נקבע באופן חד־ערכי[1]. יכולים היינו להראות בדרך דומה כי גם למשואה $(a,b)\cdot(x,y)=(c,d)$ ישנו תמיד פתרון אחד ויחיד; אפס כי הוכחה זו תתגלה כמיותרת על פי הקומוטטיביות של הכפל, שנדענה מיד.

ממה שהוכחנו נופק בפרט שיש פתרון אחד ויחיד למשואה המיוחדת $(a,b)=(x,y)\cdot(a,b)$. זו"א ישנו במציאות זוג אחד ויחיד „ניטרלי" שאינו משנה בכפל את הזוג הנתון (a,b). הזוגות הניטרליים כלפי (a,b) שווים לזוג $(1,1)$, ומכאן ראיה שאינם תלויים בטיב הזוג הנתון (a,b), כי אם $(1,1)$ ניטרלי לגבי כ ל זוג. $(1,1)$, וכמו כן כל זוג השווה לו, ממלא אפוא את התפקיד שיש למספר 1 בכפל בין מספרים טבעיים.

בהרחיבנו את מושג המספר על ידי הכנסתם של זוגות־המספרים, קיימנו את עקרון היציבות במובן זה: שני החוקים הפורמליים (האסוציאטיבי והקומוטטיבי) הקיימים בשביל הכפל בין מספרים טבעיים (עיין 2) ו 3) בעמ' 69), נשארים בתקפם בתוך התחום $\mathfrak{S}$. באמת חשבון פשוט[2] מראה שקיימים השויונות:

$$(a,b)\cdot\big[(c,d)\cdot(e,f)\big]=\big[(a,b)\cdot(c,d)\big]\cdot(e,f)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b).$$

לגבי כל זוג־מספרים (a,b) יש מספר אינסופי של זוגות השווים לו, הם הזוגות (na,nb), שבהם מסמן n מספר טבעי כלשהו. עליהם נוכל להוסיף את הזוגות $\left(\frac{a}{m},\frac{b}{m}\right)$ שבהם עובר m את המחלקים המשותפים של a ו b, אם ישנם כאלה; כמו בדוגמה $(a,b)=(12,18)$. קל לראות שבין כל הזוגות הנ"ל השווים זה לזה, ישנו זוג אחד ויחיד, נאמר (p,q), שבו המספרים הטבעיים p ו q זרים זה לזה. כל זוג־מספרים (p,q) בעל תכונה זו ייקרא „זוג מצומצם". כנגד כל זוג־מספרים קיים אפוא זוג מצומצם אחד ויחיד השווה לו; בפרט שווה הזוג המצומצם $(1,1)$ לכל זוג „ניטרלי".

נשארה לנו, סוף־סוף, עוד שאלה אחת שבאופן כללי הצבענו עליה בתחילת סעיף זה, והיא: באיזו זכות נוכל לכנות את התחום $\mathfrak{S}$ של זוגות־המספרים בשם ה ר ח ב ה של תחום המספרים הטבעיים, אחרי שבתחום $\mathfrak{S}$ נמצאים רק זוגות, ולא

1. נשתמש תמיד, כמו במקרה שלפנינו, בביטוי „קבוע באופן חד־ערכי" או ערך „אחד ויחיד" כדי לציין שכל הערכים האפשריים שווים ביניהם. ואולם טעות תהיה להוציא מן ההוכחה שלפנינו את המסקנה כי צריך להיות $x=c\cdot b$, $y=a\cdot d$; למשל גם $x=2\cdot c\cdot b$, $y=2\cdot a\cdot d$ ממלאים את התנאי שהיה לנגד עינינו, והדבר נשאר בתקפו אם במקום 2 נשים מספר טבעי כלשהו. הקורא יסביר נא לעצמו את הענין ע"י זה שיתן ערכי מספרים מתאימים לזוגות (a,b) ו (c,d); למשל $(a,b)=(5,3)$, $(c,d)=(4,9)$.

2. יאשר נא זאת הקורא בעצמו ע"י חשבון!

המספרים הטבעיים בעצמם? אף על פי כן נוכל להצדיק — אם לא להלכה, לפחות למעשה — את הנוסח שלנו במובן זה: התחום $\mathfrak{S}$ של זוגות־המספרים כולל תחום חלקי $\mathfrak{Q}$, השונה מתחום המספרים הטבעיים, עם הכפל ביניהם, רק בסימון החיצוני ולא בשום דבר ממשי. נדייק יותר ונאמר: בין המספרים הטבעיים ובין הזוגות שבתחום $\mathfrak{Q}$ אפשר ליצור התאמה חד־חד־ערכית בעלת התכונה הבאה: יהיו m ו n שני מספרים טבעיים כלשהם, ויהיו p_m ו p_n זוגות־המספרים מתוך $\mathfrak{Q}$ המתאימים ל m ו n על פי ההתאמה האמורה; אז יהיה $p_m \cdot p_n$ (המכפלה הנוצרת על פי ההגדרה II) אותו זוג של $\mathfrak{Q}$ אשר מתאים לפי ההתאמה הנדונה למספר הטבעי $m \cdot n$. להתאמה מסוג זה נקרא בפרק הבא (§ 3 של הפרק החמישי) בשם „התאמה שומרת־צורה (איסומורפית)". במקרה שלפנינו יהיה $\mathfrak{Q}$ תחום הזוגות $(a, 1)$ והזוגות השווים להם, וההתאמה הנדונה תינתן על ידי הכלל: למספר הטבעי n יתאים הזוג $(n, 1)$, וכמו כן כל זוג השווה לו[1]. השויון $(m \cdot n, 1) = (m, 1) \cdot (n, 1)$, הנובע מן ההגדרה II, מראה שההתאמה שקבענו היא באמת איסומורפית במובן הנ"ל.

נופק מן הדברים האלה, שכלפי החשבון — היינו כלפי הכפל — תפקיד אחד למספרים הטבעיים n ולזוגות $(n, 1)$. והלוא במתימטיקה ענין לנו לא עם מהותם של העצמים המתימטיים, אלא בעקר עם תפקידם בפעולות החשבון; או, בנוסח כללי יותר, עם תפקידם ביחסים המוגדרים בכל מקצוע ומקצוע. נוכל אפוא לזהות את הזוגות $(a, 1)$ עם המספרים הטבעיים. במובן זה רשאים אנו לדבר על תחום כל זוגות־המספרים כעל הרחבה לתחום המספרים הטבעיים. דוקא על פי זה השגנו את מטרתנו: להפוך את הכפל בין מספרים טבעיים, כי הואיל והכפל בכל התחום $\mathfrak{S}$ ניתן להיפוך, הוא ניתן להיפוך בפרט אם הזוגות הנתונים נמצאים בתוך התחום החלקי $\mathfrak{Q}$. לשון אחר: למשואה $(a, 1) \cdot (x, y) = (b, 1)$ ישנו בתוך $\mathfrak{S}$—אבל בדרך כלל לא בתוך $\mathfrak{Q}$[2]—הפתרון היחיד $(x, y) = (b, a)$, בעוד שלמשואה המתאימה $a \cdot x = b$ בתחום המספרים הטבעיים אין בדרך כלל פתרון בתחום זה. ברור לפי זה שדבר־טפשות היה להגיד: „תכלית אי־אפשרית (היא: החילוק הכללי בין מספרים טבעיים) איפשרנו בכל זאת, בהרחיבנו את תחום המספרים הטבעיים." במתימטיקה כל דבר, שהוא באמת אי־אפשרי, נשאר אי־אפשרי לעולם ועד. מה שאיפשרנו זהו לא החילוק בין מספרים טבעיים, כי אם החילוק בין הזוגות המתאימים של $\mathfrak{Q}$ — בתוך התחום $\mathfrak{S}$ שהוא הרחבה של $\mathfrak{Q}$.

בודאי כבר הרגיש הקורא מזמן, שכל הדברים האלה אינם רחוקים ממנו

1. אם נרצה לדייק, עלינו לדבר אפוא על התאמה בין מספרים טבעיים מצד אחד, ובין מחלקת שוויות של זוגות־מספרים מצד שני. אבל הואיל וכל מחלקה, המתאימה למספר טבעי מסוים, כוללת רק זוגות שווים ביניהם, לא איכפת אם נאמר בפשטות, שזוג־מספרים הנהו מתאים למספר טבעי.

2. בתוך $\mathfrak{Q}$ רק אם b מתחלק ב a; אז ישנו למשואה $a \cdot x = b$ הפתרון $x = \frac{b}{a}$, שהוא מספר טבעי.

במדה שתאר לו אולי בתחילת הסעיף; כי אף על פי שהתהליך העיוני בפעולת ההרחבה היה בשבילו דבר חדש, הרי את התוצאה יודע הוא מימי ילדותו. הלא במקום (a, b) נוכל מעתה לכתוב $\frac{a}{b}$, שינוי הנוגע רק לסדורי הדפוס ושאין לו קשר עם מהות הענין. אם נכתוב את ההגדרות I ו II ואת המסקנות שהוצאנו מהן בצורה חיצונית זו, הרינו מביעים עובדות פשוטות על השברים הרגילים ועל הכפל בהם, הידועות לתלמידי בית הספר העממי. ואולם הערך העקרוני שבמהלך רעיונותינו מתגלה בזה: כפי שראינו, אין לנו צורך לבסס את תורת השברים הרגילים על תכונותיו של חילוק עצמים ממשיים לחלקים שווים; תכונות אלו היו אמנם חשובות להתפתחותה ההיסטורית של תורת השברים, אבל מקריות הן מהשקפה מתימטית והגיונית. כך הצדקנו את הכנסת השברים הרגילים החיוביים לתוך האריתמטיקה מתוך השקפה הנמצאת כולה בשטח העיוני וההגיוני, ושאין עיניה נשואות אל העולם החיצוני.

את הרעיון היסודי שבתהליך־הרחבה זה המציא המילטון[1], ואפשר להשתמש בשיטה זו, בשינויים מתאימים, לגבי כל הצעדים השונים שבהרחבת מושגי המספר.

§ 2. המספרים השליליים.

כאמור בתחילת הפרק הזה, אנו רגילים היום לראות את המספרים השליליים כנושא פשוט למדי, שאפשר ללמדו אפילו בבית הספר העממי, ושהבנתו אינה קשורה בקשיים — פרט אולי לכפל בין מספרים שליליים. כדי לנמק את הנושא הזה ולבססו על יחסים הנמצאים בעולם החיצוני, מסתמכים לפעמים על המושג של „חובות" או „פסיב", בנגוד ל„אקטיב" המתאים למספרים החיוביים. אמנם הביסוס הזה כחו יפה רק לגבי חיבורם של המספרים השליליים ולא לגבי הכפל. יש שבאופן כזה נראים המספרים השליליים השלמים בעיני התלמיד אפילו כפשוטים מן השברים. לעומת זאת, פרצוף הדברים בהויתם ההיסטורית הנו שונה לגמרי. היוונים — שהשתמשו בשברים החיוביים כבדבר רגיל, כגון לשם פתרון משואות בנות המעלה 1 (עיין בפרק השמיני), ושהתעמקו כל כך בבעית המספרים האי־רציונליים (עיין בפרק הששי) — לא הגיעו כלל אל המושג של מספר שלילי. רק בתקופה מאוחרת של המחקר המתימטי בהודו, בערך במאה השתים־עשרה לסה"נ, אנו מוצאים נטיה, אמנם מפוקפקת למדי, להרשות גם שרשי־משואה שליליים. במערב מתחילים המספרים השליליים להכנס ולשאוף לזכויות ידועות במתימטיקה החל מן המאה השש־עשרה; אז הכניס אותם סטיפל[2] כ„מספרים אבסורדיים". אפילו במאה השמונה־עשרה פגשו עוד בהתנגדות ידועה[3]. לא נרחיב כאן את הדיבור על הקשיים

1. W. R. Hamilton

2. M. Stifel

3. ראה למשל את המאמר של G. A. Miller בעתון *School Science and Mathematics* 1933, p. 959.

הפסיכולוגיים שבגללם איחר כל כך העולם המתימטי להכיר במספרים השליליים. לעומת זאת נתכוון להראות ע"י הביסוס הבא של המספרים השלמים כולם — החיוביים והשליליים, לרבות 0 — וחיבורם את הדבר הזה: אם נרצה, בצאתנו שוב מן המספרים הטבעיים, להצדיק את התחום הנ"ל באופן עיוני על טהרת המושגים, נוכל ללכת לשם כך באורח ההיקש הגמור, השווה אפילו באופן פורמלי כמעט בכל הפרטים, לאותה הדרך שבה ביססנו בסעיף הקודם את תורת השברים החיוביים עם הכפל בהם. כדי להבליט את האנלוגיה הזאת לא נרתע לאחור מפני סידור־רעיונות משעמם קצת, אשר דוקא הוא ידגיש את שויון שתי הבעיות. על ידי כך יתוודע הקורא לפי דוגמה ממשית אל עקרון אשר יהיה נושאו של הפרק הבא, והוא: במקרים רבים מביא אותו תהליך הגיוני לתוצאות פוריות בכיוונים מתימטיים שונים.

פעולת־החשבון שבה נעסוק בסעיף זה היא ה ח י ב ו ר, במקום הכפל שעמד במרכז הסעיף הקודם. נעיר קודם כל שבתחום המספרים הטבעיים נוכל לבצע את פעולת החיבור באופן כללי וחד־ערכי, ושהיא אסוציאטיבית וקומוטטיבית גם יחד; אבל אי־אפשר להפוך אותה בדרך כלל — כל זה בדיוק כמו שראינו לגבי הכפל בתחילת הסעיף הקודם (השוה התכונות 1) — 3) בעמ' 69). אמנם למשואה $x+2=3$, למשל, יש הפתרון החד־ערכי $x=1$, אבל אין פתרון בין המספרים הטבעיים למשואה $x+3=2$. לעומת כל זאת קיים ההבדל — הבדל שאין לו ערך גדול כלפי הנושא הנדון — שבין המספרים הטבעיים ישנו איבר הניטרלי לגבי הכפל (הוא 1), ואילו לגבי החיבור אין כזה. שוב מ $x+y=x+z$ נובע $y=z$.

נכניס עתה, כדי להגיע לידי היפוך כללי של החיבור, תחום אחר Ω של זוגות־מספרים מסודרים (a,b), שבהם שוב a ו b מסמנים מספרים טבעיים, ונגדיר בהתאם גמור להגדרות I ו II שבעמוד 72:

ה ג ד ר ה *I: השויון $(a,b)=(a',b')$ יביע שקיים השויון $a+b'=a'+b$, שהוא שויון בין מספרים טבעיים.

ה ג ד ר ה *II: הסכום של שני זוגות־מספרים $(a,b)+(a',b')$ יסמן את הזוג $(a+a',b+b')$, שהוא זוג של מספרים טבעיים.

אם נשתמש בהגדרות הללו כאשר השתמשנו בהגדרות I ו II בסעיף הקודם, בשימנו תמיד את החיבור במקום הכפל, נמצא שהשויון שהגדרנוהו כאן גם הוא יחס של אקויוולנטיות, ומרשה, בחיבורם של זוגות־מספרים, להמיר כל מחובר בכל זוג השווה לו בלי שתשתנה על־ידי־כך תוצאת החיבור. ועוד: החיבור בתוך התחום Ω ניתן להגשמה וגם להיפוך באופן כללי וחד־ערכי; כי ההנחה, שישנו בתוך Ω זוג (x,y) הממלא את המשואה $(a,b)+(x,y)=(c,d)$, גוררת אחריה, לפי ההגדרות *I ו *II, את היחסים הבאים:

$$(a+x,b+y)=(c,d),\quad a+x+d=c+b+y,$$
$$x+(a+d)=(c+b)+y,\quad (x,y)=(c+b,a+d).$$

אם נצעד חזרה באותה דרך, נכיר שבאמת $(a,b)+(c+b,a+d)=(c,d)$, היינו שהזוג $(c+b,a+d)$ וכל זוג שווה לו פותר את המשואה הנתונה. חיבורם של זוגות־המספרים ניתן אפוא להיפוך כללי בתוך Ω ע"י פעולת „החיסור", ו„ההפרש" בין שני זוגות — כגון לעיל: בין (c,d) ו (a,b) — מוגדר תמיד ובאופן חד־ערכי כזוג מתוך Ω. לבסוף, החיבור המוגדר על ידי *II הוא גם אסוציאטיבי וקומוטטיבי.

בתחום Ω י ש נ ו ז ו ג נ י ט ר ל י א ח ד ו י ח י ד, שחיבורו עם כל זוג נתון אינו משנה את הזוג הנתון. באמת, אם n מסמן מספר טבעי כלשהו, הרי קיים לגבי כל זוג (a,b) השויון $(a,b)+(n,n)=(a,b)$, הואיל והשויון הזה מביע על פי *I ו *II רק, כי $a+b+n=a+n+b$. לכל שני מספרים טבעיים m ו n קיים: $(n,n)=(m,m)$; כל הזוגות בעלי הצורה (a,a) שווים אפוא זה לזה, ואינם משנים כל זוג על ידי החיבור.

נשאר לנו להראות באיזה מובן נוכל לראות את התחום Ω כ ה ר ח ב ה של תחום המספרים הטבעיים עם חיבורם. כדי להסביר זאת נלך בכיוון שונה מזה שבסוף הסעיף הקודם, בכוון שהוא בעקרו פשוט יותר. הסבה לפשטות יתירה זו של החיסור לעומת החילוק תלויה בעובדה הזאת: אם נתונים שני מספרים טבעיים שונים m ו n, הרי אחד מן ההפרשים $n-m$ ו $m-n$ הנהו תמיד מספר טבעי; לא כן תמיד אחת מן המנות $\frac{m}{n}$ ו $\frac{n}{m}$. יברר נא הקורא לעצמו, אחרי גמרו את הסעיף הזה, איך משפיעה עובדה זו על מהלך הרעיונות בשני המקרים!

כבר ידוע לנו לא לבד החשבון במספרים הטבעיים, כי אם גם סידורם לפי הגודל (עיין בפרק הראשון, § 3). את העובדה כי המספר a קטן מ b (או בצורה המכוונת רק לסדר: a קודם ל b), בטאנו ע"י שני הסימונים הבאים כאחד: $a<b$, או $b>a$ („b גדול מ a", „b מאוחר מ a")[1]. על פי יחס סידורי זה נחלק את כל זוגות־המספרים שלנו לשלוש מחלקות זרות זו לזו: הזוג (a,b) ייקרא ח י ו ב י אם $a<b$, ש ל י ל י אם $a>b$; אם $a=b$, ז"א אם יש לזוג הצורה (a,a), נכנה אותו בשם ז ו ג־א פ ס. ראינו לעיל שכל זוגות־האפס שווים ביניהם. מלבד זאת ידוע מתורת המספרים הטבעיים שבמקרה $a<b$ יש למשואה בין מספרים טבעיים $b+x=a$ תמיד פתרון אחד ויחיד x שהוא מספר טבעי. משום כך נוכל לתאר כל זוג חיובי בצורה $(b+c,b)$ וכל זוג שלילי בצורה $(a,a+c)$. נסכם את הדברים האלה כך:

לכל זוג מספרים יש צורה אחת משלוש הצורות $(m+n,m)$, (m,m), $(m,m+n)$. בהתאם לכך אם הזוג הנתון הוא זוג חיובי, זוג־אפס או זוג שלילי.

כפי שיוצא מן ההגדרה *I, כל הזוגות החיוביים $(m+n,m)$ בעלי אותו ערך n שווים זה לזה. ננסח זאת בצורה: „ערך" הזוג החיובי $(m+n,m)$ ת ל ו י ר ק

1. יש לשאול: למה לנו בשביל אותו יחס שני סימונים, הן בכתב הן בשפה? התשובה פשוטה: אין לבני האדם האפשרות של „שמור וזכור בדיבור אחד", היינו שאנו יכולים לדבר ולכתוב רק בסדר ידוע, זה אחרי זה, ולא שני דברים בבת אחת. בעצם a ו b ביחס $a<b$ הנם שווי־זכויות, ולא תמיד נוח לנו להקדים את a; אם ברצוננו להקדים את b, יש צורך בסימון או ביטוי חדש, $>$ או „גדול מ...".

במספר הטבעי n ולא ב m. הוא הדבר בשביל הזוגות השליליים $(m, m+n)$. לכן בכל שלושת המקרים האפשריים שהבדלנו ביניהם, לא איכפת לנו מהו ערכו של m, נוכל אפילו לקבוע בשביל m ערך קבוע כלשהו, למשל את הערך $m=1$. כדי שנקבל על סמך זה רק זוגות שונים זה מזה. בהתאם לכך אפשר לתת להגדרת החיבור של הזוגות החיוביים את הצורה:

$$(1+a, 1)+(1+b, 1)=(2+a+b, 2)=(1+a+b, 1).$$

מצורה זו נוציא מסקנה חשובה. ניצור התאמה חד־חד־ערכית בין המספרים הטבעיים n ובין זוגות־המספרים החיוביים ע"י כלל זה: למספר הטבעי n יתאימו כל הזוגות החיוביים — השווים כולם ביניהם — $(m+n, m)$, שבהם m מסמן כל מספר טבעי שהוא; בפרט, למשל, הזוג $(1+n, 1)$. מן הצורה הנ"ל של הגדרת החיבור יוצא כי כלל־התאמה זה מצטיין בתכונה כדלקמן: לסכומם של שני מספרים טבעיים נתונים מתאים דוקא סכומם של אותם הזוגות החיוביים, שהם על פי כלל־ההתאמה בני־זוגם של המספרים הטבעיים הנתונים. לשון אחר: אם נסמן ב p_n את הזוג החיובי המתאים לפי ההתאמה הנדונה למספר הטבעי n, אז p_{a+b} ישוה לסכום הזוגות p_a ו p_b. קיימת אפוא בין המספרים הטבעיים ובין הזוגות החיוביים התאמה שהיא „איסומורפית" לגבי החיבור במובן שבארנוהו בעמ' 74. כמו שציינו שם, נוכל גם כאן — אם לא להלכה, לפחות למעשה — לזהות את הזוגות החיוביים $(m+n, m)$ עם המספרים הטבעיים n, ולראות את תחום כל זוגות־המספרים שלנו כ ה ר ח ב ה של תחום המספרים הטבעיים. בפרט השגנו את האפשרות להפוך באופן כללי וחד־ערכי את החיבור בין מספרים טבעיים; או ביתר דיוק, בין בני זוגם, הם הזוגות החיוביים. שהרי למשוואה $(m+a, m)+(x, y)=(m+b, m)$ ישנו בתוך Ω תמיד הפתרון היחיד $(x, y)=(b, a)$ אשר, כמובן, אינו צריך להיות דוקא זוג חיובי. הגענו כך אל המטרה שהיתה לנגד עינינו, בהרחיבנו את תחום המספרים הטבעיים עם חיבורם.

לבסוף אנו מכירים בנקל שזוגות־המספרים שהגדרנום כאן מתלכדים עם המספרים השלמים הידועים לנו היטב. למספר השלם החיובי n מתאימים הזוגות החיוביים $(m+n, m)$, למספר השלילי n — הזוגות השליליים $(m, m+n)$, למספר אפס הזוגות (m, m).

בהתאם לכך נקבל את חוקי החיבור הידועים. ליחס $n+(-n)=0$ מתאים ב Ω היחס $(m, m)=(m, m+n)+(m+n, m)$, או בצורה נוחה יותר: $(a, b)+(b, a)=(m, m)$. נוכל אפוא להכניס את „החיסור" של זוגות־מספרים על ידי הכלל: חיסורו של הזוג (a, b) פירושו: חיבורו של הזוג „הנגדי" (b, a).

הצדקנו כך את תורת המספרים השלמים עם חיבורם וחיסורם לפי השיטה של „זוגות־המספרים" באופן שאינו תלוי בצירוף מושגים חיצוניים כמו חובות או פסיב. כבר הרגיש הקורא מזמן שהזוג (a, b) מסמן מה שאנו רגילים לכתוב בצורה $b-a$, ושהגדרות השויון והחיבור התכוונו לעצם הדבר הזה. אם אמנם גם

בסעיף הזה עמדו לפנינו זוגות מסודרים של מספרים טבעיים, ז"א זוגות בעלי אותה צורה כמו בסעיף הקודם, הרי מהות הזוגות שלפנינו שונה לגמרי ממהות הזוגות אשר מקודם, שונה כרחוק המספרים השליליים מן השברים החיוביים. זוהי דוגמה מאלפת לכך, ש מ ה ו ת ם ש ל ע צ מ י ם מ ת י מ ט י י ם — או מובנם, אם נרשה לעצמנו לדבר על „מובן" בקשר עם עצמים מתימטיים — ת ל ו י ה א ך ו ר ק ב ה ג ד ר ו ת ה ק ו ב ע ו ת ב י נ י ה ם א ת ה ש ו י ו ן ו א ת ש א ר ה י ח ס י ם, פ ע ו ל ו ת ה ח ש ב ו ן ו כ ו'. נוכל להעיז ולאמר: המספרים השלילים שונים מן השברים החיוביים, מפני שההגדרות *I ו *II שונות מן ההגדרות I ו II.

§ 3. ש ד ה ה מ ס פ ר י ם ה ר צ י ו נ ל י י ם.

שאיפתנו בסעיף זה: למזג יחד את שתי דרכי ההרחבה לתחום המספרים הטבעיים, שצעדנו בהן בסעיפים הקודמים. ברצוננו אפוא לכבוש לנו את מ ע ר כ ת כ ל ה ש ב ר י ם ה ר ג י ל י ם, כחיוביים כשליליים (לרבות את אפס), עם שתי פ ע ו ל ו ת־ ה ח ש ב ו ן ב י נ י ה ן, ה ח י ב ו ר ו ה כ פ ל. למערכה זו קוראים מ ע ר כ ת ה מ ס פ ר י ם ה ר צ י ו נ ל י י ם[1], או גם „ש ד ה ה מ ס פ ר י ם ה ר צ י ו נ ל י י ם". ?מה מתכוונת כאן המלה „שדה". נבאר בפרק הבא (§ 4), ששם נתיחס אל המערכת הנדונה מהשקפה כללית ומופשטת הרבה יותר.

ישנן אפשרויות שונות לצרף את שני תהליכי ההרחבה הקודמים זה אל זה. ביניהן נבחר לנו את השיטה המתארת את השברים כ ז ו ג ו ת־ מ ס פ ר י ם במובן הנזכר ב § 1, אפס כי כשני האיברים a ו b המופיעים בזוג (a, b) נקח לא רק מספרים ט ב ע י י ם, כמו שלקחנו שם אלא, ככל האפשר[2], מספרים ש ל מ י ם כלשהם. לשם כך נסמן מעתה את המספרים השלמים לא כזוגות מספרים, כמו בסעיף הקודם, כי אם ע"י אותיות פשוטות: $a, b, \ldots$ או $n, m, \ldots$. את חיבור המספרים השלמים כבר למדנו ב § 2, ואת האיבר הניטרלי לגבי החיבור, שמקודם סימַנוהו על ידי הזוג (m, m), נסמן עתה כרגיל ב 0. כמו כן יסמן a - את המספר הנגדי ל a, היינו ההפוך ל a לגבי החיבור, כך שקיים תמיד: $a+(-a)=0$.

כדי להגיע אל מחוז חפצנו ולבסס את המספרים הרציונליים, עלינו לטפל מראש בשתי בעיות כלליות, אחת של כפל ואחת של חיבור, ובבעיה אחת פרוטה יותר. לשם כך נשתמש במדה רחבה בעקרון היציבות (הפרמננציה) שדובר עליו בעמ' 70.

הבעיה הכללית הראשונה היא להתגבר על הקושי הבא: הגדרת הכפל בין שברים (זוגות של מספרים טבעיים) שבעמ' 72 (הגדרה II) הסתמכה על כך שכבר למדנו

---

1. המונחים „שבר רגיל" ו„מספר רציונלי" מתכוונים לאותם העצמים, כאמור בעמ' 69. המונח השני רגיל יותר במתימטיקה הגבוהה; מקורו במלה הרומית ratio, שמשמעה: יחס; הלא שבר תנהו יחס (מנה) של שני מספרים שלמים.

2. ביאור המלים „ככל האפשר" ינתן להלן, בסוף סעיף זה.

בפרק השני את הכפל בין מספרים טבעיים; על הכפל הזה היתה מבוססת אפילו הגדרת השויון שבין שני שברים (הגדרה I, שם). לפי עקרון היציבות נשתדל עתה לשמור על ההגדרות האלה בנוסחן הקודם גם כלפי זוגות־המספרים, אשר נכניסם מעתה כדי לסמן מספרים רציונליים כלשהם. ואולם, הלא כאן יהיו איברי־הזוג מספרים שלמים כלליים, ולאו דוקא מספרים טבעיים. נופך מזה שאנו זקוקים לכללי הכפל במספרים שלמים, בפרט במספרים שליליים.

נצא שוב מן הכפל בין מספרים שלמים חיוביים, הידוע לנו מן הפרק השני! עלינו מוטל אפוא, אם a ו b יסמנו מספרים שלמים חיוביים, להגדיר: ראשית את המכפלות $a\cdot(-b)$, $(-a)\cdot b$, $(-a)\cdot(-b)$; שנית את המכפלות $0\cdot c$ ו $c\cdot 0$ שבהן מסמן c מספר שלם כלשהו. הצד השווה שבכל המקרים יהיה רצוננו ודרישתנו, שמכפלת שני מספרים שלמים תהיה גם היא מספר שלם.

נטפל קודם כל במכפלה $a\cdot 0$ שבה מסמן a מספר שלם כלשהו. מלכתחילה אנו חפשיים לגמרי לקבוע כפי רצוננו את ערכה של מכפלה זו שלא הוגדרה עד הנה. ברם עקרון היציבות מגביל חופש זה, בהטילו עלינו את השאיפה להגדיר כך, שלחוקי החשבון (חיבור וכפל) במספרים טבעיים נבטיח את תקפם גם לגבי פעולות החשבון בתחום כל המספרים השלמים. אחד מן החוקים הפורמליים ההם (עיין בעמ' 69) היה החוק הדיסטריבוטיבי המקשר את החיבור בכפל: $k\cdot(l+m)=k\cdot l+k\cdot m$. נדרוש עתה אך ורק שהחוק הדיסטריבוטיבי יתקיים גם בתחום כל המספרים השלמים. זה מספיק כדי לקבוע בהכרח את ערך המכפלה $a\cdot 0$, והתוצאה היא, כאשר נבאר במלואים לחלק השני, שנגיע לידי

הגדרה I: בשביל כל מספר שלם a יהיה $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

נדגיש עוד בפירוש שאי־אפשר להוכיח כי $a\cdot 0=0$; יש רק להראות כי רצוי הדבר להגדיר כך. כל נסיון לטעון „אם נקח מספר מסוים אפס־פעמים, נקבל אפס" וכדומה, אינו אלא נסיונך לרמות את עצמך.

בדרך דומה אנו מוצאים (עיין במלואים) שהחוק הדיסטריבוטיבי גורר אחריו, בשביל הכפל בין מספר שלם חיובי ומספר שלם שלילי,

הגדרה II: אם יסמנו a ו b מספרים טבעיים, יהיה:

$$a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b).$$

כמו כן מביא אותנו החוק הדיסטריבוטיבי לידי

הגדרה III: אם יסמנו a ו b מספרים טבעיים, יהיה: $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

ההגדרות I — III ידועות לקורא מימי למדו בבית הספר, שבהם נעשה אולי נסיון מוצלח מעט או הרבה ל„הוכיח" לו כי הכללים האלה קיימים בהכרח. לעומת זאת ראינו כאן שהכללים האלה הם לא משפטים הטעונים הוכחה, כי אם הגדרות שאנו קובעים, אם נדייק, כפי רצוננו. לגבי הגדרה לא יתכן לשאול אם היא נכונה, אלא רק אם היא מועילה. במקרה שלפנינו התועלת שבהגדרות הנ"ל יסודה בשאיפתנו כי לחוק הדיסטריבוטיבי, הקיים לגבי החשבון במספרים

טבעיים, והמעמיד, בעצם, את פעולת הכפל על פעולת החיבור, לא יגרם כל נזק על ידי סיפוח המספרים השליליים; „נזק" במובן שיהיו מקרים היוצאים מגדר החוק. אין כח בעולם־ההגיון אשר יוכל לאסור עלינו להגדיר למשל: $(a\cdot b)=(-b)\cdot(-a)$, ואין שום סתירה הגיונית בהגדרה כזו; אפס כי ע"י זה היינו מוותרים על החוק הדיסטריבוטיבי, ומכניסים כך לתוך החשבון תסבוכת קשה מנשוא.

קל לראות עתה שהכללים הנמצאים בהגדרות II ו III נכונים גם אם a ו b יהיו מספרים שלמים כלשהם, ולאו דוקא טבעיים.

פתרנו כך אחת משתי הבעיות שהזכרנו בעמ' 79/80, והיא: להגדיר את פעולת הכפל בין מספרים שלמים כלשהם, בעוד שב§ 1 ידענוה רק לגבי מספרים טבעיים ושברים חיוביים. תפקידנו השני יהיה להכליל גם את פעולת החיבור. פעולה זו ידועה לנו לגבי כל המספרים השלמים (§ 2), אבל לא לגבי השברים; אף לא לגבי השברים החיוביים. כדי למצוא הגדרת־חיבור מתאימה, נסתמך על העובדה שמצאנוה בעמ' 74, שבתחום זוגות־המספרים המתארים את השברים החיוביים מתאים המספר הטבעי n לזוג $(n,1)$ ולזוגות השווים לו. אם נרצה להכניס את פעולת החיבור בשביל הזוגות האלה, נצטרך להגדיר כך:

$$(a,1)+(b,1)=(a+b,1);$$

אחרת לא היינו יכולים לשמור מבחינת החיבור על ההתאמה הנ"ל בין מספרים טבעיים לזוגות מספרים. ואולם לפי הגדרת השויון קיים:

$$(a,1)=(a\cdot c,c),\ (b,1)=(b\cdot c,c),\ (a+b,1)=(a\cdot c+b\cdot c,c);$$

בצורה כללית יותר נוכל לכתוב לפי זה:

$$(a,c)+(b,c)=(a+b,c).$$

אם נעזוב את התחום המדעי של האריתמיטיקה ונראה בשבר $\frac{a}{c}$ לא את הזוג המופשט (a,c) אלא מספר (כפי גדלו של a) של אותם חלקי־יחידה המתקבלים על ידי חילוק היחידה ל c חלקים שווים, אז תֵראה ההגדרה האחרונה: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ כמעט מובנת מעצמה; כי אז נפרשנה כך, שהחיבור של b חלקים כאלה ל a חלקים יתן את הסכום של $a+b$ חלקים.

יש לטעון כלפי ההגדרה האחרונה: הרי הגדרה זו רחוקה מלהשיג את התפקיד ששמנו לנגד עינינו, תפקיד החיבור של שברים חיוביים — הואיל והיא מכוונת רק למקרה הפרוט שבו יש לחלק השני של הזוג, בשני הזוגות המחוברים, אותו הערך c. ואולם אין בכך כלום: אדרבה, נקבל מן ההגדרה הנ"ל את היכולת לטפל גם במקרה הכללי, אם נביא רק בחשבון את הגדרת השויון בין שברים, אשר ניתנה בעמ' 72. באמת: יהיו (a,b) ו (c,d) שני זוגות של מספרים טבעיים; אז קיים על פי הגדרת השויון:

$$(a,b)=(a\cdot d,b\cdot d),\ (c,d)=(b\cdot c,b\cdot d).$$

נופך מזה, שעל פי הגדרתנו לגבי המקרה הפרוט נצטרך לקבוע במקרה הכללי, שסכומם של שני הזוגות הניתנים יהיה $(a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d)$. ובכן נגדיר:

הגדרה IV: חיבורם של זוגות מספרים חיוביים ייעשה לפי הכלל:

$$(a,b)+(c,d)=(a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d).$$

אין כל קושי להעביר הגדרה זו גם לפעולת החיסור במקום החיבור, אבל לא כדאי לעשות זאת כל זמן שנצטמצם בזוגות מספרים חיוביים; כי עד כאן היינו צריכים להגביל את החיסור למקרה שבו $a\cdot d-b\cdot c$ מספר טבעי, ז"א למקרה $a\cdot d>b\cdot c$.

בזה גמרנו כמעט את ההכנות להכנסת כל המספרים הרציונליים עם פעולות החשבון בהם לתוך האריתמיטיקה. רק הערה אחת עלינו עוד להקדים, הערה מיוחדת, המגבילה את האפשרויות שלפנינו. הערה זו אינה נוחה וטרחנית היא עד מאד, לא לבד בשביל תורת המספרים הרציונליים, כי אם בשביל רוב מקצועות המתימטיקה בכלל; אף־על־פי־כן עלינו לנטות שכמנו ולסבול הגבלה זו, כי אין אפשרות להשתמט ממנה הואיל ונגזרה מתוך הכרח פנימי. המדובר הוא ענין הידוע מבית הספר, שבו כבר הכביד הדבר על התלמידים, והוא: אי־האפשרות לחלק באפס. נראה כי אין כאן מצות לא־תעשה הנובעת משרירות לבם של המתימטיקנים, אלא מסקנה הגיונית מן ההגדרות והחוקים שכבר למדנום.

לאור השיטות שטפלנו בהן בפרק זה יופיע מצב הענינים לנגדנו כך: מטרתנו היתה ותהיה, לטפל בזוגות־מספרים (a,b) שאיבריהם a ו b הנם מספרים שלמים כלשהם. התקרבנו למטרה זו על ידי ההגדרות I — IV שבסעיף זה, שלא בדינו אותן אלא קבלנון בדרך עקבית, מתוך הדרישות לתועלת ולנוחיות; בייחוד מתוך עקרון היציבות. ועתה נראה שהגדרות אלו עם ההגדרות שב§1 גוררות אחריהן, למזלנו הרע, הגבלת החופש בבחירת האיברים a וb שבזוג — אם נרצה לשמור על האפשרות הכללית לבצע את פעולות החיבור והכפל, ולהפכן.

ראשית כל, לא היינו יכולים לקיים את הגדרת השויון I שב§1 (עמ' 72), לו הסכמנו לתת כל ערך שלם לחלקי הזוג, a וb, כי אז לא יהיו במציאות כלל זוגות־מספרים שונים, אלא כל זוג (a,b) יהיה שווה לזוג $(0,0)$ — ולכן גם לכל זוג אחר — על פי ההגדרה הנ"ל; שהרי קיים $a\cdot 0=b\cdot 0$ (עיין בהגדרה I שבסעיף זה, עמ' 80). סכנה זו ממריצה אותנו לעיין שוב בבעיה שבגללה הכנסנו ב§1 את זוגות־המספרים, במובן השברים. מטרתנו היתה אז לאפשר את החילוק; לשון אחר, להבטיח לפעולת הכפל את האפשרות של היפוך כללי, אפשרות הנעדרת ממנה בתחום המספרים הטבעיים או השלמים. מאידך גיסא, את הגדרת הכפל שקבענו לזוגות מספרים חיוביים (הגדרה II ב §1, עמ' 72) נרצה, כמובן, להשאיר בתקפה לגבי כל הזוגות כולם. ובכן דרישת האפשרות להפוך באופן חד־ערכי את הכפל, אומרת: קבע, אם ינתנו המספרים השלמים a,b,c,d, באופן חד־ערכי את הזוג (x,y), כך שיהיה: $(a,b)\cdot(x,y)=(c,d)$, ולכן: $a\cdot d\cdot x=b\cdot c\cdot y$.

נקח כאן את המקרה המיוחד: $a=b=0$; אז נופך מן ההגדרה I בסעיף זה, שתמיד קיים השויון האחרון, יהיו x,d,c,y מה שיהיו. במקרה זה יהיו למשואה שלפנינו לא פתרון אחד, כי אם מספר אינסופי של פתרונים שונים. (אותה המסקנה נקבל אם $c=d=0$ או $a=c=0$ או $b=d=0$.)

נופך מכך שישנם קשיים הקשורים דוקא באפשרות לתת לחלקי הזוג גם את הערך 0. ואמנם את הקשיים האלה גוררת אחריה ההגדרה I של סעיף זה (עמ' 80), הגדרה שהוכרחנו לקבעה כדי להשאיר בתקפו את החוק הדיסטריבוטיבי. קל לראות שאין הקושי מצטמצם למקרה שבו שני חלקיו של הזוג שווים ל0. כדי להווכח בזה בדרך פשוטה, נעיין במקרה הפרוט של מספרים שלמים (במקום זוגות של מספרים שלמים). המטרה המסומנת לעיל, שבעבורה הכנסנו את הזוגות, היא: להבטיח פתרון אחד ויחיד למשואה $a\cdot x=b$, ז"א לחלק את המספר השלם a במספר השלם b, ברור שבשום אופן אי־אפשר להשיג מטרה זו אם $b=0$[1]. אבל הואיל והכנסנו, לשם פתרון המשואה $a\cdot x=b$, את הזוג (a,b), נופך שעל כל פנים יהיה אסור לנו לתת את הערך 0 לאיבר השני, b, בזוג (a,b). הגבלה זו נחוצה אפוא. לעומת זאת יתברר בהמשך הסעיף הזה שאין צורך בהגבלות אחרות. אמנם הכרנו כאן רק בעל כרחנו כביכול, ובדרך מקרית כמעט, בצורך להגבלה הנ"ל. לעומק פשוטו של ההכרח הנ"ל נרד רק בפרק הבא, כשנסתכל בכל השאלות האלה מהשקפה כללית ומופשטת יותר (פרק חמישי, §4).

אחרי כל ההכנות הקודמות נוכל לגשת, סוף סוף, אל ביסוס המספרים הרציונליים. אמנם הכנות אלו היו מטרידות קצת, ואולם בלעדיהן לא היינו יכולים להבין, למה אנחנו מכניסים את המספרים הרציונליים דוקא על פי ההגדרות הבאות, ולא על בסיס אחר. אף־על־פי־כן יש להכנות אלו רק ערך פסיכולוגי ודידַקטי, ואינן חלק עיקרי בבנין שנבנה בשורות הבאות. הבנין הזה שלם הוא בפני עצמו; אלא שאופיו החיצוני הוא דוגמטי ביותר, אם אין מסבירים מקודם איך מגיעים לסגנונו המיוחד.

כנקודת המוצא תשמש לנו מערכת המספרים השלמים עם פעולות החיבור והכפל שבה. את המספרים האלה כבר ידענו על פי ביסוסם ב§2 ובהגדרות I — III בסעיף זה, ומעתה נראה אותם כעצמים פשוטים וידועים; לכן לא נסמנם ע"י זוגות כי אם באותיות רגילות: $a, b, \ldots$. נגדיר עתה את ההגדרות הבאות:

הגדרה A: כל זוג מסודר (a,b) שבו a ו b הם מספרים שלמים, ושאיברו השני b שונה מאפס, ייקרא בשם מספר רציונלי.

---

1. ראשית: במקרה $a=0$ ישנם אינסוף פתרונים שונים x למשואה $a\cdot x=0$; כי לפי ההגדרה I בעמ' 80 קיים היחס הנ"ל בשביל כל מספר טבעי x. במקרה השני, שבו a שונה מ 0, אין במציאות מספר שלם x שבשבילו $a\cdot x=0$; כי הלוא בשביל כל מספר שלם x קיים $0\cdot x=0$. (אפילו מחוץ לתחום המספרים השלמים — כגון בתחום זוגות־המספרים, ובדרך כלל: בשביל כל הרחבה של התחום הנ"ל — אין פתרון למשואה $a\cdot x=0$, אם a שונה מ 0; נלמד זאת בפרק הבא.)

הגדרה B (הגדרת השויון): הזוג (a,b) ייקרא שווה לזוג (a',b') אם קיים השויון בין מספרים שלמים: $a\cdot b'=a'\cdot b$.

הגדרה C (הגדרת החיבור): סכומם של הזוגות (a,b) ו (a',b') פרושו הזוג $(a\cdot b'+a'\cdot b, b\cdot b')$.

הגדרה D (הגדרת הכפל): מכפלת הזוגות (a,b) ו (a',b') פירושה הזוג $(a\cdot a', b\cdot b')$.

ההגדרות B ו D הן הכללות טבעיות להגדרות I ו II שב §1; כמו כן נובעת ההגדרה C מן ההגדרה IV שהגענו אליה בסעיף זה (עמ' 82). מה שעלינו לעשות עוד כדי ללמוד את תורת המספרים הרציונליים כולה, זוהי רק שורה של חשבונות מיכניים כמעט. על ידי חשבונות כאלה יש לקבל מתוך ההגדרות הקודמות ומתוך תכונות המספרים השלמים את כל תכונותיהם של המספרים הרציונליים, עד כמה שהן קשורות בחיבור ובכפל. לשם כך יש להוכיח את המשפטים הבאים, שבהם נסמן מעתה לשם פשטות את המספרים הרציונליים לא ע"י זוגות כי אם באותיות פשוטות[1], וכמו כן את השויון, החיבור, החיסור, הכפל והחילוק בהם — בסימנים הרגילים: $=$, $+$, וכו'. „שונה" נציין בסימן $\neq$; $a\neq b$ מביע אפוא (כאן כמו בכל המתימטיקה) שהשויון $a=b$ איננו קיים.

משפט 1: בתחום המספרים הרציונליים אפשר לבצע באופן כללי וחד־ערכי את פעולת החיבור ואת פעולת הכפל; ז"א: סכומם ומכפלתם של שני מספרים רציונליים נתונים הנם שוב מספרים רציונליים הקבועים באופן חד־ערכי.

משפט 2: בתחום המספרים הרציונליים אפשר להפוך את החיבור באופן כללי וחד־ערכי; למשוואה $a+x=b$ ישנו אפוא פתרון רציונלי אחד ויחיד $x=b-a$. (פעולת החיסור.)

משפט 3: בתחום המספרים הרציונליים אפשר להפוך את הכפל באופן כללי וחד־ערכי, פרט לחילוק באפס; למשוואה $a\cdot x=b$ ישנו אפוא פתרון רציונלי אחד ויחיד $x=\frac{b}{a}$, אם, ורק אם, $a\neq 0$ (a שונה מן האיבר הניטרלי של החיבור). (פעולת החילוק.)

משפט 4: החיבור והכפל במספרים רציונליים הם אסוציאטיביים, ז"א:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

לכן אפשר, לשם פשטות, לסמן את הערכים המשותפים ע"י $a+b+c$ ו $a\cdot b\cdot c$, בלי סוגריים כל עיקר.

משפט 5: החיבור והכפל במספרים רציונליים הם קומוטטיביים, ז"א:

$$a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a.$$

---

1. אעפ"י כן נשתמש גם הלאה לפעמים, לשם בהירות, בשם „זוג" בשביל „מספר רציונלי".

משפט 6: פעולת החיבור והכפל בתחום המספרים הרציונליים קשורות זו בזו ע"י החוקים הדיסטריבוטיביים (שכל אחד מהם גורר אחריו את השני על פי החוק הקומוטטיבי של הכפל):

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

מלבד המשפטים האלה, ואפילו לפניהם, עלינו להוכיח שהגדרת השויון היא „חוקית" במובן זה, שבמקום המחוברים או הגורמים נוכל לשים מספרים רציונליים השווים להם על פי ההגדרה B, בלי לשנות על ידי כך את ערך הסכום או המכפלה. השוה ב §1, עמ' 72!

לא כדאי להרצות את הוכחות המשפטים האלה, שהן פשוטות וכמעט מיכניות. יתאמץ הקורא לעשות זאת בעצמו! ואולם לעזרתו ובתורת דוגמה תובאנה במלואים הוכחות המשפטים 3 ו 6.

מן המשפטים האלה יש להוציא בנקל את המסקנה שישנו זוג (מספר רציונלי) אחד ויחיד x, הניטרלי לגבי החיבור, ז"א המקיים לכל זוג a את המשוואה: $a+x=a$. זוג זה שווה ל $(0,1)$ וייקרא בשם „איבר האפס"; נסמנו בפשטות ב 0[1]. כמו כן ישנו זוג אחד ויחיד y, הניטרלי לגבי הכפל, ז"א המקיים לכל זוג a את המשוואה $a\cdot y=a$; הוא „איבר היחידה" $(1,1)$ (לרבות את האיברים השווים לו) שנסמנו ב 1[2]. מלבד זאת נופק מן המשפט 2 שלכל זוג a ישנו זוג אחד ויחיד, אשר יסומן ב $-a$, הנגדי ל a (במובן החיבור) כלפי איבר האפס; ז"א: המקיים את השויון $0=(-a)+a$. ובאותו אופן נופק מן המשפט 3 שלכל זוג a, השונה מאיבר האפס, ישנו זוג אחד ויחיד אשר יסומן ב $\frac{1}{a}$ (או גם ב a^{-1}), ההפוך ל a (במובן הכפל) כלפי איבר היחידה, ז"א המקיים את השויון $1=\frac{1}{a}\cdot a$.

נציין עוד משפט חשוב הקיים בתחום המספרים הרציונליים:

משפט 7: מכפלת שני מספרים רציונליים שווה לאפס, ורק אם, אחד הגורמים לפחות שווה לאפס.

כדי להוכיח משפט זה עלינו להסתמך על כך שאותו המשפט קיים בתחום המספרים השלמים; זוהי מסקנה ישרה מן ההגדרות I—III שבראשית סעיף זה (עמ' 80). לכן נקבל מצד אחד לפי ההגדרות D ו B: $(0,1)=(0,b)\cdot(0,1)=(a,b)$. מצד שני, השויון $(0,1)=(a,b)\cdot(a',b')$ גורר אחריו: $0=b\cdot b'\cdot 0=1\cdot a'\cdot a$, וזאת אומרת שלפחות אחד המספרים השלמים a ו a' שווה לאפס, מש"ל.

---

1. כך עשינו כבר במשפט 3. אין לחשוש לכך שהקורא יטעה ויחליף את זוג־האפס 0 במספר השלם 0 (אשר יוכל להופיע בחלקו הראשון של זוג־מספרים). כמו כן אין חשש לגבי הזוג 1 והמספר הטבעי 1.

2. אמנם במקרה שהזוג a הוא איבר האפס, יקיימו גם זוגות השונים מ $y=1$ — באמת כל זוג y — את המשוואה $a\cdot y=a$. ואולם אין זה פוגע בעובדה שישנו רק זוג אחד y, המקיים את המשוואה הנ"ל לגבי כל זוג a נתון, ורק עובדה זו מצדיקה את השם „איבר היחידה".

נוכיח עוד שני משפטים המתכוונים למה שקוראים בתורת השברים הרגילים „צמצום" ו„הרחבה" של שבר.

משפט 8: זוג־מספרים אינו משנה את ערכו (ז"א: הוא נהפך לזוג השווה לו) אם נכפול את שני המספרים שבזוג באותו המספר השלם השונה מאפס, או אם נחלק את שניהם במחלק משותף.

הוכחה: יסמן n מספר שלם כלשהו השונה מאפס; על פי ההגדרה B קיים: $(a,b)=(a\cdot n,b\cdot n)$. למשל: $(9,-6)=(4,6)=(2,3)$.

משפט 9: זוג השונה מאפס שווה ל„זוג מצומצם" יחיד, ז"א לזוג שאיברו השני הוא חיובי ושאין מחלק משותף לשני איבריו.

הוכחה: זוג מצומצם כזה נוכל לקבוע על ידי כך, שנחלק את שני המספרים שבזוג במחלקם המשותף הגדול ביותר; בשעת הצורך (היינו אם המספר השני חיובי שלילי) נכפול עוד את שני המספרים ב -1. כדי להוכיח שיש רק זוג מצומצם יחיד כזה, נניח כי $(r,s)=(r',s')$, וכי שני הזוגות האלה הם מצומצמים. מזה נופך: $r\cdot s'=r'\cdot s$, ז"א $r\cdot s'$ מתחלק ב s, ו $r'\cdot s$ מתחלק ב s'; מלבד זה זרים r ו s, וכמו כן r' ו s'. אבל אחד מן המשפטים הראשונים של תורת המספרים אומר: אם מכפלת מספרים שלמים $m\cdot n$ מתחלקת במספר השלם q, ואם n ו q אין מחלק משותף, אז m מתחלק ב q[1]. במקרה שלנו אומר משפט זה, ש s מתחלק ב s', ו s' מתחלק ב s, וזה גורר אחריו: $s=s'$, מפני ש s ו s' שניהם חיוביים. לכן גם $r'=r$, מש"ל.

על ידי כך גמרנו את ביטוס המספרים הרציונליים. לבסוף עלינו לגשור את הגשר בין התורה שלפנינו ובין התורה המקובלת לשברים הרגילים. נעשה זאת בהדגישנו שלש נקודות:

1) באיזה מובן מהווה תחום המספרים הרציונליים שהגדרנוהו הרחבה לתחום המספרים השלמים? התשובה דומה לתשובה שנתנו בסוף § 1. ישנה גם כאן התאמה חד־חד־ערכית, ו„איסומורפית" הן לגבי החיבור הן לגבי הכפל, בין המספרים השלמים ובין חלק מן המספרים הרציונליים. החלק הזה מכיל את כל הזוגות בעלי הצורה $(a,1)$, ואת הזוגות השווים להם. ההתאמה הנידונה תיעשה על ידי הכלל: למספר השלם a יותאם הזוג $(a,1)$ וכל זוג השווה לו. אפיה האיסומורפי של התאמה זו מתבטא בשויונות הנובעים מן ההגדרות C ו D:

$$(a,1)+(b,1)=(a+b,1),$$
$$(a,1)\cdot(b,1)=(a\cdot b,1);$$

שויונות האומרים: על ידי חיבור וכפל נקבל מן הזוגות, המתאימים למחוברים ולגורמים שלמים, את הזוג המתאים לסכום ולמכפלה. לפיכך אין הזוגות

1. זוהי מסקנה קלה מן המשפט על הפירוק החד־ערכי לגורמים ראשוניים, עיין בעמ' 26.

שצורתם $(a,1)$, שונים בעיקר מן המספרים השלמים; הזוגות הכלליים (a,b) מהווים אפוא הכללה לאלה.

2) ב § 1 היתה המטרה שבגללה הכנסנו את השברים החיוביים: לאפשר את היפוך הכפל, אשר בדרך כלל אינו אפשרי בתחום המספרים הטבעיים. כך נוכל לומר גם כאן שעל המספרים השלמים הוספנו את המספרים הרציונליים כולם, כדי להפוך ככל האפשר את הכפל בין מספרים שלמים. עלינו להשתמש בהגבלה „ככל האפשר", מפני שבשום אופן לא נוכל להשיג את המטרה כולה. כי הלוא ראינו לעיל שאי־אפשר לפתור — או לפתור באופן חד־ערכי — את המשואה בין מספרים שלמים $b\cdot x=a$, אם $b=0$. לעומת זאת השגנו באמת את מטרתנו אם נקבל עלינו את ההגבלה $b\neq 0$. לשם כך נכתוב את המשואה שלפנינו, בעברנו מן המספרים השלמים לזוגות כפי 1), בצורה $(b,1)\cdot(x,y)=(a,1)$, וההגבלה הנ"ל אומרת כי $b\neq 0$[1]. והנה בתחום המספרים הרציונליים יש באמת למשואה זו הפתרון היחיד: $(x,y)=(a,b)$, שהוא זוג רציונלי, הואיל ו b שונה מאפס.

3) לבסוף עלינו לציין (מה שבודאי הכיר הקורא כבר מזמן) שהזוגות שלנו הם השברים הרגילים; או ביתר דיוק: שונים מהם רק בסימונם החיצוני. אם נשנה את הסימון בכתבנו $\frac{a}{b}$ במקום הזוג (a,b), תעבורנה ההגדרות B — D לצורתן הידועה:

קיים $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, אם ורק אם $a\cdot b'=a'\cdot b$;

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{a\cdot b'+a'\cdot b}{b\cdot b'};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}=\frac{a\cdot a'}{b\cdot b'}.$$

ההגדרה A אומרת ש„המכנה" צריך להיות שונה מאפס.
נקודה רביעית, המתיחסת לסדר, נעורר בעמ' 88.

המשפטים 8 ו 9 (עמוד 86) אומרים שמותר ל„הרחיב" כל שבר על ידי הכפלת המונה והמכנה באותו מספר שלם השונה מאפס; ושכל שבר שווה לשבר מצומצם אחד ויחיד, בעל מכנה חיובי, ובו המונה והמכנה זרים זה לזה. בלי כל קושי אפשר גם להוכיח למשל שמנה, שבה המונה הוא $\frac{a}{b}$ והמכנה $\frac{c}{d}$, שווה למנה $\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, בתנאי ש $c\neq 0$, ושויונות דומים לשויון זה.

העיקר שבתורת הפרק הזה, כמובן, לא בסימון החיצוני שאינו מעלה ואינו מוריד, כי אם בזה שלמדנו את העובדה — היוצאת בהרבה מגדר ההשקפה שמקנים אותה לתלמידים בבתי־הספר — כי אפשר לבסס את תורת המספרים הרציונליים עם כל הגדרותיה ומשפטיה בדרך הגיונית, והכרחית במדה מסוימת, בלי להסתמך על ציורים שאולים מעולם ההסתכלות (כגון: חובות, או חלקיו של עצם שלם). יחסים כמו $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$ או $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$ פושטים כך כל צורה של מקריות, ומופיעים לאור נמוקי ההגיון האמתיים שעליהם הם מסתמכים.

1. כי הלא $(0,1)=(b,1)$ גודר אחריו לפי ההגדרה B: $0=0\cdot 1=0\cdot b$.

נגמור בהערה היוצאת מעבר לגבול המתימטיקה „הטהורה" והמכוונת לשימושיה: התאמצנו להפוך את פעולת החשבון שבין המספרים השלמים; והנה התחום שכבשנוהו, תחום המספרים הרציונליים, ממלא תפקידים רחבים בהרבה מהיפוך הפעולות. בעזרת המספרים השלמים נוכל לספור (למנות) את עצמיה של קבוצה סופית וע"י זה גם לסדר אותם (עיין בפרק הראשון והשני), אבל לא נוכל למדוד, ז"א לקבוע ארכו של מַטֶה, גדלו של שטח או נפח, מידת משקל, מידת החום של חדר, וכו', לפחות לא בתנאֵי המידה (יחידת־המידה) הרגילים. תפקיד זה, למדוד גדלים הנתונים בטבע, ממלאים בצורה מספיקה המספרים הרציונליים שהכנסנום כאן[1]. לעומת זאת אינם מספיקים לשם מדידות במתימטיקה, למשל בגיאומטריה, כאשר נראה בראשית הפרק הששי. לפיכך יהיה לנו צורך בהרחבה נוספת של מושג־המספר. אבל בטרם נעשה זאת, נפסיק את תהליך ההרחבה ע"י נושא, המפיץ מצדו אור חדש על תהליך זה.

השלמה לעמ' 87

4) נגדיר יחס של סדר בין המספרים הרציונליים בצורה הבאה, שהיא בהתאם לסדר בין מספרים טבעיים שהוגדר בפרק הראשון.

$(a,b)<(c,d)$, אם יש מספר חיובי (x,y) — כלומר בעל x ו y טבעיים, או מספר שוה — באופן שקיים: $(a,b)+(x,y)=(c,d)$. במקום $(a,b)<(c,d)$ נכתוב גם $(c,d)>(a,b)$; במלים: קטן מ־, גדול מ־.

ל> יש התכונות הבאות, שקל מאד להוכיחן:

א) בין כל שני מספרים רציונליים r_1 ו r_2 קיים אחד ורק אחד היחסים $r_1<r_2$, $r_1=r_2$, $r_1>r_2$ (כלומר $r_2<r_1$).

ב) היחסים $r_1<r_2$, $r_2<r_3$ גוררים את היחס $r_1<r_3$ (טרַנסיטיביות). התכונות א) וב) משותפות הן לכל יחסי הסדר; עיין בכרך השני פרק ג' וד'.

ג) $r_1<r_2$ גורר אחריו $r_1+r_3<r_2+r_3$.

ד) אם r_1 ו r_2 חיוביים (כלומר, שניהם גדולים מהמספר אפס), גם $r_1\cdot r_2$ הוא חיובי.

ה) קיים „החוק של ארכימידס" (עיין עמ' 169 וגם כרך שני, פרקים ה' וח') האומר: אם r_1 ו r_2 הם חיוביים ו $r_1<r_2$, הרי נמצא בין הסכומים r_1+r_1, $r_1+r_1+r_1$, $r_1+r_1+r_1+r_1$,... אחד שהוא גדול מ r_2.

---

1. השוה את מאמרו של H. v. HELMHOLTZ על: Zählen und Messen (עיין: H. v. Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie, herausg. von P. HERTZ u. M. SCHLICK. Berlin 1921.) שחופיע ב 1887
הוצאה אנגלית „Counting and Measuring" הופיעה בניו־יורק 1930.

פרק חמישי: חבורות ושדות.*)

בכל מה שהובא עד כאן בספר זה עסקנו במספרים, ז"א בעצמים מפורדים ומסוימים של החומר המתימטי. בפרק זה נעסוק לא בעצמים כשהם לעצמם כי אם בתחומים של עצמים, וביתר דיוק: בתחומים של עצמים עיוניים, שעל מהותם לא נדע כלום. כאן יתברר עד כמה זה חשוב ומועיל לטפל בתחום שלם, שאֶפיו מוגדר ע"י החוקים השוררים בתוכו; חוקים בין איבריו העיוניים של התחום.

§1. מושג החֲבורה.

המושג הכללי ביותר בקשר עם תחום של עצמים מתימטיים הוא מושג התחום עצמו, שבדרך כלל מכנים אותו בשם קבוצה (של איברים). במושג זה כבר השתמשנו בפרק הראשון, ועיון מיוחד נקדיש לו בחלק הרביעי (כרך שני של הספר). התחומים שנעסוק בהם כאן נבדלים מן הקבוצות־סתם בזה, שכאן תבוצענה פעולות־חשבון בתוך התחומים; שהרי עיקר כוונתנו עודנה מופנית כלפי המספרים, והלוא עיקר תפקידם של המספרים הוא: לחַשב בהם.

המושג הפשוט ביותר שעלינו לבארו הוא מושג „החבורה". בצדק אמר אחד מגדולי המתימטיקנים שבדור הקודם: מושג החבורה עתיק יומין לא פחות מן המתימטיקה בכלל. בסעיף הבא נראה שכבר עד עתה טפלנו בכמה מקרים של חבורות, ונדע עוד הרבה דוגמות אחרות. בסעיף זה יוגדר רק המושג עצמו.

הגדרה 1: תהי נתונה לנו קבוצה $\mathfrak{F}$ של עצמים (איברים) שביניהם מוגדר יחס השויון, ומלבדו פעולת־חשבון, המתאימה עצם מסוים לכל שני איברי $\mathfrak{F}$, שונים או שווים, הנתונים בסדר מסוים. הקבוצה $\mathfrak{F}$ תיקרא קבוצה מתקשרת אם, ראשית: פעולת־החשבון תהיה חד־ערכית, ושנית: אם היא לא תוציא מחוץ לקבוצה, היינו שהעצם המותאם ע"י פעולת־החשבון לכל שני איברים של הקבוצה, יימצא גם הוא בתוך הקבוצה.

אם שני האיברים הנתונים של $\mathfrak{F}$ יהיו a ו b, נסמן את האיבר המותאם להם ע"י פעולת־החשבון ב $a\times b$ („a מצורף ל b"); לכן, אם האיבר הזה (כאיבר של $\mathfrak{F}$ סתם) סומן ב c, נוכל לכתוב: $a\times b=c$.

הערות להגדרה זו: א) טיבו של יחס השויון כבר ידוע לנו מן הפרק הראשון והרביעי, ונוכל אפוא לקצר כאן. יחס כזה צריך להיות, קודם כל, יחס של אֶקוויוַלנטיות במובן הכללי המוגדר בעמ' 8; כלומר, יחס רפֶלכסיבי, סימֶטרי וטרַנסיטיבי. אמנם אין זה מספיק; אם נרצה לציין אקויולנטיות כיחס של שויון, עלינו לדרוש ממנה עוד את התכונה הבאה: אצל כל פעולות החשבון ואצל כל

*) לפרק הזה יש אופי מופשט יותר מאשר לפרקים הבאים. הקורא יוכל לעבור על הפרק הזה באופן שטחי (בקריאה הראשונה), ולפנות מיד לנושאים המוחשים יותר של הפרק השישי והשביעי.

„היחסים" המוגדרים בתחום נוכל להכניס, במקום כל איבר, איבר כלשהו הקשור אתו ע"י האקסיומות הנידונה, בלי שנות בזה את נכונות החשבון או היחס. זאת אומרת במקרה שלפנינו, הוא של קבוצה מתקשרת שבה מוגדרת רק פעולת־חשבון אחת $\times$: למען יסמן $=$ שויון, צריכים השויונות $a=a'$ ו $b=b'$ לגרור אחריהם את השויון: $a\times b=a'\times b'$.

ב) ההבדל הכללי בין „יחס" (relation) כמו יחס השויון או אי־השויון או הסדר וכו', ובין מה שקראנו בשם „פעולת־חשבון", הוא בזה: יחס מן הסוג הראשון מקשר שני עצמים, ואילו פעולת־חשבון מקשרת לפחות שלושה עצמים (למשל: שני מחוברים וסכומם [1]). בתורת ההגיון מדייקים לאמר: יחס השויון וכו' הוא יחס בן שני מקומות ריקים, פעולת־חשבון היא יחס בן שלושה מקומות ריקים.

ג) מובן שיחס בן שלושה מקומות ריקים, ובפרט יחס של „פעולת־חשבון", יכול להיות גם לא חד־ערכי כלפי תוצאת הפעולה, היינו כלפי האיבר העומד במקום השלישי (או בכתב הרגיל $a\times b=c$, מימין סימן השויון). נקח, למשל, את פעולת־החשבון, המתאימה לשני מספרים נתונים a ו b את הממוצע הגיאומטרי ביניהם; היא הפעולה $\sqrt{a\cdot b}$. התוצאה (הממוצע) נקבעת כאן בדרך כלל באופן לא חד־ערכי אלא דו־ערכי; ואם נצטמצם למספרים הממשיים (עיין בפרקים הבאים), היא לפעמים אינה מוגדרת כלל. למשל: $\sqrt{2\cdot 8}$ הוא או 4 או 4−; לעומת זאת אין מספר ממשי שהוא הממוצע הגיאומטרי בין 1− ל 1+, ז"א השווה ל $\sqrt{1\cdot(-1)}$.

הגדרה II: קבוצה מתקשרת $\mathfrak{G}$ תיקרא בשם חבורה, אם מתמלאים עוד שני התנאים הבאים.

a) פעולת החשבון המוגדרת בתוך $\mathfrak{G}$ — ושנקרא לה מעתה פעולת החבורה — היא אסוציאטיבית (עיין בעמ' 18). לשון אחר: בשביל כל שלושה איברים a, b, c של $\mathfrak{G}$ קיים:

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c).$$

b) פעולת החבורה, שהיא חד־ערכית בכיוון ישר על סמך ההגדרה I, היא חד־ערכית גם בכיוון הפוך, היינו שהיא ניתנת להיפוך חד־ערכי בתוך $\mathfrak{G}$. לשון אחר: למשואות $a\times x=c$ ו $y\times b=c$, שבהן מסמנים a ו b איברים נתונים כלשהם של $\mathfrak{G}$, ישנם בתוך $\mathfrak{G}$ פתרונים x ו y, הקבועים כל אחד באופן חד־ערכי.

הגדרה III: חבורה נקראת חבורה בעלת הסדר n, אם נמצאים בתוכה בדיוק n איברים. כל חבורה בעלת סדר n תיקרא חבורה סופית. אם לגבי

1. זה יבלוט יותר, אם במקום $x+y=z$ נשתמש בסימון $+(x,y,z)$, למשל: $+(2,3,5)$. באופן כזה נוכל לכתוב גם $=(x,y)$ במקום $x=y$. — מובן שעלינו לשמור על סדרם של „המקומות הריקים": אמנם $+(2,3,5)$ נכון ע"פ ההגדרה הנ"ל של היחס $+(\cdot,\cdot,\cdot)$; אבל $+(3,5,2)$ או $+(5,3,2)$ אינו נכון, ו $+(3,2,5)$ נכון רק ב„מקרה" (הואיל והחיבור הוא קומוטטיבי).

חבורה, המכילה לפחות איבר אחד, אין במציאות מספר טבעי n כך ש n מציין מספרם של איברי החבורה, תיקרא החבורה: חבורה אינסופית.

הגדרה IV: חבורה נקראת חבורה קומוטטיבית (או חבורה של אָבֶל [1]), אם תוצאת הפעולה אינה תלויה בסדר שבו מופיעים שני האיברים המקושרים על ידי הפעולה; לשון אחר: אם בשביל כל שני איברים a ו b מתוך $\mathfrak{G}$ קיים: $a\times b=b\times a$.

התכונה „האפיינית" ביותר למושג החבורה (ואפילו למושג קבוצה מתקשרת) היא מה שנקבע בסוף ההגדרה I: פעולת־החשבון שהוגדרה בתוך החבורה או הקבוצה, תקשר את האיברים באופן כזה שתוצאת הפעולה תימצא שוב בתוך אותו התחום עצמו (בחבורה, או בקבוצה המתקשרת). רק על סמך תנאי זה מראה החבורה אפיו של תחום שלם וסגור כלפי חוץ, אשר הוא העיקר במושג זה ובמושגים שנגזרם ממנו אחר כך (§4). מובן שתנאי זה אינו מהווה תכונה הכרחית לכל תחום שבו מוגדרת פעולת־חשבון; אדרבה, בדרך כלל מוליכה אותנו פעולה כזו אל מחוץ לתחום עצמו. נקח, למשל, את קבוצת כל המספרים הטבעיים ונבחר כפעולת־חשבון את החיסור, שהוא, בהתאם לתנאי הראשון של הגדרה I, מהווה פעולה חד־ערכית; במקרה זה נמצאת תוצאת הפעולה, היינו ההפרש, בתוך הקבוצה רק אם המחוסר גדול מן המחַסר. דוגמה מסוג שונה נקבל, אם נקח כקבוצה את תחום כל המספרים השלמים השונים מ 0, וכפעולת־החשבון לגבי שני מספרים שלמים נתונים m ו n (בסדר זה) את הוצאת השורש ה m'י מן המספר n. תוצאת הפעולה, $\sqrt[m]{n}$, לא תימצא בדרך כלל בין המספרים השלמים; והתוצאה אף לא תהיה חד־ערכית אם לא נקבע הגבלה נוספת.

כאשר השתמשו המתימטיקנים בתקופות קדומות למעשה בחבורות — אם גם לא בשם זה ולא בצורה מופשטת — הסתמכו בעיקר על אפיה הסגור הנ"ל של החבורה. רק במאה הי"ט הוחל להדגיש את תפקידם החשוב של שני התנאים הנוספים אשר צוינו בהגדרה II: החוק האסוציאטיבי, והיפוכה החד־ערכי של פעולת החבורה בתוך תחומה היא. נוכיח קודם כל, ששני התנאים האלה נחוצים, במובן שלא נוכל לבטוח בקיומם בלי שנדרוש אותם במפורש, נחיצותו של תנאי מסוים במובן זה נקרא אי־תלותו של התנאי, וביתר דיוק: אי־תלותו בשאר התכונות הידועות או הדרושות מלבדו. לשון אחר: אנו מתכוונים להוכחה, שאי־אפשר להוכיח את תוכן התנאי הנידון על סמך שאר התכונות הידועות; משום כך לא נוכל להמנע מדרוש את התנאי, לשם ודאות שתוכן התנאי מתקיים. להוכחות מסוג זה נודע ערך מיוחד ועקרוני במתימטיקה החדישה, בייחוד בחמשים השנים האחרונות; בחלק החמישי של הספר (כרך שני) נדע את הדוגמה הקלַסית להוכחה כזו, היא הגיאומטריה הלא־אבקלידית.

1. ע"ש N. H. Abel

ישנה שיטה מפורסמת להוכחות כאלה שכבר הזכרנוה בפרק השני (עמ' 13), והיא: אם נתון לנו תחום מוגדר על פי n תנאים, ואם נרצה להוכיח שכל אחד מן התנאים האלה אינו תלוי בשאריתם, נבנה לנו תחום־עזר הממלא את כל התנאים פרט לאותו תנאי שאי־תלותו עומדת להוכחה; תנאי זה לא יתמלא בתחום־העזר. מציאותו של תחום־עזר כזה מראה, שאי־אפשר להסיק את התנאי הנידון כמסקנה משאר התנאים; הרי אחרת היה גם התנאי הנידון מתמלא בתחום־העזר [1].

נתאר את הגשמת תכנית זו כלפי התנאים שבהגדרה II או, ביתר דיוק, כלפי כל אחד משני התנאים האלה. נראה שכל אחד אינו תלוי בתנאי ההגדרה I, לרבות את התנאי האחר של ההגדרה II.

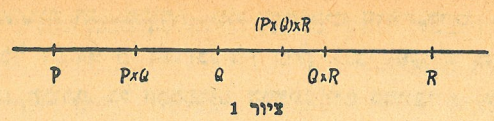
כדי להראות שהחוק האסוציאטיבי אינו תלוי בשאר התנאים, עלינו ליצור דוגמה לקבוצה מתקשרת, שפעולתה ניתנת להיפוך חד־ערכי, אבל אינה ממלאת את החוק האסוציאטיבי. דוגמה לתחום כזה מהווה קבוצת כל הנקודות הנמצאות בקו ישר מסוים, אם נגדיר כדלקמן: שתי נקודות נקראות „שוות" רק אם הן זהותיות [2]. הפעולה תיצור מתוך שתי נקודות נתונות P ו־Q את האמצע ביניהן, שנסמנו ב־$P\times Q$; והלא האמצע הוא נקודה קבועה באופן חד־ערכי, הנמצאת בתוך הקבוצה הנתונה. אם נתונות שתי נקודות P ו־M בקו הישר, הרי יש בין נקודותיו נקודה אחת ויחידה Q, כך ש־M היא האמצע בין P ובין Q; זו"א הפעולה ניתנת להיפוך חד־ערכי. הפעולה המוגדרת היא קומוטטיבית; שהרי האמצע בין P ל־Q והאמצע בין Q ל־P היינו הך. ואף־על־פי־כן הפעולה אינה אסוציאטיבית. נקח, למשל, שלוש נקודות P, Q, R בסדר זה, כך שהרווחק בין P ל־Q יהיה 1 (נאמר ס"מ אחד) [3] והרווחק בין Q ל־R יהיה 1.3 (עיין בציור 1, עמוד 93). אז הנקודה $(P\times Q)\times R$ שונה מ־$P\times(Q\times R)$; כי הנקודה הראשונה רחוקה 1.4 מ־P, ואילו השניה רחוקה רק כ־0.8 מ־P (היא אינה מסומנת בציור).

---

1. מהשקפה הגיונית יתכן להשתמש, לפחות במקרים מתאימים, בשיטה פשוטה יותר ומבהיקה יותר, כדי להוכיח אי־תלותה של תכונה מסוימת בתכונות אחרות; והיא: להסתמך על כך, שלתוך התכונה הנידונה נכנסים מושגים שאין להם קשר עם המושגים הכלולים בשאר התכונות. נקח, למשל, את הבדיחה הידועה: „ידענו אניה מסוימת שארכה 100 מ' ורחבה 20 מ'; מהו גילו של רב־החובל?" הואיל ושנות חייו של רב־החובל אינן נכנסות למושג של ממדי האניה, ברור שאי־אפשר לפתור את השאלה. לשון אחר: גילו של רב־החובל איננו תלוי בממדי האניה. ואולם גם בכל מקרה כזה נוכל להשתמש בשיטה המבוארת לעיל. בבדיחה הנ"ל אפשר לומר: ממדי האניה אינם יכולים לגרור אחריהם שגילו של רב־החובל יהיה a. כדי להוכיח זאת נתאר לנו שחברת האניות, שלה שייכת האניה בת הממדים הנתונים, תמנה כרב־החובל איש שגילו $a+10$. התיאור המדומה הזה מהווה בדיוק הוכחה מן הסוג המסומן לעיל.

2. כך נבין את השוויון תמיד, אם לא נקבע במפורש ביאור אחר לשוויון.

3. יחידת המידה תוכל להבחר כפי רצוננו (השוה פרק ששי, § 1), למשל כס"מ אחד או מ' אחד, וכו'. בציור 1 לקחנו את יחידת המידה כ־22 מ"מ.



ציור 1

פשוט עוד יותר להציג דוגמות לקבוצה מתקשרת, הממלאת את החוק האסוציאטיבי ואינה נותנת את האפשרות הכללית להיפוך הפעולה. שתי דוגמות כאלה כבר היו לפנינו ב§§1 ו־2 של הפרק הקודם. ב§1 נתקלנו בעובדה, שקבוצת המספרים הטבעיים איננה מאפשרת תמיד להפוך את פעולת הכפל; לעומת זאת מבוצע הכפל בתוך הקבוצה הזאת באופן חד־ערכי, וממלא את החוק האסוציאטיבי (וגם את החוק הקומוטטיבי). ב§2 טפלנו בקבוצת המספרים הטבעיים עם פעולת החיבור, שגם היא יוצאת לפועל באופן חד־ערכי ועל פי החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי, בלי שתנתן להיפוך כללי בתוך הקבוצה. נוכל אף לומר: הנושא בכל אחד משני הסעיפים ההם היה, להרחיב את התחום הנתון (קבוצת המספרים הטבעיים בקשר עם פעולת־חשבון אחת), הממלא כמעט את כל התנאים הכרוכים במושג החבורה, כך שבתחום המורחב יתקיים גם התנאי הנשאר, והוא התנאי b) של ההגדרה II (היפוך הפעולה). שאיפה זו: לעשות, על ידי הרחבה מתאימה, תחום־מספרים נתון לחבורה או לשדה (עיין ב§4 של פרק זה), היא קו עיקרי בכל דרגות הבעיה של הרחבת מושג המספר. (אם התחום הנתון כבר חבורה או שדה, דורשים אותה התכונה מן התחום המורחב.)

בנקל נוכל לתת דוגמות אחרות לאי־תלותו של התנאי b) מן ההגדרה II בשאר התנאים שבהגדרות I ו־II. למשל: תחום כל המספרים השלמים, בקשר עם פעולת הכפל; או תחום כל המספרים הממשיים החיוביים בקשר עם פעולת החיבור. דוגמות מסוג אחר נדע להלן, כשיהיה לנו חומר מתאים יותר לדוגמות.

כדי שלא ידמה הקורא כי כל קבוצה מתקשרת ממלאת תמיד לפחות אחד מן התנאים הנמצאים בהגדרה II, תנתן עוד דוגמה שבה אף אחד מהם אינו מתקיים. התחום הנידון יכיל את כל המספרים הטבעיים, ופעולת־החשבון תהיה בדרך כלל החיבור הרגיל, רק שבמקום $1+1=2$ נקבע $1+1=1$. אז קיים:

$$2+(1+1)=3,\quad (2+1)+1=4,$$

זו"א החוק האסוציאטיבי אינו מתמלא. מה שנוגע להיפוך הפעולה, הרי אמנם למשוואה $1=x+1$, למשל, יש פתרון בתוך התחום ($x=1$), אבל לא למשוואה $1=x+2$.

§2. דוגמות למושג החבורה.

אחרי כל הדוגמות הקודמות, המשמשות הוכחות לאי־תלותם של תנאים ידועים בשאר תנאי החבורה, נסתכל סוף סוף בדוגמות אחדות לחבורות ממש. שתי דוגמות כבר היו לנו, והן: חבורת כל המספרים הרציונליים החיוביים לגבי הכפל (פרק רביעי, §1), וחבורת כל המספרים השלמים לגבי החיבור (פרק רביעי,

§2). דוגמות אחרות הן: חבורת כל המספרים הרציונליים, או כל המספרים הממשיים, או כל המספרים המרוכבים; כולן לגבי פעולת החיבור כפעולת חבורה. כמו כן: חבורת כל המספרים הרציונליים החיוביים (או השונים מאפס), או כל המספרים הממשיים החיוביים (או השונים מאפס), או כל המספרים המרוכבים השונים מאפס (עיין בפרק השביעי); כולן לגבי הכפל כפעולת חבורה.

מובן שאיברי החבורה אינם צריכים להיות דוקא מספרים. נציג עוד דוגמות שאולות מן הגיאומטריה. נקח, למשל, קבוצת כל הנקודות הנמצאות בקו ישר נתון, וכדי להגדיר בנקל פעולת־חשבון, נסמן את הנקודות על פי שיטת הקואורדינטות במספרים (ממשיים)! (השוה ראשית הפרק הששי.) נגדיר כי „סכומן" של שתי נקודות נתונות תהיה הנקודה, המתאימה לסכום הקואורדינטות של הנקודות הנתונות; ע"י זה נקבל חבורת נקודות שפעולתה ה„חיבור" המוגדר.

דוגמה גיאומטרית מסוג אחר תיוצר כך: נסתכל במישור מסוים ונכניס את המושג של „הזזה מקבילית"; היינו, הפעולה המעבירה כל יציר גיאומטרי שבמישור ליציר גיאומטרי אחר אשר יתקבל מן הראשון ע"י הזזה (התקה) לכוון קבוע ברוחק מסוים כלשהו a (מידת ההזזה). על ידי הזזה מקבילית כזו יהפך כל יציר במישור ליציר אחר החופף לראשון, והנמצא ברוחק a ובכוון הנ"ל מן היציר המקורי. ואמנם, המישור כולו יהפך לעצמו על ידי הזזה כזו.

איברי החבורה שנרצה לבנותה יהיו כל ההזזות לכוון הקבוע בשביל כל ערכי a (אשר יהיו על כל פנים מספרים חיוביים, מכיון שמדובר על רוחק). הפעולה שנגדירנה בין הזזות אלו היא צירוף שתי הזזות זו לזו; היינו, אם ההזזה המקבילית f_1 הופכת יציר נתון Z ליציר Z', וההזזה f_2 הופכת את Z' ל Z'', אז $f_1 \times f_2$ היא ההזזה אשר תהפוך את Z ל Z''. הצירוף הזה הנהו מתאים לחיבור רגיל של אותם הרוחקים המתאימים לשתי ההזזות הנתונות. באופן זה קבלנו קבוצה מתקשרת שאיבריה הן הזזות, ושפעולת־החשבון שלה היא צירוף־ההזזות. תנאי ההגדרה I וכמו כן החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי מתמלאים על סמך הביאורים הנ"ל. — ואולם עד כאן אין לפנינו חבורה. כי אם f_1 מסמנת הזזה ברוחק a, הגדול מן הערך b המתאים להזזה f_2, אין במציאות הזזה שצירופה ל f_1 יתן לנו את התוצאה f_2. בייחוד אין בין כל ההזזות שום הזזה, שצירופה אינו משנה כלל הזזה נתונה.

כדי לקבל מן הקבוצה המתקשרת הנ"ל חבורה, עלינו עוד להוסיף:
א) „הזזה" מדומה, המשאירה כל יציר במקומו הקודם, היינו: המנוחה;
ב) כל ההזזות שכוונן הפוך לכוון ההזזות שהכנסנון, ז"א כביכול הזזות ברוחקים שליליים. ברור שעל פי זה נוכל, בקבוצה שקבלנוה עתה, לפתור גם כל משואה $f_1 \times y = f_2$ באופן חד־ערכי — היינו למצוא הזזה אחת ויחידה y בתוך המערכת המורחבת, הממלאת את המשואה הזאת. לכן קבלנו חבורה: חבורת כל

ההזזות המקבילות בכוון הנתון מראש, לרבות את הכוון הנגדי, לגבי צירופן של שתי הזזות כפעולת החבורה.

במקום הכניס הזזות מקבילות במישור, היינו יכולים להתכוון גם לסיבובים של כל יצירי המישור סביב נקודה מסוימת הנקראת „מרכז הסיבוב". תחת הרוחקים באות כאן הזויות המודדות את גודל הסיבוב, ופעולת החבורה תהיה שוב: צירופם של שני סיבובים זה לזה.

דוגמה מסוג חדש נקבל מן הדוגמה האחרונה, אם נתבונן לא בכל הסיבובים האפשריים, כי אם רק באותם הסיבובים שמידת סיבובם היא זוית ישרה או כפולה של זוית ישרה; היינו הזויות של 90^0, 180^0, 270^0, לרבות את המנוחה המתאימה לזוית של 360^0 (או של 0^0). גם כאן צירופו של אחד מארבעת הסיבובים האלה לאחר — יהי זה שונה מן הראשון או לא — נותן כתוצאה שוב אחד מן הסיבובים הנ"ל. יש להדגיש שבזה קבלנו בפעם הראשונה דוגמה של חבורה סופית (עיין בהגדרה III, עמ' 90); בפרט: חבורה בת ארבעה איברים. אילו בחרנו, תחת זוית של 90^0, בזוית של 60^0, היינו מקבלים חבורה בת ששה איברים, והקורא ימצא בנקל איך להכליל את הדבר למספרים אחרים הקובעים את סדר החבורה (עיין בהגדרה הנ"ל). הצד העקרוני שבדבר הוא שמצאנו: הגדרת החבורה אינה גוררת אחריה שהחבורה תכיל מספר אינסופי של איברים; מספר איבריה של החבורה אינו תלוי בתנאים הנמצאים בהגדרות I ו II (עיין גם בפסקה שאחרי הבאה).

נוכל למצוא דוגמות של חבורות סופיות גם בשטח המספרים. דוגמה פשוטה ביותר לכך היא החבורה המכילה את שני המספרים $+1$, -1, ושפעולתה היא הכפל. הואיל והכפל של שנים (שונים או שווים) מן המספרים $+1$ או -1 נותן שוב אחד מן המספרים האלה, מתמלא כאן התנאי שפעולת־החשבון לא תוציא אותנו מתוך החבורה, וגם יתר התנאים מתקיימים. כל מי שיש לו ידיעה כלשהי על המספרים „הדמיוניים" (עיין בפרק השביעי) יבין, שדוגמה קרובה מאד לאחרונה היא החבורה $(i, -1, -i, +1)$ לגבי הכפל, שבה מסמן i את השורש הריבועי מ -1, שהוא מספר דמיוני (ביתר דיוק: אחד משני המספרים הדמיוניים שריבועם -1).

קבלנו כאן דוגמות של חבורות־מספרים שמספר איבריהן 2 או 4; כמו כן נוכל ליצור את החבורה הטריביאלית (ברורה מאליה) שיש לה רק איבר אחד ושנוכל לתארה על ידי המספר 1 עם פעולת הכפל, או על ידי המספר 0 עם פעולת החיבור. ואולם לגבי כל מספר טבעי n ישנה חבורה מאותו הסוג הפשוט שממנו קבלנו עתה חבורות בנות איבר אחד, 2 איברים, 4 איברים. הבנת הדוגמה הכללית תקל על הקורא אם נקח, תחת הכפל, כפעולת־החבורה את החיבור. עלינו דק לזכור את המושג של „קונגרואנציה מודולו n" בשביל מספר טבעי נתון n, מושג שלמדנוהו בעמ' 38. על סמך מושג זה נקח את המספרים $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ונקבע כפעולת־חשבון ביניהם את „החיבור מודולו n", ז"א קביעת השארית היוצאת אם נחלק במספר n את סכומם הרגיל של שני מספרים שונים או שווים

(מתוך n המספרים הנ"ל)[1]. אם, למשל, $n=7$, ואם נסמן את החיבור מודולו 7 בסימן $\overset{7}{+}$, הרי יהיה $5\overset{7}{+}3=2$, $4\overset{7}{+}6=5$, $0\overset{7}{+}5=2$. ברור שבשביל כל ערך n יהיה הסכום מודולו n שוב אחד מן המספרים $0, 1, \ldots, n-1$. קל לראות שגם שאר תנאי החבורה מתקיימים בתוך מערכת זו, ולכן תוכל לשמש המערכת $(0, 1, \ldots, n-1)$ בקשר עם החיבור מודולו n כדוגמת חבורה בת n איברים, לכל n נתון.

ינסה נא הקורא להסביר לעצמו שנקבל דוגמות דומות, של חבורות בנות מספר סופי של איברים, בדרך זו: יהי p מספר ראשוני נתון, ונציג לפנינו את כל המספרים הטבעיים הקטנים מp: $1, 2, \ldots, p-1$. אם נכפול שנים מן המספרים האלה (שונים או שווים) זה בזה ונקח את המכפלה מודולו p, דהיינו את השארית מחילוק המכפלה בp, או נקבל שוב אחד מ$p-1$ המספרים הנ"ל[2]; ומשום כך מהווה המערכת של $p-1$ המספרים הנ"ל חבורה לגבי הפעולה שהגדרנוה. למעשה השתמשנו כבר בדוגמה זו, כשנגענו בפרק השלישי בהוכחת משפטו הקטן של פרמה (עמ' 61). — דוגמה מסובכת קצת יותר, ואולם קרובה מאד לאחרונה, תעמוד לפנינו אם נקח, תחת המספר הראשוני p, מספר טבעי n כלשהו, ואם נביא בהשבון לא את כל המספרים $1, 2, \ldots, n-1$ אלא רק אלה ביניהם הזרים לn. גם מערכת זו היא חבורה לגבי הכפל מודולו n, ומקבלים הימנה את המשפט המוכלל של פרמה (עמ' 61).

התודענו עד הנה אל כמה סוגים של חבורות: חבורות אינסופיות וסופיות, חבורות של מספרים ושל מושגים גיאומטריים, חבורות שפעולתן החיבור או הכפל או פעולה (חשבונית או גיאומטרית) הדומה לחיבור או לכפל. הצד השווה שבכל הדוגמות האלה: תוצאת הפעולה בין כל שני איברי החבורה אינה תלויה בסדר שבו נצרף את שני האיברים; לשון אחר (על פי ההגדרה IV בעמוד 91): כל החבורות שהיו לפנינו עד כאן הנן חבורות קומוטטיביות. נסתכל, לבסוף, גם בדוגמה של חבורה לא־קומוטטיבית, וביתר דיוק: בדוגמה פשוטה ביותר של חבורה סופית שאיננה קומוטטיבית. דוגמה זו מראה שתכונת הקומוטטיביות איננה תלויה בתנאים המגדירים את מושג החבורה (הגדרה II).

לשם הגדרת החבורה הבאה נשתמש בשיטה הראויה להגדרת כל חבורה סופית, היינו השיטה של „טבלת־חבורה" שהכניס אותה קיילי[3] בשנת 1854.

איברי החבורה יהיו ששה סמלים $1, j, j^2, i_1, i_2, i_3$. פעולת־החשבון בין ששת הסמלים האלה תוגדר על ידי הטבלה הבאה:

---

1. במלה שארית התכוונו לשארית החיובית הקטנה ביותר, רק שבמקום השארית n נקח 0.
2. שהרי המכפלה אינה מתחלקת בp, הואיל ושום גורם איננו מתחלק במספר הראשוני p (השוה עמ' 26).
3. A. Cayley

	1	j	j^2	i_1	i_2	i_3
1	1	j	j^2	i_1	i_2	i_3
j	j	j^2	1	i_2	i_3	i_1
j^2	j^2	1	j	i_3	i_1	i_2
i_1	i_1	i_3	i_2	1	j^2	j
i_2	i_2	i_1	i_3	j	1	j^2
i_3	i_3	i_2	i_1	j^2	j	1

טבלה זו מגדירה את פעולת־החשבון במובן זה: אם a וb יסמנו שנים (שונים או שווים) משנת הסמלים הנתונים, אז נמצא את תוצאת הפעולה בין a לb (בסדר זה!), בצאתנו מן הסמל a הכתוב משמאל הטבלה, ובלכתנו ימינה באותה שורה עד העמוד (טור זקוף) שבראשו כתוב הסמל b; הסמל הנמצא בנקודת החיתוך של העמוד והשורה הנ"ל, יוגדר כ$a \times b$. לפי זה יהיה, אם נסמן את הפעולה לשם פשטות (במקום $\times$) רק בנקודת הכפל, למשל:

$$i_1 \cdot i_1 = i_2 \cdot i_2 = i_3 \cdot i_3 = 1\,;\quad j \cdot j^2 = j^2 \cdot j = 1\,;\quad i_1 \cdot i_2 = i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_1 = j^2\,;$$

$$i_2 \cdot i_1 = i_3 \cdot i_2 = i_1 \cdot i_3 = j\,;\quad i_1 \cdot j = i_3, \ldots\,;\quad j \cdot i_1 = i_2, \ldots$$

לפי זה, למשל, $i_1 \cdot i_2$ שונה מ$i_2 \cdot i_1$; ז"א הפעולה המוגדרת על ידי הטבלה אינה קומוטטיבית. לעומת זה יש לראות ע"י נסיון מיכני במספר סופי של צעדים, שמתקיימים כל תנאי החבורה הנמצאים בהגדרות I ו II של §1. מצאנו אפוא חבורה לא־קומוטטיבית בעלת הסדר 6.

אמרנו לעיל שהחבורה הזאת היא „פשוטה ביותר" בין החבורות הסופיות הלא־קומוטטיביות; בזה התכוונו לעובדה — שיש לאשרה במספר סופי של נסיונות — כי כל חבורה שסדרה קטן מ6, היא חבורה קומוטטיבית. נוכל לומר אפוא ביתר דיוק, שהגדרנו חבורה לא־קומוטטיבית בעלת הסדר המינימלי. הגדרת חבורה זו, בצורה שבה הגדרנוה כדי שלא להכניס מושגים חדשים, היא מלאכותית במקצת (ברם השוה בעמ' 105), וגם אין לחבורה הזאת תפקיד חשוב ביותר. נצרף עתה לדוגמה הנ"ל דוגמה אחרת של חבורה לא־קומוטטיבית, שיש לה אמנם הסדר 8, ואעפ"י כן חשיבותה גדולה יותר בענפים מתימטיים שונים.

איברי החבורה הנידונה יהיו 8 סמלים שנסמנם על ידי $\pm 1, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_3$. היינו יכולים להגדיר גם כאן את פעולת החבורה ע"י טבלת חבורה, אכן פשוט יותר להגדירה ע"י הנוסחות הבאות, שבהן גם a גם b יסמן סמל כלשהו מן הנ"ל:

I. $a\cdot 1=1\cdot a=a.$

II. $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b);\ (-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$

III. $i_1\cdot i_1=i_2\cdot i_2=i_3\cdot i_3=-1.$

IV. $i_1\cdot i_2=i_3;\ i_2\cdot i_3=i_1;\ i_3\cdot i_1=i_2.$

V. $i_2\cdot i_1=-i_3;\ i_3\cdot i_2=-i_1;\ i_1\cdot i_3=-i_2.$

הואיל ופעולת־חבורה זו אינה קומוטטיבית (למשל, שונה $i_1\cdot i_2$ מ־$i_2\cdot i_1$) וממלאת יחד עם זה את כל תנאי החבורה, הרי הגדרנו חבורה לא־קומוטטיבית בעלת הסדר 8. חבורה זו נקראת על שם המילטון[1] שהמציא אותה: חבורת הקְוָטֶרניונות של המילטון, או בקצור: חבורת הקוטרניונות. אל חבורה זו נחזור במלואים לפרק השביעי, אז נראה חבורה זו כחלק של חבורה מקיפה יותר המכילה אינסוף איברים. מזה נופק שישנן במציאות גם חבורות אינסופיות שאינן קומוטטיביות.

כדוגמה אחרונה למושג החבורה נכניס מושג שממנו נולדה בעיקר תורת החבורות, לפני יותר ממאה שנה[2]. נתאר לנו n עצמים שונים כלשהם, שנסמנם, בסדר מסוים, במספרים $1, 2, 3, \ldots, n$. נוכל לסדרם, כמובן, גם בסדר אחר, למשל בסדר: $n, 1, 2, \ldots, n-1$; או בסדר: $2, 1, 4, 3, \ldots$; וכו'. לתהליך, ההופך סדר מסוים של n העצמים הנתונים לסדר אחר, נקרא בשם **תמורה**.

נוכל לומר גם כך: כל תמורה הופכת כל אחד מן העצמים הנתונים לעצם אחר מביניהם — אשר יוכל גם להזדהות עם העצם המקורי —, בתנאי שכל שני עצמים שונים יהפכו שוב לעצמים שונים. כדי לסמן תמורה מסוימת רגילים לכתוב שתי שורות, שבעליונה מהן מופיעים העצמים המקוריים, בעוד שבתחתונה מופיע למטה מכל עצם מקורי העצם החדש שבא תחתיו. כך, למשל, יש לכתוב את כל התמורות האפשריות של שלושה עצמים נתונים 1, 2, 3 בצורה

$$\binom{1,2,3}{1,2,3},\ \binom{1,2,3}{2,3,1},\ \binom{1,2,3}{3,1,2},\ \binom{1,2,3}{1,3,2},\ \binom{1,2,3}{3,2,1},\ \binom{1,2,3}{2,1,3}.$$

לא יקשה ביותר להוכיח שלגבי כל מספר n של עצמים שונים מספר כל התמורות האפשריות לגביהם שווה ל־$1\cdot 2\cdot 3\cdots n$; בדוגמה שנתנו זה עתה היה מספר התמורות $1\cdot 2\cdot 3=6$.

נקח עכשיו מספר מסוים כלשהו n של עצמים ונתאר את כל התמורות האפשריות לגביהם כאיבריה של חבורה, כדלקמן. כדי להגדיר את פעולת־החבורה נצא משתי תמורות π_1 ו־π_2. ע"י π_1 יעבור סדר מסוים של העצמים — שנקרא לו בשורות הבאות „הסדר המקורי" — לסדר מסוים אחר.

---

1. W. R. Hamilton

2. את המלה חבורה (group, groupe, Gruppe) הכניס E. Galois בשנת 1830 בערך; ואולם כבר לפניו השתמשו ביחוד מתימטיקנים צרפתיים, ביניהם גם A. Cauchy, במושג החבורה.

הסדר הזה יהפך שוב על ידי התמורה π_2 לסדר חדש שנקרא לו „הסדר האחרון". ועתה קל לראות שישנה גם תמורה אחת ויחידה בין העצמים הנתונים, אשר תהפוך את הסדר המקורי בבת־אחת לסדר האחרון. תמורה זו תיקרא „מכפלת שתי התמורות הנתונות" π_1 ו־π_2, והפעולה היוצרת משתי תמורות נתונות את המכפלה תשמש לנו כפעולת־החבורה. לא יקשה לראות שהפעולה הזאת אסוציאטיבית, ושאפשר להפוך אותה תמיד ובאופן יחיד בתוך מערכת כל התמורות של העצמים הנתונים. בנינו אפוא חבורה. בדרך כלל חבורה מסוג זה אינה קומוטטיבית. דרך אגב: לא לבד מערכת כל התמורות של n עצמים מהווה חבורה לגבי הפעולה המוגדרת, כי אם במקרים ידועים גם חלק מהם. בכל מקרה כזה מדברים על **חבורת־תמורות**.

חשיבותן היתירה של חבורות־תמורות, מלבד ערכן ההיסטורי, נעוצה מצד אחד (צד עיוני) בעובדה שנציינה בעמוד 104 (משפטו של Cayley); מצד שני (צד מעשי) בתפקיד הגדול שיש לחבורות של תמורות בהתפתחות החדישה של האלגברה — תפקיד שעליו ידובר בפרק השמיני.

§ 3. משפטים פשוטים על חבורות. מושג האיסומורפיסמוס.

תורת החבורות התפתחה במשך מאת שנות קיומה לענף מקיף וחשוב של המתימטיקה. יש להבדיל בין תורות ומשפטים המתכוונים לחבורות של עצמים מסוימים, כמו, למשל, לחבורות של תמורות, ובין אותה התורה, אשר מתעלמת בעקרון ממהות איבריהן של החבורות, תורה הנקראת **תורת החבורות המופשטות**. דוקא תורה אחרונה זו הלכה וגדלה במשך הזמן יותר ויותר. חשיבותן של החבורות המופשטות תלויה בעיקר בזה שאפשר להשתמש בתוצאות המתקבלות כאן לגבי כל סוג של חבורות מסוימות. מלבד זאת מתברר שאופיו המופשט של מושג החבורה סתם, אם כי יקשה לפעמים על הבנת התלמיד המתחיל, מביא יתרונות חשובים: נקל יותר לעשות את ההסקים והחשבונות הדרושים בלי התערבות תכונות מקריות של איברי החבורות, שאינן מעלות ואינן מורידות לגבי המטרה הרצויה; על־ידי ההשקפה המופשטת אנו ניצולים מגורל המטייל שאינו רואה את היער מרוב העצים.

לכן המעבר אל החבורות המופשטות הנהו הצעד השני, המשלים את הצעד הראשון שרמזנו אליו בראשית ה§ 1. במערכות של עצמים מתימטיים שיש להן אופיה של חבורה עסקה המתימטיקה תמיד, רק שהחוקרים לא נוכחו לדעת: מה ממסקנותיהם תלוי באופים המיוחד של העצמים הנידונים ומה בתכונות־החבורה. לצעד הראשון, המציין לחוד את המסקנות מתכונות־החבורה, מתאים צעד שני, המתעלם לגמרי מכל תכונות מיוחדות של העצמים, פרט לתכונתם זו, שהם איברי חבורה.

מובן שלא נוכל לחדור כאן במדה ניכרת לתוך עצם תורת החבורות, הן

מחוסר מקום, הן מפאת הקושי שבמקצוע מופשט זה[1]. יובאו רק משפטים יסודיים אחדים הקשורים במושג־החבורה עצמו. את פעולת־החבורה נסמן תמיד על ידי $\times$, כאשר עשינו ב§ 1.

משפט 1: בכל חבורה גורר אחריו כל אחד מן השויונות $a\times b=a\times c$, $b\times a=c\times a$ את השויון $b=c$.

הוכחה: משפט זה אינו אלא ביטוי אחר לחלק מן התנאי b) של ההגדרה II בעמוד 90, הדורש שגם היפוך פעולת־החבורה יהיה חד־ערכי. אם נסמן את הערך המשותף של $a\times b$ ו־$a\times c$ ב־d, הרי מדובר על פתרון המשואה $a\times x=d$, פתרון שהוא אחד ויחיד על סמך התנאי הנ"ל. כמו כן לגבי $b\times a=c\times a$.

משפט 2: כל חבורה מכילה איבר אחד ויחיד, e, שהוא „ניטרלי מימין ומשמאל"; כלומר: המקיים לגבי כל איבר a של החבורה את היחסים: $a\times e=e\times a=a$. (במקרה שקוראים לפעולת החבורה בשם „כפל", נקרא האיבר הניטרלי „יחידת החבורה".)

הוכחה: ראשית, התנאי b) של ההגדרה II גורר, שלגבי כל איבר a קיים איבר אחד ויחיד e_a שבשבילו $a\times e_a=a$. והנה בשביל אותו האיבר e_a קיים גם כן $e_a\times a=a$; שהרי לפי החוק האסוציאטיבי (תנאי a) של ההגדרה II) קיים: $a\times a=a\times(e_a\times a)=(a\times e_a)\times a=a\times a$, והשויון $a\times(e_a\times a)=a\times a$ שקבלנוהו כך, גורר אחריו $e_a\times a=a$ לפי המשפט 1. ברם נשאר להוכיח כי בשביל כל האיברים השונים a של החבורה מתלכדים ביניהם האיברים „הניטרלים המיוחדים" e_a; לשון אחר: כי e_a ניטרלי גם לגבי כל איבר b השונה מ־a. והנה קיים: $a\times b=b\times(e_a\times a)=b\times a=b\times(b\times e_a)$, שויון הגורר אחריו לפי המשפט 1, כי $b=b\times e_a$. והרי זאת אומרת: $e_a=e_b$; היחידה e_a איננה אפוא איבר ניטרלי מיוחד לגבי a, כי אם איבר ניטרלי כללי לגבי כל איברי החבורה. לכן נסמנה ב־e בלי הוספת ציון.

---

1. מספרי־הלימוד לתורת החבורות נזכיר:

M. Hall, Jr.: The theory of groups. New-York, 1959. 403 pp.

A. G. Kurosh: The theory of groups. 2nd English ed. 2 vols. 272 + 308 pp. New York 1960

W. Ledermann: Introduction to the theory of finitte groups 1949. 160 pp.

J. A. de Séguier: Théorie des groups finis etc. Paris 1912. 228 pp.

A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. מהדורה שלישית Berlin 1937. 251 pp.

מלבד זאת נמצאים בכל ספרי הלימוד המקיפים על אלגברה פרקים המוקדשים לתורת החבורות. השוה (לכל הפרק הזה) גם ספרו של Loewy המצוטט בראשית ח§ 3 של הפרק הבא.

על חשיבותה של תורת החבורות בשביל הגיאומטריה ידובר בחלק החמישי (כרך שני). בגיאומטריה (וכמו כן באנליזה) חשובות בעקר „החבורות הרציפות". השוה למשל את הספר

J. E. Campbell: Theory of continuous groups, Oxford University Press. 436 pp.

משפט 3: כנגד כל איבר a של חבורה ישנו בתוכה איבר אחד ויחיד a' „ההפכי לו מימין ומשמאל"; כלומר: המקיים את השויונות $a\times a'=a'\times a=e$. קוראים ל־a' האיבר ההפכי ל־a.

הוכחה: לפי התנאי b) של ההגדרה II קיים על כל פנים פתרון יחיד x למשואה $a\times x=e$, שנסמנו ב־a'. אזי קיים:

$$a\times(a'\times a)=(a\times a')\times a=e\times a=a=a\times e;$$

והרי השויון $a\times(a'\times a)=a\times e$ גורר אחריו לפי המשפט 1: $a'\times a=e$. לכן a' הפכי ל־a לא רק מימין אלא גם משמאל.

הערה: שתי התכונות של כל חבורה המתבטאות במשפטים 2 ו־3 ושקבלנון בעיקר כמסקנות מן התנאי b) של ההגדרה II, יכולות ביחד לעמוד במקום אותו התנאי. לשון אחר: אפשר להגדיר חבורה כקבוצה מתקשרת, הממלאת את החוק האסוציאטיבי ואת המשפטים 2 ו־3. (לא יקשה על הקורא להוכיח זאת.)

משפט 4: קבוצה מתקשרת שמספר איבריה סופי ושפעולתה אסוציאטיבית, מהוה חבורה אם מתקיימת התכונה המתבטאת במשפט 1, היינו אם גם $a\times b=a\times c$ גם $b\times a=c\times a$ גורר $b=c$.

משפט זה אומר שנוכל לשנות, וביתר דיוק: לרכך, את הגדרת החבורה לגבי חבורה סופית במובן זה, שנוסף לתנאי a) שבהגדרה II נדרוש, במקום התנאי b) המסומן שם, רק את התנאי המתבטא במשפט 1. התנאי הזה בודאי אינו חזק מן התנאי b) שבהגדרה II, כאשר נופך מהוכחת המשפט 1. להלן נראה, כי הוא אפילו רך ממנו, ז"א שבצדק השתמשנו במלים: נדרוש „רק" את התנאי...

הוכחה: יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ כל איברי הקבוצה המתקשרת הנתונה $\mathfrak{F}$, שפעולתה אסוציאטיבית ושבה מתמלא המשפט 1. האות a תסמן איבר מסוים כלשהו מתוך n האיברים האלה. אז הסדרה של n האיברים $a\times a_1, a\times a_2, \dots, a\times a_{n-1}, a\times a_n$ מכילה כל איברי $\mathfrak{F}$. כי ראשית, כולם שייכים ל־$\mathfrak{F}$ על פי הגדרת קבוצה מתקשרת, ושנית, כולם שונים ביניהם, מפני ש־$a\times a_i=a\times a_k$ גורר אחריו $a_i=a_k$ לפי המשפט 1. הואיל ו־$\mathfrak{F}$ אינו מכיל יותר מ־n איברים שונים, טענתנו נכונה. משום כך אפשר לפתור כל משואה בעלת הצורה $a\times x=c$ בתוך $\mathfrak{F}$; שהרי אם נציג את c בצורה $a\times a_i$, שבה i אחד הציונים $1, 2, \dots, n$, מתקבל: $x=a_i$. בצורה דומה נוכל לפתור את המשואה $y\times b=c$. תוצאות אלו מראות אפוא שמתמלא ב־$\mathfrak{F}$ גם התנאי b) של ההגדרה II, ז"א ש־$\mathfrak{F}$ חבורה.

אם הקבוצה המתקשרת תהיה אינסופית, לא נוכל להסיק מן החוק האסוציאטיבי וממלוי המשפט 1, שהקבוצה מהווה חבורה. (ברור אפוא שתוכן המשפט 1 רך מן התנאי b) שבהגדרה II.) דוגמה לכך תשמש קבוצת כל המספרים הטבעיים עם פעולת החיבור. הואיל ומן $a+b=a+c$, וכמו כן מן $b+a=c+a$, נופך ע"פ כללי החשבון: $b=c$, מתמלא במקרה זה המשפט 1, ואף על פי כן

אי־אפשר להפוך את הפעולה; למשל, אין לפתור בתוך הקבוצה הנתונה את המשוואה $2=x+3$. ולא עוד אלא אפילו אין איבר ניטרלי בתוך הקבוצה!

יש להעיר — כמו שהערנו את הדבר המתאים בפרק השני לגבי החיבור והכפל במספרים טבעיים (עמ' 19 ו51) — שהחוק האסוציאטיבי קיים בכל חבורה לא לבד בשביל שלושה איברים אלא (על סמך זה) בשביל כל מספר סופי של איברים. יש להוכיח זאת בדיוק כמו במקרה הנ"ל, ז"א בעזרת אינדוקציה שלימה. אותו דבר קיים לגבי החוק הקומוטטיבי בחבורות קומוטטיביות (הגדרה IV, עמ' 91).

לבסוף נכניס מושג, המבליט צד „איקונומי" (חסכן) מהשקפת ההגיון, היינו חסכון־רעיונות ממש. הקשור בתורת החבורות — נוסף על היתרון שציינוהו לעיל, בהדגישנו את מושג „החבורה המופשטת" בלי כל הנחות על איברי החבורה.

הגדרה: שתי החבורות $\mathfrak{G}$ וQ נקראות איזומורפיות[1] אם אפשר להתאים את איברי $\mathfrak{G}$ לאיברי Q באופן חד־חד־ערכי (עיין בעמ' 5) כך, שאם g_1 וg_2 יהיו איברים כלשהם מ$\mathfrak{G}$, וq_1 וq_2 בני־זוגם בתוך Q, אז יהיה תמיד האיבר $q_1 \times q_2$ מQ בן־זוגו של האיבר $g_1 \times g_2$ מ$\mathfrak{G}$ (וחלופו). התאמה כזו תיקרא התאמה איסומורפית בין איברי החבורות, והיא יוצרת העתק איסומורפי (או בקצור: איסומורפיסמוס) בין החבורות עצמן.

האיסומורפיות בין שתי חבורות כוללת אפוא את העובדה שהן קבוצות אקוויוולנטיות במובן של הפרק הראשון (עמ' 6). בפרט נופק שכל שתי חבורות סופיות איסומורפיות מכילות אותו מספר של איברים. לעומת זאת, לא כל שתי חבורות אקוויולנטיות הן איסומורפיות. דוגמות לכך יש למצוא בחומר שבסעיף הקודם. למשל, עסקנו שם (עמ' 97) בחבורה לא־קומוטטיבית בת ששה איברים, $(1, j, j^2, i_1, i_2, i_3)$; מצד שני נמצאת שם (עמ' 96) הדוגמה של החבורות הקומוטטיביות, בנות n איברים, של מספרים $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ לגבי החיבור מודולו n. אם נקח כאן $n=6$, הרי לפנינו חבורה קומוטטיבית בת ששה איברים, האקוויולנטית לפי זה לחבורה הלא־קומוטטיבית הנ"ל. אבל חבורה קומוטטיבית לא תוכל לעולם להיות איסומורפית לחבורה לא־קומוטטיבית, מפני שבאחרונה נוכל לבחור בשני איברים a וb כך ש$a \times b \neq b \times a$. אילו היתה החבורה איסומורפית לחבורה קומוטטיבית ידועה, היינו יכולים לסמן את בני־זוגם של a וb בחבורה הקומוטטיבית בa' וb', ואז היה צריך, על פי הגדרת האיסומורפיות, $a' \times b'$ להיות בן־זוגו של $b \times a$ ו$a' \times b'$ להיות בן־זוגו של $a \times b$; אבל הרי $a \times b$ שונה מ$b \times a$, בעוד ש$a' \times b'$ שווה ל$b' \times a'$! הסתירה הזאת מראה שטעותנו היתה נכונה.

ההדדיות (הסימטריה) של יחס האיסומורפיות, המתבטאת במלה „וחלופו" שבסוף ההגדרה, נופקת מחד־חד־ערכיותה של ההתאמה. כמו כן מתקבל מיד: אם

1. משמעות המלה: שוות־פרצופים; היא מורכבת מן המלים היווניות ἴσος (שוה) ו$\mu o \rho \phi \acute{\eta}$ (צורה, פרצוף).

חבורה איסומורפית לחבורה שניה, וזאת לשלישית, תהיה גם הראשונה איסומורפית לשלישית. לשון אחר: יחס האיסומורפיות הוא לא לבד חוזר וסימטרי, כי אם גם טרַנסיטיבי[1] (השווה עמ' 8).

אחד החסכונות העיקריים ברעיונות, שזכינו לו בעזרת תורת החבורות, נוכל לבטא עתה ע"י מושג האיסומורפיות כך: אין שום ענין וצורך להבדיל בין חבורות האיסומורפיות ביניהן. כל מערכת של חבורות, האיסומורפיות ביניהן, קובע טיפוס (סוג) מסוים של חבורה; רק הטיפוס הזה מענין אותנו, ולא הצורה המיוחדת שבה מופיעה החבורה נגד עינינו.

נקח מן החומר הנמצא ב§2 דוגמות אחדות של חבורות איסומורפיות: נסמן ב$\mathfrak{G}_4$ את חבורת המספרים $(0, 1, 2, 3)$ בקשר עם החיבור מודולו 4, שהיא חבורה קומוטטיבית. מצד שני מצאנו (עמ' 95) את החבורה $(1, i, -1, -i)$ בקשר עם הכפל הרגיל. אם נתאים עתה את איברי שתי הקבוצות האלה כדלקמן:

$$1 \longleftrightarrow 0,\quad i \longleftrightarrow 1,\quad -1 \longleftrightarrow 2,\quad -i \longleftrightarrow 3,$$

הרי יש לפנינו התאמה איסומורפית. אפשר לאמת זאת ע"י נסיון מיכני: למשל מתאים $3 = 2 \overset{4}{+} 1$ ל$-i = (-1) \cdot i$, כמו כן $1 = 3 \overset{4}{+} 2$ ל$i = (-i) \cdot (-1)$, וכו'. האיבר הניטרלי בחבורה הראשונה הוא 0, בחבורה השניה 1.

ואולם נקבל התאמה איסומורפית אחרת בין שתי חבורות אלו, אם נתאים שוב ל0 את 1 ול2 את -1, אבל ל1 את $-i$ ול3 את $+i$. לפי אפיה הטרנסיטיבי של האיסומורפיות נוכל לקבל משני העתקים אלו העתק איסומורפי של החבורה השניה (או גם של הראשונה) על עצמה, העתק לא־זהותי, ז"א שאינו מתאים תמיד כל איבר לעצמו[2], והוא:

$$1 \longleftrightarrow 1,\quad -i \longleftrightarrow i,\quad -1 \longleftrightarrow -1,\quad i \longleftrightarrow -i.$$

כמו כן איסומורפית לחבורה $\mathfrak{G}_4$ החבורה $(1, 2, 4, 3)$ בקשר עם הכפל מודולו 5, וגם החבורה $(1, 3, 9, 7)$ בקשר עם הכפל מודולו 10. במקרה הראשון נוכל להתאים: $1 \longleftrightarrow 2,\ 0 \longleftrightarrow 1,\ 4 \longleftrightarrow 2,\ 2 \longleftrightarrow 3$; או $1 \longleftrightarrow 3,\ 0 \longleftrightarrow 4,\ 4 \longleftrightarrow 2,\ 2 \longleftrightarrow 3$. בדוגמה האחרונה הנ"ל ייצור לו הקורא בעצמו התאמות איסומורפיות, ויוכיח גם כן שלשנים מתוך ארבעת איברי $\mathfrak{G}_4$ (ולכל בני־זוגם בחבורות האחרות הנ"ל) ישנה התכונה הבאה: אם נקח את האיבר הנידון ארבע פעמים ונקשרם זא"ז על ידי פעולת החבורה, אז — ולא לפני הפעם הרביעית! — נקבל את האיבר הניטרלי.

התוודענו ב§2 גם אל חבורה אחרת האיסומורפית לחבורה $\mathfrak{G}_4$, והיא חבורת

1. מן המלה הרומית transire = עבור, התקדם.

2. להעתק כזה (העתק איסומורפי של חבורה על עצמה) קוראים בשם „אוטומורפיסמוס" ($\alpha \dot{\upsilon} \tau \acute{o} \varsigma$ = עצמו). במקרה שלפנינו יוצר אוטומורפיסמוס זה העתק זהותי לגבי החבורה החלקית (השווה עמ' 114) המכילה רק את האיברים 1 ו1—

הסיבובים ב 0^0, ב 90^0, ב 180^0, ב 270^0. נוכל להתאים לאיבר 1 של $\mathfrak{S}_4$ את הסיבוב ב 90^0 (או במקומו את הסיבוב ב 270^0), לאיבר 2 את הסיבוב ב 180^0 וכן הלאה. כדי לקבל העתק איסומורפי. מובן ע"פ הטרנסיטיביות של יחס האיסומורפיות, שכל החבורות שנמצאו כאן איסומורפיות לחבורה $\mathfrak{S}_4$, איסומורפיות גם ביניהן.

דוגמה אפינית של חבורות איסומורפיות, שדומות אליה תופענה בפרקים הבאים, היתה לפנינו בסוף הפרק הקודם (עיין בהערה 1), עמ' 86). החבורה האחת היתה שם חבורת כל המספרים השלמים, החבורה השניה חבורת הזוגות $(a,1)$ כמייצגי השברים $\frac{a}{1}$; פעולת החבורה בשני המקרים: החיבור; וההעתק האיסומורפי נוצר על ידי התאמת הזוג $(a,1)$ למספר השלם a. אם, ורק אם, לא נבדיל בין חבורות איסומורפיות, נוכל לומר במקרה כזה שמערכת כל הזוגות (a,b) הננה הרחבה של מערכת המספרים השלמים.

הדוגמה האחרונה הראתה שתי חבורות אינסופיות איסומורפיות ביניהן. דוגמה אחרת מסוג זה תשמש חבורת כל המספרים הממשיים החיוביים בקשר עם הכפל מצד אחד, חבורת המספרים הממשיים כולם בקשר עם החיבור מצד שני, אם נתאים לכל מספר ממשי חיובי את הלוגריתמוס הרגיל שלו (שהוא מספר ממשי, חיובי או שלילי, לרבות 0); או, בנוסח אחר, אם נראה כל מספר ממשי a כלוגריתמוס ונתאים לו את המספר 10^a שהלוגריתמוס שלו a. — כמו כן חבורת ההזזות שדובר עליה בעמ' 94 תיראה איסומורפית לחבורת כל המספרים הממשיים בקשר עם חיבורם, אם לכל מספר ממשי חיובי a נתאים הזזה ברוחק a בכוון מסוים, לכל מספר ממשי שלילי a— הזזה ברוחק a בכוון הנגדי, ולמספר 0 את המנוחה. הקורא שידוע לו חיבור הקטעים על קו ישר, או חיבור הוֶקטורים במישור (עיין בפרק השביעי), יקבל דוגמות של התאמה איסומורפית ע"י המספרים הממשיים וחיבורם מצד אחד, הקטעים שעל קו ישר וחיבורם מצד שני; או על ידי המספרים המרוכבים וחיבורם מצד אחד, הוֶקטורים במישור וחיבורם מצד שני. התאמות איסומורפיות אלו תביאנה לנו תועלת רבה בפרקים הבאים.

בקשר עם החבורות של תמורות שהגדרנון בעמ' 98, נביא בלי הוכחה משפט מפורסם המראה את אופין הכללי של חבורות אלו:

משפט קיילי[1]: כל חבורה $\mathfrak{G}$ אפשר „לתאר" כחבורת־תמורות של איברי $\mathfrak{G}$; כלומר, החבורה $\mathfrak{G}$ איסומורפית לחבורה ידועה, שאיבריה הם תמורות, ודוקא של איברי $\mathfrak{G}$, ושבה מוגדרת פעולת־החבורה, כרגיל, כצירופן של שתי תמורות.

משפט זה מראה שהמושג של חבורות־תמורות אינו נופל בכלליותו ממושג החבורה סתם. דוגמה למשפט הזה תוכל לשמש חבורת הקוֶטרניונות מעמ' 98. כדי לעזור לקורא לתאר אותה כחבורת־תמורות של שמונת איבריה, נפרש את ההתאמה לפחות בשביל שלושה מאיברי החבורה:

[1] A. Cayley.

$$-1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1, & -1, & i_1, & -i_1, & i_2, & -i_2, & i_3, & -i_3 \\ -1, & 1, & -i_1, & i_1, & -i_2, & i_2, & -i_3, & i_3 \end{pmatrix},$$

$$i_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1, & -1, & i_1, & -i_1, & i_2, & -i_2, & i_3, & -i_3 \\ i_1, & -i_1, & -1, & 1, & -i_3, & i_3, & i_2, & -i_2 \end{pmatrix},$$

$$i_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1, & -1, & i_1, & -i_1, & i_2, & -i_2, & i_3, & -i_3 \\ i_2, & -i_2, & i_3, & -i_3, & -1, & 1, & -i_1, & i_1 \end{pmatrix}.$$

מובן שלמספר 1 מתאימה התמורה הזהותית שאינה משנה שום איבר.

מאלף הדבר להתאים גם לחבורה בת ששת האיברים $1, j, j^2, i_1, i_2, i_3$ (עמ' 97) חבורת־תמורות פשוטה האיסומורפית לה (לא לפי משפט קיילי). והיא חבורת שש התמורות של שלושה עצמים כלשהם: 3,2,1. התאמה איסומורפית נקבל, אם נתאים:

$$1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,3 \end{pmatrix}, \quad j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,1 \end{pmatrix}, \quad j^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,1,2 \end{pmatrix},$$

$$i_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,2 \end{pmatrix}, \quad i_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1.2,3 \\ 3,2,1 \end{pmatrix}, \quad i_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix}.$$

הקורא יברר נא לעצמו שהתאמה זו איסומורפית. הוא יאשר בנקל שקיים $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1$, ואילו מ j (וכן מ j^2) משיגים 1 אך בחזקת שלש: $j^3 = 1$.

לעומת זאת חבורת התמורות של שני עצמים 2,1 היא קומוטטיבית (חבורה בת שני איברים). זה עומד בקשר עם העובדה שציינוה בעמ' 97, שאין חבורה לא־קומוטטיבית בעלת סדר קטן מ 6; היינו: קטן מסדר חבורת־התמורות של שלושה עצמים.

§ 4. חוגים ושדות.

בפרק זה עסקנו עד הנה בקבוצות שבהן מוגדרת פעולת־חשבון אחת. אם קיימים לגבי הפעולה ההיא תנאים ידועים, קראנו לקבוצה בשם חבורה. ואולם באריתמיטיקה אנו עוסקים בדרך כלל בקבוצות (של מספרים) שבהן מוגדרות שתי פעולות־חשבון שונות, החיבור והכפל, לרבות הפעולות ההופכות אותן. כדי ליצור אצל הקבוצות המופשטות של עצמים כלליים — לאו דוקא מספרים — מצב דומה, היינו: זוג של פעולות־חשבון מופשטות, נכניס כאן את המושג של „חוג", ואחר־כך, ע"י הוספת תנאים, את המושג של „שדה". נקרא לפעולות־החשבון אשר נטפל בהן, בשם „חיבור" ו „כפל", ונסמן אותן בסימנים $+$ ו $\cdot$; אבל נזכור תמיד שאין לנו עסק עם החיבור והכפל הרגילים, ולא עם פעולות במספרים כל עיקר. בשמות הרגילים הללו נשתמש רק לשם פשטות, ומפני דמיון־מה בולט בין הפעולות המופשטות והפעולות הרגילות באריתמיטיקה.

הגדרה 1: קבוצה R שבתוכה נקבע יחס של שויון ומוגדרות שתי פעולות־חשבון „חיבור" ו „כפל". היוצרות מתוך כל שני איברים נתונים של R את

א) לגבי פעולת החיבור מהווה R חבורה.

ב) לגבי פעולת הכפל מהווה R קבוצה מתקשרת שפעולתה (היינו הכפל) מקיימת את החוק האסוציאטיבי:

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

ג) החיבור והכפל קשורים זה בזה ע"י שני החוקים הדיסטריבוטיביים:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\,,\ (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

אם קיים בשביל הכפל גם החוק הקומוטטיבי $a\cdot b=b\cdot a$, ייקרא החוק בשם: חוק קומוטטיבי[1].

ה ע ר ה: התנאים א) וב) אינם טעונים ביאור נוסף אחרי מה שלמדנו ב§1. בתנאי ב) דרשנו רק את התנאי a) של הגדרת החבורה (הגדרה II, עמ' 90). מתוך כוונה לקבל כך סוג כללי למדי של קבוצות עם שתי פעולות־חשבון. להלן (הגדרה III בעמ' 111) נחמיר ונתן לתנאי ב) צורה המרחיקה לכת. מה שנוגע לתנאי ג), הרי ברור מראש שלא די לנו לדרוש מציאותן של שתי פעולות־חשבון, אלא שעלינו לקבוע קשר ביניהן; אחרת עלולה הפעולה השניה, למשל, להתלכד בראשונה, ואז בודאי לא תצאנה מסקנות חדשות ומעניינות. בלי קשר בין שתי פעולות־החשבון לא יעזור לנו מושג החוג. הצורה המיוחדת של הקשר הנידון — היא החוק הדיסטריבוטיבי — לקוחה, כמובן, מן הקשר שבין החיבור והכפל של מספרים באריתמטיקה; כלומר: מן העובדה שהכפל במספרים טבעיים $a\cdot b$ מתבטא כחיבור חוזר של אותו מחובר a: $a\cdot b=a+a+\cdots+a$ (b פעמים). הנסיון הראה שברוב ענפי המתימטיקה, אם כי לא בכולם[2], הצורה הנ"ל של שני חוקים הקושרים את שתי הפעולות המופשטות, היא דוקא הצורה המועילה.

דוגמות של חוגים:

1) קבוצת כל המספרים השלמים מהווה חוג קומוטטיבי לגבי פעולות החיבור והכפל הרגילות.

2) יהי g מספר טבעי מסוים הגדול מ־1. אז קבוצת כל המספרים השלמים המתחלקים ב־g מהווה חוג קומוטטיבי לגבי החיבור והכפל הרגילים.

3) יהי שוב g מספר טבעי גדול מ־1, ונגדיר בתוך קבוצת המספרים $(0, 1, \dots, g-1)$ את פעולות־החשבון שעלינו לסמן לפי עמ' 96 ב־$\overset{g}{+}$ ו־$\overset{g}{\cdot}$, היינו: החיבור והכפל מודולו g. שם ראינו כבר שהקבוצה מהווה חבורה לגבי הפעולה $\overset{g}{+}$. קל לראות שלגבי הפעולה $\overset{g}{\cdot}$ מתקיים התנאי ב), וכמו כן קיימים החוק הקומוטטיבי והדיסטריבוטיבי. דוגמתנו מהווה אפוא חוג לגבי שתי הפעולות המוגדרות.

שתי דוגמות אחרות מסובכות יותר, 4) ו־5), נמצאות במלואים לחלק זה.

1. במקרה זה די לדרוש בתנאי ג) רק א ח ד מן החוקים הדיסטריבוטיביים, כי זה יגרור את השני על סמך החוק הקומוטטיבי. אז נוכל אפוא לדבר על „החוק הדיסטריבוטיבי" בה"א הידיעה.

2. דוגמה של קשר אחר בין שתי הפעולות תופיע בחלק הרביעי (כרך שני): „חיבור" ו„כפל פנימי" של קבוצות.

עד כמה מושג־החוג המוגדר כאן הנהו כללי, זאת נבין אם נשים את עינינו אל הבדלים אפיניים ידועים שבין הדוגמות הנ"ל; הבדלים לא לגבי איברי החוגים כי אם לגבי התכונות הכלליות השוררות בחוגים עצמם. למשל: בדוגמות 1) ו־3) (וכמו כן ב־4) ו־5)) ישנה „יחידה" בתוך החוג, ז"א איבר ניטרלי לגבי הכפל; אין יחידה כזו בתוך החוגים הנכללים בדוגמה 2). כל חוג מן הסוג 3) הנהו חוג סופי (מספר סופי של איברים), ואילו שאר החוגים הם אינסופיים.

איבר ניטרלי לגבי ה ח י ב ו ר ישנו, כמובן, בכל הדוגמות, הואיל וכל חוג מהווה חבורה לגבי החיבור (השוה משפט 2 בעמ' 100). לאיבר הניטרלי הזה נקרא „אפס" ונסמנו ב־0, ואין חשש שמא יחליפוהו במספר 0 (אשר אינו מוכרח להמצא בין איברי החוג).

קיים עוד הבדל חשוב מאד בין הדוגמה 3), אם g הוא מספר פ ר י ק, ובין הדוגמות 1), 2), 4): בדוגמות האחרונות — לרבות אותם מקרים של 3) שבהם g מספר ר א ש ו נ י — לא תוכל מכפלת שני איברים מתוך החוג להתאפס (ז"א להיות שווה לאפס) אם לא לפחות אחד משני הגורמים מתאפס. הקורא מבין זאת בנקל לגבי הדוגמות 1) ו־2); אבל גם בדוגמה 4) לא יקשה להוכיח את הדבר. לעומת זאת נסתכל בדוגמה 3), במקרה שבו $g=g_1\cdot g_2$ מספר פריק![3] (למשל: $g=6=2\cdot 3$.) אז האיברים $m\cdot g_1$ ו־$n\cdot g_2$, שבהם מסמנים m ו־n איברים מתוך החוג, בדרך כלל שונים מ־0, ואולם מכפלתם $(m\cdot g_1)\cdot(n\cdot g_2)=0$. כך קיים, אם $g=6$: $2\cdot 3=0$, $3\cdot 4=0$. במקרה כזה שבו $a_1\cdot a_2=0$, אף־על־פי ש־a_1 ו־a_2 שניהם שונים מ־0, קוראים לאיברים a_1 ו־a_2 „מ ח ל ק י ם א מ י ת י י ם ש ל א פ ס"; 0 בעצמו הוא „מחלק לא־אמיתי" של אפס.

נציין עוד הבדלים אחרים בין הדוגמות הנ"ל! התכונה b) של ההגדרה II בעמ' 90, המתכוונת להיפוך הפעולה, והאפינית בשביל חבורות, אינה מתקימת באף אחת מן הדוגמות כלפי פעולת הכפל. זה מתברר, קודם כל, מן העובדה שבכל הדוגמות לא נוכל לפתור כל עיקר, או לא באופן חד־ערכי, את המשואה $a\cdot x=0$; כי הואיל והכפל בין כל איבר מתוך החוג ובין 0 יוצר תמיד את המכפלה 0[4], נופק שלמשואה הנ"ל אין פתרון אם $a\neq 0$, ויש יותר מפתרון אחד[5] אם $a=0$. ואמנם בדוגמה 3), בתנאי שהמספר g המופיע שם הנהו מ ס פ ר ר א ש ו נ י p, יהיה ה„חילוק באפס" — היינו בעית המשואה $a\cdot x=0$ — המקרה ה י ח י ד היוצא מן הכלל; זה מתברר על פי הדוגמה שב§2 (עמ' 96) המראה שהמערכת $(1, 2, \dots, p-1)$ מהווה חבורה לגבי הכפל מודולו p.

לעומת זאת, בכל שאר הדוגמות ישנם מלבד 0 — ז"א מלבד האיבר הניטרלי של החיבור — ע ו ד א י ב ר י ם א ח ר י ם ש א י־א פ ש ר ל ח ל ק ב ה ם ב א ו פ ן כ ל ל י

1. שני המספרים הטבעיים g_1 ו־g_2 שונים מ־1. („פריק" מוגדר בעמ' 24.)

2. עיין להלן, משפט 1, עמ' 108.

3. ביתר דיוק: מספר פתרונים כפי מספר איברי החוג כולו.

בתוך החוג. איברים שאי־אפשר לחלק בהם „באופן כללי" (ז"א בשביל ערך כלשהו של המחולק) הנם:

בדוגמה 1) — כל איברי החוג, פרט ל $+1$ ו -1.

בדוגמה 2) — כל איברי החוג, פרט ל $+g$ ו $-g$.

בדוגמה 3) — אם g הוא מספר פריק — כל אותם מספרים בין 1 ל $g-1$ המתחלקים לפחות באחד מגורמיו הראשוניים של g.

בדוגמה 4) — כל המספרים השלמים פרט ל $+1$ ו -1; כמו כן כל שאר הקנטרניונות, פרט לשש הבאות: $\pm i_1$, $\pm i_2$, $\pm i_3$, שאפשר לחלק בהם תמיד. הבדל אחר מתבטא בזה שהחיבור אמנם קומוטטיבי בכל הדוגמות, אבל הכפל אינו קומוטטיבי בדוגמה 4): שם קיים, למשל, $i_1 \cdot i_2 = i_3$, אבל $i_2 \cdot i_1 = -i_3$. גם ב 5) הכפל אינו קומוטטיבי. לעומת זאת הוא קומוטטיבי בדוגמות 1) עד 3).

הבה נוכיח עתה משפטים יסודיים אחדים הקיימים בכל החוגים!

משפט 1: אם 0 מסמן את האיבר הניטרלי של החיבור, קיים בשביל כל איבר a של החוג: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

הוכחה: מצד אחד קיים, מפני ניטרליותו של 0: $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0+0)$.

מצד שני קיים, על פי החוק הדיסטריבוטיבי: $a \cdot 0 + a \cdot 0 = (0+0) \cdot a$.

השואת שני השויונות האלה מראה כי $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. לכן, הואיל והחוג מהווה חבורה לגבי החיבור, קיים $a \cdot 0 = 0$ (עיין במשפט 1, עמ' 100). אם החוג אינו קומוטטיבי[1], מסיקים $0 \cdot a = 0$ בדרך דומה מן החוק הדיסטריבוטיבי השני.

משפט 2: אם נסמן באופן כללי ב $-a$ את האיבר הנגדי ל a כלפי החיבור, היינו: האיבר המקיים את השויון $a + (-a) = 0$[2], אז קיים:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \quad (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$

הוכחה: מצד אחד קיים, לפי המשפט 1 והגדרת הסימן — כנ"ל:

$$[a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 = a \cdot b + [-(a \cdot b)].$$

מצד שני קיים לפי החוק הדיסטריבוטיבי:

$$[a + (-a)] \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b.$$

השואת שני השויונות מראה כי $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

אותה המסקנה מתקבלת בשביל $(-a) \cdot (-)$ בעזרת החוק הדיסטריבוטיבי השני.

---

1. אם הוא קומוטטיבי, הרי $0 \cdot a = 0$ גורר מיד $a \cdot 0 = 0$.
2. לפי המשפט 2 בעמ' 100 קיים גם $a + (-a) = 0$, אפילו אם החיבור איננו קומוטטיבי בדרך כלל.

לבסוף נופק כמו לעיל, ועל פי העובדה שהוכחנוה זה עתה:

$$[a + (-a)] \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) = 0 = [-(a \cdot b)] + a \cdot b,$$

$$[a + (-a)] \cdot (-a) = a \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b) = [-(a \cdot b)] + [(-a) \cdot (-b)];$$

השואת שתי השורות האחרונות מראה כי $(-a) \cdot (-) = a \cdot b$.

הערה: כדאי להשוות את המשפטים 1 ו 2 ואת הוכחותיהם עם המסקנות שקבלנו כלפי הכפל ב 0 ובמספרים שליליים ב §3 של הפרק הקודם (הגדרות I–III בעמ' 80; עיין גם במלואים לשם). כאן כן עתה בעיקר החוק הדיסטריבוטיבי הוא הגורר את השויונות שבמשפטים הקודמים. אכן כאן אין לנו ענין במספרים כי אם באיברי חוג מופשט, ועל אחת כמה וכמה לא במספרים „שליליים"; הרי לאיבר a אין יתרון כלשהו כלפי האיבר $a-$, או חלופו. בכל זאת קיים גם כאן (בתורת משפט) השויון $a \cdot b = (-b) \cdot (-a)$, ומתאשר אפוא שאין לנמק שויון זה בתכונות, כביכול, „מיטָפיסיות" של המספרים השליליים; אלא קביעת השויון הנ"ל בפרק הקודם היא תנאי הכרחי לקיום החוק הדיסטריבוטיבי (עמ' 80/81).

משפט 3: אם ישנה בתוך החוג יחידה (איבר ניטרלי של הכפל[1], שנסמנו כרגיל ב 1), אז יהיה החיבור על כל פנים פעולה קומוטטיבית — אפילו אם הכפל אינו קומוטטיבי, כמו בדוגמה 4).

הוכחה: בטרם נוכיח את המשפט, נציין ש $1 \neq 0$. כי אם מסמן a איבר מסוים מתוך החוג השונה מ 0, קיים: $a = 1 \cdot a \neq 0 = 0 \cdot a$, ועל פי תכונותיו של יחס השויון נופק מזה: $1 \neq 0$.

לשם הוכחת המשפט 3 נסמן שני איברים כלשהם של החוג ב a ו b, את הסכום $a+b$ ב c, ואת הסכום $1+1$ ב 2. אז קיימים, לפי החוקים הדיסטריבוטיביים, שני השויונות:

$$(a+b) \cdot (1+1) = c \cdot (1+1) = c \cdot 1 + c \cdot 1 = c + c = (a+b) + (a+b),$$

$$(a+b) \cdot (1+1) = (a+b) \cdot 2 = a \cdot 2 + b \cdot 2 = a \cdot (1+1) + b \cdot (1+1) =$$

$$= (a+a) + (b+b) = (a \cdot 1 + a \cdot 1) + (b \cdot 1 + b \cdot 1).$$

השואת שויונות אלו נותנת: $(b+b) + (a+a) = (a+a) + (b+b)$.

מזה נסיק לפי החוק האסוציאטיבי של החיבור (כי הלוא החוג מהווה חבורה לגבי החיבור): $a + [(a+b) + b] = a + [(b+a) + b]$.

לבסוף, בהשתמשנו פעמיים במשפט 1 מעמ' 100 כלפי פעולת החיבור, נקבל: $a + b = b + a$, מש"ל.

הגדרה II: יהי a איבר כלשהו של החוג R, ותהי 1 יחידת החוג. אם a' איבר של R שבשבילו קיים $a' \cdot a = 1$, נאמר ש a' הפוך ל a.

---

1. הכוונה אפוא לאיבר 1 המקיים לגבי כל איבר a של החוג את היחסים $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
2. רק בחוג הטריביאלי המכיל אך איבר אחד 0 (לשון אחר: בחוג שכל איבריו שווים ביניהם), אין להבדיל, כמובן, בין האיברים הניטרליים של החיבור והכפל.

משפט 4: אם a „מחלק של 0", ז"א אם ישנו בתוך R איבר b השונה מ-0 ושבשבילו $b\cdot a=0$, אז אין בתוך R איבר הפוך ל-a.

הוכחה: ננית שקיים $b\cdot a=0$[2], ושהאיבר a' של R מקיים את השויון $a\cdot a'=1$. על פי החוק האסוציאטיבי של הכפל ועל פי המשפט 1 נקבל:

$$b=b\cdot 1=b\cdot(a\cdot a')=(b\cdot a)\cdot a'=0\cdot a'=0.$$

מסקנה זו אומרת, שהנחותינו יכולות לעמוד רק במקרה $b=0$; כלומר: אם a באמת מחלק של 0, אין במציאות איבר הפוך ל-a.

נעזוב עתה את המושג הכללי למדי של „חוג", שבשבילו קיימת אפשרות כה מוזרה כמו „מחלק אמיתי של אפס", אפשרות שאינה נמצאת בכל מערכות המספרים הידועות לנו[3], כוונתנו מעתה ליצור מושג של קבוצת איברים שבה מוגדרות שוב שתי פעולות-חשבון, ושבה קיימים חוקים המתאימים לחשבון של מספרים. לשם כך נדרוש קודם כל שנמצאת בתוך החוג יחידה (שנסמנה ב-1), ושהכפל יהיה קומוטטיבי[4]. השאלה העיקרית היא: עד היכן נצליח להתקדם בכוון מסוים שעיני הקורא כלות אליו בודאי מזמן, והוא: להבטיח גם לפעולה השניה של החוג, ז"א לכפל, את תכונות החבורה, כמו שהן קיימות בשביל הפעולה הראשונה (החיבור).

מצבנו עתה דומה כליל למצב בו נמצאנו בסוף הפרק הקודם (השוה עמ' 87) לגבי המקרה הפרוט של המספרים הרציונליים. כמו שם ברור גם כאן שאי-אפשר להשיג את מטרתנו הנ"ל בשלמותה. הצד המפריע הוא שוב המשפט 1; שהריהו שולל האפשרות למצוא פתרון כל עיקר, או פתרון חד-ערכי, למשואה $a\cdot x=0$ בתוך החוג. מתברר אפוא שאי-אפשר להפוך בתוך החוג תמיד ובאופן חד-ערכי את פעולת הכפל, לפחות מה שנוגע לכפל ב-0. לכן מתעוררת לפנינו השאלה בצורה זו: האם נוכל, לפחות, להשיג את מטרתנו אם נוציא מן הכלל את האיבר 0? הנוכל לקוות, שכל איברי החוג השונים מ-0 מהווים חבורה לגבי הכפל?

מן המשפט 4 נופק שתקוה זו יכולה להתאכזב, על כל פנים אם ישנם בתוך החוג, מלבד 0 עצמו, גם מחלקים אחרים של 0, כי אם מסמן a מחלק כלשהו של 0,

---

1. אם $b=0$, הרי קיים לפי המשפט 1 בשביל כל איבר a: $b\cdot a=0$.
2. אם נוסיף כאן את ההנחה $b\neq 0$, תקבל התוכחה שלפנינו את הצורה של „דרך השלילה".
3. ואולם השוה מה שנאמר במלואים לסוף הפרק השביעי!
4. אמנם דרישה זו אינה יסודית; אפילו לחוג המתואר בדוגמה 4), אם המקדמים α, β וכו' מסמנים מספרים רציונליים (או ממשיים) כלשהם, יש רוב התכונות של מערכות-מספרים, פרט לקומוטטיביות של הכפל דוקא.

אז לפי המשפט הנ"ל אין בתוך החוג פתרון למשואה $a\cdot x=1$. לכן כדאי לדרוש שלא יהיו מחלקי-אפס בתוך החוג פרט ל-0 עצמו. אמנם ישנם חוגים המקיימים את כל הדרישות שהעמדנון זה עתה, ובכל זאת אי-אפשר להפוך בתוכם את הכפל בדרך כלל. עדה לכך תשמש לנו הדוגמה 1) שבעמ' 106. ז"א קבוצת כל המספרים השלמים עם פעולות החיבור והכפל הרגילות; מערכת שבה אי-אפשר, למשל, לפתור את המשואה $2\cdot x=1$. ואולם אי-אפשרות זו היא מקרית, וכמעט הייתי אומר: מלאכותית. הלא ראינו בפרק הקודם, איך להתגבר על הקושי הזה; הרחבנו את קבוצת המספרים השלמים לקבוצת כל המספרים הרציונליים, והשגנו כך את האפשרות להפוך את הכפל באופן כללי, פרט לחילוק ב-0. בצורה דומה, שלא נתארנה בפרוטרוט, אפשר להתגבר על אותו קושי גם במקרה של חוג מופשט כנ"ל, ולהשיג כך בשביל פעולת-הכפל בתוך החוג כמעט את כל תכונות החבורה; ביתר דיוק: את כולן, פרט לחילוק ב-0. בדרך שציינוה כאן בכיוונה הכללי, נגיע אפוא באופן טבעי להגדרה הבאה[2]:

הגדרה III: קבוצה K שבשביל איבריה נקבע יחס של שויון, ושבה מוגדרות שתי פעולות-חשבון „חיבור" ו„כפל" היוצרות מכל שני איברים נתונים של הקבוצה את „הסכום" ואת „המכפלה", תיקרא בשם שדה, אם מתמלאים התנאים הבאים:

א) לגבי פעולת החיבור מהווה K חבורה; ז"א:

a) K קבוצה מתקשרת לגבי החיבור;

b) החיבור בתוך K הוא אסוציאטיבי;

c) החיבור ניתן להיפוך כללי וחד-ערכי בתוך K, כך שלמשואות $a+x=b$ ו $y+a=b$ יש בתוך K פתרון יחיד x ופתרון יחיד y, או ביתר פירוט: בתוך K נמצא איבר ניטרלי של החיבור, 0, ולכל איבר a ישנו איבר נגדי יחיד $-a$ שבשבילו קיים $0=(-a)+a$. (עיין בהערה שאחרי המשפט 3 בעמ' 101.)

ב) לגבי פעולת הכפל מהווה K, עד כמה שאפשר, חבורה קומוטטיבית; ז"א:

a) K קבוצה מתקשרת לגבי הכפל;

b) הכפל בתוך K הוא אסוציאטיבי;

c) הכפל בתוך K הוא קומוטטיבי, ז"א קיים תמיד $a\cdot b=b\cdot a$;

d) הכפל ניתן להיפוך כללי וחד-ערכי בתוך K, פרט לכפל ב-0; ז"א:

---

1. לא יקשה להבין, שאי-אפשרות זו לא נוכל לבטל אף על ידי צירוף איברים חדשים לתוך החוג, בנגוד למה שבטלנו בפרק הקודם כמה חסרונות של מערכת המספרים הטבעיים ע"י הרחבת מושג המספר, היינו: ע"י צירוף איברים חדשים.
2. מובן שיש להגדרה III זכות-קיום גם בלי הקדמה זו. ואמנם ההקדמה מסבירה לנו, למה נגדיר בצורה זו דוקא ולא אחרת.

למשואה $a\cdot x=b$ יש בתוך K פתרון יחיד x, אם $a\neq 0$. (ביתר פירוט: ישנו בתוך K איבר ניטרלי של הכפל, 1; ולכל איבר a, השונה מ 0, ישנו איבר יחיד a^{-1} שבשבילו קיים $a\cdot a^{-1}=1$.)

ג) החיבור קשור בכפל ע"י החוק הדיסטריבוטיבי: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

הערות להגדרה III:

ראשית: אין צורך לדרוש בתנאי ג) את שני החוקים הדיסטריבוטיביים, כי כל אחד מהם גורר את חברו לפי החוק הקומוטטיבי של הכפל, כמו שצוין לעיל.

שנית: הניסוח שבתנאי ב), ש K מהווה חבורה לגבי הכפל „עד כמה שאפשר", מתבאר בהתאם למה שהעירונו לעיל בעמוד 110, והוא: שעל כל פנים אין בזה תועלת לדרוש ש K יהווה חבורה לגבי הכפל, הואיל והמשפט 1 מונע את האפשרות להפוך את הכפל ב 0. הצטמצמנו אפוא לסטיה ה מ י נ י מ ל י ת מדרישת ההיפוך לכפל בהתאם להגדרת החבורה (עמוד 90); כלומר: אך לגבי האיבר 0 לא דרשנו את אפשרות ההיפוך. הדוגמות הבאות מראות שהתנאי d) איננו שואל שלא־כהוגן, אדרבה: אפשר לקיים את כל התנאים שבהגדרה III.

שלישית: אם נוסיף על פעולות החיבור והכפל גם את הפעולות ההפוכות ונכנה אותן כ„חיסור" ו„חילוק", הרי יש בכל שדה ארבע פ ע ו ל ו ת־ח ש ב ו ן: חיבור, חיסור, כפל וחילוק, שאפשר להוציאן לפועל באופן חד־ערכי ומבלי לצאת מתוך השדה — פרט לחילוק ב 0, שאיננו אפשרי.

רביעית: המשפטים 1—3 שהוכחנום לעיל, והקיימים בכל חוג, לא־כל־שכן שהם קיימים בכל שדה, כי שדה הריהו חוג מיוחד. ביחוד מתמלא תמיד בתוך שדה התנאי שבמשפט 3, ולכן קיים (אם נסתמך גם על התנאים אשר תחת ב)):

משפט 5: כל שדה מהווה חבורה קומוטטיבית לגבי החיבור. כל שדה, אחרי שהוצא מתוכו האיבר 0, מהווה חבורה קומוטטיבית לגבי הכפל[1].

נחוס על הקורא ונמנע מהוכיח שהתנאים השונים שבהגדרת השדה אינם תלויים ביניהם; כלומר, שאי־אפשר לוותר על שום תנאי מן התנאים המגדירים את מושג השדה. רק לגבי תנאי אחד נוכיח אי־תלות זו: לגבי החוק הדיסטריבוטיבי. ע"י זה נוציא מלב הקורא את החשד שמא החוק הזה ממילא מסקנה משאר התנאים, לפחות אם $0\neq 1$. לשם כך נסתכל במערכת כל המספרים השלמים; נגדיר את החיבור כרגיל, ברם את הכפל נגדיר כך: „מכפלת" המספרים a ו b תהיה המספר $a+b+1$. הקורא יווכח בעזרת חשבונות קלים שכל התנאים תחת א) וב) מתמלאים לפי זה; האיבר הניטרלי של הכפל יהיה 1—; האיבר ההפוך ל a יהיה המספר $-a-2$. רק החוק הדיסטריבוטיבי אינו מתמלא; כי המכפלה של a ב $(b+c)$ תהיה $a+b+c+1$, ואילו סכום המכפלות של a ב b ושל a ב c יהיה $a+a+b+c+2$, סכום השונה בדרך כלל מ $a+b+c+1$.

1. המדייק ימצא שכאן כבר הסתמכנו על העובדה (עיין לעיל ובמשפט 6 בסוף הפרק) שמכפלת שני איברים שונים מ 0, שונה גם היא מ 0.

דוגמות של שדות:

1) הדוגמה החשובה ביותר, ובמובן מסויים — עיין בדוגמה 3) — גם הפשוטה ביותר של שדה, היא שדה המספרים הרציונליים שידענוהו ב§3 של הפרק הקודם. איברי השדה הנם המספרים הרציונליים, והפעולות: החיבור והכפל הרגילים. שדה זה מצטיין בכך שאין לו „ש ד ה ח ל ק י", ז"א אם נוציא מתוכו חלק כלשהו מאיבריו, יחדל החלק הנשאר מהיות שדה לגבי אותן הפעולות[1]. זה נופק בעצם מן התהליכים שבהם יצרנו, בפרק הקודם, את שדה המספרים הרציונליים; נקודת המוצא היתה אז מערכת המספרים הטבעיים עם חיבורם וכפלם, ומטרתנו היתה להבטיח לפעולות אלו היפוך כללי וחד־ערכי במערכת המורחבת, עד כמה שאפשר — מטרה שהביאתנו דוקא אל המספרים הרציונליים. ברם גם בלי זכור את הפרק הקודם, נוכל להווכח שחלק אמיתי של השדה הנ"ל אינו יכול להיות שדה. כי כל חלק כזה צריך להכיל, על כל פנים, את האיברים הניטרליים 0 ו1; ולכן, לפי דרישת החיבור והיפוכו, את כל המספרים השלמים; ומלבד זה, לפי הדרישה של היפוך הכפל, את כל השברים $\frac{m}{n}$, שבהם מסמן m מספר שלם כלשהו ו n מספר שלם השונה מ 0.

2) בין הדוגמות של חבורה שב§2 (עמ' 95/96) הופיעה המערכת $(0,1,\dots,n-1)$, המהווה בשביל כל מספר טבעי n חבורה לגבי החיבור מודולו n. יהי n בפרט מ ס פ ר ר א ש ו נ י, ונסמנו אפוא ב p[2]; אז המערכת הנ"ל, אחרי שנוציא ממנה את האיבר 0, מהווה חבורה קומוטטיבית לגבי הכפל מודולו p, כאשר צוין בעמוד 96, ברור שהחיבור מודולו p והכפל מודולו p במערכת הנ"ל קשורים ביניהם על ידי החוק הדיסטריבוטיבי. מזה נופק שמתמלאים כל תנאי ההגדרה III בתוך המערכת $(0,1,\dots,p-1)$, אם p מספר ראשוני ואם הפעולות הן החיבור והכפל מודולו p. קבלנו כך דוגמה חדשה של שדה.

אם נתבונן בדוגמה זו ובקודמת, בשים לב ל מ ס פ ר ה א י ב ר י ם ש ב ש ד ה, מתברר שהדוגמה 1) דוגמה של ש ד ה א י נ ס ו פ י והדוגמה 2) דוגמה של ש ד ה ס ו פ י. לכל מספר טבעי n ישנן גם חבורות גם חוגים המכילים בדיוק n איברים שונים; דוגמות לכך מצאנו בעמ' 96 ו 106. אין הדבר כך לגבי שדות. משפט מפורסם של מ ו ר[3], שהוכחתו אמנם אינה פשוטה כל עיקר, אומר: מספר איבריו של שדה סופי הוא תמיד מספר ראשוני או חזקה של מספר ראשוני; וחילופו: כנגד כל חזקה p^n של מספר ראשוני p ישנו שדה של p^n איברים — ורק שדה אחד, אם לא נבדיל בין שדות איסומורפיים (עיין להלן).

3) גם מערכת כל המספרים הממשיים מהווה שדה לגבי החיבור והכפל

1. גם כאן התעלמנו מן השדה הטריביאלי, המכיל איבר אחד ויחיד שנוכל לסמנו ב 0.
2. כך נהוג, הואיל וב p מתחילות המלים הלועזיות Primzahl ,prime number וכו'.
3. E. H. Moore

הרגילים; כמו כן מערכת כל המספרים המרוכבים (עיין בשני הפרקים הבאים). יש אפילו כמה שדות „בין" שדה המספרים הרציונליים ושדה המספרים המרוכבים, מלבד שדה המספרים הממשיים. כמו שהתכוונו בפרק הקודם להרחיב את מערכת המספרים הטבעיים להיות שדה (ביתר דיוק, שדה צר ביותר), כך נשתדל בפרקים הבאים להרחיב את שדה המספרים הרציונליים לשדות מקיפים יותר ויותר. בעיקר זוהי הסבה שבעבורה הכנסנו את הפרק על חבורות ושדות כאן, באמצע חלק זה המוקדש להרחבת מושג־המספר. שהרי בלי מושגי החבורה והשדה יקשה להבין את הקו העקרוני והעקבי בתהליכים השונים של הרחבת מושג־המספר.

חוג הקוֹטרניונות (דוגמה 4) במלואים לעמ' 106) מהווה „כמעט" שדה, אם המקדמים $\alpha, \beta, \ldots$ עוברים את שדה המספרים הממשיים (או הרציונליים); מבין תכונות השדה חסרה לו רק תכונת הקומוטטיביות של הכפל. קוראים לחוג כזה לפעמים בשם „שדה משופע". קיים משפט מפתיע ועמוק האומר: אם שדה משופע מכיל רק מספר סופי של איברים, אז הוא אף שדה, ז"א ממלא מעצמו את החוק הקומוטטיבי של הכפל. לשון אחר: קומוטטיביות הכפל היא מסקנה הגיונית מתוך שאר תנאֵי השדה, אם נוסיף עליהם את תנאי הסופיות.

דוגמה גיאומטרית של שדה נדע בפרק השביעי (שדה הוֶקטורים שבמישור).

ננסח עוד את שתי ההגדרות הבאות שבעצם אין בהן משום חידוש:

הגדרה IV: אם כל איברי השדה K' נמצאים בתוך שדה אחר („מקיף יותר") K, ופעולות־החשבון בתוך K' מזדהות עם הפעולות שבתוך K, ייקרא K' שדה חלקי של K.

כך, למשל, שדה המספרים הרציונליים הוא שדה חלקי של שדה המספרים הממשיים, וזה — שדה חלקי של שדה המספרים המרוכבים. קל לראות: אם K' שדה חלקי של K, וזה שדה חלקי של K, אז גם K' שדה חלקי של K. לכן למשל שדה המספרים הרציונליים הנהו שדה חלקי של שדה המספרים המרוכבים.

במקרה המתאים לגבי חבורה או חוג מדברים על „חבורה חלקית" או „חוג חלקי".

בהתאמה שלמה לעמ' 102 נכניס את מושג האיסומורפיות בין שדות:

הגדרה V: יהיו $\mathfrak{K}$ ו $\mathfrak{L}$ שני שדות, ונניח שיש העתק ביניהם אשר יתאים לכל איבר של $\mathfrak{K}$ באופן חד־חד־ערכי איבר של $\mathfrak{L}$ כך, שאם h_1 ו h_2 שני איברים כלשהם מתוך $\mathfrak{K}$, ו l_1 ו l_2 בני זוגם בתוך $\mathfrak{L}$, אז יהיה l_1+l_2 בן זוגו של h_1+h_2, ו $l_1 \cdot l_2$ בן זוגו של $h_1 \cdot h_2$. במקרה זה ייקרא ההעתק הנ"ל העתק איסומורפי בין השדות $\mathfrak{K}$ ו $\mathfrak{L}$. ושני אלה ייקראו שדות איסומורפיים. (דוגמות לשדות איסומורפיים נדע בפרקים הבאים.)

כמו שבנו המתמטיקנים את תורת החבורות המופשטות (עיין לעיל עמ' 99), כן אפשר לפתח על סמך הגדרת השדה ענף מתימטי מיוחד, תורת השדות המופשטים. העוסקת בתכונות המשותפות לכל השדות — יהיו איברי השדה

מספרים, עצמים גיאומטריים וכו'. במשך שלושים השנים האחרונות קבלה תורה זו תפקיד חשוב יותר ויותר (בתוך האלגברה ובשביל כמה בעיות הסמוכות לה). החל ממאמרו המפורסם והסולל דרכים חדשות של שטיינץ[1], ואחר כך בבית־מדרשה של אֶמי נֶיטֶר[2].

מבין המשפטים הפשוטים ביותר הקיימים בכל שדה, נביא כאן רק משפט אחד: מצאנו לעיל (משפט 1 בעמ' 108) שקיים $a \cdot 0 = 0$ בכל חוג, ולכן בכל שדה. לגבי השאלה ההפוכה, אם $a \cdot b = 0$ גורר אחריו שלפחות אחד הגורמים, a או b, יתאפס, מצאנו שאין זה נכון (השוה את הדוגמה 3) בעמ' 106). לשון אחר: חוג יוכל להכיל, מלבד 0 עצמו, גם מחלקים אמיתיים של 0. ואולם אין הדבר כך בתוך שדה; כל שדה אינו מכיל מחלקים אמיתיים של 0. (הלוא דוקא לזה התכוונו בהגדירנו את מושג השדה בעזרת הדרישה ב) של ההגדרה III, עמ' 111.) קיים אפוא:

משפט 6: מכפלה בתוך שדה מתאפסת אם, ורק אם, לפחות אחד הגורמים מתאפס.

הוכחה: יהי $a \cdot b = 0$ בתוך שדה נתון, ויהי $b \neq 0$. לפי הנחה זו ישנו, בהתאם להגדרה III, בתוך השדה האיבר b^{-1} ההפוך ל b, כך ש $b \cdot b^{-1} = 1$. לכן נקבל, בהתחשב עם המשפט 1:

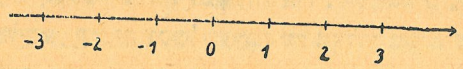
$$a = a \cdot 1 = a \cdot (b \cdot b^{-1}) = (a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0.$$

ז"א, ההנחות $a \cdot b = 0$, $b \neq 0$ גוררות $a = 0$, מש"ל (השוה הוכחת המשפט 4 בעמ' 110).

פרק ששי: הרציפות (המספרים האי־רציונליים והממשיים).

§1. הצגת הבעיה. הצורך בהרחבה נוספת של מושג־המספר.

נעזוב שוב את העמדה המופשטת שנקטנו בה בפרק הקודם, ונחזור לתוצאות שהשגנו בפרק הרביעי לגבי הרחבת מושג־המספר: יצאנו מן המספר הטבעי והגענו דרך המספרים השלמים בכללם אל מושג המספר הרציונלי. הבה נתן לנו חשבון על מה שהשגנו על ידי זה באופן כמותי, ונשתמש לשם כך בתיאור הסתכלותי: נשרטט קו ישר (או בקצור: ישר), למשל במצב אפקי (עיין בציור 2), ונציין בו



ציור 2

כפי רצוננו נקודה כלשהי P. (בציור סומנה P ב 0. עיין להלן.) משני כווני הישר (ימינה או שמאלה) נבכר אחד כפי רצוננו, למשל את הכוון ימינה; נכנה אותו

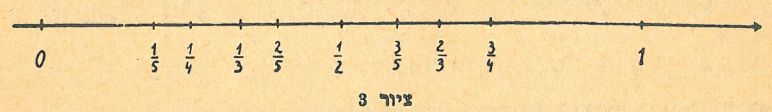
1. המאמר, שהופיע בשנת 1910, יצא במהדורה חדשה ועם כמה הערות בצורת ספר:
E. STEINITZ: Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben von R. BAER und H. HASSE. Berlin 1930.

2. Emmy Noether

בשם כוון חיובי, ואת הכוון הנגדי לו (שמאלה) בשם כוון שלילי. לבסוף נבחר כפי רצוננו ביחידת־אורך (למשל, מטר אחד, או מ"מ אחד). בזה גמרנו את ההכנות הנתונות לבחירתנו החפשית.

מן הנקודה P נקצה בכוון החיובי את יחידת־האורך ונסמן את הנקודה שנגיע אליה בו. גם מן הנקודה 1 נקצה את יחידת־האורך בכוון החיובי ונקבל נקודה שנסמנה ב־2. כן נמשיך בלי קץ. מתקבלת כך סדרה אינסופית של נקודות $1, 2, 3, \ldots$ בקו הישר, נקודות המתאימות באופן חד־חד־ערכי למספרים הטבעיים $1, 2, 3, \ldots$. כדי לקבל את בני זוגם של המספרים השלמים כולם, נסמן את הנקודה P גם ע"י 0 ונקצה החל ממנה בכוון השלילי את יחידת־האורך; הנקודה שנקבלה כך תסומן ב־1−. באותו אופן נקצה מ־1− בכוון השלילי את יחידת־האורך ונקבל נקודה שנסמנה ב־2−, וכן הלאה את הנקודות 3−, 4−, ... בדרך זו תתקבל בקו הישר מערכת אינסופית של נקודות מצוינות $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, המתאימות כבר לפי סימונן לכל המספרים השלמים. נקודות אלו כולן "מבודדות"; כלומר: לכל אחת מן הנקודות האלה יש סביבה שבה לא תימצא כל נקודה אחרת מביניהן. לכל מערכת כזו קוראים בשם מערכת נקודות בודדות. בפרט נקראות הנקודות הללו, המסומנות במספרים השלמים, בשם "הנקודות השלמות" שבקו הישר.

בודאי לא מצינו, ע"י ציון הנקודות השלמות, את כל הנקודות שבקו הישר. ואמנם תיוצר צורה אחרת לגמרי, אם נציין גם את תמונותיהם של כל המספרים הרציונליים, המכונות "הנקודות הרציונליות". כדי לקבל נקודות אלו נחצה את הקטע שבין הנקודות 0 ו־1 לשנים ונסמן את הנקודה החוצה ב־$\frac{1}{2}$ (עיין בציור 3);



ציור 3

כמו־כן נחלק אותו קטע לשלשה חלקים שווים ונסמן את שתי הנקודות החדשות ב־$\frac{1}{3}$ ו־$\frac{2}{3}$; באותו אופן נמשיך את תהליך החילוק, בחלקנו את הקטע ל־$6, 5, 4$ חלקים שווים וכן הלאה. הנקודות המתקבלות כך בקטע הנ"ל תסומנה במספרים הרציונליים שבין 0 ל־1. באותה שיטה ממש נחזיק לגבי כל שאר הקטעים שבקו הישר, היינו הקטעים המקשרים את הנקודות n ו־$n+1$, אם n מסמן מספר שלם (חיובי או שלילי) כלשהו. ע"י זה נקבל מערכת של נקודות בקו הישר, הן הן הנקודות הרציונליות שכל אחת מהן מסומנת במספר רציונלי; מאידך מתאימה לכל מספר רציונלי a נקודה אחת ויחידה המסומנת ב־a. אי־אפשר אמנם לתאר בשרטוט את כל הנקודות הרציונליות בין n ו־$n+1$ עם סמוניהן, מפני ששרטוט וסימון בדיו או בצבע־דפוס — התופש מקום ידוע והיוצר למעשה לא נקודות אלא גופים — אינו מאפשר לנו לתאר נקודות מתימטיות, שאין להן לא אורך ולא רוחב. רק נקודות רציונליות אחדות, מבין אלה הנמצאות בקטע מ־0 עד 1, תארנו בציור 3.

תהי Q אחת מן הנקודות הרציונליות, ו־q המספר הרציונלי המסמן את Q.

אז בכל סביבה נתונה של Q, תהי צרה איך שתהיה, תמצאנה נקודות רציונליות אחרות, ואפילו אינסוף נקודות רציונליות. הקורא יבין זאת מיד, אם ישים אל לבו כי כנגד כל מספר רציונלי חיובי קבוע יש מספרים רציונליים חיוביים הקטנים ממנו — ואפילו אינסוף מספרים קטנים ממנו; דבר זה קיים אפילו אם נצטמצם למספרים $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. לכן ישנם בין המספרים הרציונליים בעלי הצורה $q \pm \frac{1}{n}$ כאלה, ואפילו אינסוף כאלה, המסמנים נקודות שבתוך הסביבה הנתונה של Q. במערכת הנקודות השלמות יש לכל נקודה שתי "שכנות"; לעומת זאת עתה, במערכת הנקודות הרציונליות, אין "שכנה" לנקודה נתונה Q. מערכת הנקודות הרציונליות איננה מערכת־בודדים, כי אם מערכת רציפה[1]. נוהגים לומר על מערכת־נקודות כזו שהיא "צפופה לאינסוף", או סתם צפופה. התכונה האפיינית של מערכת (קבוצה) קוית[2] צפופה היא, שבין כל שתי נקודות של הקבוצה נמצאת עוד נקודה, ולכן אפילו אינסוף נקודות, של המערכת עצמה.

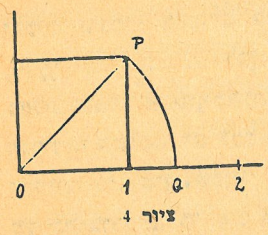
הקו הישר, שאת נקודותיו (או חלק מנקודותיו) סימַנו במספרים רציונליים כנ"ל, ייקרא בשם קו־המספרים. בנינו כך בישר הנתון קבוצה צפופה של נקודות והיא: קבוצת כל הנקודות הרציונליות. ואולם מתעוררת השאלה, אם יתכן בכלל להבדיל בין הקו הישר לכל נקודותיו, ובין קבוצה זו של נקודות. ביתר דיוק: אם נראה את הקו הישר כקבוצת כל הנקודות הנמצאות בקו, המזדהה הקו עם קבוצת כל הנקודות הרציונליות שבו, אם לאו? הנסיון בודאי לא יעזור לנו ברצותנו לענות על שאלה זו. שהרי חושינו, גם בעזרת המכשירים העדינים ביותר, לא יספיקו אפילו להבדיל בין הנקודות הרציונליות בעצמן, הצפופות לאינסוף; לא כל שכן שלא יספיקו לנסות אם נמצאות ביניהן עוד נקודות אחרות. אם כן, מהיכן נמצא לנו מכשירים ושיטות לענות על שאלתנו הנ"ל? עלינו להודות ולהתוודות כי לעומק מהותו של הענין אין לפנינו שאלה של אמת ושקר, ז"א שאלה מסוג זה שהתשובה הניתנת עליה תהיה נכונה או לא־נכונה. אדרבה, תשובתנו תלויה כביכול בהסכם בינינו לבין עצמנו, ביתר דיוק: בהגדרת העצם הגיאומטרי שנכנה אותו "קו ישר", ביחוד בהגדרתו במה שנוגע לעשרו בנקודות. נרחיק לכת ונאמר: אפשר לתאר מקצועות מתימטיים, שבשבילם תשובה אחרת על השאלה הנ"ל מתאימה מאשר בשביל מקצועות אחרים. אכן, נגש כאן למתן תשובה לאור "הגיאומטריה הרגילה"[3]; יתברר שלא יקל עלינו לענות, וכי נמצא לנגד ברירה קשה למדי.

לכאורה נוכל לטעון: איך יתכן ליחס לקו הישר יותר נקודות, נוסף על כל הנקודות הרציונליות? הרי לא נוכל להעמיס על הישר שיכיל יותר מאינסוף

1. כאן השתמשנו במלה "רציף" במובן לא־מדויק, והסתכלותי יותר מהגיונית. להלן (בחלק השלישי) נדייק יותר לגבי מושג הרציפות.
2. קבוצה קוית — רוצה לומר שלקבוצה יש רק מֵמַד אחד; היינו שכל נקודות הקבוצה נמצאות על קו ישר (או לפעמים גם על קו עקום, כגון על קו המעגל).
3. על "גיאומטריות שונות" ידובר בחלק החמישי (כרך שני).

נקודות בין כל שתי נקודות, תהיינה שתיהן אף קרובות זו לזו במדה כלשהי. לעומת זאת נגיע לידי מסקנה דוקא בכוון הנגדי על ידי בניה (קונסטרוקציה) גיאומטרית קלה למדי, כדלקמן:

נצא מקו־המספרים ונבנה (עיין בציור 4) ריבוע כנגד הקטע הנמשך מ 0 עד 1; למשל, נבנה את הריבוע מן הקטע ומעלה; נמשוך את קרנזול הריבוע היוצא מן הקדקד 0 אל הקדקד שממולו P, ונחוג מעגל סביב הנקודה 0; 0 תשמש מרכז המעגל, ומחוגו (חצי־הקוטר) יהיה הקרנזול הנ"ל $\overline{0P}$. עתה נשאל את עצמנו:



ציור 4

היחתוך מעגל זה את קו־המספרים, למשל בחלק הקו המשתרע מימין הנקודה 0? על פי ההסתכלות אנו נוטים לומר: איזו שאלה! פשיטא שהמעגל יחתוך את הישר; ובפרט: נקודת החיתוך תימצא בין הנקודות 1 ו 2 שבישר. לעומת זאת נוכיח: אם נבין את הישר כקבוצה הצפופה של כל הנקודות הרציונליות שבו, לא יתקיים הדבר שההסתכלות מבטיחה אותו כביכול; אין במציאות נקודת חיתוך, והמעגל עובר אפוא מעברו העליון של הישר לעברו התחתון, כאילו דרך נקב בקו הישר.

כדי להוכיח עובדה מפתיעה זו, נתן לה ביטוי שונה במקצת: ביטוי אריתמיטי במקום הביטוי הגיאומטרי. כי הלא הנשק שבו מזוין המתימטיקן בשדה האריתמיטיקה, דק הוא וחד בהרבה מן הכלים שיש לו בשדה הגיאומטריה, כלים הבנויים בעיקר על ההסתכלות. נוכיח את טענתנו דרך שלילה; כלומר, נניח כאילו היתה במציאות נקודה Q בקו־המספרים מימין ל 0, שבה חותך המעגל את הישר (עיין בציור 4). אז יהיה הרוחק בין 0 ובין Q שווה לאורך האלכסון $\overline{0P}$, שהוא מחוג המעגל. הואיל והנחתנו היתה, ש Q היא אחת מהנקודות הרציונליות; קיים מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ המסמן את Q בקו הישר, ז"א הרוחק שבין 0 ל Q שווה ל $\frac{m}{n}$; לפיכך גם אורך הקרנזול $\overline{0P}$, המשמש מחוג המעגל, שווה ל $\frac{m}{n}$. ברם אנחנו יודעים ממשפטו של פיתָגורס (השווה בעמ' 40 למטה) שבכל משולש ישר־זוית שווה סכום הריבועים של שני הניצבים לריבוע היתר. והנה במקרה שלפנינו, כלומר במשולש ישר־הזוית $01P$, שני הניצבים $\overline{01}$ ו $\overline{1P}$ הם שווים, בהיותם צלעות של ריבוע, ולכן ריבוע הקרנזול הוא פי שנים של ריבוע כל ניצב. אבל הלוא אורך כל ניצב — שהוא הרוחק בין הנקודות 0 ו 1 — שווה ל 1; נופק מזה שריבוע הקרנזול שווה ל $2 \cdot 1^2 = 2$. הואיל וסימַנו את אורך הקרנזול ב $\frac{m}{n}$, מתקבל סוף־סוף השויון: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

מטרתנו, להוכיח שאין נקודת חיתוך בין המעגל ובין הישר, נשיג אפוא בהראותנו, שהשויון $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ מביא לידי סתירה; שהרי מקור הסתירה יוכל להיות רק בהנחתנו, שישנה בקו הישר נקודת חיתוך Q המסומנת במספר הרציונלי $\frac{m}{n}$. נצעד לקראת הסתירה ההיא באותה דרך שהשתמשו בה כבר היוונים העתיקים לשם כך. ראשית כל נניח לשם נוחיות, שהמספר הרציונלי החיובי $\frac{m}{n}$ מופיע בצורת

„שבר מצומצם" (עיין בעמ' 87), היינו ש m ו n הנם מספרים טבעיים בלי מחלק משותף. נוכל לתת לשויון הנ"ל את הצורות הבאות:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \frac{m^2}{n^2} = 2, \quad m^2 = 2n^2.$$

כל אחד מן המספרים m ו n יהיה או זוגי או אי־זוגי, אבל לכל היותר אחד מהם יוכל להיות זוגי; כי הלא הנחנו שאין להם מחלק משותף, ולכן בפרט לא המחלק 2. השויון $m^2 = 2n^2$ מביע כי m^2 מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי; נכתוב אפוא: $m = 2r$. מאידך גיסא יהיה n, ולכן גם n^2, אי־זוגי; כי הריבוע של מספר אי־זוגי הנהו אי־זוגי. קבלנו כך את השויונות:

$$(2r)^2 = 2n^2, \quad 4r^2 = 2n^2, \quad 2r^2 = n^2.$$

ברם השויון האחרון מביע כי n^2 מספר זוגי, וע"י כך קבלנו סתירה להנחתנו שלא יהיו m ו n שניהם זוגיים. סתירה זו מעידה על כך שאין נקודת חיתוך בין המעגל שחגנוהו ובין קו המספרים הרציונליים.

אם נציג מסקנה זו מול צפיפותן האינסופית של הנקודות הרציונליות בקו־המספרים, הרי יש לפנינו מעין שני כתובים המכחישים זה את זה, ואיפה הכתוב השלישי שיכריע ביניהם? בעקרון יש לנו שתי דרכים: או שנשלים עם האפשרות המוזרה כי לשני קוים (במקרה שלפנינו: לקו הישר, ולקו המעגל) החודרים זה לתוך זה, לא תהיה נקודת חיתוך; או שנוותר על הרעיון — אשר התקבל על דעתנו כהסתכלותי בהחלט — כי בקו ישר (כמו בקו־המספרים הנ"ל) תמצאנה כל הנקודות הרציונליות הממלאות את הישר באופן צפוף, ורק הנקודות ההן. אין בת־קול מן השמים או ממצפון שכלנו, המצווה עלינו לבחור דוקא באפשרות מסוימת אחת מן השתים הנ"ל. זוהי בעצם שאלה של „נוחיות", או של טַקט מתימטי. כלומר: בחירתנו תלויה בכך, איזו תשובה מאפשרת לנו פיתוח יותר נוח, יותר עקבי, פחות מלאכותי, של הגיאומטריה ושל האריתמיטיקה. הנסיון מראה, שאם כי ההכרעה כלפי כל אחד מן הכוונים הנ"ל מציגה אותנו לפני קשיים שלא יקל להתגבר עליהם, מכל מקום יש להעדיף את הכוון השני. אם נבחר בו, ניצור אמנם קשיים מסוימים לפיתוח המתימטיקה, אבל אחרי שקבלנו עלינו יסורים אלו יהיה הכל חלק וחד־גווני. לעומת זאת, לו נבחר בכוון הראשון ונרשה לשני קוים לחדור זה לתוך זה בלי נקודת חיתוך, כי אז נקבל גיאומטריה מוזרה ומסובכת מאד שלעולם לא נמצא בה את ידינו ורגלינו בלי התאמצות גדולה. לכן נעדיף את הכוון השני; ז"א, נעניק לקו־המספרים (ובהתאם לכך, כמובן, לכל קו ישר) נקודות נוספות, מלבד כל הנקודות הרציונליות שבו!

לפי התאמתנו בין נקודות ומספרים מוטל עלינו להרחיב גם את מושג המספר מעבר למספר הרציונלי והלאה, באותה מידה שנרחיב את מושג הנקודה מעבר לנקודות הרציונליות. מובן שלא די ולא עקבי יהיה להוסיף לקו רק את נקודת החיתוך הנידונה. כדי להתקרב במקצת לפתרון כללי, ננסח את מה שהוכחנו

מקודם בצורה זו: „השורש הריבועי (החיובי) מ 2, היינו המספר החיובי $\sqrt{2}$ שריבועו שווה ל2, שונה מכל המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$." אפלטון[1] מספר שמורו תיאודורוס[2] הוכיח את הטענה המתאימה גם לגבי כל השרשים הריבועיים $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ וכו' עד $\sqrt{17}$[3]; יש דעה שהיוונים הוכיחו כבר בסוף המאה החמישית לפני סה"נ, שאותו דבר קיים לגבי כל שרש ריבועי ממספר טבעי, שאיננו ריבועו של מספר טבעי. מתקבל על הדעת שמצב דומה לזה שבין השרשים הריבועיים, קיים לגבי השרשים המעוקבים והשרשים בעלי מעריך גבוה יותר. ואולם לא די לטפל בכל השרשים; הרי יש מספרים מסוג אחר לגמרי (עיין להלן בפרק השמיני, § 1), למשל המספר π המשמש לחשבון המעגל, שגם הם אינם שווים למספר רציונלי. סוף דבר: מוטל עלינו הצורך לפתח שיטה מקיפה ואחידה, המכלילה את מושג המספר מעבר למספר הרציונלי והלאה, והמרחיבה ע"י כך גם את מערכת הנקודות של קו ישר. ע"י צעד זה בתהליך שקראנוהו „הרחבת מושג המספר", נעזוב בעצם את תחום הארית מיטיקה (לרבות את האלגברה, עיין בפרק השמיני) ונעבור לתחום האנליסה[4] שמוקדש לה החלק השלישי של ספר זה. אמנם השארנו את תורת המספרים האי־רציונליים בחלק השני הזה, בהתאם להשקפה הנהוגה בבתי הספר.

בדברי ימי המתימטיקה אנו מוצאים בעיקר שלוש שיטות להגדרת המספרים האי־רציונליים, והן:

1) תורת „יחסי־הקטעים", כמו שנמצאה בספרי אבקלידס, ביחוד בספר החמישי שלו.

2) תורת „החיתוכים" של דדקינד.

3) תורת „הסדרות היסודיות"; תורה אשר הומצאה בצורות שונות, שלא היו תלויות זו בזו, על ידי חוקרים מגרמניה וצרפת, בסוף הרבע השלישי של המאה הי"ט.

תורתם של היוונים נשכחה — או לפחות לא מצאה הבנה לעצם מטרתה — אחרי התקופה העתיקה, ורק בזמן האחרון הכירו המתימטיקנים והפילוסופים, עד כמה היא חריפה ועקבית, וכי שקולה היא באמת כנגד חברותיה אשר הומצאו משנת 1860 והלאה. נתחיל כאן בשיטתו של דידקינד[5], הזקוקה לחשבונות פחות מן התורות האחרות, לפחות כל עוד נסתפק בבירור הרעיון היסודי.

---

1. Platon
2. Theodoros
3. כמובן, פרט ל $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$.
4. זוהי המלה היוונית $\dot{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma$ שלמובנה המקורי (הפרדה, המסה) אין ענין לכאן.
5. R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen. ספר קטן ויסודי זה הופיע בראשונה בשנת 1872; מהדורה חמישית 1927; הוצאה אנגלית 1901.
תיאור חדיש של תורה זו נמצא בספרו של O. PERRON: Irrationale Zahlen (Berlin 1921).

§ 2. תורת החתכים.

רעיונו היסודי של דידקינד הוא לחלק את קבוצת כל המספרים הרציונליים לשתי מחלקות של מספרים רציונליים, כך שכל מספר רציונלי יימצא באחת, ורק באחת, ממחלקות אלו. אם המחלקות תקיימנה את התנאי:

כל מספר של המחלקה האחת M_1 („המחלקה התחתונה") קטן[1] מכל מספר של המחלקה השניה M_2 („המחלקה העליונה").

אז תיקרא החלוקה בשם חתך או חיתוך ותסומן ב (M_1/M_2).

להלכה נוכל להבדיל, על פי שיטה הגיונית פשוטה, בין ארבע אפשרויות בטיב חיתוך נתון (M_1 / M_2), כדלקמן:

I. ישנו איבר אחרון (ז"א מספר גדול ביותר) במחלקה M_1, וכמו כן איבר ראשון (מספר קטן ביותר) במחלקה M_2.

II. ישנו איבר אחרון ב M_1, אבל אין איבר ראשון ב M_2.

III. אין איבר אחרון ב M_1, אבל ישנו איבר ראשון ב M_2.

IV. אין איבר אחרון ב M_1, ואין איבר ראשון ב M_2.

הבה נבדוק אם לכל האפשרויות העיוניות האלה מתאימים גם מקרים מעשיים; על כל אפשרות המתגשמת למעשה, נוכל להצביע ע"י דוגמה; לעומת זאת, אם אחת האפשרויות לא תוכל להתגשם, נזדקק ל„הוכחה של אי־אפשרות". ואמנם הוכחה זו קלה לגבי I: נניח כי היה r האיבר האחרון של M_1 ו s האיבר הראשון של M_2. מכיון ש r ו s שניהם מספרים רציונליים ו $r < s$, הרי גם „הממוצע החשבוני" ביניהם, $\frac{r+s}{2}$, הוא מספר רציונלי, הגדול מ r וקטן מ s. (זוהי דוגמה פרוטה לעובדה הכללית שמערכת המספרים הרציונליים, אם נסדר את המספרים לפי גדלם, היא צפופה; השוה בעמ' 117). המספר הרציונלי $\frac{r+s}{2}$ אינו יכול אפוא להשתייך לא ל M_1 (שהריהו גדול מן המספר האחרון של M_1) ולא ל M_2 (שהריהו קטן מן המספר הראשון של M_2). קבלנו כך סתירה להנחתנו שכל מספר רציונלי משתייך לאחת משתי המחלקות של החיתוך, והסתירה הזאת מראה: אין במציאות חיתוך מן הסוג I.

חיתוכים מן הסוגים II ו III נוכל ליצור בנקל. יהי q מספר רציונלי כלשהו, ויכיל M_1 את המספר q ואת כל המספרים הרציונליים הקטנים מ q; כל שאר המספרים הרציונליים יוכללו ב M_2. מן העובדה הכללית שצוינה בפיסקה הקודמת, נופק שקבלנו בזה חיתוך מן הסוג II. אם, להיפך, נכניס לתוך M_2 את q ואת

---

1. סדר המספרים הרציונליים הוא הסדר הנהוג לפי „גודל" המספרים. סדר זה מתאים לסדר הנקודות הרציונליות בציור 8 (עמ' 116), אם נסדר את הנקודות שם משמאל ימינה. משתמשים בסימנים $>$ ו $<$ עיין: בעמ' 88.

המספרים הגדולים מ q, ולתוך M_1 את שאר המספרים הרציונליים. נקבל חיתוך מן הסוג III [1].

לא יקשה ליצור גם דוגמות לאפשרות IV. נכניס, למשל, לתוך M_2 את כל המספרים הרציונליים החיוביים q שריבועם q^2 שווה או גדול מ 2; לפיכך מכיל M_1 את המספרים הרציונליים השליליים כולם, את 0 ואת כל המספרים הרציונליים החיוביים שריבועם קטן מ2. קל להוכיח, אם q מספר רציונלי חיובי כך ש $q^2<2$, כי ישנם במציאות אף מספרים רציונליים חיוביים q' הקטנים מ q, ושריבועם q'^2 בכל זאת גדול גם הוא מ 2. לכן רק אם $s^2=2$, מכיל M_2 מספר ראשון s. ואולם הרי הוכחנו ב § 1 (עמ' 119) שאין במציאות מספר רציונלי s בעל התכונה $s^2=2$; לכן נמצאים ב M_2 אך מספרים שריבועם גדול מ2. ואין ביניהם מספר ראשון (קטן ביותר). בדרך דומה מתברר שאין איבר אחרון בתוך M_1. קבלנו אפוא דוגמה של חיתוך מן הסוג IV. סוף דבר: אין חיתוכים מן הסוג I, אבל ישנם מן הסוגים II, III, IV.

כל חיתוך מן הסוג II או III ייקרא „חיתוך רציונלי"; על המספר הרציונלי, שהוא במקרים אלו האיבר האחרון של M_1 או האיבר הראשון של M_2, אומרים שהוא קובע את החיתוך. לעומת זאת ייקרא כל חיתוך מן הסוג IV, שאין כנגדו מספר רציונלי הקובע אותו, חיתוך אי־רציונלי.

ניצור עתה את המערכת המכילה את כל החיתוכים כולם, ונגדיר את השוויון בין החיתוכים כך:

הגדרה: אם שני חיתוכים (M_1/M_2) ו (N_1/N_2) שונים זה מזה רק בזאת שהאיבר האחרון של M_1 הוא האיבר הראשון של N_2, כך שחוץ מזה מכילות המחלקות M_1 ו N_1, וכמו כן M_2 ו N_2 אותם המספרים הרציונליים, אז ייקרא (M_1/M_2) שווה ל (N_1/N_2). מלבד מקרה זה ייקרא (M_1/M_2) שווה ל (N_1/N_2) אם, ורק אם, M_1 ו N_1 (ולכן גם M_2 ו N_2) מכילות אותם האיברים.

אם לא נבדיל בין שני עצמים המוגדרים כשווים ביניהם—והלא זה כלל שעליו שומר המתימטיקן בכל מקום! — הרי קבלנו לפי ההגדרה שלפנינו התאמה חד־חד־ערכית בין כל המספרים הרציונליים מצד אחד, ובין חלק מן החיתוכים מצד שני; החלק הנידון מכיל את כל החיתוכים הרציונליים. העתק בין קבוצת כל המספרים הרציונליים וקבוצת כל החיתוכים הרציונליים נקבל ע"י החוק המתאים למספר רציונלי q את החיתוך (M_1/M_2), שבו q הנהו האיבר האחרון של M_1 (או את החיתוך — השווה לו — (N_1/N_2), שבו q האיבר הראשון של N_2).

ועתה השגנו את האפשרות להגיע, על ידי צעד נועז ומרחיק־לכת במשמעותו, אבל קל מאד בביטויו, אל הרחבת מושג־המספר שאליה שאפנו:

---

1. דוגמות אלו הנן אף הכלליות ביותר מן הסוגים II ו III. אם q, למשל, האיבר האחרון של M_1, הרי זה גורר שכל איברי M_1 קטנים מ q וכל איברי M_2 גדולים מ q.

הגדרת המספרים האי־רציונליים: את מערכת המספרים הרציונליים נרחיב על ידי זה שנוסיף על המספרים האלה עוד עצמים (סמלים) כך, שלכל חיתוך אי־רציונלי יתאים עצם חדש אשר ייקרא בשם מספר אי־רציונלי, ושני עצמים ייקראו שונים (לא־שווים) אם, ורק אם, יתאימו לחיתוכים שונים (ז"א: לחיתוכים לא־שווים).

הערה: ההגדרה הזאת אינה משנה כלום לגבי השויון בין שני מספרים רציונליים. מה שנוגע לכל שני מספרים אירציונליים, הרי היא קובעת שהם שווים אם, ורק אם, יתאימו לחיתוכים שווים; לשון אחר: שההתאמה בין חיתוכים ומספרים היא חד־חד־ערכית. מלבד זה גוררת ההגדרה באופן עקבי, שמספר רציונלי לא ישווה לעולם למספר אירציונלי.

השיטה שבה הכנסנו כאן את המספרים האירציונליים, היא מופשטת מאד; כי לא הוגד מאיזה אוצר של עצמים נקח את העצמים הנקראים בשם מספרים אירציונליים. הגרעון הזה, הפסדו יוצא אולי בשכרו; הלא הוא נובע מפשטות המושגים שעל־ידיהם הכנסנו את המספרים האירציונליים. בסעיף הבא נכניסם בצורה שהיא מופשטת פחות, אבל תחת זה עמוסת טכניקה מתימטית. אכן גם כאן היינו יכולים לבחור בדרך להגדרת המספרים האירציונליים, שאיננה מופשטת כל כך, והיא: לא להכניס כלל מספרים חדשים, כי אם לעסוק במערכת כל החיתוכים עצמם, ולראות את החיתוכים האירציונליים כמספרים חדשים. אם נעשה זאת, תהיה לנו „הרחבה" של מושג המספר הרציונלי באותו המובן שקבענוהו שלוש פעמים בפרק הרביעי: התאמנו באופן חד־חד־ערכי למספרים ה„ישנים" עצמים חדשים — כאן החיתוכים הרציונליים — ועליהם הוספנו עצמים שאין להם בני־זוג מתאימים: החיתוכים האירציונליים.

כדי לבנות על הגדרת החיתוכים תורה שיטתית המטפלת בחיתוכים כבמספרים, נזכור במה אנחנו מעונינים בכלל כלפי מספרים: להשוותם ולחשב בהם. נדבר בשורות הבאות על „חיתוכים", אעפ"י שבאותה הזכות היינו יכולים לדבר על „המספרים" המתאימים.

מה שנוגע להשוואת חיתוכים לפי גדלם, הרי התנאי לשויון בין חיתוכים מתבטא בהגדרה שבעמ' 122. נשאר לנו להגדיר מתי ייקרא האחד משני חיתוכים נתונים קטן מחברו. כמורה־דרך לכך ישמש המקרה שבו שני החיתוכים הנתונים הם רציונליים; למשל: החיתוכים (R_1/R_2) ו (S_1/S_2) המתאימים למספרים הרציונליים r ו s, ז"א אלה שבשבילם R_1, ובהתאם S_1, מכיל את המספרים הרציונליים הקטנים מ r או מ s. אם בין המספרים הרציונליים r ו s קיים היחס $s>r$, אז ברור שב R_2 נמצאים מספרים, מלבד r בעצמו, אשר נמצאים גם ב S_1 (הם כל המספרים הרציונליים שבין r ו s). לכן מתקבל על הדעת להגדיר במקרה הכללי של חיתוכים (A_1/A_2) ו (B_1/B_2), אשר יהיו רציונליים או אירציונליים:

החיתוך (A_1 / A_2) יקרא קטן מן החיתוך (B_1 / B_2), אם ישנם מספרים רציונליים[1] המשותפים ל A_2 ו B_1.

באמת מתברר שהגדרה זו מתאימה, ושהיא מספיקה כדי לסדר את כל החיתוכים „לפי גדלם".

בעקרון לא יקשה להגדיר גם את פעולות החיבור והכפל בין חיתוכים. ואולם אנו נתקלים כאן בתופעות אי־נוחות אחדות. מקורה של אחת בזה שאפשר לתאר חיתוך רציונלי בשתי צורות, בהתאם להגדרת השוויון. על אי־נעימות זו נוכל להתגבר ע"י כך שנקבע מראש: אין לנו ענין, למשל, עם חיתוכים מן הסוג II אלא רק עם חיתוכים מן הסוגים III ו IV. בתנאי זה נוכל להגדיר: סכום החיתוכים (A_1 / A_2) ו (B_1 / B_2) יכונה החיתוך (C_1 / C_2), שבו מכיל C_1 את כל המספרים הרציונליים שאפשר לתארם כסכום של מספר מתוך A_1 ומספר מתוך B_1. (נופק מזה כי C_2 מכיל את המספרים שאפשר לתארם כסכום של מספר מתוך A_2 ומספר מתוך B_2.[2])

אי־הנוחיות תגדל אם נפנה להגדרת הכפל בין חיתוכים. לשם פשטות נסתכל במקרה ששני הגורמים (A_1 / A_2) ו (B_1 / B_2) יהיו חיתוכים „חיוביים", היינו שבתוך A_1 ובתוך B_1 יימצאו גם מספרים חיוביים; הנחה הגוררת שכל איברי A_2 וכל איברי B_2 הנם חיוביים. מתקבל על הדעת להגדיר כך: יסמן a_1 כל מספר מתוך A_1, a_2 כל מספר מתוך A_2, b_1 כל מספר מתוך B_1 ו b_2 כל מספר מתוך B_2; אז תהיה מכפלת החיתוכים (A_1 / A_2) ו (B_1 / B_2) החיתוך (D_1 / D_2), שבו מכיל D_1 את המספרים בני הצורה $a_1 \cdot b_1$ ו D_2 את המספרים בני הצורה $a_2 \cdot b_2$. ואולם הגדרה זו היא בעלת סתירה. כי אמנם המחלקה D_2 מכילה רק מספרים רציונליים חיוביים. אבל ב D_1 נמצאים, מלבד מספרים חיוביים הקטנים מכל איברי D_2, ומלבד 0 והמספרים הרציונליים השליליים, עוד מספרים חיוביים שהם גם איברי D_2; כי הלוא מכפלת שני מספרים רציונליים שליליים היא חיובית. כדי לסלק קושי זה, נגדיר במקרה שלפנינו רק את המחלקה העליונה D_2, ונאמר שהמחלקה D_1 מכילה את כל שאר המספרים הרציונליים; בצורה דומה יש להגדיר בשאר המקרים, כשהגורמים אינם שניהם חיוביים.

התופעות האי־נוחות הנ"ל אינם מעצור רציני לתורת המספרים האי־

---

1. הקורא יסביר לעצמו בנקל, שבהתחשב עם הגדרת השוויון בין חיתוכים יש צורך לדרוש שקיימים לפחות שני מספרים רציונליים משותפים כאלה; קיום מספר אחד כזה יוכל לקרות גם אם שני החיתוכים שווים ביניהם. מובן שקיום שני מספרים משותפים גורר קיום אינסוף מספרים משותפים.

2. אילו היה A_1 איבר אחרון a ו B_2 איבר ראשון b (מקרה המכוון לחיתוכים הרציונליים, המתאימים למספרים הרציונליים a ו b) כי אז היינו מקבלים כסכום, על סמך הגדרתנו זו, „חיתוך" (C_1 / C_2) שבו כל איברי C_1 קטנים מ $a+b$. ואולם במקרה זה לא ישאר בתקפו מה שנאמר לעיל בסוגריים; שהרי את $a+b$ אין לתאר כסכום של מספר מתוך A_2 ומספר מתוך B_2.

רציונליים המבוססת על מושג החיתוך. נוכל לקבל עלינו את היסורים האלה באהבה, תמורת יתרונו של מושג החיתוך עצמו, שהוא פשוט ושקוף כל כך. אבל יש טענה רצינית יותר נגד החיתוכים, שאפשר לבטאה הן בצורה מעשית הן בצורה עקרונית. כל אחד מן הקוראים למד בודאי, בהיותו בבית הספר, לחשב במספרים אירציונליים; למשל בצורת שברים עשרוניים, נושא שבו נטפל להלן ב§4. אם נתון לנו שבר עשרוני, מופיעות בו אמנם אינסוף ספרות; אבל אין מופיעים בו כל המספרים הרציונליים, לא בגלוי ואף לא בנסתר. לעומת זאת מופיעים בתוך חיתוך — למשל בתוך החיתוך המתאים לשבר עשרוני נתון — המספרים הרציונליים כולם (לפי הגדרת החיתוך). באופן עיוני יש לנסח זאת כך: אמנם אי־אפשר, בדרך כלל, להגדיר ולבטא מספר אירציונלי ע"י מספר סופי של מספרים רציונליים, אלא אנחנו זקוקים לשם כך לאינסוף מספרים רציונליים — בניגוד בולט לכך שהגדרנו את המספרים הרציונליים בעצמם כזוגות של מספרים שלמים, ואת המספרים השלמים כזוגות של מספרים טבעיים (עיין בפרק הרביעי; כך נגדיר בפרק הבא גם את המספרים המרוכבים כזוגות של מספרים ממשיים). אבל אינסוף מספרים רציונליים, אין זאת אומרת: המספרים הרציונליים כולם. באמת נראה בסעיף הבא, כי מהשקפה „איקונומית" נפריז על המדה בהשתמשנו בכל המספרים הרציונליים כדי להגדיר מספר אירציונלי, וכי מספיק לתפקיד זה לקחת אוצר מצומצם הרבה יותר של מספרים רציונליים. סוף דבר: אם נתכוון לדרך עיונית וליצירת מושגים פשוטים, בלי להרבות בחשבונות, אין לנו שיטה מעולה משיטת דידקינד, המכניסה את המספרים האירציונליים כחיתוכים; ברם בשביל השימוש המעשי במתימטיקה יש יתרון לשיטות אחרות. על אחת מהן, שהיא בעיקר תורתו של קנטור, נייחד את הדבור בסעיף הבא.

אפשר לעורר את השאלה: באיזה מובן וזכות נוכל לטעון, שהמספרים האירציונליים אשר הכניסם דידקינד כחיתוכים, הם „אותם המספרים האירציונליים" אשר הכניסם קנטור כסדרות יסודיות; ולכן: שהם „ה" מספרים הממשיים (עיין בעמ' 126) שהאנליזה זקוקה להם? אין כאן זהות, כמובן, אלא איסומורפיות (ובתוכה: התאמה חד־חד־ערכית), באותו המובן שלמדנוהו כמה פעמים בפרק הרביעי ונלמדנו עוד בפרק הזה והבא. מספיק להכניס את המספרים הממשיים פעם אחת: אם בסעיף זה הגדרנו מספרים אלו כחיתוכים, הרי מהשקפת הסעיף הבא נוכל להוכיח שכל חיתוך קובע מספר מסוים; וחילוף הדבר, אם לאור החיתוכים נשקיף על פני ההגדרות שבסעיף הבא.

§3. המספר האירציונלי כזוג של שתי סדרות יסודיות.

הרעיון העיקרי שבשאר התורות החדישות של המספרים האירציונליים, בניגוד לתורת החיתוכים, הוא זה: מספר אירציונלי יוגדר על ידי סדרה של מספרים

רציונליים $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, כך שכנגד כל איבר הנמצא במקום מסוים בסדרה, a_n, יש מספר טבעי n — הנקרא צ י ו ן האיבר a_n — המציין את מקומו, וחילופו: כנגד כל n טבעי מופיע בתוך הסדרה איבר מסוים a_n (השוה בעמ' 29). כל סדרת מספרים רציונליים, המגדירה מספר חדש על פי שיטה מעין הבאה, תיקרא ס ד ר ה י ס ו ד י ת. ההבדלים שבין השיטות השונות בכוון זה, הנם מעשיים יותר מעקרוניים [1]. לשם נוחיות נבאר להלן צורה מיוחדת של תורת הסדרות היסודיות, שנקודתה האפיינית היא: לתאר כל מספר אירציונלי ע"י שתי סדרות יסודיות, תחת אחת.

כמו שהכנסנו בסעיף הקודם בין החיתוכים גם את "החיתוכים הרציונליים" המתאימים למספרים הרציונליים עצמם, כך גם כאן תוכל סדרה יסודית, או שתי סדרות יסודיות, לשמש להגדרת מספר רציונלי. לכן עדיף להשתמש בשם משותף בשביל המספרים הרציונליים והאירציונליים גם יחד, והשם הנידון הוא מ ס פ ר מ מ ש י. (שם זה מדגיש את הניגוד לשם "מספר דמיוני" שעליו נדבר בתחלת הפרק הבא.)

ה ג ד ר ה י ס ו ד י ת: זוג של שתי סדרות, שאיבריהן הם מספרים רציונליים $a_n, \bar{a}_n$ [2]:

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n, \dots \end{pmatrix}$$

ייקרא ס מ ל מ מ ש י, אם מתמלאים התנאים הבאים:

ראשית: הסדרה שלמעלה היא "סדרה עולה", ז"א שקיימים היחסים:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \dots$$

שנית: הסדרה שלמטה היא "סדרה יורדת", ז"א שקיימים היחסים:

$$\bar{a}_1 \geqq \bar{a}_2 \geqq \bar{a}_3 \geqq \dots$$

שלישית: כל איבר של הסדרה העולה אינו גדול מן האיבר המתאים של הסדרה היורדת, ז"א שקיים בשביל כל ציון n: $\bar{a}_n \leqq a_n$.

רביעית: איברי הסדרה העולה ואיברי הסדרה היורדת הולכים ומתקרבים אלה לאלה; או ביתר דיוק: לגבי כל מספר רציונלי חיובי ε, יהי זה קטן כפי

1. השואה מעניינת בין השיטות נתן קנטור בעצמו; ראה
G. CANTOR: Gesammelte Abhandlungen (Berlin 1932), p. 183—190.
ועיין גם: E. V. HUNTINGTON: The continuum and other types of serial order. 2nd ed. Cambridge Mass. 1917.
את הצורה המיוחדת של תיאור המספרים האירציונליים שבה נשתמש כאן, הכניס בכמן בספרו:
P. BACHMANN: Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig 1892.
בפרוטרום תיאר אותה לוי בספרו:
A. LOEWY: Lehrbuch der Algebra. 1. Teil. Leipzig 1915.

2. את הקו שמעל לאות מבטאים "גג", ז"א $\bar{a}_1$ מתבטא: a-אחת-גג.

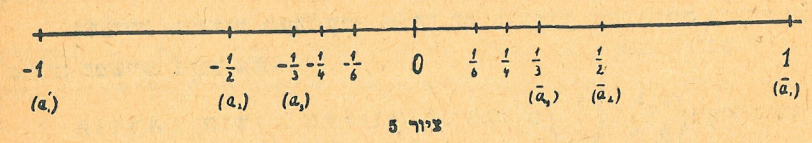
רצוננו, ישנו ציון n כך שקיים $\bar{a}_n - a_n < \varepsilon$ (ועל אחת כמה וכמה $\bar{a}_m - a_m < \varepsilon$ אם $m > n$).

לשם קיצור נסמן את הסמל הממשי הנ"ל ע"י $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$.

ה ע ר ה: הביטויים "סדרה עולה", "סדרה יורדת", "מתקרבים אלה לאלה" מתכוונים למקרה השכיח, שאין דוקא שויון בין המספרים הנידונים. ואולם שויון כזה יוכל להתקיים במדה רחבה מאד; נוכל למצוא אף את המקרה הקיצוני שבו כל איברי שתי הסדרות שווים ביניהם; הוא המקרה של הסמל הממשי $\begin{pmatrix} r, r, r, \dots \\ r, r, r, \dots \end{pmatrix}$.

כל זוג־סדרות מסוג זה ייקרא: ס מ ל מ מ ש י ר צ י ו נ ל י.

ארבעת התנאים שבהגדרה היסודית מתבארים בצורה הסתכלותית, אם נתאר את שתי הסדרות של מספרים רציונליים בקו־המספרים (עיין בציור 5). נקח לשם זה את הסמל הממשי המופיע לקמן כדוגמה 2) בעמ' 128:



ציור 5

נקודות הסדרה העולה עוקבות זו לזו משמאל ימינה, נקודות הסדרה היורדת מימין שמאלה. כל נקודה מתוך הסדרה העולה נשארת משמאל לנקודה המתאימה של הסדרה היורדת (ואף כל נקודות הסדרה העולה נשארות משמאל כל נקודות הסדרה היורדת). נקודות הסדרה העולה והסדרה היורדת הולכות ומתקרבות אלה לאלה; נוכל לקבל נקודות של שתיהן הקרובות זו לזו כפי רצוננו, אם רק נתקדם במדה מספיקה בשתי הסדרות. (הנקודה 0 אינה שייכת לסדרות אלו, והיא מסומנת בציור רק לשם נוחיות ההבנה.) — בדוגמה זו שונות ביניהן כל הנקודות a_n ו$\bar{a}_n$; קל לראות איך ישתנה המצב אם אחדות מהן, או אפילו מספר אינסופי של נקודות, תתלכדנה.

נעיר דרך אגב, שבדרך זו מגדיר רֶסֶל את המושג הפיסיקלי של ה ר ג ע (מומנט) [2]; במקום הנקודות יש כאן מאורעות (קורות), ובמקום היחס "משמאל ל־" היחס: המאורע M קודם (לגמרי) למאורע N.

הבה נסתכל בדוגמות של סמלים ממשיים!

1) $\begin{pmatrix} 0, 0.3, 0.33, 0.333, \dots \\ 1, 0.4, 0.34, 0.334, \dots \end{pmatrix}$

1. יש לזכור שבהגדרת הסדרה לא דרשנו שמספרים, המופיעים במקומות שונים בסדרה, יהיו שונים זה מזה. לכן יוכל להיות $a_m = a_n$, אעפ"י ש$n \neq m$.

2. השוה:
B. RUSSELL: Our knowledge of the external world. 2nd ed. London 1926. — On order in time. *Proceed. of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 32 (1936), p. 216—228.

אם, למשל, נתון לנו $\varepsilon = 10^{-6}$, היינו $\frac{1}{1\,000\,000}$, אז החל מן האיבר השמיני שבכל סדרה משתי סדרות אלו יהיה תמיד ההפרש בין איבר של הסדרה היורדת והאיבר המתאים של הסדרה העולה קטן מ ε.

2) $$\begin{pmatrix} -1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \dots \\ +1, & +\frac{1}{2}, & +\frac{1}{3}, & +\frac{1}{4}, & \dots \end{pmatrix}$$

ההפרש בין האיבר הnי של הסדרה היורדת ובין האיבר הnי של הסדרה העולה בדוגמה זו שווה ל $\frac{2}{n}$, והלוא ההפרשים האלה הולכים ויורדים לקראת 0 כש n הולך וגדל. מתמלא אפוא גם התנאי הרביעי.

3) $$\begin{pmatrix} 3, & 3{,}1, & 3{,}14, & 3{,}141, & 3{,}1415, & 3{,}14159, & \dots \\ 4, & 3{,}2, & 3{,}15, & 3{,}142, & 3{,}1416, & 3{,}14160, & \dots \end{pmatrix}$$

לדוגמה זו יֵשׁוה הקורא מה שנאמר להלן בדוגמה 4) של הסעיף הבא (§ 4).

ההגדרה היסודית תקבל ערך ממשי רק כשנקבע, מתי שווים ביניהם שני סמלים ממשיים. נקבע אפוא:

הגדרה I (הגדרת השויון): שני הסמלים $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$ נקראים שווים אם, ורק אם, קיימים כל היחסים $a_n \leqq \bar{b}_n$ וגם $b_n \leqq \bar{a}_n$, כנגד כל הערכים $n = 1, 2, 3, \dots$. (סימן השויון בין הסמלים הוא =, וכן תמיד.)

דוגמה: נקח כ $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ את הסמל הממשי המוגדר לעיל בדוגמה 2), וכ $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$ את הסמל הממשי הרציונלי $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots \end{pmatrix}$. במקרה זה קיימים היחסים הנידונים, כאשר יאשר הקורא מיד; שני הסמלים שווים אפוא זה לזה.

הגדרה II (הגדרת החיבור): אם נתונים הסמלים הממשיים $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$, ייקרא בשם הסכום $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ הסמל הממשי $\begin{pmatrix} c_n \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}$, שבו $c_n = a_n + b_n$ ו $\bar{c}_n = \bar{a}_n + \bar{b}_n$.

הגדרה III (הגדרת הכפל): יהיו נתונים הסמלים הממשיים $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$, כך שכל המספרים a_n ו b_n (ולא כל שכן המספרים $\bar{a}_n$ ו $\bar{b}_n$) יהיו חיוביים; אז ייקרא בשם המכפלה $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ הסמל הממשי $\begin{pmatrix} c_n \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}$, שבו $c_n = a_n \cdot b_n$ ו $\bar{c}_n = \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n$.

ההגדרות האלה, לפחות השניה והשלישית, נראות פשוטות מאד, כמעט מובנות מאליהן. ואולם כדי להצדיקן באמת, עלינו לעורר כמה שאלות. ראשית, יש להראות שהשויון המוגדר בו הוא שויון במובן המתימטי הכללי (עיין בעמוד 72).

שנית, אם דברנו בהגדרות II ו III על הסמלים $\begin{pmatrix} a_n + b_n \\ \bar{a}_n + \bar{b}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} a_n \cdot b_n \\ \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n \end{pmatrix}$, הרי נחוץ להוכיח שאלה הם באמת סמלים ממשיים; היינו שהסדרות, העולה והיורדת, ממלאות בכל אחד משני המקרים את ארבעת תנאיה של ההגדרה היסודית. שלישית, עלינו להוכיח: בהכניסנו לשם יצירת הסכום (או המכפלה), במקום המחוברים (הגורמים), מחוברים (גורמים) אחרים השווים בהתאם למקוריים על פי ההגדרה I, נקבל גם סכום (מכפלה) השווה לסכום המקורי (למכפלה המקורית). רביעית, עלינו לבדוק אם ההגדרה III, אף־על־פי שהיא מסתמכת על התנאי שכל איברי הסדרות הם חיוביים, מאפשרת בכל זאת ליצור מכפלות של כ ל שני מספרים ממשיים—או אם היא טעונה השלמה לשם זה.

ההוכחות לגבי שלוש הבעיות הראשונות נמצאות במלואים. מה שנוגע לבעיה הרביעית, נוכיח קודם כל:

משפט 1: אם בסמל הממשי $\alpha = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & a_{n+1}, & \dots \\ \bar{a}_1, & \bar{a}_2, & \bar{a}_3, & \dots, & \bar{a}_n, & \bar{a}_{n+1}, & \dots \end{pmatrix}$, שבו מסמן n מספר טבעי כלשהו, נמחק את n המספרים הראשונים בשורה העולה, וכן בשורה היורדת, אז הסמל הממשי החדש $\alpha' = \begin{pmatrix} a_{n+1}, & a_{n+2}, & \dots \\ \bar{a}_{n+1}, & \bar{a}_{n+2}, & \dots \end{pmatrix}$ שווה ל α. כנגד כל m ו n קיים $a_m < a_n$.

הוכחה: קודם כל ברור שהסמל α' המוגדר כאן הוא באמת סמל ממשי לפי ההגדרה היסודית (עמ' 126). יהי עתה k מספר טבעי כלשהו; לפי ההגדרה I עלינו להוכיח שקיימים אי־השויונות $a_k \leqq \bar{a}_{n+k}$ ו $a_{n+k} \leqq \bar{a}_k$. באמת קיים לפי התנאי הראשון לגבי α (עיין בהגדרה היסודית) $a_k \leqq a_{n+k}$, ולפי התנאי השלישי $a_{n+k} \leqq \bar{a}_{n+k}$. שני יחסים אלו גוררים $a_k \leqq \bar{a}_{n+k}$. באופן דומה יש להוכיח את אי־השויון השני, וגם $a_m \leqq \bar{a}_n$ לגבי כל m ו n.

משפט 2: אם בסמל הממשי $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ לא יימצא בין איברי הסדרה העולה (a_n) כל מספר חיובי, ולא יימצא בין איברי הסדרה היורדת $(\bar{a}_n)$ כל מספר שלילי, ישווה הסמל $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ לסמל הממשי הרציונלי $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots \end{pmatrix}$.

דוגמה למשפט זה נתַנו כבר לעיל בעמ' 128.

הוכחה: לפי הגדרת השויון טוען המשפט, כי $0 \leqq a_n$ ו $\bar{a}_n \leqq 0$ בשביל כל n. והרי יחסים אלו הנם רק ניסוח אחר להנחת המשפט.

על סמך שני המשפטים הקודמים נוכל למיין את הסמלים לסמלים „חיוביים", „שליליים" ול„סמל־האפס", כדלקמן.

על פי שיטה הגיונית פשוטה, הנקראת בתורת ההגיון בשם הפרדה (דיסיונקציה[1]) שלימה, אפשר לחלק את כל האפשרויות לגבי סימניהם

1. disiunctio

(+ או− או 0) של המספרים הרציונליים בשתי הסדרות המגדירות סמל ממשי, לשלושת המקרים הבאים:

א) בסדרה העולה נמצא לפחות מספר חיובי אחד.

ב) בסדרה היורדת נמצא לפחות מספר שלילי אחד.

ג) איברי הסדרה העולה כולם שליליים או שווים ל0, ויחד עם זה איברי הסדרה היורדת כולם חיוביים או שווים ל0.

לשם ביאור נציין: אם בסדרה העולה נמצא פעם מספר חיובי, הרי נופק לפי שלוש התכונות הראשונות שבהגדרה היסודית, כי כל האיברים העוקבים של הסדרה העולה חיוביים גם הם, וכן כל איברי הסדרה היורדת. מאידך: אם בסדרה היורדת מופיע איבר שלילי, אז כל האיברים העוקבים של אותה הסדרה וכל איברי הסדרה העולה שליליים גם הם. לעומת זאת, אם לא יקרה אחד מן המקרים א) או ב), נשארת רק האפשרות, שבסדרה העולה לא יימצא איבר חיובי, ובסדרה היורדת לא יימצא איבר שלילי; זהו המקרה ג).

נבדוק את שלושת המקרים הנ"ל! במקרה א) נוכל, בהתאם למשפט 1, להוציא מן הסדרה העולה את האיברים הקודמים לאיבר החיובי הראשון שבסדרה, היינו את כל האיברים השליליים והשווים ל0; יחד עם זה נוציא את בני־זוגם בסדרה היורדת. שתי הסדרות תכילנה אפוא אך מספרים חיוביים. הסמל הממשי המוגדר ע"י שתי סדרות אלו שווה לסמל הממשי שיצאנו ממנו (משפט 1), וטבעי הדבר לכנות כל סמל ממשי כזה בשם „סמל ממשי חיובי". הגדרה זו גוררת שכל סמל ממשי, השווה לסמל חיובי, חיובי גם הוא. באופן דומה ישווה כל סמל מן הסוג ב) לסמל ממשי, ששתי הסדרות הקובעות אותו מכילות רק מספרים שליליים, וכל סמל כזה ייקרא „סמל שלילי". לבסוף, המקרה ג) הוברר ע"י המשפט 2, שעל פיו יש לכנות כל סמל מן הסוג ג) „שווה לאפס", מכיון שהוא שווה לסמל הממשי הרציונלי 0 (ז"א שכל איבריו 0). אם נגדיר כפי האמור כאן, נקבל:

משפט 3: כל סמל ממשי הוא או חיובי, או שלילי, או שווה לאפס.

תכונות אלו אינן משתנות אם נעבור מן הסמל הנידון לסמל אחר השווה לו.

לבסוף נעשה עתה את הצעד, המעביר אותנו מן הסמלים הממשיים למספרים הממשיים בעצמם. על פי הגדרת השויון אפשר לבנות בכמה דרכים שני סמלים ממשיים השווים ביניהם (עיין, למשל, במשפט 1). לפי זה יש ליצור מחלקה של סמלים ממשיים, כך שכל שני סמלים של המחלקה שווים זה לזה. אף־על־פי־כן יכולים שני סמלים מאותה מחלקה להיות שונים מאד בביטוים החיצוני, כאשר מראות הדוגמות הנ"ל. משום כך לא נתנו עד הנה לסמלים הממשיים את תואר־הכבוד של „מספר"; הרי לא נוח הדבר שיהיו קיימים מספרים שונים כל כך בצורתם ובכל זאת שווים ביניהם. לכן נחזיק עתה בשיטה שהשתמשנו בה כבר פעמים אחדות בפרק הרביעי (השוה עמ' 74, 78): נקרא בשם „מספר"

לא לסמלים עצמם, אלא למחלקות של סמלים ממשיים, המכילות את כל הסמלים השווים ביניהם. נקבע אפוא:

הגדרת המספר הממשי: כל מחלקה המכילה, מלבד סמל ממשי מסוים, את כל הסמלים הממשיים השווים לו ורק אותם, תיקרא **מספר ממשי**. שני מספרים ממשיים נקראים שווים אם, ורק אם, המחלקות המתאימות מתלכדות. מספר ממשי נקבע אפוא ע"י סמל ממשי כלשהו הנמצא במחלקה. אם המחלקה מכילה סמל ממשי רציונלי, תיקרא בשם **מספר ממשי רציונלי**. — לפי זה מתאים לכל מספר רציונלי רגיל מספר ממשי (רציונלי) אחד ויחיד.

בהתאם להגדרה זו ולמשפט 3 יש להגדיר את המושגים „חיובי" ו„שלילי" כך, שכל מספר ממשי הוא או חיובי או שלילי או „שווה לאפס"; במקרה האחרון מכילה המחלקה את הסמל $\begin{pmatrix}0,0,0,\dots\\0,0,0,\dots\end{pmatrix}$ ואת השווים לו, ותסומן לשם קיצור גם היא ב0.

החיבור והכפל בין מספרים ממשיים יוצא אל הפועל לפי הגדרותיהן של פעולות אלו בין סמלים ממשיים. בפרט קיים השויון הבא, שבו מסמנים r וs מספרים רציונליים:

$$\begin{pmatrix}r,r,r,\dots\\r,r,r,\dots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s,s,s,\dots\\s,s,s,\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r+s,r+s,r+s,\dots\\r+s,r+s,r+s,\dots\end{pmatrix}.$$

זה מראה כי סכומם של המספרים הממשיים הרציונליים, המתאימים למספרים הרציונליים r וs, הוא המספר הממשי הרציונלי, המתאים למספר הרציונלי $r+s$. מצב שווה לזה קיים לגבי הכפל (השוה להלן). לכן נוכל לומר, בהשתמשנו במושג האיסומורפיות שהוגדר בפרק הקודם (עמ' 114):

קיימת התאמה חד־חד־ערכית, האיסומורפית לגבי החיבור והכפל, בין המספרים הרציונליים הרגילים ובין המספרים הממשיים הרציונליים.

לפיכך נוכל לראות את מערכת כל המספרים הממשיים כהרחבה של מערכת המספרים הרציונליים, באותו המובן שבו ראינו, למשל, בפרק הרביעי (עמ' 74 ו78) את מערכת המספרים הרציונליים (החיוביים) ואת מערכת המספרים השלמים כהרחבות של מערכת המספרים הטבעיים. מערכת כל המספרים הממשיים מכילה בתוכה מערכת חלקית — היינו, מערכת המספרים הממשיים הרציונליים — האיסומורפית למערכת המספרים הרציונליים.

תפקיד אחד עוד מוטל עלינו, והוא: למלא את החסרון שבהגדרת הכפל (הגדרה III בעמ' 128); היינו, להרחיב אותה כך שתקיף את כל המקרים ולא את המקרה המיוחד המסומן שם בלבדו. על פי מה שהגדרנו ולמדנו בינתים (בייחוד במשפט 1) נוכל לומר: על סמך ההגדרה III מוגדרת מכפלת שני מספרים ממשיים,

אם שניהם חיוביים. כדי להקיף גם את שאר המקרים, נציין קודם כל שכנגד כל מספר ממשי A ישנו מספר ממשי ה„נגדי" ל A, אשר יסומן ב $-A$, כך שקיים: $A+(-A)=0$ (השוה עמ' 85 ו 108). באמת קיים תמיד השויון:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\bar{a}_n \\ -a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,0,0,\ldots \\ 0,0,0,\ldots \end{pmatrix},$$

כאשר נוכיח במלואים. ובכן, נשלים עתה את ההגדרה III ע"י ההגדרות הבאות, שבהן מסמנים A ו B מספרים ממשים חיוביים, ושעל ידיהן תוגדר פעולת הכפל בין כל שני מספרים ממשיים:

$$A\cdot 0-0\cdot A=0\cdot 0=0,\ A\cdot(-B)=(-A)\cdot B=-(A\cdot B),\ (-A)\cdot(-B)=A\cdot B.$$

הקורא הזכור עוד מה שאמרנו בפרק הקודם (עמ' 108/9) על פעולת הכפל בתוך חוג או שדה, מבין שלא בדינו מלבנו את ההגדרות הקודמות; כיוצא בהן יש להגדיר בכל שדה, ובאמת הגדרנו כאן מתוך הכיונה, שמערכת המספרים הממשיים תהיה שדה לגבי החיבור והכפל.

לא יקשה עתה על הקורא להוכיח שמערכת המספרים הממשיים מהווה באמת שדה לגבי הפעולות שהגדרנון. קיומם של החוקים האסוציאטיביים, הקומוטטיביים והדיסטריבוטיביים כמעט מובן מאליו. נשאר בעיקר להראות שלמשוואה $A+X=B$ יש פתרון ממשי אחד ויחיד X, שנסמנו ב $B-A$, והשווה ל $B+(-A)$; ושכן המצב לגבי המשוואה $A\cdot X=B$, אם $A\neq 0$. (את פתרון המשוואה הזאת נסמן, כרגיל, ב $\frac{B}{A}$ או ב $B\cdot A^{-1}$.) ההוכחות לכך נמצאות במלואים.

נקבע את הסדר בין מספרים ממשיים ע"י הגדרת הסדר:

A קטן מ B ($A<B$) אם, ורק אם, $B-A$ הוא מספר ממשי חיובי.

קל לראות שסדר זה בין המספרים הממשיים ממלא, גם בקשר עם החיבור והכפל, את היחסים שבשדה המספרים הרציונליים (עמ' 133). בפרט קל להוכיח: אם יקבע $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ את המספר הממשי A, ואם נסמן לשם נוחיות ב a_n ו $\bar{a}_n$ גם את המספרים הממשיים (הרציונליים) המתאימים למספרים הרציונליים a_n ו $\bar{a}_n$, אז קיימים בשביל כל ערכי n היחסים האפייניים: $a_n\leq A\leq\bar{a}_n$ מאידך: אם B הוא מספר ממשי הממלא את אי־השוויונות $a_n\leq A\leq\bar{a}_n$ קיים $B=A$.

נציין עוד שבין כל שני מספרים ממשיים שונים נמצא תמיד מספר רציונלי שאפשר להגדירו באופן מסויים לגמרי (ואפילו נמצאים ביניהם אינסוף מספרים רציונליים). הוכחה נוחה ביותר לעובדה זו נקבל בסעיף הבא. ואולם גם כאן ימצא הקורא בנקל הוכחה, אם יסביר לעצמו שבמקרה $A<B$

— ורק במקרה זה — קיים היחס הבא, שבו $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$ הם סמלים הקובעים את המספרים A ו B: בסדרה היורדת ($\bar{a}_n$) יש איבר, הקטן מאיבר ידוע של הסדרה העולה (b_n).

בהתאמה גמורה לתכונות הסדר, המקשרות יחס זה עם החיבור והכפל אצל המספרים הרציונליים (השוה בעמ' 88), ממלא גם היחס $<$ המוגדר בעמ' 132 את התכונות הבאות:

א) היחס הוא קוניקטיבי (קשיר), אי־רפלֶקסיבי, אַסימטרי; כלומר, בין שני מספרים ממשיים A, B קיים אחד ורק אחד מן היחסים
$A<B,\ A=B,\ A>B$ (זהו ביטוי אחר ל $B<A$)

ב) היחס הוא טרנסיטיבי; כלומר, היחסים $A<B$ ו $B<C$ גוררים אחריהם $A<C$.

ג) מ־$B<C$ נובע $A+B<A+C$.

ד) אם A ו־B חיוביים, גם $A\cdot B$ חיובי. לפיכך, אם A חיובי ואם קיים $B<C$, קיים $A\cdot B<A\cdot C$ (חוקי „מונוטוניה".)

ה) קיים החוק של ארכימידס (השוה בעמ' 169) הקובע: אם A ו־B שניהם חיוביים ו־$A<B$, הרי נמצא בין „הכפולות" של A:

$A+A=2A,\ (A+A)+A=3A,\ \ldots,\ nA,\ \ldots$ (n מספר טבעי).

אחת — ולכן אינסוף כפולות — שהיא גדולה מ־B. לשון אחר: מבין שני מספרים ממשיים (חיוביים) לא יוכל להיות אחד „גדול לאינסוף" או „קטן לאינסוף" בהשוואה לשני.

תחום המספרים הממשיים הוא המקיף ביותר (במסגרת הספר הזה) שבו קיים החוק של ארכימידס.

לפני גמרנו סעיף זה, עלינו לטפל בבעיה עקרונית חשובה. הגענו מן המספרים הרציונליים אל המספרים הממשיים, ביצרנו לפי שיטה מסויימת סדרות אינסופיות של מספרים רציונליים. טבעי אפוא לעורר את השאלה, לאיזו תוצאה נגיע אם נשתמש באותה השיטה לגבי מספרים ממשיים; היינו אם ניצור סמלים $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$ שבהם מסמנים A_n ו $\bar{A}_n$ מספרים ממשיים, בעלי התכונות שנקבעו (לגבי מספרים רציונליים) בהגדרה היסודית (עמ' 126). היה אפשר לחשוב שע"י כך יתקבל סוג חדש של מספרים, אשר יהווה הרחבת המושג של המספר הממשי; ואולי נגיע ע"י המשך התהליך הזה לידי שורה אינסופית של מספרים כלליים יותר ויותר, כך שלא יהיה סוף לתהליך של הרחבת

מושג המספר. נוכיח עתה שאין הדבר כך; על ידי הישנות השיטה שאחזנו בה בסעיף זה, נקבל מספרים המתלכדים במובן מתימטי (אם גם לא במובן הגיוני) עם המספרים הממשיים שכבר הגענו אליהם.

דרך אגב: מצב דומה לגמרי קיים לגבי השיטה המכניסה את המספרים הממשיים כחיתוכים בתוך מערכת המספרים הרציונליים (עיין בסעיף הקודם). גם שם נקבל על ידי הישנות השיטה מספרים שבעיקר אינם חדשים.

כדי להוציא לפועל את ההוכחה הנידונה, שחשיבותה העקרונית בולטת[1], נזכור את הגדרת השויון (הגדרה I בעמ' 128). אשר במקרה זה עלינו לנסחה כך: אם יהיו $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} B_n \\ \bar{B}_n \end{pmatrix}$ סמלים המוגדרים ע"י סדרות של מספרים ממשיים, כפי ההגדרה היסודית, אז קיים $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n \\ \bar{B}_n \end{pmatrix}$ אם ורק אם, לגבי כל n טבעי מתמלאים היחסים $A_n \leqq \bar{B}_n$, $B_n \leqq \bar{A}_n$. להגדרה זו ישאר מובן גם במקרה שבאחד הסמלים מורכבות שתי הסדרות ממספרים רציונליים, היינו שאחד הסמלים הוא סמל ממשי במובן שהגדרנוהו בעמ' 126; הלא במקרה זה נוכל להחליף כל מספר רציונלי במספר „הממשי הרציונלי" המתאים לו על פי מה שלמדנו לעיל. נוכיח אפוא:

משפט יסודי: כל סמל $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$, המוגדר ע"י סדרות של מספרים ממשיים, שווה לסמל מסוים אשר בשתי הסדרות הקובעות אותו מופיעים רק מספרים (ממשיים) רציונליים.

כדי להוכיח משפט זה נצטמצם, לשם פשטות, למקרה שבו כל המספרים הממשיים A_n ו $\bar{A}_n$ שונים ביניהם[2]. הואיל וקיים $A_n < A_{n+1}$, ישנו (עיין בעמ' 132) מספר רציונלי r_n שלגביו קיים $A_n < r_n < A_{n+1}$. כמו כן גורר היחס $\bar{A}_n > \bar{A}_{n+1}$ שקיים מספר רציונלי $\bar{r}_n$ כך ש $\bar{A}_n > \bar{r}_n > \bar{A}_{n+1}$. קבלנו אפוא היחסים:

$$A_1 < r_1 < A_2 < r_2 < A_3 < r_3 < \cdots , \quad \bar{A}_1 > \bar{r}_1 > \bar{A}_2 > \bar{r}_2 > \bar{A}_3 > \bar{r}_3 > \cdots ,$$

המראים ש (r_n) סדרה עולה ו $(\bar{r}_n)$ סדרה יורדת. קל לראות (עיין בהוכחה שבמלואים) שהסדרות (r_n) ו $(\bar{r}_n)$ מקיימות גם את התנאי השלישי והרביעי שבהגדרה היסודית.

1. משום כך נערכנה כאן ולא במלואים, עם היותה קשה במקצת.

2. אם אינם שונים אפשר למצוא סמל $\begin{pmatrix} B_n \\ \bar{B}_n \end{pmatrix}$ השווה ל $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$ ושבוכל ה B_n ו $\bar{B}_n$ שונים.
לשם הוכחה יש להבליט את המקרה בו יש רק מספר סופי של ערכים שונים.

לכן קובע הסמל $\begin{pmatrix} r_n \\ \bar{r}_n \end{pmatrix}$ מספר ממשי במובן שהוגדר בעמ' 126. נוכיח עתה שקיים: $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ \bar{r}_n \end{pmatrix}$[1].

על פי הגדרת המספרים r_n קיימים היחסים $A_n < r_n$ לכל ערך של n; הואיל ו $\begin{pmatrix} r_n \\ \bar{r}_n \end{pmatrix}$ מספר ממשי, קיימים על פי התנאי השלישי של ההגדרה היסודית היחסים $r_n < \bar{r}_n$; אם נצרף שני אי־שויונות אלו, נקבל $A_n < \bar{r}_n$. כמו כן גוררים היחסים $r_n < \bar{r}_n$ ו $\bar{r}_n < \bar{A}_n$ (עיין לעיל) את היחסים $r_n < \bar{A}_n$. והנה שתי המערכות של יחסים $r_n < \bar{A}_n$ ו $A_n < \bar{r}_n$ יחד קובעות על פי הגדרת השויון, שהובאה לעיל: $\begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ \bar{r}_n \end{pmatrix}$, מש"ל.

אושרה אפוא טענתנו, ששיטת ההרחבה שהשתמשנו בה בסעיף זה, מועילה למעשה רק פעם אחת ולא יותר.

§4. שברים עשרוניים, ושברים שיטתיים בדרך כלל[2].

כל אחד מן הקוראים התוודע בודאי, בלמדו בבית הספר, אל השברים העשרוניים, ולא עוד אלא זו היתה הצורה העיקרית שבה הופיעו נגד עיניו המספרים הממשיים, שהכנסנום כאן בצורות אחרות. ובכל זאת דומני, שרוב הקוראים לא יוכלו לענות תשובה ברורה, אם ישאלום: מה הם השברים העשרוניים?

נציג לפנינו שבר עשרוני ונניח לשם פשטות שהוא חיובי: $A, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$. סימון זה בא, כידוע, לקצר את הביטוי:

$$A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots ,$$

שבו A מספר טבעי או 0, וכל אחד מן המונים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ יכול לקבל רק ערך־ספרה, היינו ערך מתוך המערכת $0, 1, 2, \ldots, 9$. הקורא עומד אולי לטעון:

1. כאמור לעיל, עלינו לראות את האיברים r_n ו $\bar{r}_n$ שבשויון הזה כמספרים ממשיים רציונליים. לכן, אם כי השויון שלפנינו מציין את התלכדותם של שני הסמלים הנ"ל לגבי גדלם במערכת המספרים הממשיים, אף־על־פי־כן יש הבדל הגיוני, בקשר עם עצם המושגים, בין סמלים או מספרים הנקבעים ע"י סדרות של מספרים רציונליים, ובין אלה הנקבעים ע"י סדרות של מספרים ממשיים (לרבות מספרים ממשיים רציונליים). את האחרונים נוכל לכנות „מספרים ממשיים מן הדרגה השניה". כמו כן יש הבדל הגיוני בין מספרים אלו מן הדרגה השניה ובין מספרים הנקבעים ע"י סדרות של מספרים ממשיים מן הדרגה השניה, וכו'. ההבדל ההגיוני הזה, שרמז עליו כבר קנטור בהזדמנות מסוימת, ושנוהגים לשכוח אותו, גורם לקשיים ידועים בביסוס ההגיוני של האנליזה — קשיים שאינם בתוך האריתמטיקה.

2. על הסעיף הזה אפשר לדלג.

„הרי יש לך הגדרת מובנו של שבר עשרוני! כי הלוא עומד לפנינו טור אינסופי מאותו הסוג של טורים הנקראים «מתכנסים», היינו שיש להם סכום סופי קבוע (עיין בפרק י"א; ואף במלואים לחלק הראשון, עמ' 59); סכומו של טור זה הוא המספר המיוצג ע"י השבר העשרוני." נניח שידענו כבר בדיוק מהו „טור אינסופי מתכנס"; או היה אפשר לקבל את התירוץ הזה, ואמנם רק אילו היה ידוע לנו מקודם מהו מספר ממשי בדרך כלל. רק על־סמך ידיעה זו נוכל להוכיח שהטור הנ"ל מתכנס אל מספר ממשי מסויים (הוא „סכום הטור"), ואת המספר הממשי ההוא נתאר גם ע"י השבר העשרוני הנידון, ואולם בלימודי בית הספר אין עושים כך, ואולי אין יכולים לעשות כך, מפני שהמושג הכללי של המספר הממשי הנהו מסובך ומופשט מדי, ולא היה עולה בידי רוב התלמידים לעכל את המושג הזה לו נתחוהו לפניהם. ובכן איך מכניסים למעשה את השבר העשרוני, כרגיל? ע"י כך שמסבירים בהצלחת־מה שהטור, שאליו רומז השבר העשרוני, שואף לגודל סופי מסוים, ואותו גודל — שהוא מספר ממשי — מגדירים על ידי השבר העשרוני. משתמשים אפוא בשיטה „מעגלית" אפיינית; הלוא כדי להסביר (או להוכיח) שהטור שואף למספר ממשי מסויים, עלינו לדעת מקודם מהו המספר הממשי! סוף דבר: יש צורך שתהיה בידנו מראש הגדרת המספר הממשי, ז"א שהגדרה זו תיוצר ע"י הטור הנידון.

אפשר באמת, כמו שעשה ויירשטרס, להגדיר את המספרים הממשיים ע"י טורים של מספרים רציונליים, אבל רק ע"י טורים (סכומים) סופיים, המהווים מספרים רציונליים לפי החיבור הרגיל. ביתר דיוק: על ידי סדרות של טורים סופיים. בעבור נוחיות הקורא לא נלך בדרכי וירשטרס, אלא נכניס את השברים העשרוניים לפי שיטה המהווה מקרה פרוט — ודוקא מקרה פשוט מאד — של השיטה שבה הגדרנו ב§ 3 את המספרים הממשיים. הרעיון העיקרי של השיטה הבאה הוא זה, שלא נדבק במשמעות הרגילה של השברים העשרוניים (כטורים או סכומים אינסופיים), ולא „נוכיח" אפוא שהם מציגים מספרים ממשיים; להיפך: בשבילנו יהיה שבר עשרוני סימון מקוצר לסדרות ידועות של מספרים רציונליים, וסדרות אלו קובעות את המספר הממשי שהשבר העשרוני בא להגדירו. לכן לא יהיה לנו כאן כל צורך במושג של „טור אינסופי".

הגדרת השבר העשרוני: יהיה נתון לנו „השבר העשרוני החיובי" $A, a_1a_2a_3\dots a_n\dots$, שבו מסמן A מספר שלם לא־שלילי, ואילו $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ יש ערכים מתוך הסדרה $(0, 1, 2, \dots, 9)$. ניצור את שתי הסדרות האינסופיות של מספרים רציונליים:

$$A,\ A+\frac{a_1}{10},\ A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100},\ \dots,\ A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\dots+\frac{a_n}{10^n},\ \dots,$$

$$A+1,\ A+\frac{a_1+1}{10},\ A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{100},\ \dots,\ A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\dots+\frac{a_n+1}{10^n},\ \dots,$$

1. C. Weierstrass — שיטתו של Ch. Méray דומה יותר לזו של קנטור.

סדרות הממלאות את כל תנאי ההגדרה היסודית שבראשית הסעיף הקודם (עמ' 126). הגדרתנו תהיה: השבר העשרוני הנתון קובע את המספר הממשי, המוגדר לפי הסעיף הקודם ע"י שתי הסדרות הנ"ל.

השבר העשרוני השלילי: $-A, a_1a_2\dots a_n\dots$ קובע את המספר הנגדי למספר הממשי $A, a_1a_2\dots a_n\dots$; סכום שני מספרים ממשיים אלו שווה אפוא ל 0.

הקורא ימצא בלי כל קושי, שבאמת מקיימות הסדרות המוגדרות לעיל את כל ארבעת התנאים של ההגדרה היסודית. מה שנוגע לתנאי הרביעי, הריהו מתמלא מפני שההפרש בין האיבר הn' שבסדרה היורדת ובין האיבר הn' שבסדרה העולה שוה ל $\frac{1}{10^n-1}$; והלוא השבר הזה יקטן מכל ערך חיובי נתון, אם נגדיל במידה מספיקה את המספר הטבעי n.

השויון, החיבור והכפל בין שברים עשרוניים — וכמו כן החיסור, החילוק והסדר ביניהם — מוגדרים מאליהם לפי ההגדרות וההוכחות שבסעיף הקודם.

מובן שהיינו יכולים להכניס מראש את השברים העשרוניים במספרים ממשיים, מבלי הסתמך על הרעיונות שבסעיף הקודם, ע"י עצם ההגדרות הנמצאות שם — רק בצורה פרוטה יותר, בהתאם לתכונות המיוחדות של הסדרות אשר הוכנסו בהגדרה שלפנינו.

נתן דוגמות אחדות וננתח, בקשר אתן, תכונות שונות של השברים העשרוניים!

1) המספר 1 נכתב כשבר עשרוני בצורת $1,000\dots$. לפי הגדרתנו מתאים לו זוג־הסדרות הבא:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1, & \dots \\ 2, & 1.1, & 1.01, & \dots, & 1.0\dots01, & \dots \end{pmatrix}.$$

ל $1,000\dots$, וכמו כן לכל שבר עשרוני שבו מופיעה, החל ממקום ידוע, אך ורק הספרה 0, קוראים בשם שבר עשרוני סופי. המלה „סופי" אינה באה, כמובן, להדגיש שיש לפנינו מספר סופי; כי הלוא כל מספר ממשי ולכן כל שבר עשרוני הוא מספר סופי. מדובר רק על הסופיות שבכתיב השבר העשרוני, היינו: שנוכל לכתוב אותו ע"י מספר סופי של ספרות, בוותרנו על כתיבת הספרות 0 אחרי הספרה האחרונה השונה מ 0. כך, למשל, 0.5 או 0.25 הם שברים עשרוניים סופיים.

לעומת זאת מכנים שבר עשרוני אינסופי כל שבר עשרוני שאיננו מן הסוג הנ"ל, היינו כל שבר עשרוני שלשם כתיבתו זקוקים אנו לאינסוף ספרות (הואיל ואחרי כל ספרה תבאנה עוד ספרות שונות מ 0). מובן מאליו שאין לאל ידנו לכתוב או לבטא אינסוף ספרות; אנו אומרים בכל מקרה כזה „וכן הלאה", או כותבים בעזרת נקודות $\dots$, בהנחה שברור לאיזה המשך התכוונו.

2) $0.999\dots$. לפי הגדרת השברים העשרוניים מתאים לו זוג־הסדרות

$$\begin{pmatrix} 0, & 0{,}9, & 0{,}99, & \dots, & 0{,}9\dots99, & \dots \\ 1, & 1, & 1, & \dots, & 1, & \dots \end{pmatrix}.$$

מתברר כאן שגם במקרה של שבר עשרוני אינסופי יוכל לקרות שכל איבריה של אחת הסדרות (במקרה זה: של הסדרה היורדת) שווים ביניהם.

3) $\dots$ 0,333. לשבר עשרוני זה מתאים זוג־הסדרות

$$\begin{pmatrix} 0, & 0{,}3, & 0{,}33, & \dots, & 0{,}3\dots33, & \dots \\ 1, & 0{,}4, & 0{,}34, & \dots, & 0{,}3\dots34, & \dots \end{pmatrix}.$$

4) $\dots$ 3,14159 (השוה דוגמה 3) בעמ' 128). הקורא שאינו יודע את תכונות המעגל לא יוכל להבין כתיב זה, כי לא יוכל לדעת איזו ספרות תבואנה אחרי הספרה 9 שגמרנו בה את הכתיב המפורש. לעומת זאת, מי ששמע פעם על המספר π — הוא המספר המגיד פי כמה היקף המעגל גדול מקטרו — מרגיש אולי, שכתובות כאן שש הספרות הראשונות של הצגת π כשבר עשרוני; ומבין הוא שהנקודות באות כדי לרמוז להמשך הפיתוח העשרוני של π. חישוב התיאור העשרוני של π הומשך עד כדי כך שידועות לנו היום אלפי ספרות; ואולם אין איש היודע למשל מהי הספרה המיליונית של התיאור ההוא. בכל זאת, אם נבין את הנקודות באופן הנ"ל, הרי קבוע לגמרי השבר העשרוני שרמזנו עליו; כי כל מי שיש לו פנאי — אם אמנם נחוצות אולי שנים רבות — יוכל לחשב בדרך מיכנית כמעט את ספרות השבר העשרוני הנידון עד המקום הרצוי.

על סמך הגדרת השויון (I בעמ' 128) מתברר מתוך הדוגמות 1) ו־2), שקיים $0{,}999\dots = 1{,}000\dots$; שהרי קיימים אי־השויונות $1 \leqq 1$ ו־$1{,}0\dots01 \leqq 0{,}9\dots99$.

כמו כן מראה הדוגמה 3) לפי חשבונות קלים, כי $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \dots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \dots \end{pmatrix} = 0{,}333\dots$;

ז"א השבר העשרוני $\dots$ 0,333 מתאים למספר הרציונלי 1/3. ניכל גם לומר: „שווה" ל־1/3, אם לא נבדיל בין מספר רציונלי ובין המספר הממשי הרציונלי המתאים לו. עובדה זו עוזרת לנו, דרך אגב, להוציא מלב הקורא אי־אמון ידוע שבו התיחס אולי אל השויון הקודם $0{,}999\dots = 1$; כי את השויון הזה יוכל לקבל מתוך השויון $0{,}333\dots = 1/3$, בכפלו את האחרון ב־3.

ננתח עוד קצת תופעה מוזרה זו של שויון בין שבר עשרוני סופי ובין שבר עשרוני אינסופי; נצטמצם לשברים עשרוניים חיוביים. כי בשביל השליליים קיימים על פי הגדרתנו דלעיל אותם החוקים כמו בשביל החיוביים; ומה שנוגע למספר 0, הרי ברור שיש לו אך התיאור העשרוני $0{,}000\dots$, היינו: תיאור כשבר עשרוני סופי.

נקח את השבר העשרוני הסופי $\alpha = A, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$. נוכל להניח ש־$a_k \neq 0$; כי אחרת היינו מסיימים את הכתיב כבר בספרה a_{k-1} או לפניה.

מאידך נסתכל בשבר העשרוני האינסופי α' שבו מופיע $a_k - 1$ במקום הספרה a_k[1], ושבאה בו אחרי־כן (היינו מן המקום ה־$(k+1)$ אחרי הפסיק והלאה) תמיד הספרה 9; נקבל כך את השבר העשרוני

$$\alpha' = A, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k - 1\ 999\ \dots.$$

אני טוען: $\alpha' = \alpha$. לשם ההוכחה נכתוב את שני השברים העשרוניים בצורת זוגות של סדרות; ז"א α בצורה

$$\begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{k-1}, & \alpha_k(=\alpha), & \alpha, & \alpha, & \dots \\ \alpha_0+1, & \alpha_1+\frac{1}{10}, & \alpha_2+\frac{1}{10^2}, & \dots, & \alpha_{k-1}+\frac{1}{10^{k-1}}, & \alpha+\frac{1}{10^k}, & \alpha+\frac{1}{10^{k+1}}, & \alpha+\frac{1}{10^{k+2}}, & \dots \end{pmatrix}$$

בהשתמשנו בקיצורים הבאים:

$$\alpha_0 = A,\ \alpha_1 = A + \frac{a_1}{10},\ \alpha_2 = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100},\ \dots,$$
$$\alpha_{k-1} = A + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}},\ \alpha_k = A + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k}.$$

לעומת זאת יופיע α' בצורה

$$\begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{k-1}, & \alpha - \frac{1}{10^k}, & \alpha - \frac{1}{10^{k+1}}, & \alpha - \frac{1}{10^{k+2}}, & \dots \\ \alpha_0+1, & \alpha_1+\frac{1}{10}, & \alpha_2+\frac{1}{10^2}, & \dots, & \alpha_{k-1}+\frac{1}{10^{k-1}}, & \alpha, & \alpha, & \alpha, & \dots \end{pmatrix}.$$

לפי הגדרת השויון (הגדרה I בעמ' 128) נופק בנקל שבאמת $\alpha' = \alpha$, כמו במקרה הפרוט: $1 = 0{,}999\dots$. מצאנו אפוא שכל שבר עשרוני סופי, פרט ל־0, שווה לשבר עשרוני אינסופי מסוים.

דוגמות: $0{,}0999\dots = 0{,}1$; $0{,}2499\dots = 0{,}25$.

ברור מיד, ששני שברים עשרוניים סופיים שאינם זהותיים, ז"א: השונים לפחות בספרה אחת, מתארים מספרים ממשיים (רציונליים) שונים. במלואם נוכיח, שגם שני שברים עשרוניים אינסופיים שאינם זהותיים, קובעים מספרים ממשיים שונים. ע"י כך נוכל לדייק לגבי התוצאה הקודמת ולקבוע:

שבר עשרוני סופי השונה מ־0, שווה לשבר עשרוני אינסופי אחד ויחיד.

כי אם ישווה השבר הסופי לשני שברים אינסופיים, הרי גם שני אלה ישוו ביניהם, וזאת אומרת לפי המשפט דלעיל, ששני השברים האינסופיים הם זהותיים.

---

1. $a_k - 1$ יכול, כמובן, להיות גם 0.

2. הפרש זה נוצר מן הביטוי $\frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} - \alpha$; וכן אצל ההפרשים הבאים.

עד הנה עסקנו בשברים העשרוניים מהשקפת הגדרתם כמספרים ממשיים. ובכן, אחרי שהכרנום בצורה מדויקת, יש לעורר את השאלה: אם נתון לנו מספר ממשי בכל צורה שהיא — למשל: באחת הצורות שהוכנסו בשני הסעיפים הקודמים, או גם כמספר רציונלי — האם נוכל תמיד לתארו גם כשבר עשרוני? התשובה לשאלה זו היא חיובית; אבל אין לנו צורך להוכיח זאת בפרוטרוט, כי שיטת ההוכחה היא בדיוק השיטה שילמדוה תלמידי בית הספר, בייחוד ב„הֶפְכם" שבר רגיל לשבר עשרוני. אם נצרף עובדה זו למסקנות הקודמות, נקבל:

אפשר לפתח כל מספר ממשי חיובי או שלילי באופן חד־ערכי לשבר עשרוני אינסופי. אם המספר הממשי מתפתח גם לשבר עשרוני סופי יש לו שני מיני פיתוח: אחד לשבר סופי ואחד לשבר אינסופי[1]. את המספר 0 אפשר לתאר רק כשבר עשרוני סופי (עם הסימן + או —). הקורא מבין מיד שהפיתוח לשבר עשרוני סופי אפשרי רק בשביל סוג מסוים של מספרים רציונליים, דהיינו: בשביל השברים הרגילים שבצורתם המצומצמת מתחלק המכנה רק במספרים הראשוניים 2 ו־5, ולא במספר ראשוני אחר. קל להפוך, ע"י הרחבה במספר טבעי מתאים, כל שבר כזה לצורת שבר שבו יהיה המכנה חזקה של 10.

כבר במלואים לחלק הראשון (עמ' 62 עד 65) ראינו — לפחות במקרה שהמכנה הוא מספר ראשוני — שפיתוחו של מספר רציונלי לשבר עשרוני נותן תמיד שבר עשרוני מחזורי. (עובדה זו אמנם אינה תלויה בכך שהמכנה יהיה דוקא מספר ראשוני.)

בפרק י"א נגדיר בדיוק, מהו טור אינסופי מתכנס. שם יתברר שנוכל לראות את השברים העשרוניים גם כטורים אינסופיים מתכנסים.

בסוף סעיף זה עלינו להעלות על הפרק עוד בעיה בעלת ערך עקרוני: מהו יתרון המספר 10 בכל הנושא הזה? למה מפתחים את המספרים הממשיים דוקא לשברים עשרוניים ולא ל„שברים שיטתיים" בעלי מספר יסודי אחר? על זה יש לענות רק מה שנאמר בפרק הראשון (עמ' 3—4): יתרון המספר 10 הוא ביולוגי ולא מתימטי; הוא בזה שהאדם הנו בעל עשר אצבעות ומעדיף משום כך בחשבונותיו את המספר 10. באותה שיטה עשרונית שהנהיגוה כדי לסמן מספרים טבעיים, דבקו גם בשביל השברים ה„שיטתיים", וקבלו כך את השברים העשרוניים. אין למספר 10 כל יתרון אחר; תכונתו היחידה שמסתמכים עליה בדבר זה, היא שהחזקות 10^1, 10^2, 10^3 וכו' הולכות וגדלות, ומשום כך ערכיהן ההפוכים $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ וכו' הולכים וקטנים. אפשר אפוא להשתמש, תחת המספר 10, בכל מספר טבעי אחר שיש לו התכונה ההיא, היינו: בכל מספר טבעי הגדול מ־1. לכן

1. הקשר בין שני שברים עשרוניים אלו, המייצגים אותו המספר הממשי, צוין בעמוד הקודם.

נוכל, אם יסמן l מספר טבעי כלשהו השונה מ־1, לסכם את תוצאות הסעיף הזה כלפי השברים השיטתיים בעלי המספר היסודי l, כדלקמן:

אפשר לתאר כל מספר ממשי חיובי כשבר שיטתי בעל המספר היסודי l ($l>1$):

$$A+\frac{a_1}{l}+\frac{a_2}{l^2}+\dots+\frac{a_n}{l^n}+\dots,$$

אם A מסמן מספר טבעי או 0, ואם ערכי $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ לקוחים מן הסדרה $(0,1,2,\dots,l-1)$. תיאורו של כל מספר חיובי כשבר שיטתי אינסופי בצורה הנ"ל אפשרי באופן אחד ויחיד. את המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$ (m ו־n זרים), שהמכנה שלהם n מתחלק אך בגורמים ראשוניים שגם l מתחלק בהם — ורק את המספרים ההם — אפשר לתאר גם־כן, באופן חד־ערכי, כשברים שיטתיים סופיים בעלי המספר היסודי l (ז"א כך שממקום מסויים m ישוו $a_m, a_{m+1}, \dots$ כולם ל־0).

למספר 0 ישנו רק התיאור $\dots+\frac{0}{l}+\frac{0}{l^2}+\dots=0$.

דוגמות: 1) $l=2$. $\dots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=0{,}1111\dots=1$. כמו כן מתפתח השבר $\frac{1}{3}$ לשבר „דיאדי":

$$\frac{1}{3}=0{,}010101\dots=0+\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots.$$

2) $l=7$. השברים $\frac{1}{6}$ ו־$\frac{1}{8}$ מתפתחים לשברים שיטתיים בעלי המספר היסודי 7 כדלקמן:

$$\frac{1}{6}=0{,}11111\dots=0+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\dots.$$

$$\frac{1}{8}=0{,}060606\dots=\frac{6}{7^2}+\frac{6}{7^4}+\frac{6}{7^6}+\dots.$$

הקורא יבין בנקל שהדוגמות האחרונות מתאימות לפיתוחים העשרוניים: $\frac{1}{9}=0{,}1111\dots$; $\frac{1}{11}=0{,}090909\dots$. לא יקשה להוכיח שזוהי תופעה כללית; ז"א שנקבל לגבי המספר היסודי l את הפיתוחים:

$$\frac{1}{l-1}=\frac{1}{l}+\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^3}+\frac{1}{l^4}+\dots+\frac{l-1}{l^4}+\frac{0}{l^3}+\frac{l-1}{l^2}+\frac{0}{l}+\frac{1}{l+1},$$

פרק שביעי: המספרים המרוכבים ותיאורם הגיאומטרי.

§1. הצגת הבעיה והערות היסטוריות.

נקודת־המוצא בתחילת הפרק הקודם, שבו הכנסנו אל תחום המספרים את המספרים האירציונליים, היתה בעיה אלגברית: ראינו שם שקביעת קרנזול הריבוע, שאורך צלעו 1, תלויה בפתירת המשואה $x^2=2$.

כמו כן הצעד בהרחבת מושג־המספר, המשמש נושא של הפרק הזה, מוצאו בבעיה אלגברית — אף על פי שתוצאות ההרחבה הנידונה, שם וכאן, מגיעות עד מעבר לגבולות האלגברה. נסתכל במשואה: $x^2+1=0$, או: $x^2=-1$! בפרק הרביעי והששי ראינו שמכפלת שני מספרים שליליים, רציונליים או גם ממשיים, היא מספר חיובי; מסקנה זו לא יצאה משרירות לבנו, אלא היתה הכרחית כדי לקיים את חוקי החשבון החשובים, שכחם יפה למספרים הטבעיים, גם בתחומי־מספרים מורחבים. הואיל וריבועו של כל מספר חיובי או שלילי הוא חיובי, אין בתחומי המספרים שטפלנו בהם פתרון למשואה $x^2+1=0$; גם לא למשואה $x^2+a=0$, שבה מסמן a מספר (שלם, או רציונלי, או ממשי) חיובי.

הקורא שמע אולי בזמן למודיו בבית־הספר דבר־מה על המספרים הדמיוניים[1] ויתכונן לענות: אין כאן קושי גדול! נכניס את מושג המספר הדמיוני, שריבועו מספר ממשי שלילי; בעזרתו נוכל לפתור כל משואה מן הסוג הנידון. ואולם דרך זו איננה כה קלה ומובנת מאליה, כאשר נדמה לתלמידי בתי־הספר התיכוניים בזמננו אנו — והלא גם הפרופסורים לפיסיקה שלפני שלשים שנה היו משתוממים ומתחלחלים אז בשמעם על השימוש בגלי הרדיו, אשר כל ילד מקבלו היום כדבר פשוט שאין לתמוה עליו. רק ההרגל במספרים הדמיוניים עלול להשכיח אותנו את הקשיים שהיו קשורים למעשה בהמצאתם ובשימושם, כמו שהצדיק ההרגל את המספרים השליליים (השוה בעמוד 75). גדולי המתימטיקנים השתדלו עוד לפני כמאה שנה להסביר לבני דורם שאפשר באמת לטפל במספרים הדמיוניים (שנקראו גם כן „אבסורדיים"), בלי סכנה של סתירות בחשבון ובלי פגיעה בחוקי ההגיון; הסבר זה לא הצליח תמיד בתקופה ההיא, וכמעט שלא הצליח כלל בתקופה שלפניה.

יש טוענים, אם מעירים להם עד כמה התקשו קדמונינו לגבי המספרים הדמיוניים: הלוא הענין פשוט למדי; אם אין במציאות בין המספרים הממשיים מספר שריבועו שלילי, הרי עלינו להכניס לתוך המתימטיקה מספרים חדשים שיש להם תכונה זו. הבה נבאר ע"י דוגמה פשוטה שה„שיטה" הזאת איננה שיטה! למדנו בבית־הספר שבכל משולש ישר־זוית היתר גדול מכל ניצב, ושבכל משולש שווה־צלעות כל זוית שווה ל 60^0. לפי זה אין במציאות (בגיאומטריה האבקלידית) משולש ישר־זוית ושווה־צלעות כאחד. ברם מי שטען לעיל על דבר המצאם של המספרים הדמיוניים, יוכל באותה זכות גם לטעון: מכיון שבין המשולשים אין כאלה שהם גם ישרי־זוית גם שווי־צלעות, נמציא משולשים כאלה ונכניסם כסוג חדש של משולשים לתוך הגיאומטריה! ברור ששיטה זו לא תצליח; היא תביא אותנו לידי סתירות עם אַכְסיומות מקובלות, ותאפשר לנו ל„הוכיח" אף כל משפט גיאומטרי שאינו נכון.

1. המלה imaginarius, שמובנה ברומית כמו „דמיוני" או „מדומה" בעברית, הוכנסה לתפקיד זה ע"י דֶקַרט.

גם בשדה האריתמטיקה עצמה יש דוגמות המראות שדרישה־סתם לא תַנחנו אל מחוז חפצנו. למשל, דרישת מציאותם של מספרים x, הממלאים את המשואה $2^x=1$, אינה מועילה להרחיב את מושג המספר.

באמת, על ידי דרישות־סתם אי־אפשר להכניס לתוך המתימטיקה מושגים חדשים. יש צדק ידוע באמרתו של בֶּרטרנד רַסל, המופרזת אמנם בניסוחה: „המתימטיקן המוכיח את טענותיו רחוק מזה המבסס אותן על דרישות (אכְסיומות). כרחוק האיש המתפרנס ביגיע כפיו מן הגנב." בחלק הששי (האחרון) המהווה כרך השלמה נראה, שנוכל להצדיק הצדקה גמורה „גניבות" אכסיומַטיות ידועות, בהוכיחנו כי הדרישות האכסיומטיות לא תוכלנה לגרור סתירה. אבל ברוב פרקי הספר הזה לא נשים את פנינו אל השיטה האכסיומטית, אלא נבסס את רעיונותינו ע"י בנין הגיוני של מושגים.

מהשקפה זו יש שתי דרכים, שונות בעיקר, כדי לבסס את המספרים הדמיוניים. האחת היא להשתמש בשיטה שבעזרתה ביססנו בפרקים ד׳ וו׳ את המספרים השליליים, הרציונליים והממשיים; היא הדרך המופשטת יותר, ובה נחזיק ב§ 3 של פרק זה. מקודם נלך בדרך הסתכלותית, הדומה בעקרון קצת לשיטה המבארת את השברים הרגילים ע"י חילוק עצמים מוחשים. גרעין השיטה הזאת הוא להסתמך על מערכת עצמים מוחשים במדת־מה, ושמקורם מחוץ למקצוע המתימטי הנידון; נבסס אפוא מקצוע זה, בהתאימנו את איבריו ופעולותיו באופן חד־חד־ערכי ואיסומורפי לעצמים המוחשים ההם ולפעולות מתאימות ביניהם. נבוא כך לידי המסקנה: לאיברי המקצוע המתימטי הנידון יש אותה זכות־אזרח בתוך המתימטיקה, שיש לעצמים המוחשים הללו בתוך עולמם הם; שהרי אילו היתה סתירה בתוך המקצוע הנידון, היינו צריכים להסיק על פי ההתאמה, שיש סתירה דומה בין העצמים המוחשים.

שיטה זו נותנת אפוא רק הצדקה יחסית: אם תחום ידוע (תחום העצמים המוחשים) מבוסס היטב, אז נמצא גם המקצוע המתימטי שלפנינו בסדר, ז"א, בלי סתירה. הצדקה יחסית כזו תשביע את רצוננו, אם התחום המוחש הוא חלק של העולם החיצוני שבו אנו חיים; כי העולם הזה אינו זקוק להצדקה, ואין לזה אפילו משמָעות לשאול, אם יש בו סתירות: מציאותו מעידה על חוסר־הסתירה שבו. ואולם חבל על זה שבהצדקת מקצוע מתימטי לא נוכל אף פעם להסתמך על העולם החיצוני, מטעם יסודי ופשוט מאד: פרט למקרים טריביאליים שאינם מצריכים כל הצדקה, כל מקצוע מתימטי מקיף תחום אינסופי, בעוד שבטבע אנחנו מכירים רק תחומים סופיים הן לגבי היקף העולם למרחקים הן לגבי פירוד החומר לחלקיו הקטנטנים. בייחוד אחרי התפתחות הפיסיקה שבימינו, אין לנו כל יסוד לחשוב שישנו בעולם החיצוני ריבוי אינסופי כלשהו, ולכן לא נוכל לתלות בעולם הזה את המתימטיקה, שהיא בעצם המדע של האינסוף.

ואף־על־פי־כן נוכל להשתמש בשיטה ההיא של „הצדקה יחסית" על ידי זה, שבמקום העולם החיצוני נקח מקצוע מתימטי הקרוב לטבע, והמעורר בנו ע"י אֲפיו ההסתכלותי את הרגש כאילו הוא שייך לעולם החיצוני: זוהי הגיאומטריה. אם כי הגיאומטריה, כמקצוע מתימטי, מקיפה תחום אינסופי ואינה מבוססת על הטבע, הרי על כל פנים הגיאומטריה נראית לנו הסתכלותית מתחומי המספרים והפונקציות, ומעוררת בנו אמונה שלמה שמשפטי הגיאומטריה מונחים על יסוד מוצק ומחוסר כל סתירה. בדרך זו של ביסוס תורות אריתמיטיות על הגיאומטריה הלכו המתימטיקנים פעמים, ובה נצעד גם אנחנו בסעיף הבא, בנמקנו את הכנסת המספרים הדמיוניים לתוך האריתמיטיקה.

הראשון שהצדיק ע"י שיטה זו את המספרים הדמיוניים היה וֶסֶל[1], אשר מסר לאקדמית המדעים שבדניה בשנת 1797 את מאמרו המקיף: מסה על התיאור האנליטי של הכוון. ואולם בני דורו של וסל לא הבינו ואף לא קראו את המאמר הזה, שנשכח לגמרי במשך מאה שנה כמעט, עד שבסוף המאה הי"ט גילו מחדש את המאמר ואת ערכו העקרוני וההיסטורי; בשנת יובל־המאה של הופעתו הראשונה יצא לאור מחדש בצרפתית (קוֹפֶנהַג 1897). גם מאמרים אחרים בעלי אותו הכוון — אמנם משוכללים פחות ממאמרו של וסל — שהופיעו בתחילת המאה הי"ט, לא השפיעו הרבה על העולם המתימטי, אשר התיחס אז עוד בספקנות אל זכויות המספרים הדמיוניים. רק בשנת 1831 הצליח גאוס[2] ע"י מאמר, שכתבו בלי ידיעה על וסל, להוכיח לעולם המתימטי הרחב, שהמספרים הדמיוניים והמרוכבים הם בני־זוגם של גדלים גיאומטריים פשוטים למדי, ושאין אפוא כל נימוק לשלול זכויות מלאות מן המספרים ההם. אך השם „מספר דמיוני" שנשאר עד היום מזכיר לנו עוד, איך התיחסו קדמונינו אל המספרים האלה. דרכנו בסעיף הבא תהיה, לפתח בראשונה מקצוע גיאומטרי מסויים: תחום הוֶקטורים שבמישור עם פעולות גיאומטריות ביניהם. אחר־כך נראה, איך אפשר להתאים להם את המספרים הדמיוניים והמרוכבים בצורתם המקובלת.

§2. הוֶקטורים במישור ויחסם אל המספרים המרוכבים[3].

נתאר לנו מישור מסוים, למשל המישור של עמוד זה שבספר (אם נרחיבו בלי סוף), או המישור של לוח שבו נכתוב ונצייר. העצמים שנתכוון אליהם הם

---

1. C. Wessel.

2. C. F. Gauss, Werke כרך II, עמ' 167—178.

ראה גם: A. Fraenkel: Zahlbegriff und Algebra bei Gauss. Leipzig 1920.

3. בכמה מקרים בסעיף זה נסתפק בכך שנסביר את הענין בצורה הסתכלותית, ולא נוסיף עוד הוכחה עיונית או חשבונית.

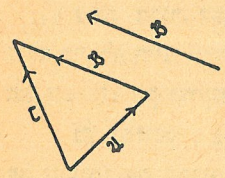
הוֶקטורים[1] שבמישור זה; הנם הקטעים המכוונים, המקשרים שתי נקודות בכוון מסויים, היינו: בכוון מנקודה מסוימת („נקודת־המוצא") אל השניה („נקודת־הסוף"). לפי זה הווקטורים הם גדלים הנדסיים (גיאומטריים) ששתי תכונות להם: אורך מסויים (הרוחק בין שתי הנקודות המקושרות ע"י הווקטור), שהוא מספר ממשי חיובי, וכוון מסויים (הכוון מאחת הנקודות אל חברתה). מטעם מיוחד שנדענו בקרוב נכניס אל מערכת הווקטורים גם וקטור מיוחד שארכו אפס, היינו: וקטור המצטמצם לנקודה אחת. לווקטור „אי־אמיתי" זה יש אמנם אורך (הוא המספר 0), אבל אין לו כוון; נסמן אותו ב (0).

את השויון בין הווקטורים, ופעולת בְּנְיָה (קונסטרוקציה) ביניהם המכונה „חיבור גיאומטרי", נגדיר כדלקמן:

הגדרה I: שני וקטורים נקראים שווים אם ארכם שווה וגם כוונם שווה. השויון יסומן ב =. כרגיל.

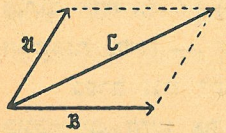
הגדרה זו באה להגיד, שלא איכפת לנו איפה במישור נמצא מקומו של וקטור מסויים. שני וקטורים במקומות שונים במישור נקראים בכל זאת שווים, אם רק ישוו בארכם ובכוונם; היינו, אם אפשר להעביר אחד מהם ע"י „תנועה (הזזה) מקבילה במישור" (תנועה שאינה משנה את כוון הווקטור) עד שיהיה חופף על השני. הווקטור (0) מציין אפוא כל נקודה שהיא; הוא נקבע על ידי ארכו (השווה ל0) בלבד, כי אין לו כוון מסויים. קל לראות שהשויון המוגדר הנהו רֶפליכסיבי, סימטרי וטרַנסיטיבי (השוה עמ' 72). הוא מתאים גם לפעולות החיבור והכפל, שנגדירן להלן, במובן זה: אם נשים במקום וקטור, הנמצא בין המחוברים או בין הגורמים, וקטור שווה לו, לא ישתנה ע"י כך הסכום או המכפלה.

הגדרה II: יהיו נתונים שני וקטורים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$. ע"י הזזה מקבילה נביא את הווקטור $\mathfrak{B}$ לידי מגע עם $\mathfrak{A}$ כך, שנקודת־המוצא של $\mathfrak{B}$ תתלכד עם נקודת־הסוף של $\mathfrak{A}$. ע"י זה ייקבע וקטור חדש $\mathfrak{C}$, הוא הווקטור המקשר את נקודת־המוצא של $\mathfrak{A}$ עם נקודת־הסוף של $\mathfrak{B}$ (לפי מצבו החדש של $\mathfrak{B}$). וקטור זה ייקרא סכום הווקטורים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$; נסמנו ב $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, ונכנה בשם חיבור־וקטורים את הפעולה היוצרת כנ"ל משני וקטורים נתונים את סכומם. (עיין בציור 6.)



ציור 6

רבים מן הקוראים מכירים בוודאי בניה זו מן הפיסיקה, שבה מגדירים באותו אופן ע"י „מַקבִּיל?ית־הכחות", או „מקבילית־המהירויות", סכומם של שני כחות או שתי מהירויות. (עיין בציור 7.)



ציור 7

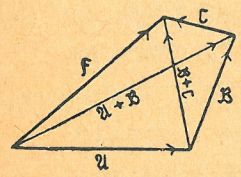
---

1. השם וקטור (המלה הרומית vector = נקָג; בעברית: חֵץ) יציין תמיד וקטור במישור הנידון. אפשר להגדיר גם וקטורים במרחב בן־שלושה־ממדים, אבל כאן אין לנו ענין בהם. נסמן וקטורים תמיד באותיות גוטיות.

הגדרת השויון גוררת מיד, ש„ערך" הסכנים (היינו ארכו וכוונו) אינו תלוי במקום שבו ציירנו את המחוברים. כמו כן ברור, שהחיבור קובע לכל שני וקטורים את סכומם באופן חד־ערכי. אם אחד המחוברים, למשל $\mathfrak{B}$, יהיה הווקטור (0), לא ישנה החיבור את המחובר השני; ז"א $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}+(0)$. לא יקשה להוכיח שהחיבור המוגדר הוא קומוטטיבי ואסוציאטיבי, היינו שקיימים החוקים:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})=(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C}.$$

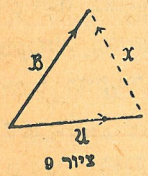
את החוק הקומוטטיבי יש להסיק מיד מן הציור 7; הריהו נובע מתכונות המקבילית.



ציור 8

כמו כן יש להסיק את החוק האסוציאטיבי מתוך הסתכלות (עיין בציור 8). אם נסמן $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ ע"י D, $\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ ע"י $\mathfrak{E}$, תהיה טענתנו: $\mathfrak{A}+\mathfrak{E}=\mathfrak{D}+\mathfrak{C}$; הציור 8 מראה ששני סכומים אלו שווים ל$\mathfrak{F}$.

גם את האפשרות להפוך תמיד ובאופן חד־ערכי את חיבור הווקטורים, יש לקרוא מעל ציור פשוט (ציור 9). עלינו להוכיח שישנו וקטור יחיד X הממלא את המשואה $\mathfrak{A}+\mathfrak{X}=\mathfrak{B}$. לשם כך נשרטט, החל מאותה נקודת־המוצא, את הווקטורים $\mathfrak{A}$ ו$\mathfrak{B}$. אם נקשר את נקודת־הסוף של $\mathfrak{A}$ עם נקודת־הסוף של $\mathfrak{B}$ בכוון מ$\mathfrak{A}$ ל$\mathfrak{B}$, ואם נסמן את הווקטור שקבלנוהו כך ב$\mathfrak{X}$, הרי הציור 9 מראה כי $\mathfrak{A}+\mathfrak{X}=\mathfrak{B}$. מאידך גיסא קיים בשביל כל וקטור $\mathfrak{Y}$ השונה מ$\mathfrak{X}$: $\mathfrak{A}+\mathfrak{X}\neq\mathfrak{A}+\mathfrak{Y}$. נקבל זאת בציירנו גם $\mathfrak{Y}$ מנקודת־הסוף של $\mathfrak{A}$.



ציור 9

בזכרנו את ההגדרות שבעמ' 90—91, נסכם את כל מה שקבלנו כאן ע"י

משפט 1: מערכת כל הווקטורים שבמישור מהווה, על־סמך ההגדרות I ו II, חבורה קומוטטיבית לגבי חיבור הווקטורים.

עתה ברור, למה הכנסנו בין הווקטורים גם את הווקטור ה„אי־אמיתי" (0). לולא כך, לא היינו יכולים לפתור את בעית ההיפוך המתבטאת במשואה $\mathfrak{A}+\mathfrak{X}=\mathfrak{B}$, אם $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$; רק הווקטור $\mathfrak{X}=(0)$ פותר משואה זו.

מן המשפט 1 נופק שלכל וקטור $\mathfrak{A}$ מתאים וקטור „נגדי" $-\mathfrak{A}$, אשר חיבורו אל $\mathfrak{A}$ נותן את הסכום (0). לווקטור $-\mathfrak{A}$ יש ארכו של $\mathfrak{A}$, אבל הכוון ההפוך. אם נכתוב תחת $(-\mathfrak{B})+\mathfrak{A}$ לשם פשטות: $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, הרי הגדרנו בזה פעולה חדשה, המסומנת בסימן —, והנקראת „חיסור־וקטורים".

בטרם נגש להגדרה הכללית של הכפל, עלינו להגדיר את „היחידה" בין הווקטורים, היינו את הווקטור שאינו משנה כל וקטור ע"י הכפל — כמו שהכפל הרגיל במספר 1 אינו משנה כל מספר ממשי. הווקטור שאינו משנה כל וקטור ע"י החיבור, הוא הווקטור (0). הוגדר לעיל כבעל האורך 0; הוא מצטמצם אפוא לנקודה אחת, וכוון אין לו כל עיקר. מה שנוגע ל„יחידת" הווקטורים, הרי בוודאי נחוץ שתהי

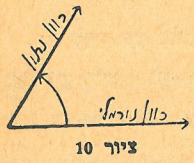
שונה מ(0), ולכן עלינו לתת לה, מלבד אורך חיובי מסויים, גם כוון מסויים; אלא שאנחנו בני־חורין בהחלט לגבי קביעת האורך והכוון. לפיכך נבחר, כפי רצוננו, בקטע מסויים אשר ישמש לנו באופן תמידי יחידת־האורך; נוכל לסמן אורך זה במספר הממשי 1, בראותנו את הקטע הנידון כיחידת־המידה (השוה עמ' 116). כמו כן נבחר בתוך המישור כפי רצוננו בכוון מסויים — שיהיה קבוע מעתה — ונכנה אותו בשם כוון נורמלי: הדרך הרגילה (אבל, כמובן, לא הכרחית) היא להפנות כוון זה באופן אפקי משמאל ימינה.

אחרי שתי בחירות חפשיות אלו נסמן, בעזרת המספרים הממשיים, כל רוחק (אורך) וכל כוון במישור, כדלקמן.

בנוגע ל רוחק: אם ארכו של קטע נתון יהיה a פעם יחידת־האורך (a מספר ממשי חיובי), הרי טבעי לסמן ע"י המספר a את הרוחק שבין שני קצות הקטע הנתון, וכך נקבל התאמה חד־חד־ערכית בין ארכי הקטעים השונים, לרבות את הקטע המצטמצם לנקודה אחת, ובין המספרים הממשיים החיוביים, לרבות את 0.

מסובך יותר היה סימון הכוונים השונים שבמישור ע"י מספרים. לשם כך עלינו לבחור, קודם כל, במגמת־סיבוב מסויימת מתוך שתי המגמות שבהן אפשר להסיב במישור נקודה סביב מרכז נתון: המגמה שבה מסתובב מחוג השעון, והמגמה הנגדית. במתימטיקה נתפשט המנהג לבכר את המגמה הנגדית למגמת המחוג; מגמה נגדית זו נקראת מגמת־הסיבוב החיובית, ומגמת מחוג השעון נקראת המגמה השלילית. לכן אם נתון כוון כלשהו במישור, הרי ישנו סיבוב מסויים אשר יהפוך את הכוון הנורמלי לכוון הנתון דרך המגמה החיובית; וגודל הסיבוב הזה — אשר מתבטא במידת זווית — קבוע באופן חד־ערכי, אם נצווה עוד שהסיבוב יהיה קטן מסיבוב מלא (הקפה שלמה), שנתאים לו כידוע, זווית של 360 מעלה (360^0). (מעתה נוותר על הוספת היחידה „מעלה".)

כדי לקבוע מידת־סיבוב לכוון נתון, נצטרך רק לשרטט בכוון הנורמלי וקטור כלשהו (למשל: בעל האורך 1) ולשרטט מנקודת־המוצא של וקטור זה גם את הכוון הנתון; אם נסיב את הווקטור מן הכוון הנורמלי, דרך המגמה החיובית, עד שכוונו יתלכד (בפעם הראשונה) עם הכוון הנתון (עיין בציור 10), אז מידת־סיבוב זו, הנקבעת באופן חד־ערכי, תשמש לנו מודד לכוון הנתון. אם הכוון הנתון יהיה הכוון הנורמלי עצמו, תהיה מידת־הסיבוב שווה ל0. לפי זה מתאים גם באופן הפוך לכל מספר ממשי בין 0 ו360 כוון מסוים יחיד, ומלבד זה מתאים למספר הממשי 0 הכוון הנורמלי.



ציור 10

ואולם יש בהתאמה חד־חד־ערכית זו דבר שאינו טבעי ונוח כלל. בשביל מדידת האורך השתמשנו בכל המספרים החיוביים כולם, נוסף לאפס; בשביל מדידת הכוון רק במספרים עד 360. ראשית כל מובן מאליו שהערך 360 מקרי לגמרי; זוהי ירושה מאנשי בבל העתיקה, אשר חילקו את המעגל ל360

שווים (השוה בעמ' 3). אבל גם אם נשים במקום 360 מספר אחר פחות מקרי — כאשר מתואר בסוף ה§1 של הפרק התשיעי — הרי תשאר אי־הנוחיות, כי לשם מדידת הכוון נשתמש רק במספרים מן 0 עד מספר מסויים. (אי־נוחיות זו יסודה בכך, שבשינוי תמידי של הכוון נחזור סוף־סוף אל כוון המוצא, בעוד שבהגדלה תמידית של האורך נתרחק בלי סוף ממקום המוצא — לפחות בגיאומטריה האבקלידית הרגילה.) נוח יותר לקבוע התאמה בין הכוונים השונים ל כל המספרים הממשיים החיוביים, או אפילו למספרים הממשיים כולם. אל התאמה כזו נגיע כך: אם למספר α (הכוונה למעלות: α^0; $0 \leqq \alpha < 360$) מתאים כוון מסויים, אז יתאים אותו כוון גם ל $\alpha+360$, ל $\alpha-360$, ל $\alpha+2\cdot 360$, וכו'; בדרך כלל: למספרים $\alpha+m\cdot 360$, אם m מסמן מספר שלם כלשהו.

התאמה זו מבוססת על העובדה הנ"ל, שלא נשנה את כוונו של וקטור נתון, בהסיבנו אותו (סיבוב חיובי) ב 360^0 או ב $2\cdot 360^0$ וכו'; או בהסיבנו אותו במגמה השלילית ב 360^0 וכו', מה שנבטא כך: בהסיבנו אותו ב -360^0. לפי זה יתאים עוד, כמו מקודם, לכל מספר ממשי כוון ידוע באופן חד־ערכי; ואולם היפוך ההתאמה הזאת לא יהיה חד־ערכי, אלא רב־ערכי־לאינסוף. לכן אין לפנינו התאמה חד־חד־ערכית, אלא התאמה חד־רב־ערכית (השוה בעמ' 5). למשל, מתאימים לכוון הנורמלי, מלבד המספר 0, גם כל המספרים $\pm n\cdot 360$ (בעבור n את המספרים הטבעיים); לכוון הזקוף, ז"א לכוון המתקבל ע"י סיבוב (חיובי) של הכוון הנורמלי בזוית ישרה, מתאימים מלבד המספר 90 גם כל המספרים $\pm n\cdot 360+90$. על־פי נוסח שנכניסנו בפרק התשיעי (§3) נוכל לומר: הכוון הוא "פונקציה מחזורית" של המספרים הקובעים אותו, והמחזור הנידון שווה ל 360. (או בנוסח של עמ' 38: ישנה התאמה חד־חד־ערכית, אם נקח את המספרים מודולו 360.)

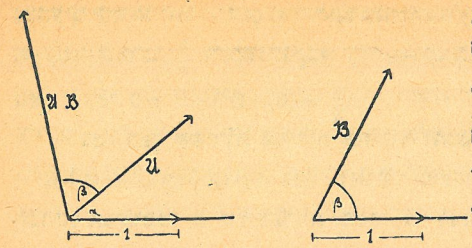
לפי מה שקבענו כאן, מתאים לכל מספר ממשי (שנראנו כמידת־זוית) כוון מסויים, ולשני מספרים שונים מתאים אותו הכוון אם, ורק אם, ההפרש בין המספרים הוא מספר שלם המתחלק ב 360. למספר 0 מתאים הכוון הנורמלי.

על יחידת־הווקטורים שרצינו להגדירה בעזרת שתי בחירות חפשיות, נוכל לומר עתה: אורך היחידה שווה ל 1, וכוונה נקבע ע"י הזוית 0. נסמן את יחידת הווקטורים מעתה ב (1), כמו שסימנו את הווקטור הניטרלי לגבי החיבור ב (0).

אחרי ההכנות האלה נוכל לגשת להגדרת **הכפל** בין וקטורים:

הגדרה III: יהיו נתונים לנו שני וקטורים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$, שארכיהם a ו b ושכווניהם נקבעים ע"י הזויות α ו β. כמכפלתם $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ יוגדר הווקטור, שארכו $a\cdot b$ ושכוונו נקבע ע"י $\alpha+\beta$ — או (0) אם אחד הגורמים הוא (0).

לפי הגדרה זו נקבל את אורך המכפלה בכפלנו ארכיהם של הגורמים, ואת כוון המכפלה בחברנו את הזויות המתאימות לכווני הגורמים (עיין בציור 11). קל לראות, שרב־ערכיותן של הזויות המתאימות לכוון מסויים אינה משפיעה על תוצאת הכפל:

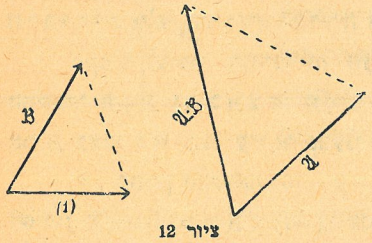


ציור 11

אם נבחר בזויות α ו β כאשר נבחר (בהתאם להגדרתן), תמיד נקבל כמכפלה אותו הווקטור.

הקורא יסביר לעצמו שיש לתת להגדרת המכפלה $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ גם נוסח גיאומטרי טהור, והוא: נשרטט משולש, בהקצותנו מאותה נקודת־המוצא את יחידת הווקטורים (1) ואת הגורם הנתון $\mathfrak{B}$, ובקשרנו את נקודות־הסוף שלהם (עיין בציור 12). במקום אחר נשרטט את הווקטור $\mathfrak{A}$, ומעליו משולש הדומה דמיון גיאומטרי למשולש הקודם והשומר על סדר הצלעות, כך שהצלע $\mathfrak{A}$ של המשולש השני תתאים לצלע (1) שבמשולש הראשון. הצלע במשולש השני המתאימה לצלע $\mathfrak{B}$ של המשולש הראשון, תהיה אז המכפלה $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$.

הגדרת הכפל נוכל לבטא גם בצורה זו: כדי לכפול את הווקטור $\mathfrak{A}$ בווקטור $\mathfrak{B}$, נפעל על $\mathfrak{A}$ פעולה הגורמת שינוי בארכו ובכוונו כאחד: "מתיחה וסיבוב", או בקיצור: "סוב־מתיחה". אם b ארכו של $\mathfrak{B}$, וכוונו נקבע ע"י הזוית β, אז השינוי הנידון הוא מתיחת הווקטור $\mathfrak{A}$ ביחס $1:b$, וסיבובו ב β (במגמה החיובית).



ציור 12

אם נסמן את הווקטור $\mathfrak{A}$, בהבליטנו את ארכו וכוונו, בסימן a_α, ואת $\mathfrak{B}$ ב b_β, תקבל הגדרת הכפל את הצורה

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = a_\alpha \cdot b_\beta = (a\cdot b)_{\alpha+\beta}.$$

אם אחד הגורמים שווה לווקטור (0), מיותר אצלו הציון המורה על כוונו, והמכפלה שווה גם היא ל (0). הווקטור הנגדי ל a_α הוא: $-a_\alpha = a_{\alpha+180}$.

ה ע ר ה: בנוסח זה של ההגדרה III, ואף בנוסח הראשון, יש להעיר לגבי נקודת־הכפל מה שהערנו בהערה שבעמ' 72 לגבי סימן־השויון. מקרים דומים היו ויהיו בפרק הקודם ובפרק זה, ולא נעמוד עליהם במפורש.

לפי הגדרת הכפל קל לראות שיחידת־הווקטורים (1), אם נכפלנה בווקטור כלשהו, לא תשנה את האחרון, ושהחוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי של הכפל קיימים גם כאן. בצאתנו, למשל, מצורתה הראשונה של הגדרת הכפל, נקבל חוקים פורמליים אלו כמסקנות מן התכונות המתאימות של הכפל במספרים ממשיים מצד אחד, ושל החיבור במספרים ממשיים מצד שני. כמו־כן אפשר לחלק, וזאת באופן חד־ערכי, בכל וקטור השונה מ (0): אם ארכי הווקטורים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$ הנם a ו b $(a\neq 0)$, ואם כווניהם

נקבעים ע"י הזויות α ו β, הרי המשואה $\mathcal{A}\cdot\mathcal{Y}=\mathcal{B}$ נפתרת ע"י $\mathcal{Y}=\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, היינו ע"י הווקטור שארכו $\frac{b}{a}$ ושכוונו נקבע ע"י $\alpha-\beta$. במקרה המיוחד $\mathcal{B}=(0)$ דיינו בקביעת האורך לפי $\frac{b}{a}=0$, ז"א: $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}=(0)$.

גם כאן קשורות פעולות החיבור והכפל זו בזו לפי החוק הדיסטריבוטיבי: $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}$. כמו שאפשר להוכיח את החוקים הקודמים גם על סמך הצורה הגיאומטרית של הגדרת הכפל, כך רצוי להוכיח את החוק הדיסטריבוטיבי דוקא בדרך גיאומטרית. העיקר כאן להפוך משולש מסויים (הנקבע ע"י $\mathcal{B}$ ו $\mathcal{C}$) למשולש אחר הדומה לראשון, ושיחסו לראשון נקבע ע"י הווקטור $\mathcal{A}$; לא יקשה על הקורא ביותר להוציא אל הפועל הוכחה זו.

אם נסכם את כל מה שמצאנו כאן, נקבל:

משפט 2: מערכת כל הווקטורים שבמישור מהווה שדה לגבי פעולות החיבור והכפל שהגדרנו אותן.

עצם החשבון בווקטורים מוגדר ומבואר בזה כל צרכו. ואולם נפיק תועלת בכמה מובנים, בתארנו את הווקטורים עצמם, וע"י כך גם את הפעולות ביניהם, עוד בצורות מיוחדות; ביתר דיוק, בשתי צורות שנקרא להן: **צורה נורמלית חיבורית** (לפי החיבור), ו**צורה נורמלית כפלית** (לפי הכפל).

נקדים לצורות הנורמליות הערה זו: אם $\mathcal{A}$ וקטור כלשהו, נוח לסמן את הווקטור $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ גם ב $2\mathcal{A}$ או ב $2\times\mathcal{A}$[1]; כמו־כן $\mathcal{A}+\mathcal{A}+\mathcal{A}$ ב $3\mathcal{A}$, וכו'; ובפרט את $\mathcal{A}$ עצמו ב $1\times\mathcal{A}$. ע"י זה קבענו מובן מסוים ל $n\times\mathcal{A}$, אם n מספר טבעי כלשהו.

את פתרון המשואה $\mathcal{Y}+\mathcal{A}=(0)$, שסימנוהו לעיל ב $-\mathcal{A}$, נסמן עתה (בהתאם לסימון $1\times\mathcal{A}$) גם ב $(-1)\times\mathcal{A}$, ונכתוב במקום $(-\mathcal{A})+(-\mathcal{A})$ גם $(-2)\times\mathcal{A}$, וכן הלאה. לבסוף יסמן $0\times\mathcal{A}$ תמיד, ז"א לגבי כל $\mathcal{A}$, את הווקטור (0). לפי זה מוגדר הביטוי $m\times\mathcal{A}$ בשביל כל מספר שלם m. המשך עקבי לשיטת־סימון זו אל הערכים הרציונליים של m ואף אל ערכים ממשיים כלשהם, מביא אותנו לידי

הגדרה IV: אם q מספר ממשי חיובי, ו $\mathcal{A}$ וקטור כלשהו, יסמן $q\times\mathcal{A}$ את הווקטור שכוונו ככוון $\mathcal{A}$, וארכו פי q (כפול q) ארכו של $\mathcal{A}$. כמו־כן יסמן $(-q)\times\mathcal{A}$ את הווקטור שכוונו נגדי לכוון $\mathcal{A}$, וארכו פי q ארכו של $\mathcal{A}$. $0\times\mathcal{A}$ יסמן תמיד את הווקטור (0).

בשביל הפעולה המסומנת ב $\times$, הקושרת מספרים ממשיים עם וקטורים, קיימים החוקים הבאים:

$$q_1\times\mathcal{A}+q_2\times\mathcal{A}=(q_1+q_2)\times\mathcal{A}. \tag{1}$$

$$(q_1\times\mathcal{A})\cdot(q_2\times\mathcal{B})=(q_1\cdot q_2)\times(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}). \tag{2}$$

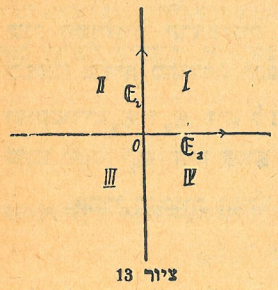
$$q_1\times(q_2\times\mathcal{A})=(q_1\cdot q_2)\times\mathcal{A}. \tag{3}$$

1. בסימן $\times$ נשתמש רק כדי להבדיל בין צירוף זה, שהוא צירוף של מספרים (טבעיים, רציונליים וכו') לווקטורים, ובין צירוף־הכפל של וקטור לווקטור (סימן $\cdot$) אין לשימוש זה כל קשר עם השימוש ב $\times$ שבראשית הפרק החמישי.

לו רצינו לדייק תכלית דיוק, היה עלינו להשתמש כאן לא רק בשני סימני „כפל" ($\cdot$ ו $\times$) כי אם בשלשה; כי הלוא הסימן $\cdot$ משמש כאן פעמים כדי לסמן את הכפל בין וקטורים (למשל, באגף השמאלי של השויון (2) ובסופו), ופעמים כדי לסמן את הכפל בין מספרים ממשיים (למשל, בתחלת האגף הימני של השויון (2)). הקורא יבין גם בלי סימון מיוחד חדש את ההבדל הזה, וכמו כן אותו ההבדל אצל החיבור; היינו שהסימן $+$ ב (1) מסמן גם את חיבור הווקטורים גם את חיבור המספרים הממשיים.

על הוכחות השויונות הנ"ל, שהקורא יסבירן לעצמו בנקל, לא נתעכב; נציין רק שהם מבטאים תכונות כלליות הקיימות בכל חבורה קומוטטיבית או שדה (עמ' 90 ו 111), ולא תכונות מיוחדות של מערכת הווקטורים.

כדי להכניס את הצורה הנורמלית החיבורית של הווקטורים, נסמן מעתה את יחידת־הווקטורים — היינו הווקטור 1_0, שארכו 1 ושכוונו נקבע ע"י הזוית 0^0 — גם ב $\mathfrak{E}_1$; כמו כן יסמן $\mathfrak{E}_2$ את הווקטור 1_{90}, שארכו 1 והמכוון כלפי מעלה (מאונך ל $\mathfrak{E}_1$). נשרטט שני וקטורים אלו כך שנקודת־מוצאם תהיה משותפת, ונמשיך לשני הצדדים את הקוים הישרים שעליהם נמצאים $\mathfrak{E}_1$ ו $\mathfrak{E}_2$ (עיין בציור 13). נקודת החיתוך של שני ישרים אלו (האפקי והזקוף בציור), הנקראים צירים, תסומן ב O; היא נקודת־המוצא המשותפת של $\mathfrak{E}_1$ ו $\mathfrak{E}_2$.

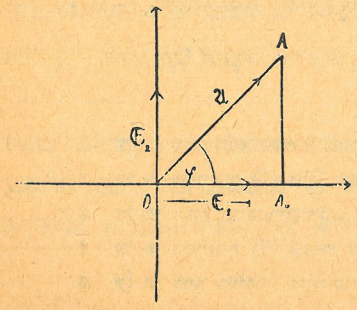


ציור 13

אם נתון לנו וקטור כלשהו $\mathcal{A}$, נקצה אותו מהנקודה O, כך שנוכל לסמנו גם ב $\overrightarrow{OA}$, בסמננו ב A את נקודת־הסוף (עיין בציור 14). מ A נוריד את האנך לציר האפקי ונסמן את העקב ב A_0. במובן חיבור הווקטורים (עמ' 145) קיים אפוא השויון: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{A_0A}$. מאידך גיסא נמצא הווקטור $\overrightarrow{OA_0}$ על הציר האפקי, ולכן יהיה כוונו או כוונו של $\mathfrak{E}_1$ או הכוון הנגדי. אותו הדבר קיים בשביל הווקטור $\overrightarrow{A_0A}$ ביחס ל $\mathfrak{E}_2$. לפיכך אפשר לתאר את הווקטור $\overrightarrow{OA_0}$ בצורה $a_1\times\mathfrak{E}_1$ ואת הווקטור $\overrightarrow{A_0A}$ בצורה $a_2\times\mathfrak{E}_2$, אם a_1 ו a_2 מסמנים מספרים ממשיים מתאימים. ע"י זה נקבל בשביל כל וקטור $\mathcal{A}$ את התיאור

$$\mathcal{A}=a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2, \tag{A}$$

אשר ייקרא „הצורה הנורמלית החיבורית" של $\mathcal{A}$.



ציור 14

קל לראות שהסימנים ($+$ או $-$) של ה„מקדמים" הממשיים a_1 ו a_2 מתאימים למקרים שונים מסויימים של המקום בו נמצאת נקודת־הסוף של הווקטור הנתון $\mathcal{A}$. לשם כך נחלק את כל המישור מן „המרכז" O

לארבעה ר ב י ע י ם (השוה בציור 13, עמ' 151), כך שהתחום בין חצי־הציר שבכוון $\mathfrak{E}_1$ (החל מ O) ובין חצי־הציר שבכוון $\mathfrak{E}_2$ (החל מ O) ייקרא רביע ראשון (I); התחום בין אותו חצי־ציר הזקוף ובין חצי־הציר האפקי שבכוון הנגדי ל $\mathfrak{E}_1$ ייקרא רביע שני, וכן הלאה לפי סיבוב חיובי. a_1 ו a_2 יהיו אפוא חיוביים, אם A (ולכן כל הווקטור $\mathfrak{A}$) בתוך הרביע הראשון; a_1 שלילי ו a_2 חיובי, אם A בתוך הרביע השני; a_1 ו a_2 שניהם שליליים, אם A בתוך הרביע השלישי; a_1 חיובי ו a_2 שלילי, אם A בתוך הרביע הרביעי. — אם A נמצאת באחד הצירים אבל שונה מ O, מתאפס אחד הערכים a_1 ו a_2 בו בזמן שהשני שונה מאפס.

הבה ננסח את כללי החיבור והכפל (הגדרות II ו III, עמ' 145 ו 148) לפי הצורה הנורמלית החיבורית: קודם כל נציין את כללי הכפל שבין הווקטורים המיוחדים $\mathfrak{E}_1$ ו $\mathfrak{E}_2$, והם:

$$\mathfrak{E}_1^2 = \mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2=\mathfrak{E}_2\cdot\mathfrak{E}_1=\mathfrak{E}_2,\ \mathfrak{E}_2^2=-\mathfrak{E}_1. \tag{4}$$

שני השויונות הראשונים נופלים מזה ש $\mathfrak{E}_1$ יחידת הכפל. השויון השלישי הוא מסקנה מידית מהגדרת הכפל, שעל פיה אורך הווקטור $\mathfrak{E}_2\cdot\mathfrak{E}_2$ שווה למכפלת ארכי הווקטורים $\mathfrak{E}_2$ ו $\mathfrak{E}_2$, ז"א ל 1·1, בו בזמן שכוונו נקבע ע"י הסכום $90^0+90^0=180^0$; כוונו של $\mathfrak{E}_2^2$ יהיה אפוא הכוון הנגדי לכוונו של $\mathfrak{E}_1$.

אחרי ההכנות האלה נקבל:

$$\begin{aligned}
&(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)+(b_1\times\mathfrak{E}_1+b_2\times\mathfrak{E}_2)\\
&=^2(a_1+b_1)\times\mathfrak{E}_1+(a_2+b_2)\times\mathfrak{E}_2\cdot\\
&=^1(a_1\times\mathfrak{E}_1+b_1\times\mathfrak{E}_1)+(a_2\times\mathfrak{E}_2+b_2\times\mathfrak{E}_2)\\
&(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1+b_2\times\mathfrak{E}_2)\\
&=^3(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1)+(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_2\times\mathfrak{E}_2)\\
&=^3(a_1\times\mathfrak{E}_1)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1)+(a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1)+(a_1\times\mathfrak{E}_1)\cdot(b_2\times\mathfrak{E}_2)+\\
&\quad+(a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_2\times\mathfrak{E}_2)\\
&=^2(a_1\cdot b_1)\times(\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_1)+(a_2\cdot b_1)\times(\mathfrak{E}_2\cdot\mathfrak{E}_1)+(a_1\cdot b_2)\times(\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2)+(a_2\cdot b_2)\times(\mathfrak{E}_2\cdot\mathfrak{E}_2)\\
&=^4(a_1\cdot b_1)\times\mathfrak{E}_1+(a_2\cdot b_1)\times\mathfrak{E}_2+(a_1\cdot b_2)\times\mathfrak{E}_2+(a_2\cdot b_2)\times(-\mathfrak{E}_1)\\
&=^5(a_1\cdot b_1-a_2\cdot b_2)\times\mathfrak{E}_1+(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2)\times\mathfrak{E}_2\cdot
\end{aligned}$$

---

1. על פי החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי של החיבור.
2. על פי השויונות (1) ו (2) בעמ' 150.
3. על פי החוק הדיסטריבוטיבי.
4. על פי השויונות (4) בעמוד זה.
5. על פי חוקי החיבור, והשויונות (1) ו (3) בעמ' 150. ב (3) השתמשנו במובן זה: שמנו $\mathfrak{E}_1\times(-1)$ תחת $-\mathfrak{E}_1$, ולכן $\mathfrak{E}_1\times(-a_2\cdot b_2)$ תחת $(-\mathfrak{E}_1)\times(a_2\cdot b_2)$.

נוכיח עתה את חד־ערכיותה של הצורה הנורמלית; לשון אחר: נוכיח שאין דרך אחרת לייצג וקטור בצורה $z_1\times\mathfrak{E}_1+z_2\times\mathfrak{E}_2$, אלא בהתאם לדרך הגיאומטרית שהשתמשנו בה והנותנת באופן חד־ערכי את הערכים $z_1=a_1$, $z_2=a_2$ שאליהם הגענו לעיל ב (A). יהי אפוא:

$$\mathfrak{A}=a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2=z_1\times\mathfrak{E}_1+z_2\times\mathfrak{E}_2\,.$$

מזה נופק: $(z_2-a_2)\times\mathfrak{E}_2=(a_1-z_1)\times\mathfrak{E}_1$. והנה שויון זה מציג וקטור שיש לו, כביכול, גם כוונו של $\mathfrak{E}_1$ גם כוונו של $\mathfrak{E}_2$ (או הנגדיים), כוונים השונים ביניהם בזוית ישרה. זהו מן הנמנע, ולכן נוכל לתרץ קושיא זו רק בזה ש a_1-z_1 ו z_2-a_2 שניהם מתאפסים, כך שהשויון האחרון מגיד: $(0)=(0)$. מצאנו אפוא: $a_1=z_1$ ו $a_2=z_2$, מש"ל. (יכולנו להוכיח זאת גם בדרך גיאומטרית.) כך קבלנו:

משפט 3: תיאורו של כל וקטור בצורה הנורמלית החיבורית (A) הוא חד־ערכי. החיבור והכפל בין וקטורים המיוצגים בצורה זו, יוצאים לפועל כפי השויונות:

$$(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)+(b_1\times\mathfrak{E}_1+b_2\times\mathfrak{E}_2)=(a_1+b_1)\times\mathfrak{E}_1+(a_2+b_2)\times\mathfrak{E}_2\cdot$$

$$(a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1+b_2\times\mathfrak{E}_2)=$$

$$(a_1\cdot b_1-a_2\cdot b_2)\times\mathfrak{E}_1+(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2)\times\mathfrak{E}_2\cdot$$

עתה נכניס **צורה נורמלית כפלית** בשביל הווקטורים, ונשתמש לשם נוחיות בשני סימונים חדשים: למספר הממשי r המציין את אורך הווקטור $\mathfrak{A}$ (לפי היחידה שנבחרה בעמ' 147) נקרא גם הערך המוחלט של $\mathfrak{A}$, ונכתוב $r=|\mathfrak{A}|$. כל זוית φ הקובעת את כוון הווקטור $\mathfrak{A}$, תיקרא גם קשת של $\mathfrak{A}$; נכתוב $\varphi=\operatorname{arc}\mathfrak{A}$[1]. לפי זה מוגדר הערך המוחלט ע"י הווקטור באופן חד־ערכי, והנהו מספר ממשי חיובי, פרט למקרה של הווקטור (0), שבו $r=0$. לעומת זאת קשתו של וקטור אינה קבועה באופן חד־ערכי. אם $\mathfrak{A}\neq(0)$ ואם φ אחד מערכי $\operatorname{arc}\mathfrak{A}$, הרי שאר ערכי $\operatorname{arc}\mathfrak{A}$ הם בעלי הצורה $\varphi\pm n\cdot 360$, שבה n עובר על כל המספרים הטבעיים. — אם $\mathfrak{A}=(0)$, אין כל מובן לסימן $\operatorname{arc}\mathfrak{A}$. (לגבי השם „קשת" השוה גם סוף ה§ 1 של הפרק התשיעי.)

מטרתנו היא לתאר כל וקטור $\mathfrak{A}$ השונה מ(0) כמכפלת שני וקטורים, שאחד מהם בעל אותו הערך המוחלט כמו $\mathfrak{A}$ ובעל הקשת 0 (היינו שכוונו ככוון $\mathfrak{E}_1$). על־סמך דרישה זו נמצא את הגורם השני ע"י חילוק, ז"א ע"י היפוך הפעולה המוגדרת

---

1. arc הוא קיצור למלה הרומית arcus שמובנה: קשת.

בהגדרה III. אם $|\mathfrak{A}|=r$ ו $\arc\mathfrak{A}=\varphi$, יש לגורם השני הערך המוחלט $\frac{r}{r}=1$ והקשת $\varphi-0=\varphi$. לפיכך נקבל, אם נכתוב בדרך כלל את הווקטור $\mathfrak{A}$ בצורה r_φ (המציינת את הערך המוחלט ואת הקשת):

$$r_\varphi=r_0\cdot 1_\varphi. \tag{M}$$

תיאור זה של כל וקטור יכונה בשם הצורה הנורמלית הכפלית. רק אם הווקטור הנתון (0), אז אין ערך (וגם אין חד־ערכיות) לצורה הזאת.

לפי החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי של הכפל ולפי ההגדרה III נקבל בשביל הכפל בין וקטורים, המתוארים בצורה הנורמלית הכפלית, את הכלל:

$$r_\varphi\cdot s_\psi=(r_0\cdot 1_\varphi)\cdot(s_0\cdot 1_\psi)=(r_0\cdot s_0)\cdot(1_\varphi\cdot 1_\psi)=(r\cdot s)_0\cdot 1_{\varphi+\psi}.$$

בפרט: אם ערכיהם המוחלטים של הווקטורים הנתונים שווים ל 1, מקבל שויון זה את הצורה הפשוטה $1_\varphi\cdot 1_\psi=1_{\varphi+\psi}$; ובמקרה $1_\psi=1_\varphi$ יהיה $(1_\varphi)^2=1_{2\varphi}$. לכן קיים במקרה של n גורמים שווים, לפי אינדוקציה שלימה:

$$(1_\varphi)^n=1_{n\cdot\varphi}.$$

לבסוף ניצור מזיגת־מה בין שתי הצורות הנורמליות, החיבורית והכפלית. לשם נוחיות נשתמש בפונקציות הטריגונומטריות $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, הידועות בוודאי לקורא (השוה גם בפרק התשיעי, § 3). הציור 14 (עמ' 151) מראה לפי הגדרת הפונקציות הללו: אם יסמן r את $|\mathfrak{A}|$ ו φ את $\arc\mathfrak{A}$ (ז"א את הזוית A_0OA), אז קיים:

$$\sin\psi=\frac{|A_0A|}{|OA|}=\frac{|A_0A|}{r};\quad \cos\varphi=\frac{|OA_0|}{|OA|}=\frac{|O_{A_0}|}{r};\quad \tan\varphi=\frac{|A_0A|}{|OA_0|};$$

$$|OA_0|^2+|A_0A|^2=|OA|^2=r^2.$$

(השויון האחרון נופק ממשפט פיתָגורס.) בזכרנו את הגדרת המספרים הממשיים a_1 ו a_2 לפי השויון (A) בעמ' 151, נוכל לכתוב: $\cos\varphi=\frac{a_1}{r}$, $\sin\varphi=\frac{a_2}{r}$; במקרה $r=1$, ז"א אם ל $\mathfrak{A}$ הערך המוחלט 1, קיים אפוא: $a_1=\cos\varphi$, $a_2=\sin\varphi$. הקורא היודע את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות גם מעבר לזוית חדה, ז"א אם A נמצא ברביע השני, השלישי או הרביעי (עיין בציורים 13 ו 14, עמ' 151), יאשר בנקל שאף במקרים אלו קיימים השויונות הנ"ל (השוה תיאור הפונקציות הטריגונומטריות ב § 3 של הפרק התשיעי, וגם ההערה 2 בעמ' 160).

נסתכל עתה בווקטור כלשהו $\mathfrak{A}$, ויהי $|\mathfrak{A}|=r$, $\arc\mathfrak{A}=\varphi$. נצא מן הצורה (M) בעמ' 154, ונציג את הגורם השני 1_φ בצורה החיבורית לפי (A); הואיל ו $|1_\varphi|=1$, נקבל בשביל a_1 ו a_2 את הערכים $\cos\varphi$ ו $\sin\varphi$. קיים אפוא:

$$\mathfrak{A}=r_0\cdot 1_\varphi=r_0\cdot(\cos\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin\varphi\times\mathfrak{E}_2). \tag{AM}$$

את השויון החשוב הזה סימַנו ב (AM) מפני שקבלנוהו ע"י מזיגת הצורות (A) ו (M). נתאר גם את הווקטור $\mathfrak{B}$ בצורה המתאימה ל (AM); היינו, אם $|\mathfrak{B}|=s$ ו $\arc\mathfrak{B}=\psi$, בצורה:

$$\mathfrak{B}=s_0\cdot 1_\psi=s_0\cdot(\cos\psi\times\mathfrak{E}_1+\sin\psi\times\mathfrak{E}_2).$$

בכפלנו את השויון האחרון בשויון הקודם, נקבל:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=r_0\cdot s_0\cdot 1_\varphi\cdot 1_\psi=r_0\cdot s_0\cdot(\cos\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin\varphi\times\mathfrak{E}_2)\cdot(\cos\psi\times\mathfrak{E}_1+\sin\psi\times\mathfrak{E}_2). \tag{5}$$

מאידך גיסא קיים בהתאם להגדרה III: $1_\varphi\cdot 1_\psi=1_{\varphi+\psi}$; לכן נוכל לכתוב את השויון האחרון גם בצורה:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=r_0\cdot s_0\cdot 1_{\varphi+\psi}=r_0\cdot s_0\cdot[\cos(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_1+\sin(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_2]. \tag{6}$$

נפסיק בנקודה זו עד סוף העמוד את הדיון בווקטורים, ונפיק משני השויונות האחרונים מסקנה טריגונומטרית! נניח ש $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$ שונים מן הווקטור (0)[1], ונחלק בווקטור $r_0\cdot s_0$ את האגפים הימניים של (5) ו (6) השווים ביניהם; לפי זה נופק:

$$(\cos\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin\varphi\times\mathfrak{E}_2)\cdot(\cos\psi\times\mathfrak{E}_1+\sin\psi\times\mathfrak{E}_2)=\cos(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_1+\sin(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_2.$$

בחשבנו לפי המשפט 3 את המכפלה שבאגף השמאלי, נקבל:

$$(\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi)\times\mathfrak{E}_1+(\sin\varphi\cdot\cos\psi+\cos\varphi\cdot\sin\psi)\times\mathfrak{E}_2$$

$$=\cos(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_1+\sin(\varphi+\psi)\times\mathfrak{E}_2.$$

והנה לפי המשפט 3 אפשר לתאר וקטור נתון בצורה $z_1\times\mathfrak{E}_1+z_2\times\mathfrak{E}_2$ רק באופן יחיד. לכן שווים ביניהם מקדמי $\mathfrak{E}_1$ בשויון האחרון משמאל ומימין, וכמו־כן מקדמי $\mathfrak{E}_2$. קבלנו אפוא:

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi;\quad \sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cdot\cos\psi+\cos\varphi\cdot\sin\psi.$$

נוסחות אלו, המכונות „משפטי־החיבור של הפונקציות הטריגונומטריות", רגילים להוכיח בבית־הספר באופן מלאכותי במקצת. הדרך שהלכנו בה כאן, היא אולי הטבעית ביותר כדי לקבל את הנוסחות הללו.

נחזור אל הנוסחות (5) ו (6), ונניח ששני הווקטורים $\mathfrak{A}$ ו $\mathfrak{B}$ שווים ביניהם

---

1. רק בהנחה זו יש ערך לנוסחות הקודמות, כמו שצוין לעיל.

ושונים מ (0). מלבד זה נניח כי נתונים לנו לא שני וקטורים בלבד אלא מספר כלשהו n של וקטורים שווים ל R. אז נקבל לפי השואת האגפים הימניים:

$$r_0^n\cdot(\cos\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin\varphi\times\mathfrak{E}_2)^n=r_0^n(\cos n\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin n\varphi\times\mathfrak{E}_2),$$

מה שגורר אחריו, הואיל ו $r_0\neq(0)$:

$$(\cos\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin\varphi\times\mathfrak{E}_2)^n=\cos n\varphi\times\mathfrak{E}_1+\sin n\varphi\times\mathfrak{E}_2. \qquad (7)$$

את חשיבות הנוסחה הזאת נדגיש להלן (עמ' 161), כשנעבור למספרים המרוכבים.

המסקנה העיקרית של הדיון בווקטורים היתה כי תחום הווקטורים הנהו שדה (משפט 2 בעמ' 150). נשאל עתה את עצמנו: מהו יחסו של שדה זה לשדה המספרים הממשיים שעסקנו בו בפרק הקודם? קל לענות על שאלה זו, בהשתמשנו בצורה הנורמלית החיבורית (A) (עמ' 151). נסתכל לעת עתה רק באותם הווקטורים שבשבילם $a_2=0$ בצורה ההיא, היינו בווקטורים בעלי הצורה $a\times\mathfrak{E}_1$! אני טוען: מערכת כל הווקטורים האלה איסומורפית לשדה המספרים הממשיים[1] (השוה בעמ' 114), וכהעתק איסומורפי משמשת ההתאמה הפשוטה, המתאימה למספר הממשי a את הווקטור $a\times\mathfrak{E}_1$. פעולות־החשבון הנידונות באיסומורפיות זו הן: חיבורם וכפלם של המספרים הממשיים מצד אחד, הפעולות שהוגדרו בהגדרות II ו III (עמ' 145 ו148) מצד שני. טענתנו נופקת מן המשפט 3 האומר, שקיים במקרה מיוחד זה:

$$a_1\times\mathfrak{E}_1+b_1\times\mathfrak{E}_1=(a_1+b_1)\times\mathfrak{E}_1,\quad(a_1\times\mathfrak{E}_1)\cdot(b_1\times\mathfrak{E}_1)=(a_1\cdot b_1)\times\mathfrak{E}_1.$$

והרי נוסחות אלו מבטאות את אפיה האיסומורפי של ההתאמה הנ"ל בין המספרים הממשיים ובין הווקטורים בעלי הצורה $a\times\mathfrak{E}_1$.

להעתק איסומורפי זה נודעת חשיבות לא רק במובן חיובי אלא גם לפי משמעותו השלילית. הלוא ההעתק מביע כי היקפו של שדה כל הווקטורים עולה, במובן מסויים, על היקפו של שדה המספרים הממשיים: בין הווקטורים נשארו כל הווקטורים בעלי הצורה $a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2$, שבשבילם $a_2\neq0$, ולווקטורים אלו אין בני־זוג בין המספרים הממשיים לפי ההעתק המוגדר. בעודף כמותי זה של שדה הווקטורים בהשואה לשדה המספרים הממשיים, נוכל להשתמש עתה כדי להרחיב את מושג המספר אפילו מעבר למספר הממשי. לשם כך עלינו להתאים לכל הווקטורים $a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2$, שבשבילם $a_2\neq0$, סמלים חדשים,

---

1. אל יחשוב הקורא שגם מערכת כל הווקטורים $a_2\times\mathfrak{E}_2$ מהווה שדה! אין הדבר כך, ועל זה מעידה כבר העובדה שבין וקטורים אלו אין יחידה לגבי הכפל.

שנקרא להם בשם „מספרים", ועלינו לקשרם עם המספרים הממשיים בפעולות־חשבון, המתאימות לחיבור ולכפל בין הווקטורים.

תכנית זו פשוטה מאד על גבי הנייר, אבל לכאורה קשה להוציאה אל הפועל. מאין נקח את כל (אינסוף) הסמלים החדשים הנחוצים לנו, ואיך נמצא ניסוח מתאים להגדרת פעולות־החשבון ביניהן? לאשרנו הדבר גם למעשה קל למדי: בהסתמכנו על צורתם הנורמלית החיבורית של הווקטורים, נוכל להסתפק בסמל חדש אחד, תחת התאים לכל הוקטורים הנידונים סמלים חדשים. הסמל החדש הדרוש יהיה בן־זוגו של הווקטור $\mathfrak{E}_2$. כדי למצוא סמל מתאים וטבעי, נצא מזה שלפי הנוסחות (4) בעמ' 152 קיים $\mathfrak{E}_2^2=-\mathfrak{E}_1$. בן־זוגו של $-\mathfrak{E}_1$, לפי ההעתק המוגדר לעיל, הוא המספר -1. לכן, אם נרצה לקיים העתק איסומורפי גם בין המספרים החדשים ובין הווקטורים הנותרים, תהיה לבן־זוגו של $\mathfrak{E}_2$ התכונה שריבועו ישוה ל -1. נסמן אפוא את המספר החדש, אשר יתאים לווקטור $\mathfrak{E}_2$, בסמל $\sqrt{-1}$.

בטרם נצעד הלאה אל סימון כל שאר המספרים החדשים, נקדים שתי הערות. ראשית, נזכור כי אי־האפשרות למצוא בין המספרים הממשיים פתרון למשוואה $x^2=-1$, שימשה נקודת־מוצא בפרק זה. עתה מצאנו פתרון אמנם לא בין המספרים הממשיים, אבל בין הסמלים החדשים שבהם נרחיב את מושג המספר. הסמל שהוא בן־זוגו של הווקטור $\mathfrak{E}_2$ ממלא את המשוואה $x^2=-1$.—למעשה עולה חשיבות המספרים החדשים עד בלי די על מלוי התפקיד הנ"ל, ועל מלוי תפקידים באלגברה בכלל. לפחות דרך דוגמות ורמזים נגלה בפרקים ט' וי"ב טפח מן התחום הענקי שנכבש לתורת הפונקציות ע"י כלי־הזין החדש ששמו: המספר המרוכב.

שנית, הרי בדרך כלל יש שני ערכים שונים לביטוי המופיע בצורת שורש ריבועי. לכן עקבי הדבר לתת לשורש הריבועי מ -1 שני ערכים שונים. והנה זה מתאים למצבנו; שהרי גם בין הווקטורים ישנו, מלבד הווקטור $\mathfrak{E}_2$, עוד וקטור שריבועו $-\mathfrak{E}_1$, הוא הווקטור $\mathfrak{E}_2\times(-1)=-\mathfrak{E}_2$, שבשבילו קיים לפי (2) בעמ' 150:

$$[(-1)\times\mathfrak{E}_2]\cdot[(-1)\times\mathfrak{E}_2]=(-1)^2\times(\mathfrak{E}_2)^2=\mathfrak{E}_2^2=-\mathfrak{E}_1.$$

אמנם יש לטעון: אם כן, הרי יכולנו להתאים את הסמל החדש $\sqrt{-1}$ לווקטור $-\mathfrak{E}_2$, תחת התאימו ל $\mathfrak{E}_2$! טענה זו צודקת, ותשובתנו היחידה היא: לו התאמנו את $\sqrt{-1}$ ל $-\mathfrak{E}_2$, היתה מתעוררת הקושיה: למה לא ל $\mathfrak{E}_2$? יש כאן חופש מלא בידנו להתאים את הסמל הנידון לווקטור (בעל האורך 1) הזקוף למעלה, או לזה הפונה למטה; לשון אחר: לווקטור בעל הקשת 90^0 או לווקטור בעל הקשת 270^0. לחופש זה יש ערך עקרוני שנבארו להלן.

אם נשים $-\mathfrak{E}_2$ במקום $\mathfrak{E}_2$, ייהפך הווקטור $a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times\mathfrak{E}_2$ לווקטור

$$a_1\times\mathfrak{E}_1+a_2\times(-\mathfrak{E}_2)=a_1\times\mathfrak{E}_1-a_2\times\mathfrak{E}_2.$$

בהתאם לקשר האמיץ שביניהם מכנים כל אחד משני הווקטורים האלה בשם „הווקטור הצמוד לשני".

נשוב אל הסמל $\sqrt{-1}$! אין זה נוח ביותר לבטא, לכתוב ולהדפיס תמיד ביטוי מסובך זה, ולכן נעדיף להכניס בעבורו סימון באות אחת. נתפשט המנהג להשתמש לשם זה באות i, הרומז על האות הראשונה של המלה הרומית imaginarius, המתאימה למלה העברית „דמיוני"[1]. במלה זו מסמנים בכל שפות אירופה את המספרים החדשים (או לפחות חלק הגון מהם) — מפני שראו עד לפני מאה שנה סמלים אלו לא כמספרים ממש אלא כעצמים דמיוניים שאינם במציאות.

אחרי שהגדרנו את הסמל i כבן־זוגו של $\mathfrak{C}_2$, ואחרי שכבר מקודם התאמנו את המספר הממשי 1 לווקטור $\mathfrak{C}_1$, נוכל להכניס עתה את כל המספרים החדשים, הנחוצים לנו כבני־זוגם של הווקטורים $a_1\times\mathfrak{C}_1+a_2\times\mathfrak{C}_2$, בצורה:

$$a_1\cdot 1+a_2\cdot i=a_1+a_2 i.^2$$

על התנאי $a_2\neq 0$, שהופיע לעיל, נוכל לוותר; כי גם במקרה $a_2=0$ קיימת ההתאמה בין $a_1+a_2 i$ ל־$a_1\times\mathfrak{C}_1+a_2\times\mathfrak{C}_2$, הלוא היא ההתאמה בין המספר הממשי a_1 לווקטור $a_1\times\mathfrak{C}_1$, שיצאנו ממנה. אותם המספרים החדשים $a_1+a_2 i$, שבשבילם $a_2=0$, נראה אפוא כמספרים ממשיים. את השם „מספרים דמיוניים" נשמור למקרה המיוחד השני, שבו $a_1=0$ ($a_2\neq 0$). לעומת זאת נקרא למספר $a_1+a_2 i$ בכל המקרים — ובפרט במקרה $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$ — בשם מספר מרוכב, מפני שהוא מרוכב כביכול מן המספר הממשי a_1 ומן המספר הדמיוני $a_2 i$. על סמך המשפטים 2 ו 3 נוכל לקבוע:

משפט 4: כדי להגדיר את השויון בין מספרים מרוכבים ואת פעולות־החשבון ביניהם, בהתאם לדרך שבה התאמנו מספרים אלו לווקטורים שבמישור, וכדי להבטיח להתאמה זו אופי איסומורפי, עלינו לקבוע כדלקמן:

א) המספר $a_1+a_2 i$ ייחשב כשווה למספר $b_1+b_2 i$ אם, ורק אם,

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2.$$

ב) סכומם של שני מספרים מרוכבים יוגדר ע"י הנוסחה:

$$(a_1+a_2 i)+(b_1+b_2 i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)i.$$

ג) מכפלתם של שני מספרים מרוכבים יוגדר ע"י הנוסחה:

$$(a_1+a_2 i)\cdot(b_1+b_2 i)=(a_1 b_1-a_2 b_2)+(a_2 b_1+a_1 b_2)i.$$

לפי הגדרות אלו מהווה מערכת המספרים המרוכבים שדה לגבי פעולות החיבור והכפל.

הקשר שבין משפט זה ותורת הווקטורים שתארנוה מקודם מראה

1. כך מעדיף ועד הלשון; יש המשתמשים במלה „מדומה". עיין גם בעמ' 142.
2. הגיוני יותר היה להכניס כאן סימנים חדשים, במקום $+$ ו־$\cdot$; אבל הרי המשפט 4 מצדיק את השימוש בסימנים הרגילים של החיבור והכפל. עיין גם להלן בעמ' 160.

שהגדרת הכפל, כמו שבוטאה ב ג) של המשפט האחרון, היא טבעית, אף־על־פי שצורתה החיצונית עושה רושם מקרי ומלאכותי. הגדרה זו היא מסקנה הכרחית מהגדרת הכפל בין וקטורים מצד אחד, ומן ההתאמה האיסומורפית בין המספרים המרוכבים לווקטורים מצד שני. בסוף הפרק הזה נגע בשאלה, אם אפשר להגדיר את הכפל בין המספרים המרוכבים בצורה „טבעית" יותר, למשל בצורה הדומה להגדרת החיבור.

בהתאם למה שקראנו לעיל בשם „וקטור הצמוד לחברו", נגדיר:

הגדרה V: אם a_1 ו־a_2 מספרים ממשיים כלשהם, ייקרא המספר $a_1-a_2 i$ המספר הצמוד למספר $a_1+a_2 i$.

מה שלמדנו בעמ' 157 על האפשרות להחליף $\mathfrak{C}_2$ ב־$\mathfrak{C}_2$— או i ב־$-i$—, נוכל לנסח גם בצורה אחרת, המאלפת במיוחד בקשר עם המושגים שהכנסנום בפרק החמשי. נתאים את איברי השדה, המכיל את כל המספרים המרוכבים או את כל הווקטורים שבמישור, באופן חד־חד־ערכי לאיברי אותו השדה בעצמו, כך שבן־זוגו של $a_1+a_2 i$ יהיה $a_1-a_2 i$, ז"א בן־זוגו של $a_1\times\mathfrak{C}_1+a_2\times\mathfrak{C}_2$ יהיה $a_1\times\mathfrak{C}_1-a_2\times\mathfrak{C}_2$! ע"י זה יותאם כל מספר ממשי לעצמו, וכל מספר מרוכב לא־ממשי למספר הצמוד לו. ואולם הנוסחאות:

$$(a_1+a_2 i)+(b_1+b_2 i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)i,$$
$$(a_1-a_2 i)+(b_1-b_2 i)=(a_1+b_1)-(a_2+b_2)i,$$
$$(a_1+a_2 i)\cdot(b_1+b_2 i)=(a_1 b_1-a_2 b_2)+(a_2 b_1+a_1 b_2)i,$$
$$(a_1-a_2 i)\cdot(b_1-b_2 i)=(a_1 b_1-a_2 b_2)-(a_2 b_1+a_1 b_2)i$$

מביעות, שעל־סמך ההתאמה הנ"ל יהיה בן־זוגו של סכום שני מספרים מרוכבים דוקא סכום בני־זוגם של המחוברים הללו, ואת העובדה המתאימה כלפי הכפל. זאת אומרת, לפי ההגדרה V בעמ' 114, שההתאמה המוגדרת כאן יוצרת העתק איסומורפי בין שדה המספרים המרוכבים לעצמו. תכונתו המיוחדת של העתק זה היא שההעתק החלקי שלו, המתכוון למספרים הממשיים, הוא העתק זהותי; לשון אחר: ההעתק מתאים כל מספר ממשי לעצמו[1].

מן ההעתק הזה נופק בנקל: אם נתון ביטוי, המכיל מספרים מרוכבים הקשורים ביניהם על־ידי פעולות החיבור והכפל (לרבות חיסור וחילוק), נקבל את הערך הצמוד לערך הביטוי כולו, בהחליפנו כל מספר מרוכב, המופיע בתוך הביטוי, במספר הצמוד, ובחשבנו את ערך הביטוי החדש.

קל לראות שלמעשה אין לנו צורך להבדיל אצל המספרים המרוכבים בין שלושת הסוגים של „כפל", שהשתמשנו בהם כל עוד טפלנו בווקטורים; היינו: כפל בין שני וקטורים, כפל בין שני מספרים ממשיים, וכפל בין מספר ממשי

1. העתק איסומורפי זה הוא אפוא אוטומורפיסמוס, כפי מה שהוגדר בעמ' 103; משתמשים במונח זה ביחס להבדלות ושדות כאחד.

וקטור (עיין בעמ׳ 149/50). שני הסיגים האחרונים של כפל משמשים כאן מקרים מיוחדים של הכפל בין מספרים מרוכבים, אם המספר הממשי a יתואר כמספר המרוכב $a+0\cdot i$. שהרי כללי החשבון שלנו נותנים:

$$(a+0\cdot i)\cdot(b+0\cdot i)=(a\cdot b-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot b)\cdot i=a\cdot b,$$

$$(a+0\cdot i)\cdot(b_1+b_2 i)=(a b_1-0\cdot b_2)+(a b_2+0\cdot b_1)i=a b_1+a b_2 i=a(b_1+b_2 i).$$

בהתאם לכך ולהגדרת החיבור רשאים אנו להבין את תיאורם של המספרים המרוכבים $a_1+a_2 i$ כסכום של המספר הממשי a_1 ושל המספר הדמיוני $a_2 i$; ואף כסכום שתי מכפלות של מספרים מרוכבים, ע״פ הנוסחה:

$$(a_1+0\cdot i)\cdot(1+0\cdot i)+(a_2+0\cdot i)\cdot(0+1\cdot i)$$

$$=[(a_1\cdot 1-0\cdot 0)+(a_1\cdot 0+0\cdot 1)i]+[(a_2\cdot 0-0\cdot 1)+(a_2\cdot 1+0\cdot 0)i]=a_1+a_2 i.$$

מנוסחה זו נסיק: אין צורך להבדיל בין הסימנים $+$, $\cdot$ כסימני הפעולות בין מספרים מרוכבים, ובין אותם הסימנים כחלקים פורמליים שבתוך תיאור המספר המרוכב $a_1+a_2\cdot i$; אלא נוכל להסתפק במובן הראשון של סימנים אלו[1].

גם אצל המספרים המרוכבים יש להשתמש במושגים ובמסקנות שקבלנו בקשר עם תיאור הווקטורים בצורה הנורמלית הכפלית (עמ׳ 154). ערכו המוחלט $r=|a+bi|$ של המספר המרוכב $a+bi$ יהיה $r=\sqrt{a^2+b^2}$; ביתר דיוק: ערכו החיובי של שורש זה. (אם $a=b=0$, קיים $0=|a+bi|$.) הקשת של המספר המרוכב $a+bi$ היא אחת מן הזויות φ, שבשבילן $\tan\varphi=\frac{b}{a}$[2]. בהסתמכנו בייחוד על הנוסחות (AM), (5), (7) (עמ׳ 155/6), נקבל:

משפט 5: יסמן $r=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|a_1+a_2 i|$ את ערכו המוחלט של המספר המרוכב $a_1+a_2 i\,(\neq 0)$, וφ את קשתו, כך ש$\tan\varphi=\frac{a_2}{a_1}$; אז יש לתאר את המספר המרוכב בצורה

$$a_1+a_2 i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

אם נתון באותו האופן מספר מרוכב שני $b_1+b_2 i=s(\cos\psi+i\sin\psi)$, אפשר לכפול את שני המספרים בצורה המבליטה את תוכן ההגדרה III (עמ׳ 148):

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi+i\sin\psi)=r s\left[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\right].$$

---

1. בדרך כלל נוותר, גם כאן גם בפרקים הבאים, על סימן הכפל $\cdot$, ונכתוב $a\,b$ תחת $a\cdot b$, כמו שזה נהוג (ונעשה כבר כמה פעמים בספר זה).

2. בהשתמשנו ב״פונקציות הציקלומטריות״ (עיין ב § 3 של הפרק התשיעי), נוכל לכתוב: $\arc(a+bi)=\arctan\frac{b}{a}$. אמנם השימוש בנוסחה זו דורש זהירות־מה מפני רב־ערכיותן של הפונקציות. — אם $a=0$ ו$b\neq 0$, אז φ 90^0 או 270^0 וכו׳; וכן במשפט 5.

ערכה המוחלט של המכפלה הנו אפוא מכפלת הערכים המוחלטים[1], וקשתה סכום הקשתות של הגורמים. בייחוד קיים: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

הנוסחה האחרונה, שמוצאה מתחילת המאה הי״ח, ידועה בשם: נוסחת מוֹאָבר[2]. הוכחת תכנה בדרך טריגונומטרית טבעית פחות ומסובכת יותר.

המשפט שלפיו ערכה המוחלט של מכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים של הגורמים — גם במקרה שאחד הגורמים שווה ל0 — קיים כמובן גם בשביל מספרים ממשיים a; כאן לפי הגדרתנו הכללית:

1) $|a|=a$, אם $a\geqq 0$; 2) $|-a|=|a|$[3].

בצורה פשוטה פחות מתקבל היחס בין ערכו המוחלט של סכום (או הפרש) ובין ערכיהם המוחלטים של המחוברים — הן אצל מספרים מרוכבים, הן בפרט אצל מספרים ממשיים. תחת הוכיח את היחס ההוא ע״י חשבון, נסתמך, דרך ההסתכלות, על התיאור הגיאומטרי בצורת וקטורים. הציור 6 (עמ׳ 145) מביע בשפת חיבור־הווקטורים:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{C},\qquad \mathfrak{C}-\mathfrak{A}=\mathfrak{B}.$$

והנה משפטים גיאומטריים ידועים (המתאימם לכך שהקו הישר הוא ״הדרך הקצרה ביותר״ בין שתי נקודות) אומרים: סכום ארכיהן של כל שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית; הפרש ארכיהן של כל שתי צלעות במשולש קטן מאורך הצלע השלישית. ברצותנו לכלול את המקרה של משולש ״אי־אמתי״ שכל שלוש צלעותיו נמצאות על קו ישר אחד, עלינו לשים כאן ״גדול או שווה״ במקום ״גדול״, ו״קטן או שווה״ במקום ״קטן״. לכן, בשים לב לציור 6, מגיד המשפט הראשון הנ״ל: סכום ערכיהם המוחלטים של שני וקטורים שווה או גדול מערכו המוחלט של סכום הווקטורים; והמשפט השני: ההפרש בין ערכיהם המוחלטים של שני וקטורים שווה או קטן מערכו המוחלט של הפרש הווקטורים. בעברנו מן הווקטורים למספרים המרוכבים המותאמים, ובכללנו (אצל הסכום) מיד את המקרה של מספר סופי כלשהו של מחוברים על־סמך אינדוקציה שלימה, נוכל לנסח:

משפט 6: ערכו המוחלט של סכום (של מספרים ממשיים או מרוכבים) שווה או קטן מסכום ערכיהם המוחלטים של המחוברים; ערכו המוחלט של הפרש שווה או גדול מהפרש ערכיהם המוחלטים של המחוסר והמחַסר[4]. כדי לבטא זאת בנוסחות, נסמן ב$A_1, A_2, \ldots$ מספרים מרוכבים (לרבות ממשיים), ונקבל:

---

1. בצורת נוסחה: $|(a_1+a_2 i)\cdot(b_1+b_2 i)|=|a_1+a_2 i|\cdot|b_1+b_2 i|$.

2. A. de Moivre

3. קל להסיק את הנוסחה $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ בשביל מספרים ממשיים גם ישר מהגדרת הכפל בין מספרים חיוביים, שליליים ו0.

4. זה נכון אם נבחר במחוסר ובמחסר כאשר נבחר. אמנם חשיבות נודעת למסקנה רק אם נבחר כך, שערכו המוחלט של המחוסר גדול מזה של המחסר.

$$|A_1+A_2|\leq|A_1|+|A_2|,|A_1+A_2+\dots+A_n|\leq|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|,$$
$$|A_1-A_2|\geq|A_1|-|A_2|.$$

מה שנוגע לפעולה של העלאה לחזקה בתחום המספרים המרוכבים, הרי ברורה משמעות החזקה A^m, אם A מספר מרוכב כלשהו וm מספר שלם. כי בשביל מספר טבעי m נקבל מכפלה של מספרים מרוכבים; ובשביל m שלילי נסתמך על ההגדרה הרגילה אצל המספרים הממשיים (אם $A\neq 0$): $A^{-m}=\frac{1}{A^m}$. מלבד זה נגדיר $A^0=1$, אם $A\neq 0$.

ואולם ברצותנו להרחיב את הגדרת החזקה A^B למקרה של מעריך B כלשהו, או לפחות למקרה של מעריך ממשי רציונלי, ניתקל בקשיים ידועים. כאשר נראה בפרק התשיעי, המוקדש לתורת הפונקציות, יש כבר קושי בהגדרת $A^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{A}$ לn טבעי. נוותר אפוא על הגדרת החזקה הכללית אצל מספרים מרוכבים, ונסתפק בקביעת העובדה שאפשר להגדיר תמיד — אם גם לא באופן חד־ערכי — את החזקה A^B, בתנאי ש$A\neq 0$. (השוה סוף ה§3 של הפרק התשיעי.)

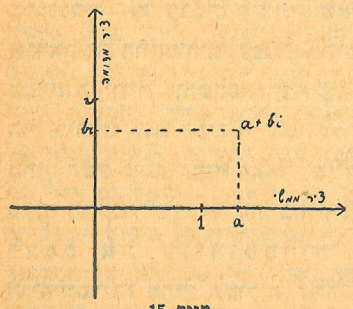
נסיים את הנושא שלפנינו בשאלה, באיזה היקף יפה כאן כוח העקרון של "יציבות החוקים הפורמליים" (השוה בעמ' 70). בעברנו מן המספרים הממשיים אל המספרים המרוכבים הצלחנו להשאיר בתקפם את כל החוקים הפורמליים של החיבור והכפל; לשון אחר: קבלנו גם כאן שדה — מטרה שלא נוכל להשיגה בהרחיבנו את מושג המספר מעבר למספרים המרוכבים, במובן שיצויין להלן (עמ' 172). ואף־על־פי־כן לא קיימנו את כל החוקים הפורמליים, שיש להם תוקף במערכת המספרים הממשיים. הכוונה היא לחוקי הסדר בין מספרים. בין כל שני מספרים ממשיים a וb קיימת ה"טריכוטומיה"[1], שa או קטן מb או שווה לו או גדול ממנו; מלבד זאת קיימים חוקים הקושרים את הסדר בפעולות־החשבון (קוראים להם בשם "חוקי המונוטוניה"), כמו החוקים: "$a<b$ גורר $a+c<b+c$", או "$a>0$ ו$b<c$ גוררים $a\cdot b<a\cdot c$", או כמו "עקרונו של ארכימדס" שעליו נרחיב את הדיבור כשנדון ביסודות הגיאומטריה (חלק חמישי; השוה גם עמ' 88 ועמ' 169). אין אפשרות לקיים כל תכונותיהם אלו של המספרים הממשיים גם בתחום המספרים המרוכבים. אם עלינו לוותר אפוא על חלק מתכונות המספרים הממשיים, הרי יש כמובן דרכים שונות כדי לקיים אחדות ולוותר על אחרות. ברם יש לקבוע הבדלים ידועים בחשיבותן של התכונות השונות, ובפרט של תכונות הסדר; יתכן, למשל, לתת מקום בראש לעקרון ארכימדס. בהתחשב עם כמה גורמים, מתברר, שהדרך הטבעית להכניס יחס של סדר גם לתחום המספרים המרוכבים היא: לסדר את המספרים לפי ערכם המוחלט: ז"א לראות את a כ"קטן" מb אם $|a|<|b|$. ואולם בעשותנו כך, נשאיר אמנם בתקפו

1. $\tau\rho\iota\chi o\tau o\mu\acute{\iota}\alpha$ = חיתוך או חלוקה לשלושה מקרים.

את אפיו האי־רפֶלֶכסיבי, האַסימטרי והטרַנסיטיבי של כל יחס סודר[1], אבל לא תישאר בתקפה הטריכוטומיה שצוינה לעיל; שהרי שני מספרים מרוכבים בעלי ערך מוחלט שווה וקשתות שונות, הנם שונים ביניהם, ובכל זאת אין אחד מהם "קטן" מחברו, לפי הגדרתנו. על פי הסידור הזה קיים מספר שהוא המספר הקטן ביותר: המספר המרוכב 0; זהו בניגוד למספרים השלמים או הרציונליים וכו', שבינהם אין מספר הקטן מכל שאר המספרים. (ההגדרה הנ"ל נותנת לנו מה שקוראים "סידור חלקי" של המספרים המרוכבים.)

בסעיף זה הכנסנו את מערכת הווקטורים והתאמנו להם סוג חדש של מספרים, הם המספרים המרוכבים. ואולם היינו מגיעים אל אותה המטרה גופא, לו יצאנו לא מן הווקטורים במישור אלא מכל הנקודות שבמישור. המעבר מן השיטה הראשונה לשניה קל למדי. כנקודת־המוצא המשותפת לכל הווקטורים שבמישור נבחר בנקודה מטויימת כלשהי 0, ולכל וקטור נתאים את נקודת־הסוף שלו. התאמה זו בין הווקטורים לנקודות המישור היא בוודאי חד־חד־ערכית; בפרט מותאמת הנקודה 0 עצמה לווקטור (0). את האיסומורפיות הדרושה לנו לגבי פעולות־החשבון, נשיג בדרך פשוטה מאד, והיא: הגדרה מתאימה של פעולות אלו. נגדיר אפוא: אם A וB שני וקטורים היוצאים מ0, וA וB נקודות־הסוף שלהם, נבין ב$A+B$ את נקודת־הסוף של הווקטור $A+B$, וב$A\cdot B$ את נקודת־הסוף של הווקטור $A\cdot B$. הואיל ויחס האיסומורפיות הוא טרנסיטיבי, מתברר כי שדה כל הנקודות שבמישור בקשר עם הפעולות המוגדרות הנו איסומורפי גם לשדה המספרים המרוכבים.

תיאור הסתכלותי זה של המספרים המרוכבים ע"י נקודות המישור נופל אמנם מתיאורם ע"י הווקטורים, במה שנוגע להגדרתן ההסתכלותית של פעולות־החשבון; כי בבטאנו את ההגדרות בקשר עם הנקודות עצמן, נקבל נוסח מסובך במקצת. מאידך גיסא, עצם ההתאמה בין הנקודות ובין המספרים המרוכבים הנה הסתכלותית באופן מיוחד: כמו שהתאמנו למספרים הממשיים את הנקודות שבקו ישר, היינו: רָצָף בעל מימד אחד, כך נתאים עתה למספרים המרוכבים את כל נקודות המישור, היינו רצף בעל שני ממדים. אם נצא מקו המספרים הממשיים ונקרא לו בשם "הציר הממשי" (עיין בציור 15), אז נעלה אָנך על ציר זה בנקודה המתאימה למספר הממשי 0. האנך כולו, משני צדי הציר הממשי, ייקרא "הציר הדמיוני" או "המדומה", ונקודותיו תותאמנה למספרים הדמיוניים bi, בעבור b על כל המספרים הממשיים. (נוכל



ציור 15

1. בהתאם למה שהוגדר בעמ' 8 ו72 הכוונה לתכונות הבאות של כל יחס סודר $<$, ובפרט של סדור המספרים הרציונליים והממשיים לפי גדלם (עמ' 88 ו132): א) אין $a<a$ בשביל שום a; ב) $a<b$ ו$b<a$ סותרים זה את זה; ג) $a<b$ ו$b<c$ גוררים אחריהם $a<c$.

להתאים, למשל, כך שלכל b חיובי ייצא bi למעלה מן הציר הממשי, ולכל b שלילי למטה ממנו.) לשם נוחיות נעשה את היחידות בשני הצירים שוות, כך שהנקודה 1 שבציר הממשי תהיה רחוקה מ 0 כרחוק הנקודה i שבציר המדומה מ 0. לפי זה מתאימה למספר המרוכב $a+bi$ נקודת־החיתוך, הנוצרת בבנותנו את האנך בנקודה a של הציר הממשי ואת האנך בנקודה bi של הציר המדומה. תיאור הסתכלותי זה של המספרים המרוכבים $a+bi$ מועיל במידה רחבה אצל רוב הבעיות הקשורות במספרים המרוכבים, בייחוד ב„תורת־הפונקציות". על סמך מאמרו של גאוס שהוזכר בעמ' 144, קוראים בשם „המישור של גאוס" למערכת של כל נקודות המישור, אם הן מופיעות כבנות־זוגם של המספרים המרוכבים.

§3. ביסוס אריתמיטי של המספרים המרוכבים.

ב§2 ביססנו את המספרים המרוכבים, בהתאימנו להם עצמים הניתנים לנו לכאורה ע"י ההסתכלות; היינו: הווקטורים שבמישור, או נקודות המישור. הצדקת המספרים המרוכבים היתה תלויה בזה שיכולנו לומר: לכל יחס בין מספרים מרוכבים מתאים יחס מסויים בין וקטורים; לכן, אילו היתה סתירה ביחס בין המספרים, כי אז היינו מקבלים סתירה „מקבילה" בין הווקטורים. לפיכך, הואיל והווקטורים עם פעולות־החשבון שביניהם הנם הסתכלותיים ואינם ניתנים אפוא לסתירה, גם לא תצא לעולם סתירה מתוך החשבון במספרים המרוכבים. הצדקה זו אינה שונה בעקרון מן השיטה, המצדיקה את סיפוחם של המספרים השליליים אל המספרים הטבעיים ע"י התאמת המספרים החיוביים לרכוש והמספרים השליליים לחובות.

ואולם כל השיטה הזאת, אעפ"י שהיא מאלפת ומתקבלת על הדעת, לא תוכל להשביע את רצוננו במה שנוגע לאפיה העיוני, ל„טהרת השיטה". המתימטיקה, עם היותה קשורה בעולם החיצוני כמה קשרים אמיצים ומועילים, היא בראש וראשונה מדע עיוני המבוסס על שכלנו והגיונו. לפיכך, ממה נפשך: או שנראה את הווקטורים כעצמים הנתונים לנו מן העולם החיצון, אז ביססנו ענף מתימטי—תורת המספרים המרוכבים—על עצמים חיצונים שאינם מתאימים לאפיה העיוני של המתימטיקה; או שנראה את הווקטורים כעצמים מתימטיים גם הם, היינו כעצמים הלקוחים מן הגיאו־מטריה העיונית—והשקפה זו צודקת—אם כך מה הועלנו ב„הצדקה" שבסעיף הקודם? הרי ביססנו ענף מתימטי ידוע על ענף מתימטי אחר; ואם יש לנו צורך בהצדקה, מתוך חשש שמא הענף האחד (של המספרים) מכיל סתירה, למה לא נחוש גם לסתירה בענף הווקטורים? אדרבה, בחלקים האחרונים של ספר זה (כרך שני) נראה, שעדיף לבסס את הגיאומטריה על תחום המספרים ולא את זה על הגיאומטריה! מתוך נמוקים אלו—נמוקים, שאמנם לא הרגיש בהם גאוס והחוקרים שקדמוהו, אבל כן בני דורו קושי והמילטון—יש להעדיף שיטה טהורה יותר, המצדיקה את המספרים המרוכבים על־סמך תורת המספרים הממשיים, באמת השתמשנו בשיטה מעין זו בפרק הרביעי, כשהגדרנו והצדקנו את המספרים

השליליים והרציונליים; במובן שונה במקצת גם בפרק הששי שבו ביססנו את מושג המספר האירציונלי. בפרק הרביעי הכנסנו פעם בפעם סוג־מספרים חדש כזוגות של מספרים שידענום מקודם. הבה נראה ששיטה זו של יצירת־זוגות כחה יפה גם לביסוס המספרים המרוכבים! ולא עוד אלא השיטה נוצרה דוקא לשם המטרה הזאת ע"י המילטון. השיטה נוחה ביותר במקרה זה, הואיל ועל־סמך צורתה הפשוטה של הגדרת השויון (הגדרה II, עמ' 166) אין צורך ביצירת מחלקות של זוגות, כמו בעמ' 74 ו131.

אולי יטען הקורא מראש: איך אפשר להצדיק סוגים כה שונים של מספרים כמו, למשל, המספרים הרציונליים והמספרים המרוכבים, לפי אותה השיטה, שיטת הזיווג? התשובה על שאלה זו ניתנה כבר בעמ' 79, והיא: יצירת זוגות כשהיא לעצמה עדיין אינה אומרת הרבה; אפיה האמיתי של שיטת הזיווג בכל מקרה מתבטא רק בהגדרתם של השויון ופעולות־החשבון, והגדרות אלו הרי הן שונות בכל מקרה ומקרה.

עוד הערה קודמת: את המספרים השליליים והרציונליים קבלנו כזוגות של מספרים פשוטים יותר, ואילו את המספרים הממשיים אך כסדרות אינסופיות של מספרים רציונליים. העובדה שנצליח לקבל גם את המספרים המרוכבים כזוגות של מספרים ממשיים, תוכיח שהמעבר מן המספרים הממשיים אל הדמיוניים והמרוכבים הנהו בעצם פשוט מהשקפה הגיונית; איננו מסובך מהגדרת המספרים הרציונליים, למשל, ופשוט לאינסוף כנגד הגדרת המספרים הממשיים. אנו רואים מזה שהדיון מהשקפה הגיונית ומתימטית רחוק מן הדיון ההסתכלותי כרחוק מזרח ממערב. אופי המספרים הממשיים (החיוביים) נראה כפשוט וכמתקבל על הדעת — אמנם לא מהשקפה אריתמיטית — כבר לפני אלפי שנים, על־סמך התאמתם ההסכלותית לגדלים הגיאומטריים, ונושא זה לא הביא לידי חששות וספקות — פרט לתקופה היוונית — עד המחצית השניה של המאה הי"ט; לעומת זאת ניתן למספרים השליליים, ועוד יותר למרוכבים, השם של מספרים „אבסורדיים", ונבצרה מהם זכות־קיום אמיתית עד לפני מאתיים שנה ופחות מזה. אעפ"י כן יצדיקונו בוודאי הדורות שיבואו אחרינו אם נאמר: הצעדים השונים של הרחבת מושג־המספר הנם ענין פשוט וקל, פרט לצעד המביא לידי מערכת המספרים הממשיים; ואמנם צעד זה מהווה אחת הבעיות הקשות ביותר של המתימתיקה ושל תורת־ההגיון, בעיה שמפתרונה המלא אנו רחוקים היום אולי לא פחות ממה שרחקנו לפני אלפיים שנה. אם נשקיף מאופק כזה על ביסוס המספרים השונים הנהוג בבתי־הספר (ושהוא הכרחי שם לפי יכולת הקליטה של התלמיד הממוצע), אז מתברר עד כמה כבר התרחקנו והתרוממנו במשך הפרקים הקודמים מעל מה שנקרא „השכל הבריא של איש פשוט".

נפנה עתה אל ביסוס אריתמיטי טהור של המספרים המרוכבים, בהכניסנו

אותם כזוגות של מספרים ממשיים! הגדרותיהם של השויון ופעולות־החשבון תתאמנה לאלה שקבלנון בסעיף הקודם, לפי תכונות הווקטורים שבמישור.

הגדרה I: זוג מסודר (a,b) של מספרים ממשיים כלשהם ייקרא מספר מרוכב; בייחוד ייקרא המספר המרוכב (a,b) ממשי אם $b=0$, ודמיוני אם $a=0$ ו $b\neq 0$.

הגדרה II: השויון $(a,b)=(c,d)$ קיים אם, ורק אם, קיימים השויונות בין מספרים ממשיים: $a=c$, $b=d$.

הגדרה III: כסכום שני המספרים המרוכבים (a,b) ו (c,d) יוגדר המספר המרוכב $(a+c,b+d)$.

הגדרה IV: כמכפלת שני המספרים המרוכבים (a,b) ו (c,d) יוגדר המספר המרוכב $(ac-bd,\ ad+bc)$.

הערה: ההגדרות I, II, III הנן בעלות הצורה הפשוטה ביותר שיש להעלותה על הדעת. בפרט הנן פשוטות מן ההגדרות המתאימות A עד C אצל המספרים הרציונליים, שהכנסנום כזוגות של מספרים שלמים (עמ' 83/4)[1]. ההגדרה II עולה בפשטותה אף על ההגדרה המתאימה *I של השויון אצל הזוגות ששמשו לנו באי־כחם של המספרים השלמים (עמ' 76). אמנם ההגדרה IV היא מסובכת, וצורתה היתה מפתיעה אילו הוטלה עלינו ההגדרה כצו שאין להרהר אחריו. ואולם הלא ב§2 (הגדרה III ומשפט 3, עמ' 148 ו 153) למדנו, מהו היסוד הטבעי המדריכנו להגדיר את הכפל כאשר הגדרנוהו, ובסעיף הבא יתלבן יותר אפיה ההכרחי של הגדרה זו.

בקשר עם מה שלמדנו בפרקים הקודמים, ובפרט בסעיף הקודם, לא יקשה על הקורא להוכיח שהזוגות שהכנסנום יוצרים שדה לפי ההגדרות II—IV. בייחוד יהיה הזוג $(0,0)$ האיבר הניטרלי של החיבור, $(1,0)$ האיבר הניטרלי של הכפל, $(-a,-b)$ האיבר הנגדי ל (a,b) לגבי החיבור, $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ האיבר ההפוך ל (a,b) לגבי הכפל (בתנאי $(a,b)\neq(0,0)$). השדה מקיף כשדה חלקי את מערכת כל הזוגות בעלי הצורה $(a,0)$, ושדה חלקי זה הוא איסומורפי לשדה המספרים הממשיים, כפי שנראה בהתאימנו למספר הממשי a את המספר המרוכב $(a,0)$. משום כך קראנו למספרים מרוכבים מיוחדים אלו בשם „ממשיים". לכן נוכל לכנות את שדה כל הזוגות הרחבה לשדה המספרים הממשיים, באותו המובן והזכות כבפרקים ד', ו', ובסעיף הקודם.

הבה נתן לזוגות שלפנינו תיאור נורמלי פשוט כפי שאפשר, בקחתנו את המספרים הממשיים כנקודת־המוצא! לשם כך נסמן מכאן ואילך את המספר המרוכב הממשי $(a,0)$ בסימן a עצמו; אי־הבנה לא תוכל לצמוח מזה, אם נקבע

1. ההגדרה I פשוטה במובן זה, שאין שם כל הגבלה לערכיהם של חלקי הזוג a ו b; ואילו אצל המספרים הרציונליים הוכרחנו להתנות: $b\neq 0$.

שנעסוק אך ורק במספרים מרוכבים, ולא במספרים ממשיים במובן הפרק הקודם. יתברר שנוכל לסמן את המספרים המרוכבים כולם בעזרת אוצר־המספרים $(a,0)$, אם נוסיף על אוצר זה עוד איבר חדש יחיד, והוא המספר $(0,1)$. על פי ההגדרה IV קיים: $(-1,0)=(0,1)\cdot(0,1)$; ז"א המכפלה היא המספר המרוכב הממשי שהסכמנו לסמנו ב -1. נכניס גם בשביל המספר $(0,1)$ סימון קצר; נסמנו ב i! (על פי תכונתו הנ"ל היינו יכולים לסמנו גם ב $\sqrt{-1}$.) לפי זה קיים בשביל כל מספר מרוכב (a,b):

$$(a,b)=a+bi;$$

שהרי חישוב הביטוי $(0,1)(b,0)+(a,0)$ נותן את הערך (a,b) על פי ההגדרות III ו IV. קבלנו אפוא מתוך הגדרותינו את מה שקראנו ב§2 (עמ' 151 ו 158) „הצורה הנורמלית החיבורית" של וקטור, או של המספר המרוכב המתאים לו.

לפי זה קל לנסח בשפת הזוגות של מספרים ממשיים את כל מסקנות הסעיף הקודם לגבי מספרים מרוכבים. לא כדאי לעשות זאת בפרוטרוט, כי לא נקבל כל חידוש. נרשום רק שערכו המוחלט של הזוג (a,b) הוא המספר הממשי (הלא־שלילי) $\sqrt{a^2+b^2}$, וה tan של $\arc(a,b)$ הוא $\frac{b}{a}$.

לבסוף יש לציין שנוכל לראות את מסקנותינו האחרונות גם מהשקפה אחרת, הסוטה באופן פורמלי מן ההשקפה הנוכחית. הכוונה לפעולה שהכנסנוה ב§2 (עמ' 150) כ„כפל" של וקטור במספר ממשי, ושנכנה אותה כאן באופן עקבי „כפל הזוג (a,b) במספר ממשי". נגדיר פעולה זו ע"י הנוסחה:

$$c\times(a,b)=(c\cdot a,c\cdot b).$$

ההגדרה הזאת נראית גם כאן טבעית, הואיל ונוכל לסמן את הסכום $(a,b)+(a,b)=(2a,2b)$ ב $(a,b)\times 2$, וכן לגבי $(a,b)\times 3$, $\frac{1}{2}\times(a,b)$ וכו'. נכניס סימונים מקצרים — לא (כמו לעיל) לכל הזוגות הממשיים $(a,0)$ ולזוג $(0,1)$, אלא רק לשני הזוגות המיוחדים $(1,0)$ ו $(0,1)$, בקבענו:

$$(1,0)=e_1\ ,\ (0,1)=e_2.$$

על־סמך ה„כפל" במספרים ממשיים שהגדרנוהו כאן, נקבל לפי ההגדרה III:

$$a\times e_1+b\times e_2=a\times(1,0)+b\times(0,1)=(a,0)+(0,b)=(a,b).$$

מצאנו עוד פעם, לאור השקפה חדשה, את הצורה הנורמלית החיבורית. יחד עם זה מצאנו אפשרות לבטא את המספרים המרוכבים ע"י המספרים הממשיים במובנם האמיתי (לא המספרים המרוכבים הממשיים!), בהכניסנו אך שני סמלים חדשים e_1 ו e_2. e_1 הוא יחידת השדה ומתאים אפוא למספר הממשי 1; היחס האפייני בשביל e_2 הוא: $e_2^2=(-1,0)=-e_1$, ז"א: e_2 הנהו אחד הערכים של $\sqrt{-e_1}$. (הערך השני של שורש ריבועי זה הוא $-e_2$.)

בשיטה שהשתמשנו בה בסעיף זה כדי לתאר את המספרים המרוכבים כזוגות של מספרים ממשיים, הסתמכנו אמנם על הסעיף הקודם, בייחוד במה שנוגע

להגדרה IV. אבל האסמכתה היתה אך פסיכולוגית ולא הגיונית; בלי הקשר עם §2 היינו מתקשים להגיע אל ההגדרות שעליהן ביססנו בנינו בסעיף זה, ובפרט אל הגדרת הכפל. ואכן מהשקפה הגיונית טהורה נוכל לומר: אם שיחק לנו המזל ומסר לידנו את ההגדרות II—IV, יכולנו לבסס עליהן את תורת הזוגות ה„מרוכבים" ולהכיר שיש כאן הרחבת המושג של מספר ממשי; בפרט, הרחבה שבתוכה יימצא פתרון, למשל, למשוואה $x^2+1=0$. והלוא העדר פתרון למשוואה זו בין המספרים הממשיים, הוא שהמריצנו בפרק הזה להרחיב את מושג־המספר הרחבה נוספת. מהשקפה הגיונית פתרנו אפוא באופן משביע רצון את הבעיה, לבסס את המספרים המרוכבים, מבלי הלכד במוקשים שהעמידונו ב §§ 1 ו2 לפני הברירה: או להכניס מתוך שרירות־לב עצמים חדשים כדי לפתור בעיה חסרת־פתרון, ולהגיע כך למספרים שהשם „מספר דמיוני" נאה ויאה להם; או להשליך יהבנו על עצמים גיאומטריים ולמצוא בהם מנוס ומפלט על מנת להצדיק את הרחבת מושג־המספר, תחת הצדיקה בתחום המספרים עצמם.

ביסוס אריתמיטי אחר של המספרים המרוכבים ינתן במלואים לחלק זה.

עד כמה חשוב ההישג של ביסוס הגיוני ברור למספרים הדמיוניים והמרוכבים — הישג שמתוך הרגל אנו נוטים לזלזל בערכו — נראה בזכרנו את אמרתו המוזרה של ליבניץ, שהיה אולי המלומד המקורי והמקיף ביותר של התרבות המערבית אחרי תקופת היוונים. ליבניץ, שהכיר מתוך מחקריו הוא ומחקרי בני דורו את התועלת הענקית שלשימוש במספרים המרוכבים, ואשר, מאידך, לא הצליח למצוא יסוד הגיוני המצדיק את השימוש במספרים אלו, כתב: „המספרים המרוכבים הם מנוס עדין ונפלא של רוח השכינה, כמעט דוחי (אמפיביום) בין היש ובין האין."[1] אין להתפלא כי הצדקה וביסוס הגיוני כזה שערכנוהו כאן, בא תמיד a posteriori, לאחר מעשה. דרכי המצאתם של מושגים חדשים מלכתחילה הנן משולבות יותר, ולא נקיות והגיוניות כל כך. הן נוצרות ע"י כוח ספון ונפלא הנמצא כביכול בתוך „החשבון המתימטי" עצמו: כוח הפועל ומחדש ביתר מעוף ועדינות ממחשבות בני האדם, והמגלה גם מחוץ למתימטיקה גופא לפעמים את תקפו וגבורתו; למשל, בתורת המבנה האטומיסטי של החומר, שנוצרה בתקופה האחרונה של הפיסיקה.

§4. הבעיה של הרחבה נוספת למושג־המספר.

הרחבנו בחלק שני זה, דרגה אחרי דרגה, את מושג־המספר: מן המספרים הטבעיים אל השלמים ואל הרציונליים, מהם אל המספרים הממשיים, ובפרק הזה — עד המספרים המרוכבים. מתעוררת השאלה, אם יש סוף להתקדמות זו, ושאלה זו קשורה קשר אמיץ עם עקרון היציבות של החוקים הפורמליים. אמנם שאפנו בכל

1. גם Ch. Huygens, חוקר מפורסם מאותה תקופה, אומר (בקשר עם נוסחה המכילה ביטויים מרוכבים): „ישנו כנו דבר־מה טמון שלא נוכל להבינו."

צעד וצעד לכך שישארו בתקפם, בתוך התחום המורחב, החוקים הפורמליים השוררים בתחום הקודם; אבל מטעמים עקרוניים שכבר בארנום, יכולנו להצליח בזה רק לגבי חלק מן החוקים הללו, היינו לגבי ה„חשובים" ביניהם. נסתכל לאור שאיפה זו בתחום המספרים הממשיים ובמעבר מהם אל המספרים המרוכבים, ואחר כך בבעית הרחבה נוספת מעבר למספרים המרוכבים! (השוה גם בעמ' 162.)

כאשר ראינו בפרק הששי, מהווה תחום המספרים הממשיים שדה לגבי החיבור והכפל, יחד עם זה מוגדר בתוך התחום „סדר" מסוים, בעל אותן התכונות המציינות כל יחס סודר במתימטיקה (עיין בעמ' 163). כמו כן קיימות תכונות פשוטות הקושרות את יחס־הסדר בפעולות־החשבון. הן בעיקר שתי התכונות: $a+b<a+c$ גורר $b<c$; $a\cdot b>0$ ו $b>0$ גוררים $a>0$. מלבד זאת מתמלא עקרונו של ארכימדס, הקושר גם הוא את יחס הסדר בחיבור, והאומר: „אם a ו b חיוביים, ישנו מספר טבעי n כך, שהסכום $a+a+\ldots+a$ (n פעמים) גדול מ b." עקרון זה, שהוא בעל ערך רק במקרה $a<b$, מביע שאין בין גדלי התחום (ז"א בין המספרים הממשיים החיוביים, ולכן גם בין הקטעים שבגיאומטריה) שני גדלים שאחד מהם יהיה גדול לאין־סוף ביחס לחברו; אדרבה, ע"י חיבור ממושך של הקטן ביניהם אפשר להגיע תמיד אל גודל, העולה על הגדול שבין שני הגדלים הנתונים.

הילברט[2] גילה שאפשר לקבוע בשלמות ע"י התכונות הנ"ל (תכונות השדה והסדר) את תחום המספרים הממשיים, באופן זה: תחום המספרים הממשיים הנהו התחום המקיף ביותר שבו מתמלאות כל התכונות הנ"ל; לשון אחר: אי־אפשר להוסיף על כל איבריו של תחום המספרים הממשיים עוד אברים כך, שגם בתחום המורחב תתמלאנה כל התכונות הנידונות. („עקרון השלמות".) בהשתמשנו במושג האיסומורפיות נוכל לנסח זאת כך: תחום־איברים המקיים את כל התכונות הללו יחד עם עקרון השלמות, הנהו איסומורפי לתחום המספרים הממשיים, הן לגבי פעולות־החשבון הן לגבי הסדר[3]. הוכחת המשפט הזה מטריחה למדי, ולא נוכל להביאה בספר זה.

אולי יטען אחד הקוראים: איך יוכל משפט זה, „משפט־השלמות", להיות נכון? הלוא הרחבנו למעשה בפרק הזה את תחום המספרים הממשיים, בהכניסנו לתוכו את כל המספרים המרוכבים. טענה זו איננה צודקת. אמת שתחום המספרים המרוכבים גם הוא שדה לגבי החיבור והכפל, אבל אינו ניתן להגדרת סדר המקיימת את התכונות שהזכרנון לעיל. כבר בסוף ה§2 הדגשנו, שאם נסדר את המספרים

1. השוה גם בעמ' 162. בעיקר נמצא העקרון הזה כבר אצל Eudoxos.
2. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (1900); מודפס גם־כן כהוספה ששית בספר "Grundlagen der Geometrie" של הילברט. (עיין בעמ' 13.) תיאור מפורט של נושא זה נמצא בספרו של Loewy שהוזכר בעמ' 126.
3. לתכונת האיסומורפיות לגבי הסדר רגילים לקרוא „דמיון בין התחומים".

המרוכבים לפי ערכם המוחלט, תתבטל התכונה היסודית: שמכל שני מספרים שונים אחד קטן מחברו. אמנם אפשר להגדיר יחס סודר אחר, כך שתכונה יסודית זו תשאר בתקפה. נוכל להגדיר, למשל, בהסתמכנו על הסדר הרגיל בין מספרים ממשיים: מן המספרים $a+bi$ ו $a'+b'i$ ייקרא הראשון „קודם" לשני, אם $a<a'$; או במקרה $a=a'$, אם $b<b'$. ע"י כך נקבל יחס סודר, שעל פיו מכל שני מספרים שונים יקדם אחד לחברו, ואשר יהיה גם טרַנסיטיבי. אולם, למשל, אין עקרונו של ארכימדס מתמלא לגבי יחס זה, אף אם נתנה כי a ו b חיוביים. לפי הגדרתנו קיים, למשל: $i<1$; וכן גם המספרים $2i$, $3i$, $4i$, ... , בדרך כלל: ni, כולם קטנים מ 1. לשון אחר: ע"י חיבור ממושך של i לא נוכל להגיע עד הערך 1 או לעלות עליו. על פי הסדר הנ"ל יהיה i „קטן לאין־סוף" ביחס ל 1, או 1 „גדול לאין־סוף" ביחס ל i. גם כל נסיון אחר לסדר את המספרים המרוכבים כך, שתתמלאנה מלבד תנאֵי השדה גם כל תכונות הסדר הנ"ל, מביא לידי כשלון.

מי שמוצא דוגמה זו של „מערכת גדלים לא־ארכימידית" מלאכותית במקצת, ישים על לבו שישנן במתימטיקה כמה דוגמות „טבעיות" יותר. נצא, למשל, מן הזוויות בגיאומטריה: הזוויות הרגילות יוצרות מערכת ארכימידית לגבי חיבורן. ואולם כבר בני יוון העתיקה הסתכלו בזווית שאחד משוקיה אינו ישר אלא עקום: „זווית מעין־קרן". דוגמה פשוטה מאד לזווית מסוג זה נקבל בזווית בין מעגל ובין המשיק שלו בנקודה מסויימת; זווית ש„מידתה" תלויה בקוטר המעגל. והנה בהשוותנו זווית כזו לזווית רגילה, נצטרך לראות את מידתה כחיובית אמנם, ז"א גדולה מ 0^0, אבל קטנה מכל זווית רגילה α $(\alpha>0)$. מערכת המספרים הממשיים (החיוביים) אינה מספיקה אפוא כדי לסדר בתוך שורה עולה את כל הזוויות כולן: הרגילות והזוויות מעין־קרן יחד. לשם כך היינו צריכים להכניס עוד אינסוף מספרים „קטנים לאין־סוף", שהם חיוביים אבל קטנים מ כ ל מספר ממשי חיובי; וכן להוסיף בין המספרים הממשיים עוד אינסוף „מספרים", השונים מן הממשיים בהפרשים „קטנים לאין־סוף". — אם נתרגם מסקנה אריתמיטית זו ללשון הגיאומטריה, מתברר שבמקום הנקודות הרגילות בקו ישר נקבל מערכות של אינסוף נקודות שונות, הרחוקות אחת מחברתה רחקים „קטנים לאין־סוף"[1]. כל מערכת מסוג זה היא לא־

1. השוה לנושא זה: G. VERONESE: Fondamenti di Geometria. Padova 1891 (הוצאה גרמנית 1894); מאמרו של T. LEVI-CIVITA ב *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze etc.*, שנה שביעית, כרך רביעי (1893); וגם ספרו של הילברט שהוזכר בעמ' 13. מכיון שגיאומטריה לא־ארכימידית איננה בת־סתירה, יש לעורר את הבעיה אם המרחב, שבו אנו חיים, ארכימידי או לא־ארכימידי, כמו שקיימת בעיה מתאימה בקשר עם אכסיומת המקבילים (גיאומטריה לא־אבקלידית). לאור הבעיה הזאת יש מן החידוש בעובדה שאפשר ל„חשב" את מידות הכוכבים והרחקים ביניהם, ז"א שאפשר לבטא את המידות הללו במידות שאנחנו משתמשים בהן. עובדה זו, וכיוצא בה העובדה המתאימה לגבי המידות שבפנים אטום, אינן אפוא מסקנות מעקרונות הגיאומטריה, אלא הן עובדות אֶמפיריות הנובעות מן הנסיון האסטרונומי והפיסיקלי. לא רק התורה מדברת כלשון בני אדם, אלא גם השפים מדברים במידות בני אדם.

ארכימידית, הואיל ומוגדר בה יחס סודר שאינו מקיים את העקרון הנ"ל[1].

ואולם ברוב ענפי המתימטיקה יש ערך כה מכריע לקיום עקרונו של ארכימדס, שבדרך כלל לא כדאי לוותר עליו ולטפל בעצמים שאין הוא חל עליהם. מה שנוגע בפרט למושג המספר, הנה מן הטעם הנ"ל רגילים או לא לצעוד מעבר למספר הממשי והלאה, או — אם צועדים הלאה — לא להכניס יחס סודר ממש.

בתחום המספרים המרוכבים נשארו בתקפן, אמנם לא תכונות הסדר, אבל תכונות השדה. לאור תורת השדות (השוה גם בעמ' 66/7) נוכל לבטא עובדה זו כך: אפשר להרחיב את שדה המספרים הממשיים לשדה מקיף יותר ע"י סיפוח איבר אחד. האיבר הנוסף הוא $i=\sqrt{-1}$. „הרחבה לשדה אחר ע"י סיפוח i" רוצה לומר, שנכניס לא את i בלבד אלא את כל האיברים המתקבלים ממספרים ממשיים ומ i בעזרת חיבור וכפל; היינו: כל האיברים בעלי הצורה $a+bi$[2]. מועיל לנסח מסקנתנו גם כך: מצאנו שדה של „מספרים בעלי שתי יחידות" $a_1\times e_1+a_2\times e_2$, שבהם „המקדמים" a_1 ו a_2 הם מספרים ממשיים, ו„היחידות" e_1 ו e_2 קשורות ביניהן ע"י הכללים:[3]

$$e_1^2=e_1,\ e_1e_2=e_2,\ e_2^2=-e_1.$$

מתוך הנסוח הזה מתעוררות שתי שאלות (a_k מסמן תמיד מספר ממשי):

א) היש במציאות שדות אחרים של מספרים בעלי שתי יחידות $a_1\times e_1+a_2\times e_2$, ז"א שדות שבתוכם קשורות ביניהן היחידות ע"י כללים אחרים?

1. הקורא הבקי בתורת הפונקציות, יעיין גם בדוגמה זו: כל הפונקציות $\frac{1}{x^r}$ (בשביל $x>0$), אם r מספר ממשי חיובי כלשהו, הולכות וגדֵלות כשמתקרב x ל 0, ו„סדר" (מידת) חגידול תלוי ב r: כנגד ערכי r גדולים יותר עולה גם סדר הגידול של $\frac{1}{x^r}$. לכן מסתבר למדוד את גידול הפונקציה בקרבת $x=0$ ע"י המספר הממשי r. ואולם אם נסתכל בפונקציה $|\log x|$, או $2^{\frac{1}{x}}$, או $\frac{|\log x|}{x}$ — תמיד בשביל ערכי x חיוביים המתקרבים ל 0 —, הרי נקבל סדרי גידול שאי אפשר לבטאם ע"י מספר ממשי r: $|\log x|$ גדֵלה בסדר חלש מכל פונקציה $\frac{1}{x^r}$; $2^{\frac{1}{x}}$ גדלה בסדר חזק מכולן; ואילו $\frac{|\log x|}{x}$ גדלה בסדר, החזק מ $r=1$, אבל חלש מ $r+1$, יהיה אשר יהיה המספר הממשי החיובי r.

לכן, ברצותנו למדוד את סדרי הגידול של פונקציות כלשהן, לא יספיקו המספרים הממשיים, ועלינו להוסיף עליהם גדלים חדשים הגורמים לידי מערכת לא־ארכימידית.

2. אפשר לשים במקום הרחבה זו של שדה המספרים הממשיים גם הרחבות אחרות, שכל אחת שקולה כנגד ההרחבה ההיא. הדוגמה הפשוטה ביותר לכך: להוסיף על המספרים הממשיים את האיבר $-i$, היינו הפתרון השני של המשוואה $x^2+1=0$. אפשר גם להוסיף, במקום i, למשל $i+1$, וכו', לפי „הצבה קווית (ליניארית)".

3. סימנו 1 ב e_1 ו i ב e_2. בסימן $\times$ השתמשנו שוב, כמו ב §2, כדי לסמן פעולה חדשה, שאינה לא כפל בין מספרים ממשיים ולא כפל בין יחידות.

ב) ניצור את המושג המוכלל של „מספרים מרוכבים בעלי שלוש או ארבע או n יחידות" $a_1\times e_1+a_2\times e_2+\dots+a_n\times e_n$, יחד עם כללים הקובעים לכל מכפלה $e_k\cdot e_l$ $(k=1,2,\dots,n;\ l=1,2,\dots,n)$ ערך מסויים מבין המספרים

$$a_1\times e_1+a_2\times e_2+\dots+a_n\times e_n.$$

היש במציאות תחום המכיל את כל המספרים („מספרים מרוכבים מוכללים") מסוג כזה, והמהווה שדה לגבי החיבור והכפל? לשון אחר: האפשר להגדיר את המכפלות $e_k\cdot e_l$ כך, שע"פ חשבון רגיל בין המספרים $a_1\times e_1+a_2\times e_2+\dots+a_n\times e_n$ יתקבל שדה?

התשובה על השאלה א) אינה קשה: יש להוכיח שמלבד התחום הנ"ל של המספרים המרוכבים הרגילים, ומלבד תחומים שאינם שונים בעיקר מתחום זה (השוה את ההערה 2 בעמ' 171), אין תחום של מספרים $a_1\times e_1+a_2\times e_2$ המהווה שדה.

קשה יותר להוכיח את התשובה על השאלה ב), והיא: אם n גדול מ 2, אי־אפשר להגדיר בתוך תחום המספרים האלה, בעלי n יחידות, את ערכי המכפלות $e_k\cdot e_l$ כך שהתחום מהווה שדה לגבי החיבור והכפל. משפט שלילי זה, שהביעו כהערה צדדית כבר גאוס לפני יותר ממאה שנה, הוכח בין 1860 ל 1870 באופנים בלתי תלויים זה בזה ע"י וירשטרס (בהרצאותיו) והנקל[1]. התשובות על שתי השאלות הנ"ל, אם נצרפן יחד, מגידות:

הנסיון להרחיב את שדה המספרים הממשיים, המהווה תחום של מספרים „בעלי יחידה אחת" ($e_1=1$), לתחום של מספרים בעלי יחידות במספר סופי — כך שנוותר אמנם על חוקי הסדר, אבל נדרוש את תכונות ה ש ד ה — מעמיד אותנו נוכח מסקנה זו: הנסיון נגמר בהצלחה מלאה בכוון אחד ויחיד (בעיקר), והוא: בקחתנו כתחום מורחב את תחום המספרים המרוכבים הרגילים, ז"א תחום מסויים של מספרים בעלי שתי יחידות.

משפט זה מבאר למה לא נוכל להמשיך הלאה את השיטה, המרחיבה צעד אחרי צעד את מושג המספר — בתנאי שנדרוש כי גם המושג המוכלל יהיה ראוי לתואר־הכבוד „מספר", היינו שיקיים את חוקי החיבור והכפל יחד עם הפעולות ההופכות אותם (כמו שבוטאו חוקים אלו בהגדרת השדה). הגענו אפוא אל התחנה ה ס ו פ י ת בקו המוביל, החל מן המספר הטבעי, דרך התחנות השונות של מושג המספר.

הערה נוספת בקשר עם הבעיה שלפנינו תובא במלואים: על הקוֹטֶרניונות, ועל מספרים מרוכבים בעלי אינסוף יחידות.

---

1. H. Hankel. עיין בספרו Theorie der komplexen Zahlensysteme, שהופיע בליפסיה 1867.

פרק שמיני: בעיות מתוך האַלְגֶבְרָה.[1]

§1. מִשְׁוָאות אלגבריות. מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים.

בפרק הששי עברנו משדה המספרים הרציונליים אל שדה המספרים הממשיים, בהוסיפנו על המספרים הרציונליים את כל המספרים האירציונליים (הממשיים). בסעיף זה נכניס חלוקה מסויימת בין המספרים האירציונליים לבין עצמם. יצויין מראש שאין צורך להצטמצם במספרים הממשיים דוקא. החלוקה הבאה אפשרית בתחום המספרים המרוכבים כולם, ותקבל שם צורה דומה לגמרי. רק לשם פשטות נסתפק בדיון במספרים הממשיים; ההכללה למספרים המרוכבים לא תוסיף כל חידוש. פרט למקומות בודדים שבהם נדבר במפורש על מספר דמיוני או מרוכב, תציין אפוא המלה „מספר" בדרך כלל: מספר ממשי.

בשם מִשְׁוָאה אלגברית[2] קוראים לכל ביטוי בעל הצורה

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{1}$$

בדרך כלל ננית כי המקדמים הקבועים a_k $(k=0,1,2,\dots,n)$ הנם מספרים רציונליים כלשהם; ברם הנחה זו אינה הכרחית, ובשעת הצרך נחליפנה בהנחה אחרת. הסימן x מסמן את נעלם־המשוואה; מוטל עלינו למצוא בשביל x ערך מספרי

---

1. הקורא שאינו רגיל בדרכי המתימטיקה, יוכל לדלג (בקריאה הראשונה) על פרק זה, שתָּכנו בדרך כלל קשה מתוכן הפרקים הקודמים. בפרקים הבאים לא נשתמש כמעט בחומר שבפרק הזה. יִרָשְׁמו כאן ספרים (קצרים) אחדים מבין הספרות העצומה על אלגברה:

M. Bôcher: Introduction to higher algebra. New York and London 1933.

L. E. Dickson: Modern algebraic theories. New York 1926.
L. E. Dickson: New first course in the theory of equations. New York 1939.
B. E. Meserve: Fundamental concepts of algebra. Cambridge Mass. 1953.
G. Birkhoff and S. MacLane: A survey of modern algebra. New York 1953.
H. W. Turnbull: Theory of equations. Edinburgh 1939. 3rd ed. 1946.
P. Dubreil: Algèbre. T. I. Paris, 1946.
H. Hasse: Höhere Algebra. 2 Bände. 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1937.

על חלק חשוב מיוחד של האלגברה, שעליו לא ידובר בספר זה (משוואות קוויות ותורת הדֶטֶרמינַנטים או הקוצבים), ימצא הקורא ברוב הספרים האלה; וכן למשל בספרים:

W. L. Ferrar: Algebra. A textbook of determinants, matrices and quadratic forms. Oxford 1941.

A. C. Aitken: Determinants and matrices. Edinburgh and London 1948.

2. המלה „אלגברה" לקוחה מספרו החשוב של מוחמד אבן מוסה אלכוארזמי, פרסי שנולד בכוארזם (היום חִיוָה) וחי בבגדאד במאה התשיעית לפי ספה"נ. שם הספר הוא: אלג'בר ואלמוקאבלה (בערך: ההשלמה וההשתוות); מן המלה הראשונה יצרו בימי הבינַיים את שם המקצוע: אלגברה. — כדאי לציין שגם ב ש מ ו של חוקר זה השתמשו אחרי כך לשם יצירת מונח מתימטי: אלגוריתמוס.

(או ערכים מספריים) כך, שבהכניסנו לתוך המשוואה[1] במקום x את הערך הנידון (או אחד מהם), נקבל ע"י חישוב האגף השמאלי את המספר 0, והמשוואה תיהפך בזה לזהות. אפשר להבין בעיה זו, המכונה פתירת המשוואה, כך ש שרשי המשוואה או פתרוניה — היינו ערכיו המבוקשים של x — יהיו מספרים מרוכבים כלשהם. אבל גם כאן אפשר להתנות תנאי אחר; באמת הורשו עד המאה הט"ז כפתרונים בדרך כלל רק מספרים ממשיים חיוביים, ואחרי הכרת זכויותיהם של המספרים השליליים עברו עוד מאתיים שנה ויותר עד שהורשו גם מספרים מרוכבים כפתרוני משוואה. בעצם תיארנו בפרקים הקודמים, איך דוקא השאיפה לפתור משוואות אלגבריות היתה המניע החזק ביותר להרחבת מושג־המספר.

אפשר לקבוע, דרך הגבלה, שיטות מסויימות שבהן ורק בהן מותר להשתמש כדי למצוא שרשי משוואה נתונה; דוקא הגבלת־שיטות כזו מהווה גורם מכריע בדברי ימי האלגברה. על זה ידובר ב§ 3.

אם $a_0=0$ במשוואה (1), נוכל למחוק את האיבר a_0x^n, הואיל ולכל ערך של x קיים: $0\cdot x^n=0$. לכן נניח מראש שהמקדם a_0 של חזקת־הנעלם הגבוהה ביותר (x^n) יהיה שונה מ 0: $a_0\neq 0$[2]. בתנאי זה קוראים למעריך n של החזקה הנ"ל מעלת המשוואה. האגף השמאלי של משוואה אלגברית כלשהי — היינו כל ביטוי המתקבל מתוך גדלים (מספרים) קבועים ומתוך „גודל לא־מסויים" x ע"י חיבור וכפל — ייקרא פולינום או רב־איבר; בפרט „פולינום בעל המעלה n", אם x^n החזקה הגבוהה של x (עיין לעיל). פולינום בעל המעלה 0 הוא אפוא גודל קבוע[3]. לפי זה האימרה „a הוא שורש של המשוואה $f(x)=0$" שקול כנגד האימרה „a הוא ערך־אפס (נקודת־אפס) של הפולינום $f(x)$" או „$f(x)$ מתאפס אצל $x=a$". בנוסחה: $f(a)=0$[4].

ההגדרה היסודית לנושא הסעיף הזה היא:

מספר (ממשי או מרוכב) r ייקרא מספר אלגברי, אם r שורש של משוואה אלגברית (1), שמקדמיה a_k מספרים שלמים. אם מקדמו a_0 של האיבר

1. בדרך כלל נאמר לשם קיצור רק „משוואה". ואולם יש גם משוואות שאינן אלגבריות, ז"א אינן בעלות הצורה (1); למשל: $a^x=b$, או: $\sin x=a$.

2. לשם פשטות נוציא מראש את המקרה הטריביאלי שבו כל מקדמי המשוואה, או כולם פרט לאיבר האחרון a_n, ישוו ל 0.

3. רק למספר 0, אם יראוהו כפולינום, אין ליחס את המעלה 0, ובכלל לא מעלה מסויימת (מתוך נמוקי־נוחיות הניכרים, למשל, מ א) בעמ' 176).

4. $f(x)$ מבטאים „f של x". יש כאן ובכל הפרק הזה מקרה פשוט של מושג ה פ ו נ ק צ י ה, שנכניסנו באופן כללי בפרק התשיעי; הפונקציות המופיעות בפרק זה הם פולינומים. $f(1+\sqrt{2})$, למשל, אינו מסמן את המכפלה של f ושל המספר $\sqrt{2}+1$, אלא את ערך הפולינום $f(x)$, אם במקום ה„גודל הלא־מסויים" x שמים תמיד את המספר $1+\sqrt{2}$.

הגבוה שווה ל 1 (ז"א אם המשוואה מתחילה באיבר x^n)[1] ייקרא כל שורש r של המשוואה מספר אלגברי שלם.—כאמור לעיל, נתכוון כאן בדרך כלל במונח „מספר אלגברי" למספרים אלגבריים ממשיים.

ה ע ר ה: יכולים היינו להעמיד את הגדרת המספר האלגברי על התנאי שהמקדמים a_k יהיו מספרים רציונליים כלשהם. במקרה זה אפשר לכפול כל איברי האגף השמאלי במכנה המשותף של כל המקדמים, וכפל זה אינו משנה ערכו 0 של האגף הימני. נקבל כך מקדמים חדשים שכולם שלמים.

ד ו ג מ ו ת של מספרים אלגבריים:

קודם כל, כל מספר רציונלי הוא גם אלגברי, וכל מספר (רציונלי) שלם הוא מספר אלגברי שלם. כי המספר הרציונלי $\frac{m}{n}$ הריהו שורש למשוואה $nx-m=0$, והמספר השלם m שורש למשוואה $x-m=0$. (זה מבאר למה מגדירים מספר אלגברי „שלם" כמו שהגדרנוהו; „מספר אלגברי" הריהו הכללת המושג „מספר רציונלי", ו„מספר אלגברי שלם" הכללת המושג „מספר שלם".)[2]

כמו־כן, למשל, $\sqrt{2}$, $\sqrt[7]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{3}-2$ הנם מספרים אלגבריים, וגם המספרים המרוכבים i, $3+i$; כי מספרים אלו הם שרשי המשוואות הבאות:

$$x^2-6x+10=0;\quad x^2+1=0;\quad x^2-4x+1=0;\quad 4x^7-3=0;\quad x^2-2=0.$$

כל הדוגמות האלה, פרט לשניה, מציגות מספרים אלגבריים שלמים.

בפרק זה נכיר עוד דוגמות רבות למספרים אלגבריים. ביניהם גם כאלה שאי־אפשר להציגם, בצאתנו ממספרים רציונליים, בעזרת ארבע פעולות־החשבון הפשוטות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) והוצאת שרשים.

לפעמים מכנים מספר אלגברי „מספר אלגברי בעל המעלה n", אם הוא שורש למשוואה בעלת המעלה n, ולא למשוואה בעלת מעלה קטנה מ n. יש לדייק כך, מפני שכל שורש של משוואה מסויימת הנהו גם שורש למשוואות שמעלותיהן גדולות יותר: כל שורש של המשוואה $f(x)=0$ הריהו גם שורש למשוואה $f(x)\cdot g(x)=0$, אם $g(x)$ מסמן פולינום כלשהו. — לפי זה מופיעים בדוגמות שהובאו לעיל רק מספרים אלגבריים בעלי המעלה 2, פרט ל $\sqrt[7]{\frac{3}{4}}$ שהוא בעל המעלה 7. כל מספר בעל המעלה 1 הנהו רציונלי.

לשם טיפול במשוואות ובשרשיהן יש לצאת מארבע פעולות־החשבון בפולינומים $f(x)$. הקורא מכיר בוודאי חשבון פשוט זה, וזוכר שע"י חיבור או חיסור או כפל של שני פולינומים מתקבל שוב פולינום. מערכת כל הפולינומים היא

1. הכוונה שישנה כנגד r לפחות משוואה אחת מסוג זה. כאמור להלן, אותו המספר r הנהו שורש למשוואות שונות, ולא רק לאחת.

2. קל לראות שכל מספר רציונלי שאינו שלם (ז"א כל שבר מצומצם $\frac{r}{s}$ שבו $s>1$) אף איננו מספר אלגברי שלם, לפי ההגדרה דלעיל.

אפוא חוג (עיין בעמ' 105/6); ביתר דיוק: היא חוג קומוטטיבי שיש בו יחידה (המספר 1) ושאין בו מחלקי־אפס. פרט ל0 עצמו. שני פולינומים, המסודרים למשל לפי חזקות יורדות של x, ושבהם מופיעה אותה החזקה x^k לא יותר מפעם אחת (מה שיש להשיג ע"י כינוס מתאים של האיברים), שווים רק אם הם זהותיים. לכן נוכל להשתמש לגבי שני פולינומים, הידועים לנו כשווים, בשיטה של „השוואת המקדמים"; היא מבוססת על כך שלאותה החזקה x^k בשני הפולינומים יש גם אותו המקדם[1]. מלבד זאת נזכיר שני משפטים פשוטים הידועים מתוך החשבון בפולינומים, והם:

א) מעלת המכפלה של שני פולינומים שווה לסכום המעלות של הגורמים. (רק במקרה שאחד הפולינומים יהיה המספר 0, תהיה גם המכפלה 0.) משפט זה מתקבל מיד ע"י כפל שני הפולינומים.

ב) החילוק בין שני פולינומים $f(x)$ ו $g(x)$ בצורה

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$$

יוצא לפועל באופן חד־ערכי, אם הותנה שמעלת „השארית" $r(x)$ קטנה ממעלת המחלק $g(x)$ (לרבות את המקרה $r(x)=0$).

במקרה $r(x)=0$ אומרים, כמו בתורת המספרים: $f(x)$ מתחלק ב $g(x)$.

עצם האפשרות של חילוק זה נופקת מחשבון, הדומה כולו לחילוק מספר טבעי במספר טבעי אחר (השוה בעמ' 26). כדי להוכיח שהשיטה חד־ערכית, נניח שתי אפשרויות, בצאתנו מן הפולינומים הנתונים $f(x)$ ו $g(x)$, כדלקמן:

$$f(x)=g(x)\cdot h_1(x)+r_1(x),\quad f(x)=g(x)\cdot h_2(x)+r_2(x).$$

על־ידי חיסור השויון הימני מהשמאלי נקבל:

$$0=f(x)-f(x)=g(x)\left[h_1(x)-h_2(x)\right]+\left[r_1(x)-r_2(x)\right],$$

ז"א: $g(x)\left[h_2(x)-h_1(x)\right]=r_1(x)-r_2(x)$.

נסמן את מעלת $g(x)$ ב m. מתברר שבשויון האחרון מעלת האגף הימני קטנה מ m, הואיל ואותו דבר קיים, לפי ההנחה, בשביל $r_1(x)$ ו $r_2(x)$. לעומת זאת לפי המשפט א) מעלת האגף השמאלי שווה לכל הפחות ל m, אלא אם כן $h_2(x)-h_1(x)=0$. לכן נופק שאמנם $h_1(x)=h_2(x)$, ושויון זה גורר אחריו $r_1(x)=r_2(x)$, משל"ל.

בעזרת החשבון בפולינומים נוכיח שני משפטים, שהם יסודיים באלגברה כולה.

משפט 1: יהי c שורש של המשואה $f(x)=0$, היינו: $f(c)=0$; אז

---

1. ז"א: כדי שישוו $a_0x^n+\dots+a_{n-1}x+a_n$ ו $b_0x^m+\dots+b_{m-1}x+b_m$, שבהם $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, מספיק והכרחי שיתמלאו התנאים: $m=n$, $a_0=b_0$, $a_{n-1}=b_{m-1}$, $\dots$, $a_n=b_m$. — ההגדרה הנ"ל של שויון בין פולינומים גוררת, שבהכניסנו אותו המספר במקום x לתוך שני פולינומים שווים, נקבל מספרים שווים.

הפולינום $f(x)$ מתחלק ב „גורם הקווי" $x-c$, וחילופו.

הוכחה: נניח כי $f(c)=0$, ונחלק $f(x)$ בגורם הקווי $x-c$: $f(x)=(x-c)h(x)+r$, כאן השארית r היא גודל (מספר) קבוע, מפני שמעלת r קטנה ממעלת $x-c$, ז"א קטנה מ 1, לפי המשפט ב). בתתנו בנוסחה האחרונה ל x את הערך c, נקבל לפי ההנחה באגף השמאלי 0, וגם $x-c$ עובר ל 0. אבל $0\cdot h(x)+r=0$ גורר $r=0$. קבלנו אפוא $f(x)=(x-c)h(x)$, משל". — היפוך המשפט 1 (היינו שהשויון $f(x)=(x-c)h(x)$ גורר $f(c)=0$) מתקבל מיד ע"י הכנסת הערך c במקום x.

c יוכל להיות כאן מספר מרוכב כלשהו; וכן במשפט 2.

משפט 2: למשואה אלגברית בעלת המעלה n יש לכל היותר n שרשים שונים.

הוכחה: נניח שיש למשואה $f(x)=a_0x^n+\dots+a_n=0$ לפחות n השרשים השונים $c_1, c_2, \dots, c_n$. לפי המשפט 1 קיים, קודם כל, $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$. הואיל וגם c_2 שורש של $f(x)=0$, ז"א $f(c_2)=0$, גוררת הנוסחה האחרונה $(c_2-c_1)f_1(c_2)=0$; מכיון ש $c_2\neq c_1$, נקבל $f_1(c_2)=0$, ז"א c_2 הוא שורש למשואה $f_1(x)=0$. לפי המשפט 1 קיים אפוא: $f_1(x)=(x-c_2)f_2(x)$, ולכן: $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)f_2(x)$. ע"י המשך התהליך הזה נקבל, אחרי הצעד ה n־י: $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)f_n(x)$. ואולם כאן $f_n(x)$ מוכרח להיות קבוע $\neq 0$. כי האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר של x באגף השמאלי הלוא הוא a_0x^n $(a_0\neq 0)$; לפיכך יהיה גם האיבר המתאים באגף הימני a_0x^n, וזה גורר: ראשית, כי $f_n(x)$ בעל המעלה 0, ושנית שערך המספר הקבוע $f_n(x)$ שווה ל a_0, ושונה אפוא מ 0. כך קבלנו את „הפירוק". אם יש בצירה

$$f(x)=a_0x^n+\dots+a_n=a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n). \tag{2}$$

יהי עתה c_{n+1} מספר כלשהו השונה מ n הערכים $c_1, c_2, \dots, c_n$; כדי להוכיח את המשפט 2, עלינו להראות ש c_{n+1} איננו שורש למשואה $f(x)=0$. נכניס לתוך (2) במקום x את הערך c_{n+1}! נקבל:

$$f(c_{n+1})=a_0(c_{n+1}-c_1)(c_{n+1}-c_2)\dots(c_{n+1}-c_n).$$

האגף הימני הריהו מכפלת מספרים השונים מ 0, ולכן גם הוא שונה מ 0. לפיכך גם $f(c_{n+1})\neq 0$, ז"א c_{n+1} אינו שורש של $f(x)=0$; משל".

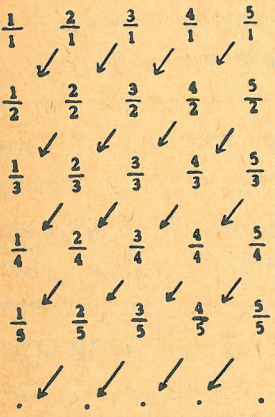
הערה: קבלנו אמנם את התיאור (2) על סמך ההנחה שהערכים c_k שונים ביניהם. אבל גם אם חלק מהם או כולם שווים, יש מובן למשואה (2). כדי לכלול בנוחיות מקרה זה, נסתמך על המשפט 1 שלפיו יהיה c שורש של המשואה $f(x)=0$ אם, ורק אם, $f(x)$ מתחלק ב $x-c$. בכוון זה נדייק דיוק נוסף לגבי מושג השורש, ונקבע:

---

1. פולינום בעל המעלה 1 נקרא גם פולינום „קווי" או „ליניארי" מפני חקשר שבינו לקו ישר (השוה ב § 1 של הפרק התשיעי).

הגדרה: c ייקרא שורש מרובה־m של המשואה $f(x)=0$, אם $f(x)$ מתחלק ב־$(x-c)^m$, אבל לא ב־$(x-c)^{m+1}$. במקרה $m=1$ מדברים על שורש פשוט.

אחרי הכנות כלליות אלו נגש אל המטרה העקרית של סעיף זה, והיא: להשוות את קבוצת כל המספרים האלגבריים עם קבוצת כל המספרים הטבעיים 1, 2, 3, ... נקח מקודם את המקרה הפרוט של המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$ (n מספר טבעי, m מספר שלם כלשהו)! אמנם כוללים המספרים הרציונליים ביניהם את המספרים הטבעיים, כי אלה מתקבלים במקרה ש־$n=1$ ו־m חיובי. אף־על־פי־כן יקל לסדר את כל המספרים הרציונליים $\frac{m}{n}$ כך שיתאימו באופן חד־חד־ערכי למספרים הטבעיים. לשם זה נסדר קודם כל את המספרים $\frac{m}{n}$ שבשבילם m חיובי, כדלקמן: ראשית נקח את אלה שמכנם n שווה ל־1, אחרי כך את בעלי המכנה 2, אחריהם את בעלי המכנה 3, וכן הלאה; את השברים בעלי מכנה קבוע נסדר לפי גודל המונה. תתקבל אפוא התבנית הערוכה כאן.[1]



נעבור עתה את השברים שבתבנית זו לפי הדרך המסומן ע"י החצים; ז"א נקח אחרי $\frac{1}{1}$ את $\frac{2}{1}$ ו־$\frac{1}{2}$, אחריהם $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, אחר כך $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, וכו'.[2] כך נקבל, תחת סידרה של סדרות (אינסוף סדרות), סדרה אחת בלבד המתחילה:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots .$$

נכניס בסדרה זו עוד שלושה שינויים, והם: א) נמחק את כל השברים השווים לשברים קודמים, כמו $\frac{3}{3}$ (השווה ל־$\frac{2}{2}$ וגם ל־$\frac{1}{1}$), $\frac{4}{2}$ ($=\frac{2}{1}$), $\frac{2}{4}$ ($=\frac{1}{2}$), וכו'; ב) נשים בראש הסדרה כולה את השבר $\frac{0}{1}$; ג) נכניס אחרי כל שבר $\frac{m}{n}$ את השבר הנגדי $-\frac{m}{n}$. כך נקבל סוף־סוף את הסדרה:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots .$$

---

1. קרא בתבנית זו ראשית את השורה הראשונה, אחריה את השניה, וכו'!

2. את כוון הדרך הזאת אפשר לציין גם באופן אריתמיטי, כלי להתיחס לתבנית הציורית שלפנינו. הנוסח האריתמיטי הוא: נקח ראשית את השברים $\frac{m}{n}$ (m ו־n חיוביים) שבשבילם סכום המונה והמכנה שווה ל־2 ($m+n=2$); זה כולל רק את $\frac{1}{1}$; אחרי כן את השברים שבשבילם $m+n=3$, אחריהם את אלה שבשבילם $m+n=4$, וכן הלאה. בתוך כל קבוצת שברים $\frac{m}{n}$ שבשבילם $m+n$ שווה למספר מסויים s, נסדר לפי הסדר של מונים יורדים, היינו של מכנים עולים.

סדרה זו מכילה את כל המספרים הרציונליים, ולכל אחד מהם מתאים באופן חד־חד־ערכי מספר טבעי מסויים, המציין את מקומו (הראשון, השני, וכו') של המספר הרציונלי בסדרה. העתקנו כך את קבוצת כל המספרים הרציונליים על קבוצת כל המספרים הטבעיים, וקבלנו את המסקנה, המפתיעה ברגע הראשון: אף־על־פי שהמספרים הטבעיים מהווים לכאורה רק חלק קטן־לאינסוף של המספרים הרציונליים כולם (סדרה אחת מבין אינסוף סדרות), הרי בכל זאת, במובן של התאמה חד־חד־ערכית, כמותם שווה לכמות כל המספרים הרציונליים. (השוה לזה מה שנאמר בפרק הראשון, עמ' 10—11.)

מרחיקה עוד לכת העובדה, שאפילו אם נשווה את המספרים הטבעיים עם כל המספרים האלגבריים, קיים אותו היחס של „שויון־כמות", במובן של התאמה חד־חד־ערכית. הצד המפתיע שבדבר הוא, שמהשקפה אחרת מכילים המספרים האלגבריים ביניהם את המספרים הרציונליים (ועל אחת כמה וכמה את המספרים הטבעיים) כחלק קטן־לאינסוף; כי המספרים הרציונליים הנם שרשי המשואות בעלות המעלה 1, והרי ישנם עוד שרשי המשואות למעלות 2, 3, 4 וכו'. הוכחת העובדה הזאת[1] אמנם מסובכת מן ההוכחה הקודמת, אבל בעקרונה דומה לה. נחלק את ההוכחה לצעדים אחדים!

א) למשואה האלגברית $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, שכל מקדמיה a_k הם מספרים שלמים ($a_0 \neq 0$), נתאים את המספר הטבעי[2]

$$g = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| ,$$

שנקרא לו **גובה** המשואה. לפי זה מתאים לכל משואה אלגברית נתונה הגובה שלה באופן חד־ערכי.

ב) כנגד כל גובה נתון g יש רק מספר סופי של משואות, שגבהן שווה ל־g. טענה פשוטה זו נוכיח במלואים.

ג) לפי זה אפשר לסדר את כל המשואות האלגבריות לסדרה אחת: נקח ראשית את המשואות שגבהן 1, אחר כך בעלות הגובה 2, אחריהן בעלות הגובה 3, וכו'. בשביל כל המשואות בעלות גובה קבוע — שמספרן סופי לפי ב) — נתקן סדר מסויים[3]. לפי זה נקבל, בצאתנו מערכי־הגובה 1, 2, 3, ..., משואה ראשונה,

---

1. עובדה זו גילה G. Cantor בשנת 1873; עיין:
Cantors Gesammelte Abhandlungen, p. 115–116.

2. $|a|$ מסמן את ערכו המוחלט של המספר a; עיין בעמ' 161.

3. אפשר לקבוע סדר כזה בכמה דרכים. למשל כך: נסדר את המשואות בעלות הגובה g קודם כל לפי מעלות יורדות, כך שמשואה בעלת מעלה גדולה יותר תקדם. את המשואות בעלות אותו הגובה ואותה המעלה גם יחד נסדר: ראשית לפי ערכים יורדים של המקדם הראשון a_0; במקרה של ערכים שווים ל־a_0, לפי ערכים יורדים של המקדם a_1, וכך הלאה. לפי כלל זה קבוע תמיד, איזו משתי משואות בעלות הגובה g קודמת לחברתה.

שניה, שלישית וכו׳, כך שלכל משואה אלגברית מתאים מספר טבעי מסויים המציין את מקומה בסדרת כל המשואות.

ד) ראינו לעיל (משפט 2) שלכל משואה אלגברית יש רק מספר סופי של שרשים ממשיים, אם יש לה בכלל. נסדר אפוא את שרשיה של כל משואה נתונה לפי גדלם. בקחתנו בסדר זה ראשית את שרשי המשואה הראשונה, אחריהם את שרשי המשואה השניה, השלישית וכו׳ — לפי סידור המשואות שסומן לעיל — ובמחקנו אחר כך כל מספר אלגברי אשר הופיע כבר מקודם, נקבל סדרה המקיפה את כל המספרים האלגבריים (הממשיים), כך שלכל מספר אלגברי מתאים מספר טבעי מסויים המציין את מקומו בסדרה. הוכחנו אפוא:

משפט 3: קבוצת כל המספרים האלגבריים (הממשיים) אֶקְווִינֻמֶרִטִית לקבוצת כל המספרים הטבעיים, כך שלכל מספר טבעי מתאים באופן חד־חד־ערכי מספר אלגברי מסויים (השוה בעמ׳ 6).

הגדרנו כבר לעיל, מתי מספר אלגברי נקרא מספר אלגברי שלם, ומצאנו שהמספרים האלגבריים השלמים כוללים בתוכם, כמקרה פרוט, את המספרים השלמים הרגילים. בפרק השלישי עסקנו במקצוע מתימטי המטפל במספרים השלמים הרגילים (או במספרים הטבעיים), הוא תורת המספרים. כאשר רמזנו שם (עיין בעמ׳ 47—49 ו־67), אפשר לפתח תורה הכוללת את תורת המספרים הרגילה, והמטפלת בתכונותיהם של מספרים אלגבריים שלמים. תורה זו, „תורת המספרים האלגבריים", רכשה לה חשיבות יתירה במתימטיקה, החל מן המחצית השניה של המאה הי״ט. על הקושי המיוחד שביסודות התורה הזאת כבר דברנו במקום הנ״ל, והוא: שב„חוג מספרים אלגבריים שלמים" בטל בדרך כלל המשפט על פירוקו החד־ערכי של כל מספר שלם לגורמים ראשוניים. מטעם זה יש לצרף אל המושג „מספר ראשוני" בתורת המספרים האלגבריים מושג מופשט יותר — תפקיד שאפשר למלאו בדרכים שונות, ושלא נוכל לבארו כאן.

דברנו עד הנה על תחום המספרים האלגבריים; אם נוציא ממנו את המספרים הרציונליים (ו״א שרשי המשואות הקוויות), ישארו רק מספרים אירציונליים. מאידך הגענו בפרק הששי אל תחום כל המספרים הממשיים, בהוסיפנו על המספרים הרציונליים את כל המספרים האירציונליים. מתעוררת אפוא השאלה: המתלכד מושג המספר האלגברי האירציונלי (הממשי) עם מושג המספר הממשי האירציונלי, כך שכל מספר ממשי יהיה או רציונלי או אירציונלי ואלגברי? או להיפך, שמא נמצאים בין המספרים הממשיים גם מספרים לא־אלגבריים?

עד לפני מאה שנה טרם ידעו המתימטיקנים לענות על שאלה זו, וכמעט לא הציגוה כל עיקר. הצעד המכריע נעשה ע״י ליוביל[1] באמצע המאה ה־19.

1. J. Liouville. עיין ב *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 16 (1851); השוה גבר את מאמרו ב *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* 18 (1844).

תגליתו מבוססת על פיתוחם של מספרים ממשיים ל„שברים משולבים", נושא שלא נטפל בו בספר זה; מסקנתו היתה שישנה מערכת אינסופית של מספרים ממשיים שאינם אלגבריים. בחלק הרביעי של ספר זה (כרך שני) נדע הוכחה של קַנְטוֹר, המרחיקה לכת הרבה מהוכחת ליוביל, בהראותה: לא רק שיש במציאות אינסוף מספרים ממשיים שאינם אלגבריים, אלא מקרה יוצא מן הכלל הוא שמספר ממשי יהיה אלגברי; רובם המכריע (למלה זו יש כאן משמעות מדוייקת) של המספרים הממשיים אינם אלגבריים. נקבע כאן רק את

ההגדרה: מספר (ממשי) שאינו אלגברי, נקרא מספר טַרַנְסצֶנְדֶנְטי[1].

הוכחותיהם של ליוביל ושל קנטור מבטיחות שישנם מספרים טרנסצנדנטיים; ולא עוד אלא הן מגדירות מספרים מסוג זה, ואולם בדרכים מסובכות או מופשטות. לעומת זאת אפשר להציג בעיתנו גם בכוון אחר. הרי המתימטיקן התוודע מתוך נסיונו אל כמה מספרים ממשיים, מלבד המספרים הרציונליים; אחדים מהם הוזכרו בסעיף זה, וראינו שהם מספרים אלגבריים. לכן יש לשאול: האפשר לציין בין המספרים המופיעים בנסיונו הרגיל של המתימטיקן, גם כאלה שהם טרנסצנדנטיים?

התשובה היא חיובית. כל אחד מן הקוראים זוכר את המספר $\pi = 3{,}14159\ldots$, שכפלו בקוטר המעגל נותן היקף המעגל (השוה בעמ׳ 138, וגם בפרק י״ב). כבר לַמְבֶּרְט[2] הוכיח בשנת 1768 כי π איננו מספר רציונלי. מעובדה זו גדול המרחק עד הטענה כי π טרנסצנדנטי; לשם כך נחוץ לבטל את האפשרות שיהיה π שורש למשואה בעלת אחת המעלות 2, 3, 4, ... רק בשנת 1882 עלה בידי לִינְדִימַן[3] להוכיח כי π טרנסצנדנטי, והוכחתו קשה עד מאד ומשתמשת במכשירים מסובכים מתוך חחשבון האינטֶגרלי (השוה בפרקים י׳, ו״ב)[4]. כבר לפני לינדימן הוכיח אֶרְמִיט[5] את הטרנסצנדנטיות של מספר אחר, המופיע אמנם בדרך כלל לא בבית־הספר אלא בהתחלות המתימטיקה הגבוהה: הוא המספר e, המשמש כבסיס ללוגריתמים הטבעיים (עיין בפרק י״א). גם הוכחת ארמיט מסתמכת על שיטות החשבון האינטגרלי. במשך הזמן הצליחו המתימטיקנים — ביניהם חוקרים חשובים ביותר של הדור הקודם — לתת להוכחות־הטַרַנְסצֶנְדֶנְטיות האלה צורות פשוטות יותר ויותר; עתה נוכל לשם כך להתנער ממושגי החשבון האינפיניטֶסימלי. ניתוח פשוט וברור של הוכחות אלו נמצא בספרו הקטן והיפה

1. המונח „טרנסצנדנטי" (מן המלה הרומית transcendens, שמובנה „עולה מעבר ל־") הוכנסה ע״י לייבניץ בשביל עצמים מתימטיים (מספרים, עקומים, פונקציות) שאינם אלגבריים. במקרה שלפנינו הכוונה אפוא לשרשי „משואות" שמעלתן עולה, כביכול, מעל כל מספר טבעי.
2. J. H. Lambert
3. עיין: F. Lindemann; *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften,* 1882 II.
4. בחלק החמישי (כרך שני) נדון במסקנה שיש להוציא מהוכחת לינדימן כלפי הבעיה העתיקה והמפורסמת של תַרְבִּיעַ (קוואדָטורת) העיגול.
5. Ch. Hermite; עיין: *C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris,* 77 (1873).

של הסנברג[1]. בכל זאת תופש תיאורם של הוכחות אלו מקום רב, אם לא תדרשנה מן הקורא התאמצות וידיעות קודמות; לא נטפל אפוא כאן בנושא זה.

עד שנות השלשים ידעו המתימטיקנים מעט מאד על השאלה אם מספרים ממשיים, המתוארים בצורה פשוטה למדי, הנם אלגבריים או טרנסצנדנטיים. אפשר לייצג את הבעיה, למשל, בצורה מיוחדת זו: יהיו a וb מספרים נתונים, או מספרים מתוך מחלקה נתונה; האפשר להגיד אם החזקה a^b מהווה מספר אלגברי או טרנסצנדנטי? למשל, נוכל לשאול זאת לגבי המספר $2^{\sqrt{2}}$ או 2^{π}. רק בשנת 1934 הצליח גלפונד[2] להוכיח שהחזקה a^b טרנסצנדנטית, אם מתמלאים שני התנאים הבאים: 1) a אלגברי ושונה מן המספרים 0 ו1; 2) b אלגברי ואירציונלי[3]. נופק שלמשל $2^{\sqrt{2}}$ מספר טרנסצנדנטי. על כל פנים גם היום תחום המספרים הטרנסצנדנטיים הוא אחד המחוזות הפחות נחקרים של המדינה המתימטית[4].

§ 2. המשפט היסודי של האלגברה.

בשיטות החשובות של האלגברה בדרך כלל, ובכמה בעיות הקשורות בהן, נעסוק בסעיף הבא. בסעיף זה נייחד את הדיבור על משפט, שחשיבותו היתירה מצויינת בזה שנקרא בשם „המשפט היסודי של האלגברה". נווכח כי שם זה, שנתקבל בכל השפות, איננו מוצלח ביותר; שהרי אם נדייק, המשפט הנידון אינו נכלל כל עיקר בתחום האלגברה. אכן מהשקפה היסטורית השפיע המשפט באופן מכריע על התפתחות האלגברה.

נקדים את המשפט היסודי במשפטים אחדים, שהם בחלקם כלליים ובעלי חשיבות לכל חלקי האלגברה, ובחלקם כעין הכנות ומקרים פרוטים למשפט הנידון.

מצאנו בעמ' 177 (משפט 2) כי למשוואה אלגברית בעלת המעלה n אין יותר מn שרשים שונים, וקל היה להוכיח תכונה „מכסימלית" זו. מטרתנו בסעיף זה להוכיח תכונה „מינימלית" כנגדה, והיא: כי לכל משואה

---

1. G. Hessenberg: Transzendenz von e und π. Leipzig u. Berlin 1912.

2. A. Gelfond. חלק מתגליותיו נמצאו גם ע"י C. L. Siegel ו Th. Schneider.

3. את הבעיה הואת הציג הילברט בפני הקונגרס הבינלאומי השני של המתימטיקנים בשנת 1900, בהרצאתו המפורסמת על „בעיות מתימטיות", כאחת הבעיות המעניינות ביותר. עברו עוד 34 שנה עד שמצאה את פתרונה. — ממשפטו של גלפונד נופק, שהלוגריתמוס הרגיל (העשרוני) של כל מספר רציונלי או אלגברי הוא: או רציונלי או טרנסצנדנטי. כן נופק כי $e^{\pi}=(-1)^{i}$ טרנסצנדנטי.

4. כמעט אין ספרים על מספרים טרנסצנדנטיים. נזכיר ספרו של

E. Maillet: Introduction à la théorie des nombres transcendants etc. Paris 1906. 275 pp.

תיאור המצב החדיש של הבעיה ניתן בספרק הרביעי של החוברת המצויינת:

J. F. Koksma: Diophantische Approximationen. *(Ergebnisse der Mathematik,* IV 4.) Berlin 1936.

יש לפחות שורש אחד (משפט יסודי). ערך מינימלי זה נוכל להגדיל אחרי כך בנקל עד הערך n, אם רק נוותר על התנאי שהשרשים שונים ביניהם.

בניגוד לסעיף הקודם, שבו הנחנו שמקדמי המשואה יהיו מספרים שלמים, נצא בסעיף זה מן ההנחה הכללית יותר, כי מקדמי המשואה

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0;\ n>0) \tag{1}$$

יהיו מספרים ממשיים או מרוכבים כלשהם[1]. מה שנוגע להגבלה כלפי שרשי המשואה, ברור שאין להסתפק אפילו במספרים הממשיים, אם נרצה להבטיח שורש לכל משואה; שהרי כבר למשואה הפשוטה $x^2+1=0$ אין שורש ממשי, כאשר ציינו בעמ' 142. לכן נביא בחשבון גם בשביל שרשי המשואות את כל המספרים המרוכבים. (בסוף הסעיף הבא נרמוז על כך, באיזה מובן עולה חופש זה בשביל שרשי משואה על המידה „הטבעית".)

משפט 1: אם נכון שלכל משואה אלגברית, שמקדמיה כולם ממשיים, יש לפחות שורש (מרוכב) אחד, קיים אותו דבר גם במקרה הכללי, וז"א אם המקדמים מרוכבים.

הוכחה: נניח שנדע כבר כי לכל משואה אלגברית בעלת מקדמים ממשיים ישנו שורש (ממשי או מרוכב). נצא מן המשואה (1) (עיין לעיל) שמקדמיה הנם מספרים מרוכבים כלשהם, ונכתוב כל מקדם a_k $(k=0,1,\dots,n)$ בצורה המפלה בין החלק הממשי ובין החלק הדמיוני: $a_k=c_k+i\,d_k$. לפי זה נוכל לכתוב את (1) בצורה:

$$\begin{aligned} f(x)&=(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\dots+c_{n-1}x+c_n)+\\ &+i\cdot(d_0x^n+d_1x^{n-1}+\dots+d_{n-1}x+d_n)=g(x)+i\cdot h(x)=0. \end{aligned} \tag{2}$$

סימנו כאן ב$g(x)$ את כל מה שכתוב בסוגריים הראשונים, וב$h(x)$ את תוכן הסוגריים העוקבים; לכן $g(x)$ ו$h(x)$ שניהם פולינומים בעלי מקדמים ממשיים. אם נכפול את $g(x)+i\cdot h(x)$ בביטוי „הצמוד" $g(x)-i\cdot h(x)$ (השוה עמ' 159), נקבל את המכפלה הממשית:

$$F(x)=(g(x)+i\cdot h(x))\cdot(g(x)-i\cdot h(x))=[g(x)]^2+[h(x)]^2. \tag{3}$$

אם נסדר ונאחד את כל המחוברים שבתוך $F(x)$ לפי חזקות יורדות של x, מתברר שגם $F(x)$ הוא פולינום, בעל המעלה $2n$; ובפרט פולינום בעל מקדמים ממשיים. עתה נשתמש בהנחתנו, שלפיה יש לכל משואה בעלת מקדמים ממשיים, כמו $F(x)=0$, שורש (מרוכב) r, כך שקיים: $F(r)=0$. נקבל אפוא לפי (2) ו(3):

$$0=F(r)=\big(g(r)+i\cdot h(r)\big)\big(g(r)-i\cdot h(r)\big)=f(r)\big(g(r)-i\cdot h(r)\big).$$

גם $f(r)$ גם $g(r)-ih(r)$ הם מספרים מרוכבים; והרי בשדה המספרים המרוכבים,

---

1. על הנחה כללית עוד יותר לגבי המקדמים נדבר בסוף הסעיף הבא.

כמו בכל שדה (עיין בעמ' 115), מתאפסת מכפלה רק אם לפחות אחד הגורמים מתאפס. אם $f(r)=0$, הצלחנו להוכיח שלמשוואה הנתונה $f(x)=0$ ישנו השורש r. אם לא, הרי קיים $g(r)-ih(r)=0$. נתאר את המספר המרוכב r בצורה $r=r_1+ir_2$; קל לראות כי הערך הצמוד ל $g(r_1+ir_2)-ih(r_1+ir_2)$ (היינו הערך המתקבל מערך הביטוי הזה ע"י החלפת i ב $-i$) הוא $g(r_1-ir_2)+ih(r_1-ir_2)$, וזה שווה לפי (2) ל $f(r_1-ir_2)$. הואיל והערך הצמוד ל 0 גם הוא 0, קבלנו: $f(r_1-ir_2)=0$. לשון אחר: גם במקרה השני, שבו $f(r)\neq 0$, מצאנו שורש למשוואה $f(x)=0$. הוא השורש $x=r_1-ir_2$. בזה גמרנו את הוכחת המשפט 1.

על פי המשפט 1 די להבטיח שורש לכל משואה בעלת מקדמים ממשיים, ולכן נטפל בכל הסעיף רק במשואות בעלות מקדמים ממשיים. נניח אפוא מעתה שהמספרים a_k, מקדמי המשואה (1), יהיו ממשיים.

משפט 2: אם למשואה האלגברית $f(x)=0$, שמקדמיה ממשיים, יש השורש $r=r_1+ir_2$, אז יש לה גם השורש הצמוד $\bar{r}=r_1-ir_2$.

הוכחה: ההנחה מביעה שקיים השויון:

$$f(r_1+ir_2)=a_0(r_1+ir_2)^n+\ldots+a_{n-1}(r_1+ir_2)+a_n=0.$$

הואיל והמקדמים a_k כולם ממשיים, נקבל את הערך הצמוד לאגף השמאלי, בהחליפנו r_1+ir_2 ב r_1-ir_2. קיים אפוא השויון:

$$f(r_1-ir_2)=a_0(r_1-ir_2)^n+\ldots+a_{n-1}(r_1-ir_2)+a_n=0,$$ מש"ל.

משפט 3: על־סמך ההנחה, שלכל משואה $f(x)=0$ ישנו שורש (ממשי או מרוכב), אפשר לתאר את הפולינום $f(x)$ בעל המעלה n כמכפלה של „גורמים קוויים" בני הצורה $x-r_k$, ושל „גורמים רבועיים" בני הצורה $x^n+b_kx+c_k$:

$$f(x)=a_0(x-r_1)\ldots(x-r_p)(x^2+b_1x+c_1)\ldots(x^2+b_qx+c_q)$$

כך שכל המספרים r_k, b_k, c_k יהיו ממשיים, ושיתקיים $p+2q=n$.

הוכחה: לפי ההנחה הנ"ל ולפי המשפט 1 בעמ' 176/7 נוכל — על־סמך השיטה שהשתמשנו בה בהוכחת המשפט 2 בעמ' 177 — לייצג את $f(x)$ בצורה:

$$f(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n);$$

אמנם לא נדע אם המספרים r_k כולם שונים ביניהם אם לאו. נניח שבין n הערכים r_k יש p ערכים ממשיים ($n\geq p\geq 0$)[3], ושסדרנו מראש את השרשים כך שהממשיים

---

1. אם r מספר ממשי, ז"א $r_2=0$, גורר השויון $g(r)-ih(r)=0$ מיד את השויון $g(r)+ih(r)=0$, היינו: $f(r)=0$.
2. במשפט זה מכריע התנאי, שמקדמי המשואה ממשיים; וכן במשפט 3.
3. סימון זה מ־ל: 0 שווה או קטן מ p, ו p שווה או קטן מ n; לשון אחר: p נמצא בין 0 ו n, לרבות שני גבולות אלו.

ביניהם יהיו: $r_1, r_2, \ldots, r_p$. אם $r_{p+1}=s_{p+1}+it_{p+1}$ אחד מן השרשים הלא־ממשיים, הרי מבטיח המשפט 2 שגם הערך הצמוד $r_{p+1}=s_{p+1}-it_{p+1}$ נמצא בין השרשים. לכן בכפלנו שני גורמים קוויים מתאימים נקבל:

$$[x-(s_{p+1}+it_{p+1})]\cdot[x-(s_{p+1}-it_{p+1})]=(x-s_{p+1})^2+(t_{p+1})^2=$$
$$=x^2-2s_{p+1}x+(s_{p+1}^2+t_{p+1}^2),$$

היינו גורם ריבועי בעל הצורה x^2+bx+c. קל לראות שהערך הצמוד ל r_{p+1} למשל, מופיע אותו מספר פעמים בו מופיע r_{p+1} בעצמו בתוך הגורמים הקווי־ם.

לבסוף ברור שנקבל גורמים רבועיים כאלה במספר $\frac{n-p}{2}$. אם נסמן מספר זה (שהוא 0 או מספר טבעי) ב q, נקבל $n=p+2q$, מש"ל.

בצרפנו למשפט 3 את המשפט 2 שבעמ' 177, נמצא: אם נוכל להיות בטוחים שלכל משואה אלגברית יש לפחות שורש אחד, אז יש לכל משואה אלגברית בעלת המעלה n תמיד n שרשים בדיוק, אם נמנה שורש מסויים r כפי המספר שבו מופיע הגורם $x-r$ כמחלק של $f(x)$ (ז"א לפי ההגדרה שבעמ' 178: אם נמנה „שורש מרובה־m" כ m שרשים). נוסח זה מבוסס על השימוש בשרשים מרוכבים; בלעדי זה נוכל לטעון רק מה שכתוב במשפט 2, עמ' 177.

משפט 4: לכל משואה אלגברית שמעלתה m אי־זוגית, ישנו לפחות שורש ממשי אחד.

הוכחה: עלינו להסתמך על שתי עובדות שונות. תהי $f(x)=0$ משואה בעלת מעלה אי־זוגית n; אז העובדה האחת אומרת: אצל ערכים גדולים למדי של x, יש לערך הפולינום $f(x)$ הסימן (חיובי או שלילי) ההפוך לסימן ערכו של $f(x)$ אצל ערכי x קטנים למדי (היינו אצל כל x שלילי שערכו המוחלט גדול למדי).

לשם הוכחת העובדה הזאת נניח, למשל, שהמקדם a_0 של x^n הנו חיובי. נכתוב $f(x)$ בצורה:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right).$$

לא יקשה להווכח (השווה גם את מושג הגבול בפרקים י' ו־י"א) שכל הביטוי המופיע בסוגריים יקבל ערך חיובי (וביתר דיוק, ערך השונה רק מעט מן המספר 1), אם יוגבל ערכו של x למספרים ממשיים בעלי ערך מוחלט גדול למדי[1].

---

1. זה מסתמך על כך שבתוך הביטוי שבסוגריים מופיע x רק במכנים, והרי המנות $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ תקבלנה ערכים קרובים לאפס, אם נגביל את x לערכים הנ"ל. לעומת זה המקדמים $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ קבועים מראש, ואינם תלויים בהגדלת ערכו של x. מזה נופק בנקל, שכל מה שכתוב אחרי המחובר 1 בתוך הסוגריים, נמצא למשל בין $\frac{1}{2}-$ ו $\frac{1}{2}+$, אם נגביל את ערכי x כמבואר לעיל.

נופך שסימן הפולינום $f(x)$ שם כסימנו של $a_0 x^n$; ומכיון שn אי־זוגי, הרי סימן זה חיובי אצל ערכי x חיוביים, ושלילי אצל ערכי x שליליים[1]. חלק זה של ההוכחה מבטא, בעיקר, את העובדה שבשביל x בעל ערך מוחלט גדול למדי יהיה האיבר הראשון שב$f(x)$ ה א י ב ר ה מ כ ר י ע, וכל שאר האיברים (ואפילו סכומם) מבוטלים כמעט לעומתו.

את העובדה השניה שעליה מסתמכת הוכחת המשפט 4, נציין כאן בלי הוכחה, מפני שהיא שייכת לתורת הפונקציות שבה נטפל רק בחלק הבא. העובדה הנידונה היא תכונה לא רק של אותן הפונקציות הנקראות „פולינומים", כי אם של כל הפונקציות שנכנה אותן בפרק הבא „פונקציות רציפות". התכונה אומרת: אם הפונקציה $f(x)$ תקבל אצל ערך מסויים של x, $x=a$, את הערך $f(a)$, ואצל ערך אחר, $x=b$, את הערך $f(b)$, אז תקבל $f(x)$ „בין a לb" את כל ערכי־הביניים, היינו את כל הערכים שבין $f(a)$ ובין $f(b)$. ביתר דיוק: $f(x)$ תקבל כל ערך בין $f(a)$ ל$f(b)$ אצל (לפחות) ערך אחד של x הממלא את היחס $a<x<b$. במקרה שלפנינו תקבל $f(x)$ ערך שלילי אצל ערכי x קטנים למדי, ערך חיובי אצל ערכי x גדולים למדי. לכן, על סמך התכונה הנ"ל, ישנו לפחות ערך ממשי אחד של x שאצלו תקבל $f(x)$ את ערך־הביניים 0. הנמצא בוודאי בין כל מספר שלילי ובין כל מספר חיובי[2]. (השוה המשפט 1, עמ' 299.)

מצאנו שישנו ערך ממשי של x שאצלו מתאפס $f(x)$. לשון אחר: ישנו שורש ממשי למשוואה $f(x)=0$, מש"ל.

מ ש פ ט 5: לכל משוואה אלגברית (1), שמעלתה n זוגית, ושהאיבר הקבוע שבה, a_n, בעל הסימן הנגדי[3] לסימן a_0, יש שרשים ממשיים; ביתר דיוק: יש לפחות שורש חיובי אחד ושורש שלילי אחד.

ה ו כ ח ת המשפט הזה דומה מאד לזו של המשפט הקודם. נניח שוב שa_0 יהיה חיובי. הואיל וn זוגי, הרי $a_0 x^n$ חיובי הן אצל ערכי x שליליים הן אצל ערכי x חיוביים; מזה נופך על־פי העובדה הראשונה שבהוכחת המשפט 4, כי $f(x)$ עצמו חיובי, הן אצל ערכי x קטנים למדי הן אצל ערכי x ידולים למדי. מאידך, אצל $x=0$ נקבל $f(x)=a_n$, ז"א ערך שלילי. לכן קיים, לפי העובדה השניה שבהוכחת המשפט 4, ערך שלילי המאפס את $f(x)$, וכמו כן ערך

1. הקורא יזכור שאם המעריך n אי־זוגי, יש לחזקה c^n סימנו של c; ז"א החזקה חיובית אם c חיובי, שלילית אם c שלילי.

כל זה קיים על־פי הנחתנו שa_0 חיובי. אם a_0 שלילי, נקבל את המסקנה ההפוכה: $f(x)$ שלילי אצל ערכי x גדולים, חיובי אצל ערכי x קטנים. דומה המצב בהוכחת המשפט 5.

2. נוכל לדייק יותר ולומר: הואיל ול$f(x)$ יש אצל $x=0$ הסימן של $a_0\cdot 0^n+a_{n-1}\cdot 0+a_n$, יקבל $f(x)$ את הערך 0 בין ערך שלילי של x ובין $x=0$, אם $a_n>0$; במקרה זה מתאפס אפוא $f(x)$ אצל ערך שלילי ידוע של x. מאידך, אם $a_n<0$, קיים מאותו הנימוק ערך חיובי של x המאפס את $f(x)$.

3. אם $a_n=0$, יהיה 0 שורש של המשוואה.

חיובי המאפס את $f(x)$. לשון אחר: יש לפחות שורש שלילי אחד ושורש חיובי אחד למשוואה הנתונה, מש"ל.

נשאר אפוא, בהתחשב עם המשפטים 4 ו5, להוכיח את המשפט היסודי של האלגברה „רק" במקרה של מעלה זוגית n, אם $a_0\cdot a_n>0$. ואולם מקרה זה מהווה את המשפט היסודי בה"א הידיעה; כי ההוכחה קשה במקרה זה באותה המידה, בה היא קלה בשני המקרים הקודמים (קלה לפחות, אם נוכל להסתמך על הגדרה מדוייקת למספר הממשי). מן הנמנע הוא להביא כאן לפני הקורא הוכחה שלמה של המשפט היסודי; לא רק מפני שזה יתפוש חלק מכריע של הספר, כי אם גם הואיל וההוכחה תדרוש מאת הקורא ידיעות קודמות במתימטיקה יותר ממה שמתאים לאופי הספר הזה. אף־על־פי־כן נערוך כאן לפני הקורא רמזים מבהירים למהלך־הרעיונות שבשתים מן ההוכחות השונות למשפט היסודי; האחת מהן פורסמה ע"י ג ׳ א ו ס בשנת 1815, ואילו השניה מסתמכת בייחוד על ק ו ש י, אשר הוסיף תיקונים חשובים לנסיון קודם של ד׳ א ל מ ב ר[1]. על ההוכחה האחרונה הזאת ידובר במלואים.

ההוכחה המכונה „הוכחה שניה של גאוס", ושקבלה את צורתה הפשוטה ע"י ג ו ר ד ן[2], היא „האריתמיטית" ביותר בין כל ההוכחות של המשפט היסודי. מן התחומים שהם מעבר לאריתמיטיקה, היינו, מן האנליזה (לרבות את המספרים הממשיים בכללם), היא משתמשת אך ורק במשפט 4 דלעיל, הטוען שלכל משוואה בעלת מעלה אי־זוגית ישנו שורש. כדי להבטיח שרשים גם לכל המשוואות האחרות מציגה הוכחה זו את מעלת המשוואה הנתונה בצורה $n=2^\alpha\cdot m$, שבה מתאר m מספר א י־ ז ו ג י. את המעלות השונות יש לסדר בהתאם לצורה זו, ראשית לפי גודל המעריכים α, ושנית—במקרה של ערכי α שווים—לפי גדלם של המספרים m. ז"א: אם $n_1=2^{\alpha_1}m_1$ ו$n_2=2^{\alpha_2}m_2$, נקדים את n_1 לn_2, אם $\alpha_1<\alpha_2$; אך במקרה $\alpha_1=\alpha_2$, אם $m_1<m_2$. אם קודם n_1 לn_2 לפי זה, תיקרא משוואה בעלת המעלה n_1 „נפתרת ביתר קלות" ממשוואה בעלת המעלה n_2.

אחרי מיון זה של המעלות נוכיח את המשפט היסודי בעזרת האינדוקציה השלימה (עמ' 17) בדרך זו: נראה שלכל משוואה בת מעלה מסויימת n ישנו שורש, בתנאי שיש שרשים לכל אותן המשוואות הנפתרות ביתר קלות מן המשוואה שלפנינו. כדי להוכיח זאת, יש אמנם צורך בשיטות חריפות ובחשבונות לא קלים ביותר. ואולם העיקר שבהוכחה, היינו המעבר ממשוואה הנפתרת ביתר קלות אל משוואה הנפתרת בפחות קלות, יוצא לפועל בפשטות: בעיקר על־סמך המשוואות בעלות המעלה 2, שאפשר לפתרן תמיד — אם גם לא בתחום הממשי — בשיטות קלות וידועות. ע"י נסיגה מן המשוואה הנתונה למשוואות הנפתרות ביתר

1. J. le Rond d'Alembert

2. P. Gordan. עיין ב *Mathematische Annalen* 10 (1876).

ויתר קלות נבוא, סוף־סוף, דרך אינדוקציה אל משואה שבהצגת מעלתה $n=2^{\alpha}m$ יהיה $\alpha=0$, ולכן $n=m$; היינו, אל משואה בעלת מעלה אי־זוגית. אבל בשביל משואות אלו כבר הבטחנו שרשים במשפט 4, ולפי זה נגמרה ההוכחה.

מה שנוגע ל**היסטוריה של המשפט היסודי**, כנראה היה ג'יראר[1] הראשון אשר ביטא את המשפט (1629), וד'אלמבר הראשון שניסה באופן רציני להוכיח אותו (1746)[2]. אי־אפשר לראות את הוכחתו כקולעת אל השערה; ואולם זכות יש לה בזה ששימשה אחרי כך בסיס להוכחותיהם של קושי ואחרים במאה הי"ט. (על טעות מסויימת אשר שררה לגבי מובנו של המשפט היסודי בין רוב המתימטיקנים במאה הי"ח, נייחד את הדבור בסעיף הבא.) גאוס היה הראשון שנתן הוכחה מדוייקת למשפט היסודי. אמנם הוכחתו הראשונה, שמצאה בהיותו בן עשרים ושהופיעה בשנת 1799, אינה משוכללת לפי מושגי הדיוק של תקופתנו אנו; רק על־סמך השכלולים שהכניסו בה גאוס בעצמו (בהוכחתו הרביעית 1849) ומתימטיקנים אחרים (עד אוסטרובסקי[3] 1920), נוכל להעריך בחיוב את הוכחתו הראשונה של גאוס. לעומת זאת מצטיינת הוכחתו השניה של גאוס (1815; השוה לעיל) אמנם לא בפשטות אבל בדיוק ובטוהר השיטה. רוב ההוכחות של המשפט מסתמכות במידה יתרה על תורת הפונקציות; הראשונה ביניהן שהיא מדויקת היתה ההוכחה השלישית של גאוס (1816). במשך הזמן הופיעו כמה עשרות הוכחות למשפט היסודי, וגם עובדה זו מציינת את ערכו העקרוני של המשפט

§3. על שיטות שונות באלגברה.

א) **פתירתה האלגברית של משואה אלגברית.**

התפקיד העיקרי בהתפתחות האלגברה העיונית היה למושג: **פתירה אלגברית** של משואה אלגברית. כדי לגשת באופן טבעי אל מושג זה, נזכור את המשואות שבפתירתן רגילים לעסוק בבתי הספר התיכונים; ונניח כאן שמקדמי המשואה $f(x)=0$ יהיו אך מספרים **רציונליים**. את המשואה „הקווית" הכללית $a_0x+a_1=0$ נוכל לפתור מיד בצורה: $x=-\frac{a_1}{a_0}$; השורש אפוא רציונלי גם הוא. כידוע אין הדבר כך לגבי המשואה ה„ריבועית" (בעלת המעלה 2); הקורא זוכר

1. A. Girard
2. משום כך יש שקוראים למשפט היסודי בשם „משפט של ד'אלמבר".
3. A. Ostrowski. עיין גם במלואים.
4. תיאורים משווים של ההוכחות והשיטות השונות נמצאים במאמריו של G. Loria ב *Bibliotheca Mathematica* N. S. ג (כרכים 5 ו־7; 93–1891), ובמאמרים של Netto — Le Vavasseur ב *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, כרך I, חלק שני. ארבע ההוכחות של גאוס הופיעו יחד (בתרגום גרמני) בחוברת 14 של האוסף: *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* (1904; 82 עמ').

בוודאי כי למשואה $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ יש שני שרשים (היכולים להיות שווים), וכי אפשר לתארם בצורה:

$$x=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0};$$

אם לא יהיה, במקרה, $a_1^2-4a_0a_2$ ריבועו של מספר רציונלי, הרי שני הפתרונים, המתאימים לשני הסימנים $+$ ו $-$ של השורש הריבועי, הנם מספרים אירציונליים. שניהם מתלכדים רק אם $a_1^2-4a_0a_2=0$. מאידך שרשים אלו ממשיים אך אם $a_1^2-4a_0a_2\geqq 0$; אחרת הם מספרים מרוכבים.

בעוד שפתירת המשואה הריבועית היתה ידועה כבר לחוקרי יון, הצליחו רק במחצית הראשונה של המאה הש־עשרה מתימטיקנים איטלקיים שונים לפתור את המשואות שמעלותיהן 3 ו 4. פרטים אחדים על פתירת המשואות האלה ינתנו במלואים לחלק זה. יצויין כדבר מענין ואפייני כי במקרה מסויים, שבו כל שלושת שרשי המשואה בעלת המעלה 3 הם ממשיים, אין לתאר שרשים אלו „באופן אלגברי" (עיין לקמן), אם נצטמצם לתחום המספרים הממשיים; אדרבה, נחוץ לשם כך לעשות סיבוב דרך המספרים המרוכבים. הצד השווה שבפתירת המשואות שמעלותיהן 2, 3, 4, הוא זה: כדי למצוא את השרשים מתוך המשואה הנתונה $f(x)=0$, היינו כדי לבטאם בעזרת מקדמי המשואה $f(x)=0$, יש צורך רק בפעולות הרציונליות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק), ומלבד זה בהוצאת שרשים[1].

המתימטיקנים שבמאה הי"ז והי"ח נלאו למצוא שיטות מתאימות לפתירת המשואות שמעלותיהן עולות על 4, בייחוד בעלות המעלה 5, ולא הצליחו. במקרים מסויימים הדבר אפשרי בלי קושי, והמקרה הפשוט ביותר — המשואה $x^n+a_n=0$, שיש לה על כל פנים הפתרון $x=\sqrt[n]{-a_n}$[2]. ואולם כוונתנו כאן למקרה הכללי של משואה אלגברית. אף במאה הי"ח, כשהשתדלו להוכיח את המשפט היסודי של האלגברה, לא היה ברור לכמה מן המחברים מה בעצם התכוונו: אם להבטיח מציאותו של מספר ממשי או מרוכב, הפותר את המשואה, אם למצוא (בהנחה שהמציאות מובנת מאליה) שיטה מתאימה כדי לקבוע את שרשי המשואה הנתונה — תהי זאת השיטה הנ"ל, בעזרת הפעולות הרציונליות והוצאת שרשים, או תהי השיטה מסוג אחר. רק בסוף המאה הי"ח התחילו מתימטיקנים

1. בשם זה נתכוון, כרגיל, לשרשים $\sqrt[n]{-}$, שמעריכם n מספר טבעי. תחת $\sqrt[2]{}$ כותבים $\sqrt{}$.
2. יש להבין בסימן $\sqrt[n]{a}$ לאו דוקא מספר אחד כי אם עד n מספרים; בשאלה זו נדון בסעיף הבא. מכל מקום ברור: אם a חיובי, ישנו מספר ממשי חיובי אחד שיש לסמנו ב $\sqrt[n]{a}$, מספר שהחזקה ה n ית שלו שווה ל a. — את המשואות בנות הצורה $x^n+a_n=0$ (צורה אחרת: $x^n=a$) מכנים „משואות טהורות". הואיל והן נפתרות ע"י הוצאת השורש ה n י, נוכל לומר: בעית הפתירה האלגברית (עיין לקמן) היא הבעיה, איך לפתור משואה אלגברית כללית על־ידי פתירת משואות טהורות — מלבד השימוש בפעולות הרציונליות המובנות מאליהן.

שונים. אחרי מלחמה פנימית נועזה במשפט הקדום ההפוך הנפוץ בעולם, להגיע לידי ההשערה, שמא אי־אפשר הדבר בדרך כלל לפתור את המשואות, שמעלתן עולה על 4, בעזרת הפעולות הרציונליות והוצאת שרשים. לשיטה מיוחדת זו, המגבילה את פתירת המשואה לפעולות הנ"ל, קוראים בשם פתירה אלגברית של משואה אלגברית. הראשונים שהצליחו להוכיח בדרך מדוייקת שאין לפתור פתירה אלגברית את המשואה הכללית שמעלתה גבוהה מ־4, היו רופיני[1] (1799), ובצורה מדוייקת ומשוכללת יותר אָבֶל (1826).

„משפט אי־האפשרות" של רופיני־אבל הנהו אחד המשפטים היסודיים — אם לא היסודי ביותר — של האלגברה „הקלַסית". אמנם עומד לעומתו „המשפט היסודי" של האלגברה (§ 2), המבטיח שרשים לכל משואה, אפילו אם לא יוכלו השרשים להמצא דרך פתירה אלגברית. אבל המשפט היסודי בצורתו הרגילה[2] (וכמו־כן אף המשפט 4 בעמ' 185) איננו בעצם משפט מתוך האלגברה, בהסתמכו על תחום כל המספרים הממשיים והמרוכבים — תחום הנחוץ לאנליזה ולגיאומטריה ולא לאריתמיטיקה ולאלגברה.

על פי המשפט של רופיני־אבל מתעוררת בעיה אלגברית בעלת צורה חדשה, והיא: מה הן המשואות, בנות מעלות גבוהות מ־4, שיש לפתרן פתירה אלגברית? בסוג מיוחד מבין משואות אלו, החשובות אף מהשקפת הגיאומטריה, נעסוק בסעיף הבא. סוג כללי יותר של משואות בעלות התכונה הנ"ל נמצא ע"י אבל וקבל את השם „משואות של אבל". ואולם את הצעד החשוב ביותר לגבי הבעיה שלפנינו עשה גלוע[3] בשנים 1830—1832 בהיותו בן עשרים בערך. תורת־גלוע, שהיא המקצוע המרכזי של האלגברה „הקלסית", קובעת את הדרכים המתאימות לטיפול במשואה נתונה; בפרט היא מראה איך להכריע, אם המשואה נתונה לפתירה אלגברית אם לאו. בתורה זו נודעת חשיבות יתרה למושג החבורה, ובעיקר ממנה צמחה תורת־החבורות (פרק חמישי).

ב) פתירה מקורבת של משואה מספרית.

המשפט היסודי מבטיח את מציאות שרשיה של משואה נתונה; לעומת זאת אי־אפשר בדרך כלל לתאר באופן אלגברי את שרשי המשואה. מול משואה נתונה אנחנו נמצאים אפוא בדרך כלל במצבו של איש, שנמסרה לו מיד נעלמה פתקה, המודיעה שבעירו טמונה בתוך האדמה אבן־טובה יקרה. מה מועילה לו בשורה זו, אם אינו יודע איפה עליו לחפור כדי למצוא את האבן? במקרה שלנו השאלה היא: אם לפנינו משואה שאינה נתונה לפתירה אלגברית, או שאין אנחנו יודעים אם היא נתונה אם לאו, האם ואיך נוכל לנצל את ההבטחה הנכללת

1. P. Ruffini
2. השוה לעומת זה את הפרצוף בו מופיע המשפט היסודי להלן ((ג) של סעיף זה).
3. E. Galois

במשפט היסודי, ולמצוא ממש את שרשי המשואה? מובן שלשאלה הזאת יש כוון מעשי רק, אם המשואה הנתונה היא משואה „מספרית", ז"א אם המקדמים a_k הנם מספרים נתונים. אנו מחפשים אפוא שיטות, המאפשרות לקבוע את שרשיה של משואה מספרית נתונה; שיטות כאלה רצויות אף לגבי משואות שפתירתן האלגברית אפשרית אבל אי־נוחה (כגון אצל המעלות 3 ו־4).

על השאלה הנ"ל אפשר לענות בחיוב, ואף ישנן כמה שיטות כדי למצוא את השרשים. נרמוז ראשית לשיטות עיוניות במקצת. דוגמה אחת של משפט הממציא לנו שיטה כזו, הוא המשפט של רולה[1], שנגלה כבר בסוף המאה הי"ז ושנוכל לבארו ביתר קלות בפרק השנים־עשר. נציין כאן רק שלכל פולינום $f(x)$ מתאים פולינום אחר[2], $f'(x)$, כך שבין כל שני שרשים עוקבים של המשואה $f(x)=0$ יימצא שורש של המשואה $f'(x)=0$. דוגמה אחרת מהווה „הכלל של דיקרט" האומר: מספר שרשיה החיוביים של משואה בעלת מקדמים ממשיים שווה לכל היותר למספר, המגיד כמה פעמים יש חילוף־הסימן (מ+ל — ולהיפך) בין המקדמים העוקבים של המשואה; ואם מספר השרשים הנ"ל קטן ממספר החילופים, יהיה ההפרש ביניהם מספר זוגי[3].

מרחיק־לכת מכללים אלו משפטו של שטורם[4] (1829), הנותן שיטה איך לקבוע בדיוק, כמה שרשים ממשיים של $f(x)=0$ נמצאים בין שני גבולות נתונים מראש, a ו־b. לשם כך יש ליצור מתוך $f(x)$ פולינומים מסויימים אחרים, לקבוע ערכיהם של אלה אצל $x=a$ ו־$x=b$, ולבדוק את חילופי הסימנים של ערכים אלו באופן מסויים. להלכה אפשר לקבוע, בעזרת משפטו של שטורם, כל שורש ממשי של משואה נתונה בכל דיוק נדרש; לשם כך מספיק לקרב יותר ויותר את הגבולות הנידונים זה אל זה. — משפטו של שטורם מצטיין בצורתו האלינַנטית; אבל השימוש בו למעשה מסובך למדי, בדרשו ברוב המקרים חשבונות ארוכים.

ישנן שיטות אחרות שערכן דוקא בקלות היחסית בה נוכל להוציא לפועל את החשבונות, המאפשרים לקבוע שורש או את כל השרשים למשואה מספרית נתונה; ובפרט לקבעם בדיוק הרצוי לנו, למשל: עד המקום הששי אחרי הפסיק בפיתוח העשרוני. בעיה זו נקראת: פתירה „מקורבת" של משואה. רוב השיטות הללו מסתמכות על תיאורן הגיאומטרי של פונקציות — במקרה זה: של פולינומים — במובן הגיאומטריה האנליטית (עיין בפרק הבא ובחלק החמישי). משום כך יש להשתמש לשם מציאת השרשים לא רק בשיטות־חשבון, המבוססות על

1. M. Rolle
2. יכולים היינו להגדיר פולינום זה $f'(x)$ גם כאן. אבל אין הדבר כדאי, מפני שנקבלנו באופן אבטומטי בפרק י"ב.
3. לא נדייק יותר לגבי ניסוח הכלל של דיקרט, שרק כוונו חשוב לנו כאן.
4. Ch. Sturm

תכונותיהם של הקווים העקומים המתאימים לפולינומים. כי אם גם במישרין בשיטות גְּרָפִיוֹת המאפשרות לקבוע את השרשים דרך שרטוט. בחלק השלישי (למשל ב§ 3 של פרק ט'). וכן בכרך השני, ידובר על שיטות כאלה בדרך כלל. כאן תנתן דוגמה פשוטה אחת לשיטות הנ"ל; דוגמה שאפשר להבינה גם בלי תיאור גיאומטרי (עם כי התיאור הגיאומטרי נותן את ביסוס השיטה בדרך הטבעית ביותר).

הקורא שלא שכח את השימוש בלוחות של לוגריתמים, יזכור ששם יש גם לקבוע את הלוגריתמוס של מספר, שאיננו נמצא בתוך הלוח. בהיות לו יותר ספרות מאשר למספרים המופיעים בלוח. במקרה זה משתמשים בשיטה המכונה „אינטֶרפּוֹלַציה" (שירבוב); מחלקים ל 10 את ההפרש בין שני לוגריתמים עוקבים שבתוך הלוח, ומוסיפים ללוגריתמוס הראשון (מבין שני העוקבים) מספר עשיריות כפי הספרה הנוספת של המספר הנתון.[1] נעיין איך אפשר להשתמש בשיטה דומה כדי לפתור משואות:

נקח כדוגמה את המשואה $f(x)=x^3-7x-7=0$. קל לראות על פי שיטות כלליות (למשל, על פי הכלל של דיקרט) שלמשואה זו יש שורש חיובי אחד ויחיד. החשבון נותן אצל $x=3$: $f(3)=3^3-7\cdot 3-7=-1$; אצל $x=4$: $f(4)=4^3-7\cdot 4-7=+29$. לפי העובדה שצוינה בעמ' 186 (בהוכחת המשפט 4) נופק, כי למשואה הנתונה יש שורש הנמצא בין 3 ו 4. לפי ערכיהם של $f(3)$ ו $f(4)$ יש לשער שהשורש קרוב בהרבה ל 3 מאשר ל 4. החשבון בשביל $x=3{,}0$ ו $x=3{,}1$ נותן: $f(3{,}0)=-1{,}000$, $f(3{,}1)=+1{,}091$; ולכן יש לשער שהשורש נמצא בערך באמצע בין 3,0 ו 3,1. אם נרצה לדייק יותר לגבי ערך השורש, נוכל להניח (אף־על־פי שאין זה מדוייק, אם מעלת $f(x)$ גדולה מ 1) כאילו בריוח הקטן שבין 3,0 ל 3,1 ישנה $f(x)$ את ערכו במידה שוות־יחס (פרופורציונלית) ל x. יהי השורש הנדרש $x=3+\xi$ $\left(\xi<\frac{1}{10}\right)$; השגיאה של הערך 3,0 מתאימה אפוא ל ξ, והשגיאה של 3,1 מתאימה ל $\xi-0{,}1$. אם נסמן את הערכים $f(3{,}0)$ ו $f(3{,}1)$, שהראשון מהם שלילי והשני חיובי, ב $-a$ ו b, הרי נופק מהנחת שויון־היחס הנ"ל:

$$\xi:(0{,}1-\xi)=a:b;\quad b\cdot\xi=a\cdot 0{,}1-a\cdot\xi;\quad \xi=\frac{a\cdot 0{,}1}{a+b}.$$

בהכניסנו תחת 3,0 ו 3,1 ערכים כלליים α ו β, נקבל במקום הנוסחה הקודמת:

$$x=\alpha+\xi=\frac{\alpha b+\beta a}{a+b};\qquad \xi=\frac{a\cdot(\beta-\alpha)}{a+b}.$$

בהנחות דלעיל — שיש רק שורש אחד בין α ו β, וכי ל $f(\alpha)$ יש הסימן ההפוך

1. מדובר כאן על ספרה אחת נוספת. אם נמצאים בלוח למשל הלוגריתמים לכל המספרים בעלי ארבע ספרות, ודרוש $\log 65537$, עלינו לחלק ל 10 את ההפרש בין $\log 6553(0)$ ו $\log 6554(0)$, ולהוסיף על הראשון שבע מן העשיריות הללו.

לסימן של $f(\beta)$ — מאפשרת הנוסחה האחרונה לתת קירוב לגבי קביעת השורש. נוסחה זו נקראת regula falsi („כלל השקר"). צד „השקר" הוא בעצם ההנחה, כאילו משתנה $f(x)$ באופן שווה־יחס ל x. ואולם לפי המקור ההיסטורי מתכוונת המלה שקר לרעיון, כאילו חשבנו דרך השקר שגם α גם β הנם שרשים, ומתוך הנחת־שקר כזולה זו מצאנו ערך, שהוא על כל פנים קרוב לאמת מ α ו β גם יחד.

ג) אלגברה מופשטת.

החלק הקודם של סעיף זה היה מוקדש לבעיה מעשית יותר מפתירתה האלגברית של משואה: לחשבון המקורב של השרשים. עתה נפנה לבעיה שהיא כללית ומופשטת מכל מה שהבאנו עד כה בפרק זה: הכוונה למקצוע שנתחדש במשך חמישים השנים האחרונות, בייחוד ע"י שני חוקרים יהודים, שטיינץ ואֶמי נֶטר, והנקרא אלגברה מופשטת. לא נוכל להכניס כאן את־הקורא לתוך עצם הבעיות הכלליות הללו; תפקיד השורות הבאות יהיה רק לתת מושג על כוון־המחשבה שבמקצוע זה.

נצא מדברים פשוטים של האלגברה הרגילה, ונכניס מושג אלגברי עקרוני, שעד הנה דלגנו עליו: נסתכל בשלש המשואות

$$f(x)=x^2-1=0;\quad g(x)=x^2-2=0;\quad h(x)=x^2+1=0.$$

הואיל וקיים $(x-1)(x+1)=x^2-1$, הרי -1 ו $+1$ הנם שרשי המשואה $f(x)=0$ (השוה המשפט 1 בעמ' 176/7). מצאנו את השרשים בקלות זו, מפני שהפולינום x^2-1 פריק (השוה בעמ' 24), ז"א מתפרק בשדה המספרים הרציונליים R לשני הגורמים $x+1$ ו $x-1$.

הפולינום $g(x)$ שבדוגמה השניה אינו מתפרק בשדה המספרים הרציונליים, ז"א אי־אפשר לתאר את $g(x)$ בצורה $g(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$, כך ש $g_1(x)$ ו $g_2(x)$ פולינומים (לא־קבועים) בעלי מקדמים רציונליים. באמת: לו היה קיים פירוק כזה, היו $g_1(x)$ ו $g_2(x)$ בעלי הצורה $g_1(x)=x-a_1$, $g_2(x)=x-a_2$; ואמנם אין מספרים רציונליים a_1 ו a_2 כך שיהיה $x^2-2=(x-a_1)(x-a_2)$. אף־על־פי־כן יש למשואה $x^2-2=0$ שרשים, והם שני השרשים הממשיים $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$; לכן, בהתאם למשפט 1 הנ"ל, מתפרק x^2-2 בצורה $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. פירוק זה אינו סותר מה שנאמר לעיל; שהרי $\pm\sqrt{2}$ אינם מספרים רציונליים, ולכן אין סתירה בין הפירוק הזה ובין הטענה כי x^2-2 אינו מתפרק בשדה המספרים הרציונליים. פולינום זה מתפרק בתחום אשר יווצר מתוך שדה המספרים הרציונליים R על־ידי סיפוחו של $\sqrt{2}$ (וכל המספרים הנוצרים ממספרים

1. בספרות המדעית קוראים למושג זה בשם הרומי „רֶדוּציבל" (reducibile); ולהיפך, פולינום שאינו מתפרק לגורמים, בשם: „אירֶדוּציבל". — מובן, כי מדובר כאן רק על גורמים בעלי מעלה

רציונליים ומ $\sqrt{2}$ ע״י חיבור וכפל); היינו: בשדה המספרים $r_1+r_2\sqrt{2}$, אם r_1 ו r_2 מסמנים מספרים רציונליים. שדה זה רגילים לסמן ב $R(\sqrt{2})$.

מה שנוגע לדוגמה השלישית, הרי x^2+1 אינו מתפרק לא ב R ולא ב $R(\sqrt{2})$. ואולם יש ל $x^2+1=0$, כידוע, השרשים $\pm\sqrt{-1}=\pm i$; לכן מתפרק x^2+1 בצורה $x^2+1=(x+i)(x-i)$. לפי זה פריק x^2+1 בשדה $R(i)$, המכיל את כל המספרים בעלי הצורה $r_1+r_2 i$, שבה מסמנים r_1 ו r_2 מספרים רציונליים כלשהם. לעומת זאת, למשל הפולינום x^2-2 איננו פריק בשדה $R(i)$.

ראינו כאן שהמושג „פולינום פריק" איננו מושג בעל מובן מוחלט, אלא בעל מובן יחסי, התלוי בשדה שנתכוון אליו. פולינום שאיננו מתפרק בשדה מסויים יוכל להתפרק בשדה אחר. אף־על־פי־כן יש בידנו משפט, המכיל טענה על התפרקות כל הפולינומים בשדה מסויים: הוא המשפט היסודי של האלגברה (§2). משפט זה בצירוף המשפט 1 שבעמ׳ 176/7 אומר, בלשון המושגים שהכנסנום כאן: בשדה כל המספרים המרוכבים מתפרק כל פולינום, ואפילו מתפרק „לגמרי", היינו: מתפרק למכפלת גורמים קוויים. לא איכפת אפילו מה הם מקדמי הפולינום: רק מספרים רציונליים או ממשיים או אף מרוכבים.

בקשר עם זה יתכן לעורר שאלה זו: ב §1 של פרק זה הוזכר שבשדה המספרים הממשיים — ולא־כל־שכן בשדה כל המספרים המרוכבים — ישנם מספרים טרנסצנדנטיים, ז״א מספרים שאינם אלגבריים (שאינם שרשים לשום משואה אלגברית בעלת מקדמים רציונליים). גדולה מזו: בחלק הרביעי יתברר שהמספרים חטרנסצנדנטיים עודפים בהרבה, ואף „עודפים פי־אינסוף", על המספרים האלגבריים. ובכן: היש באמת צורך להשתמש בשדה כל המספרים המרוכבים כדי לבטא את המשפט היסודי של האלגברה? האם לא די להסתמך על תחום כל המספרים האלגבריים (הממשיים וגם המרוכבים)? בוודאי מספיק תחום זה כדי להבטיח שרשים למשואות בעלות מקדמים רציונליים. ואולם בעזרת שיטות אלגבריות שאינן קשות ביותר אפשר אף להוכיח: ראשית, שתחום כל המספרים האלגבריים מהווה שדה; שנית, שבתוך שדה זה נמצאים שרשי כל משואה בעלת מקדמים אלגבריים (לא רק רציונליים). ובכן, למה מכניסים לתוך המשפט היסודי של האלגברה תחום, הגדול והמקיף במידה מופרזת, תחת הסתפק בתחום כל המספרים האלגבריים, שהוא בוודאי התחום הצר ביותר שיבוא בחשבון?

התשובה על שאלה זו תפתיע אולי את הקורא. באמת אין שום צורך להכניס לתוך המשפט היסודי את המושג הכללי של המספרים הממשיים והמרוכבים. אדרבה, דוקא עובדה זו, שניסוח המשפט והוכחתו מסתמכים גם על המספרים הטרנסצנדנטיים נוסף על האלגבריים, היא ששימשה לנו לעיל יסוד לומר: משפט זה איננו שייך בעצם לאלגברה, כי אם לאנליזה. הסיבה שבעבורה משתמשים בשדה כל המספרים המרוכבים, היא סיבה היסטורית

מצד אחד, סיבת „נוחיות" מצד שני בלבד. הרי המספרים הממשיים שגורים בפינו זה מאות בשנים, וסיפוחו של המספר היחיד i אל תחום המספרים הממשיים יוצר את תחום כל המספרים המרוכבים, תחום הנראה לפי זה בעינינו פשוט ורגיל (אף־על־פי שלאמיתו של דבר טמונים בשני תחומים אלו קשיים וחידות לרוב, שרחוקים אנו מפתרם). מאידך, תחום כל המספרים האלגבריים הוא פשוט הרבה יותר מהשקפה עיונית: איננו זקוק לשיטות האנליזה, ולכן אין בתוכו כל הקשיים הללו. אכן תחום זה אינו „נתון" לנו באופן הסתכלותי, כאשר נתונים המספרים הממשיים או המרוכבים: כבני־זוגן של כל הנקודות שבקו או במישור; השיטות הנהוגות בשדה המספרים האלגבריים הן מופשטות יותר. משום כך נוח לבטא את המשפט היסודי ביחס לשדה המספרים המרוכבים, ולא לשדה המספרים האלגבריים. משל למה הדבר דומה: לסוג מסויים של נחשים, למשל, הנמצא אך ורק באמריקה. במשך הזמן חקרו ומצאו מה הם בדיוק התחומים באמריקה שבהם נמצאים הנחשים הללו. קל יותר היה לטעון כלפי נחש מסוג זה אשר נלכד והובא לפנינו: מוצאו מאמריקה, מאשר לטעון: מוצאו מחלק מסויים של אמריקה, טענה האפשרית רק על־סמך חקירות נוספות. ואמנם נוסח „טהור" יותר (מהשקפת האלגברה) למשפט היסודי של האלגברה יהיה זה: ישנו שדה A צר ביותר[1] המקיף את שדה המספרים הרציונליים R, כך שלכל משואה אלגברית בעלת מקדמים מתוך R, ואפילו מתוך A, יהיו שרשים בתוך A; הוא השדה A של כל המספרים האלגבריים. על־סמך התכונה הזאת קוראים ל A גם בשם „ההרחבה הסגורה־באופן־אלגברי" של שדה המספרים הרציונליים. המלה „סגור" מורה על כך שאין צורך לפתוח שוב את דלתות השדה ולהכניס לתוכו איברים נוספים, כדי להבטיח שרשים לכל משואה.

אחרי הסברות אלו קל לתאר טיבו של המקצוע „אלגברה מופשטת". בארנו כמה מושגים ושיטות של האלגברה, חלקם במלים ברורות, חלקם דרך רמז (כמו תורת גָּלוֹעַ). רוב המושגים והשיטות האלה מניחים שמקדמי המשואות יהיו מספרים רציונליים. מתקבל על הדעת שנציג אותן הבעיות, בגזרנו על המשואות כי מקדמיהן יהיו איברי שדה כלשהו K (עיין בעמ׳ 111/2). בעיה זו לא תהיה מופשטת ביותר כל זמן ש K הוא שדה של מספרים, היינו שדה שהוא הרחבה של שדה המספרים הרציונליים — שדה־המספרים הצר ביותר—, ונוסף לכך אף שדה חלקי של שדה כל המספרים האלגבריים[2] (לרבות את זה בעצמו). אבל הרי התוודענו בפרק החמישי גם אל שדות שאיבריהם אינם מספרים רגיליב או לא רק מספרים רגילים; ואף אל שדות שבהם מקבלים ע״י חיבור ממושך של היחידה את איבר־האפס. בין שדות אלו נמצאים שדות סופיים

1. ז״א שאין ל A שדה חלקי (שונה מ A) בעל אותה התכונה (השוה בעמ׳ 114). ע״י כך נקבע A באופן חד־ערכי.

2. הרי מיותר מהשקפת האלגברה לקחת שדה מקיף יותר, כגון שדה כל המספרים המרוכבים.

ואינסופיים. השאלה היא, עד כמה אפשר להכליל את מושגיה היסודיים של האלגברה גם ביחס למקרים כאלה, ועד כמה ישארו בתקפם המשפטים והשיטות האלגבריים, אם נקח את מקדמי המשוואות מתוך שדה K כלשהו.[1] במידה ידועה הראה כבר קרונקר (וגם דידיקינד), ואולם באופן כללי רק שטייניץ (במאמרו המצוטט בעמ' 115), שבאמת מושגיה ומשפטיה העיקריים של האלגברה הטהורה נשמרים ברובם הגדול ביחס לכל שדה. רק אחד מסוגי השדה שנזכרו לעיל (שדות אינסופיים מסויימים, שבהם מתקבל 0 ע"י חיבור ממושך של היחידה) יוצא מן הכלל לגבי חלק מן המשפטים החשובים. מלבד זה שונות בחלקן השיטות — אבל לא תוצאותיהן — בין שדות אינסופיים וסופיים.

לגבי כל שדה מופשט ישנו אף משפט המקביל למשפט היסודי של האלגברה, או ביתר דיוק: למשפט על הרחבה סגורה־באופן־אלגברי לשדה המספרים הרציונליים (עיין לעיל). המשפט המקביל קובע: כנגד כל שדה נתון K ישנה במציאות הרחבה אחת ויחידה[2] $\bar{K}$ הסגורה־באופן־אלגברי, כך שלכל משואה בעלת מקדמים (לא רק מתוך K כי אם גם) מתוך $\bar{K}$ יהיו שרשים בתוך $\bar{K}$. ושאין דבר זה קיים בשום שדה חלקי של $\bar{K}$. אפשר להוכיח משפט זה, שהוא אחד מפרותיהם הנחמדים של מחקרי שטייניץ, רק בחלקו ע"י שיטות אלגבריות; כדי להוכיח את חד־ הערכיות של ההרחבה, אנו זקוקים לשיטות האינסופיות המרחיקות־לכת של תורת־הקבוצות (חלק רביעי, כרך שני).

במלואים נרמוז איך אפשר לראות אף את המשפט היסודי של האלגברה כמו־שהוא מהשקפת האלגברה הטהורה, היינו: בלי לעבור את גבולות האלגברה.

בדרך־כלל אפשר לומר: חמרי־המחקר באלגברה הם, לפי ההשקפה החדישה, לא מספרים כי אם עצם החוקים הפורמליים של החשבון בגדלים קבועים (מספרים) ובגדלים לא־מסויימים, חוקים המופיעים בייחוד בהגדרת המושגים: שדה, חוג, חבורה. בוודאי לא יקשה על הקורא למצוא השקפה זו בין שורות התיאור הניתן כאן. אחד התפקידים החשובים ביותר של האלגברה המופשטת הוא להראות, שמסקנות האלגברה הטהורה בדרך־כלל אינן תלויות במספרים שאנו מחשבים בהם כי אם בטיב פעולות־החשבון בעצמן; היינו, בעובדה שפעולות אלו ממלאות למשל את תנאי השדה או החוג.

המעבר מן האלגברה הקלסית אל האלגברה המופשטת הנו דוגמה לתופעה, שהתפשטה במשך מאת השנים האחרונות בתוך המתימטיקה, והיא: הכללת שיטות

1. במקרה פרוט מאד ראינו איך אפשר להרחיב, באופן אלגברי טהור, תחום שאין בו שרשים למשואה מסויימת, לתחום המכיל את השרשים הדרושים: בבנותנו מעל לשדה המספרים הממשיים את שדה המספרים המרוכבים, ע"י הכנסת הפולינומים בעלי מקדמים ממשיים והגדרת השויון על־סמך x^2+1 כמודול־קונגרואנציה (עיין במלואים לעמ' 168).

2. במלת "הרחבה" הכוונה היא לשדה; המונח אפוא הפוך למונח "שדה חלקי". — "אחת ויחידה" ר"ל: מלבד שדות, המקיפים גם הם את K כשדה חלקי והאיסומורפיים ל$\bar{K}$.

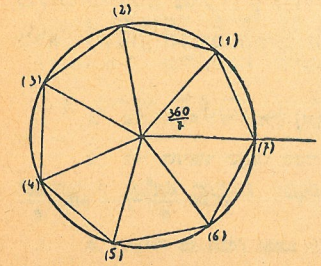
מסויימות ואיחוד תורות שונות בתוך מסגרת אחידה. ע"י "ירידה" מהשקפות מוחשיות להשקפות מופשטות, המבטלות את הצד המקרי שבתורות השונות והמבליטות ע"י זה את המחשבה הטהורה והשקיפה — בה־בשעה שמוותרים על חשבונות וסיבוכים צדדיים רבים. תופעה זו נתגלתה לפנינו בדוגמה אפיינית ביותר, בעברנו מנושא הפרק הרביעי (הרחבת מושג־המספר) אל מושגי החבורה והשדה שבפרק החמישי. דוגמות אחרות מופיעות בתורת הקבוצות (חלק רביעי), בשיטות החדישות של הגיאומטריה (חלק חמישי), ובשיטה האכסיומטית (חלק ששי).

§4. חילוק המעגל.

בסעיפים הקודמים הצגנו לפני הקורא אחדות מבעיות האלגברה. לא רק שלא יכולנו למצות את החומר, אלא לא נגענו אפילו בכל הנושאים האלגבריים שיש להם חשיבות יסודית. בין נושאים אלו יש לציין במיוחד את תורת המשואות הקוויות, ובקשר עמה את תורת הדיטֶרמינַנטים והמַטריצות — תורות שהשפעתן משתרעת גם מעבר לאלגברה והלאה (עיין בהערה בעמ' 173). ואולם תיאור התורות הללו, אף בקוויהן העיקריים, דורש מקום יותר מדי, ומקשה על הקורא במידה העולה על מסגרת הספר הזה. הוא הדין ביחס לתורת האינַוריאנטות (השמורות). חחשובה גם בגיאומטריה (עיין בחלק החמישי). רק עוד נושא אלגברי אחד יעסיק אותנו כאן, והוא: בעית חילוק־המעגל; בנושא פרוט זה נגענו בעמ' 36, והוא קשור גם בנושאים גיאומטריים שנגיע אליהם בחלק החמישי.

את הבעיה שלפנינו ננסח כדלקמן: האפשר לשרטט, בעזרת סרגל ומחוגה בלבד, מצולע משוכלל (ז"א שצלעותיו שוות וזויותיו שוות) בעל n צלעות? והאיל ובשביל אותו הn שני מצולעים משוכללים בעלי n צלעות "דומים" זה לזה (במובן הדמיון הגיאומטרי), לא איכפת מהו גודל הצלע שבמצולע. כידוע אפשר "לחסום" מצולע משוכלל בתוך מעגל, ולכן בעיתנו מתלכדת עם הבעיה: לחלק בעזרת סרגל ומחוגה בלבד מעגל נתון לn חלקים שווים; נקודות־החילוק קובעות את קדקדי המצולע המשוכלל הדרוש. מכיון שארכו של קוטר־המעגל אינו משנה כלום, ננית שהמחוג (חצי־הקוטר) r שווה ל1, ז"א ליחידת־האורך. בעיתנו מכוונת איפוא לחילוק המעגל בעל המחוג 1 לn חלקים שווים.

נראה את המישור שבו נצייר כמישור־גאוס (מישור כל הנקודות המתאימות למספרים המרוכבים; עיין בעמ' 163/4)! נבחר במרכז־המעגל C כנקודת־ הראשית למישור, היינו, כנקודת־החיתוך בין הציר "הממשי" והציר "הדמיוני" (השוה ציור 16, שבו מופיע רק הציר הממשי בחלקו החיובי). לא איכפת, איפה בקו־המעגל נקח את נקודת־המוצא, ז"א את הקדקוד הראשון של המצולע הנדרש; נבחר כנקודת־המוצא



ציור 18

בנקודת־החיתוך בין המעגל ובין הציר הממשי בחלקו החיובי. הלא היא הנקודה המתאימה למספר הממשי 1. את n נקודות־החיתוך, שאליהן פנינו מועדות, נסמן ב־(0), (1), ..., $(n-1)$; נקודת־המוצא תסומן אפוא ב־(0),[1] ומשם נלך בקו־המעגל לפי המגמה הנגדית למגמת מחוג־השעון. לכן, בלכתנו מן הנקודה $(n-1)$ הלאה במגמה הנ"ל (החיובית), נחזור בצעד הבא אל הנקודה (0).

נקשר את המרכז C עם כל הנקודות (k) (כאן $k=0, 1, \ldots, n-1$) ע"י קטעים ישרים! אז הווקטור הנטוי מ־C אל הנקודה (k) מתאים למספר המרוכב המציין את הנקודה (k), לפי מה שבארנו בעמ' 163. בפרט נסמן ב־$\mathfrak{A}$ את הווקטור מ־C אל (1)! לפי זה $|\mathfrak{A}|=1$ ו־$\arc \mathfrak{A}=\frac{360^0}{n}$ (השוה ציור 16). הגדרת הכפל בין וקטורים (עמ' 148/9) מראה שהווקטור $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^2$ מתאים לנקודה (2); כי הכפל ב־$\mathfrak{A}$, משמעותו הגיאומטרית: כפל אורך־הווקטור ב־$|\mathfrak{A}|=1$, והגדלת ה־$\arc$ ב־$\arc \mathfrak{A}=\frac{360^0}{n}$ (לשון אחר: סיבוב חיובי ב־$\frac{360^0}{n}$)[2]. כמו־כן מתאימה הנקודה (3) לווקטור $\mathfrak{A}^3=\mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{A}$, וכן הלאה; הנקודה $(n-1)$ תתאים לווקטור $\mathfrak{A}^{n-1}$. אכן בכפלנו וקטור זה עוד פעם ב־$\mathfrak{A}$, נקבל את הווקטור $\mathfrak{E}_1$ (עמ' 151), המתאים לנקודה (0) או (n), ז"א למספר 1. לכן קיים: $\mathfrak{A}^n=\mathfrak{E}_1$. על פי האיסומורפיסמוס שבין הווקטורים למספרים המרוכבים (עמ' 158) נוכל לעבור משויון זה אל השויון בין מספרים מרוכבים: $x^n=1$, שבו מסמן x את המספר המרוכב המתאים לנקודה (1) או לווקטור $\mathfrak{A}$.

נעיין ב־$x^n=1$ כבמשואה בעלת הנעלם x. לא נוכל אמנם לטעון כי שורש נתון כלשהו של משואה זו יפתר לנו את הבעיה של חילוק המעגל ל־n חלקים. הלוא, קודם כל, יש למשואה הנ"ל השורש $x=1$, ושורש זה נותן רק את נקודת־המוצא (0) ולא שום נקודה מועילה לחילוק המעגל. ברם גם אם נוציא מן הכלל את השורש הטריביאלי 1, אין שאר שרשי המשואה שקולים זה כנגד זה ביחס למטרתנו. יהי למשל n מספר זוגי; אז נקבל גם את השורש $x=-1$, המתאים לנקודת־החיתוך בין המעגל ובין החלק השלילי של הציר הממשי; ע"י זה חילקנו את המעגל לא ל־n חלקים אלא רק לשנים, תוצאה שלא תועיל לנו הרבה[3]. או נקח $n=6$, מקרה המתאים לבנין המשושה המשוכלל, הידוע היטב מן הגיאומטריה האלמנטרית; אז גם השורש המתאים לנקודה (2) —הוא $\cos 120^0+i\sin 120^0$— אינו פותר את הבעיה כולה: כי ממנו נגיע רק לידי המשולש המשוכלל, ז"א לחילוק המעגל לשלשה (ולא: לששה) חלקים שווים. הצד השווה שבדוגמות אלו הוא: השורש הנידון x

1. פעמים נוח יותר לכתוב (n) תחת (0). כך עשינו בציור 16; שם $n=7$, ונקודת־המוצא היא (7).

2. לפי התיאור שנתנו בעמ' 160 בעזרת הפונקציות הטריגונומטריות, מתאים $\mathfrak{A}$ למספר המרוכב $\cos\frac{360^0}{n}+i\sin\frac{360^0}{n}$.

3. הציור 16 מכוון אמנם ל־$n=7$, היינו לערך אי־זוגי של n. בכל זאת קל להסיק מן הציור כי המקרה הנ"ל (n זוגי) הוא היחידי, שבו מתאימה אחת הנקודות (k), מלבד (0), למספר ממ"ש.

מתאים לנקודה (k) כך שלמספרים k ו־n יש מחלק משותף. ואמנם היתרון שיש לשורש $\cos\frac{360^0}{n}+i\sin\frac{360^0}{n}$, המתאים לנקודה (1), בהשואה לדוגמות הנ"ל, הוא אך בזה שהמספר 1 זר לכל מספר טבעי n; תחת (1) נוכל לציין כל נקודה (k) שבשבילה k זר ל־n. קל להבין שתכונתו היחידה של הווקטור $\mathfrak{A}$ המענינת אותנו היא: הראשונה בין החזקות $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \ldots$ המתלכדת עם הווקטור $\mathfrak{E}_1$ (המתאים לנקודת־המוצא (0)), היא החזקה nית. נתרגם את זה גם ללשון האלגברה: יש לנו ענין באותם שרשי המשואה $x^n=1$, שהם „שרשים פרימיטיביים", ז"א שאינם מקיימים משואה $x^m=1$, שבה $m<n$ (m טבעי).

אחרי הבאורים האלה נסכם לאמור: בנין המצולע המשוכלל בעל n צלעות, או חילוק המעגל ל־n חלקים שווים, מתאים לבעיה לפתור פתרון שלם את המשואה האלגברית $x^n=1$.

כאשר צויין בתחילת הסעיף הזה, הבעיה שלפנינו איננה סתם: לחלק את המעגל ל־n חלקים שווים. הרי לשם כך די להקצות, בעזרת מד־זוית, מן הציר הממשי את הזוית $\frac{360^0}{n}$; כך נקבל את הנקודה (1), וע"י צעדים דומים את החילוק כולו. הצד המענין שבבעיתנו הוא ההגבלה, כי לשם בנית החילוק יש להשתמש בסרגל ומחוגה בלבד, ולא למשל במד־זוית. (על הצד ההיסטורי שבהגבלה זו ועל בעיות אחרות בנות אותה ההגבלה נרחיב את הדיבור בחלק החמישי, כרך שני.) נקדים כאן בלי הוכחה משפט־עזר בעל אופי כללי, המבטא את הנוסח האלגברי המתאים להגבלה הגיאומטרית הנ"ל.

משפט־עזר: יהיו נתונים גדלים גיאומטריים כך, שערכיהם המספריים (למשל הקואורדינָטים המתאימים) יימצאו בשדה־מספרים מסויים Σ (למשל בשדה המספרים הרציונליים). לבעיה, לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מתוך הגדלים הנתונים גדלים אחרים הדרושים לנו, יש פתרון אם, ורק אם, מתמלא תנאי זה: בעית הבניה הנידונה מתבטאת בצורה אלגברית במשואה או בשורת משואות בעלות מקדמים מתוך Σ, וכך שאפשר לפתור את המשואות האלה ע"י פתירה רצופה של משואות קוויות וריבועיות, ז"א בנות המעלות 1 ו־2.

האפשרות לחלק בעזרת סרגל ומחוגה את המעגל ל־n חלקים שווים, תלוייה לפי זה בשאלה האלגברית, אם אפשר לקבוע את כל שרשי המשואה $x^n=1$ בעזרת משואות קוויות וריבועיות, בצאתנו משדה המספרים הרציונליים. ואמנם הדבר אפשרי בשביל ערכים מסויימים של n, ובשביל אחרים איננו אפשרי.

בכתבנו את המשואה בצורה $x^n-1=0$, נקבל בעבור אגפה השמאלי את הפירוק:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1),$$

כאשר יאשר הקורא ע"י חשבון קל. פירוק זה נותן לנו מצד אחד את השורש הטריביאלי $x=1$; מצד שני ישארו שרשי המשואה:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1=0, \qquad [1]$$

המכונה (לפחות בשביל n ראשוני) בשם: משואת חילוק־המעגל.

נניח ראשית, ש־n מספר פריק, היינו שיש ל־n מחלקים מלבד 1 ו־n. פשוט ביותר יהיה כאן המקרה של מספר זוגי n: הלוא ידוע מבית־הספר שאפשר לחלק בעזרת סרגל ומחוגה זוית כלשהי לשני חלקים שווים, ולכן גם ל־4, 8, וכן הלאה. יהיה אפוא $n=2^l\cdot m$, m אי־זוגי. ברור שאם נוכל לבצע את חילוק המעגל ל־m חלקים, נוכל לבצע גם את החילוק ל־n חלקים; שהרי אחרי בנותנו את הזוית $\frac{360^0}{m}$ (חילוק ל־m חלקים) נוכל לבנות את הזוית $\frac{360^0}{2^l\cdot m}=\frac{360^0}{n}$ הדרושה לנו, בחצותנו את הזוית הקודמת באופן ממושך (l פעמים). כמו־כן אין זה קשה ביותר להוכיח, א) שאי־אפשר לפתור את הבעיה אם n מתחלק בריבוע של מספר אי־זוגי, ב) שאפשר לפתור את הבעיה אם n מתפרק למספרים ראשוניים שונים $n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, בתנאי שהבעיה נפתרת בשביל כל הערכים $n=p_1$, $n=p_2$, ..., $n=p_k$. נסתפק בכך שנבאר את הטענה האחרונה ביחס לדוגמה $n=15=3\cdot5$. ידוע בוודאי לרוב הקוראים שאפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה את המשולש המשוכלל ואת המחומש המשוכלל, היינו את הזויות $120^0=\frac{360^0}{3}$ ו־$72^0=\frac{360^0}{5}$. אם נחסר מן הזוית $144^0=2\cdot72^0$ את הזוית 120^0, נקבל את הזוית $24^0=\frac{360^0}{15}$, וכך אפשר לבנות גם זוית זו, הקובעת את המצולע המשוכלל בעל 15 צלעות.

לפי ביאורים אלו נבדק מעתה רק את המקרה שבו n מספר ראשוני.

קודם כל יצויין שבמקרה זה, $p=n$, כל שרשי המשואה [1] (לשון אחר: כל שרשי המשואה $x^p=1$, פרט ל־1) הנם שרשים „פרימיטיביים" במובן שהוגדר בעמ' 199; שהרי כל ערך k מתוך הסדרה $1,2,\ldots,p-1$ זר ל־p. יהי אפוא $p=n$, ו־ξ שורש כלשהו של המשואה [1]; אז יהיו $\xi,\xi^2,\ldots,\xi^{p-1}$ כל שרשיה של המשואה [1][1]. השרשים האלה נקראים שרשי היחידה.

עד כאן תארנו את ערכי שרשיה של משואת חילוק־המעגל בצורה המסתמכת על הפונקציות הטריגונומטריות, ז"א בצורה טרנסצנדנטית (השוה בפרק התשיעי, § 3). נעורר עתה את שאלת הפתירה האלגברית של המשואה [1]!

1. אפשר לאשר זאת גם ע"י העלאת הביטוי $\cos\frac{k\cdot360^0}{p}+i\sin\frac{k\cdot360^0}{p}$ לחזקות $1, 2, \ldots, p-1$. לשם כך יש להשתמש בנוסחה הידועה מעמ' 161

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m=\cos m\alpha+i\sin m\alpha,$$

וב„מחזוריות" הפונקציות sin ו־cos, האומרת: $\sin(\alpha+360^0)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+360^0)=\cos\alpha$ (השוה בפרק התשיעי, § 3). מחזוריות זו מתאימה לעובדה, שבציור 16 (עמ' 197) נחזור אחרי n הנקודות הראשונות, היינו אחרי סיבוב שלם של המעגל, אל הנקודות (1), (2) וכו'.

משפט מפורסם, אשר הוכח בראשונה ע"י גאוס, אומר: הפולינום שבאגף השמאלי של [1] אינו ניתן לפירוק בשדה המספרים הרציונליים (עיין בעמ' 193). אם $n=p$ ראשוני[1], לא נוכל אפוא להעמיד את פתירת המשואה [1] על פתירת משואות (פשוטות יותר), המתאימות לגורמים רציונליים של הפולינום הנ"ל. מאידך נופק ממה שהקדמנו: כדי למצוא את כל שרשי המשואה [1], מספיק להגיע אל אחד (כלשהו) מהם, וחזקותיו של זה נותנות את השרשים כולם.

על־סמך תורתו של גלוע (עמ' 190) קיים בשביל $n=p$, שהמשואה [1] ניתנת תמיד לפתירה אלגברית — גם אם מעלתה $p-1$ עולה על 4. עובדה זו, יחד עם ציון הדרך לפתירה, מחסלת את הבעיה שלפנינו מהשקפה אלגברית.

יצויין שע"י ההערות הקודמות נפתרה גם בעית המשואות „הטהורות" $x^n=a$ (השוה בעמ' 189). לשם פשטות נניח ש־a מספר ממשי חיובי. אז ישנו במציאות, כידוע מתורת המספרים הממשיים, מספר ממשי חיובי אחד ויחיד שחזקתו ה־nית שווה ל־a; נסמנו ב־$\sqrt[n]{a}$! מצד שני למדנו לעיל[2], שאפשר לקבוע באופן אלגברי את n שרשיה השונים ξ_k ($k=0,1,\ldots,n-1$) של המשואה $x^n=1$. לכן n המספרים המרוכבים השונים $\xi_k\cdot\sqrt[n]{a}$ הנם שרשים למשואה $x^n=a$; מכיון שלמשואה זו אין יותר מ־n שרשים (עיין בעמ' 177), הרי הם מהווים את כל שרשיה של המשואה. השורש ה־n' ממספר חיובי a הוא אפוא בעל n ערכים שונים (עובדה הנשארת בתקפה גם אם a שלילי, או מרוכב ושונה מ־0).

עד כאן דברנו על הצד האלגברי של חילוק המעגל, ועתה נשים לב לצד הגיאומטרי. מהשקפה אלגברית די לתת פתרון ע"י הוצאת שרשים, יהיו מעריכיהם אשר יהיו. ואולם מהשקפה גיאומטרית, ז"א על פי ההגבלה לשימוש בסרגל ומחוגה, נחוץ לפי משפט־העזר שבעמ' 199, כי השרשים הללו יהיו דוקא שרשים ריבועיים. בכוון זה מצא גאוס בשנה ה־19 לחייו, שאפשר (במקרה $n=p$) לפתור את המשואה [1] בעזרת שרשים ריבועיים אם, ורק אם, p בעל הצורה $p=2^l+1$[3]. העובדה החיובית, המתבטאת במלה „אם", מתקבלת על הדעת, הואיל ובמקרה זה, ורק בו, המשואה [1] תהיה בעלת המעלה 2^l, היינו: מעלה שהיא חזקה של 2; יתכן אפוא לחשוב, שע"י שורה של משואות ריבועיות אפשר להוריד את המעלה אל 2^{l-1}, 2^{l-2} וכו', עד הגיענו לבסוף אל משואה ריבועית. ואמנם אפשר ללכת בדרך זו; ההוכחה לכך אינה קשורה בקשיים עקרוניים, ובכל זאת איננה קלה וקצרה.

1. עובדה זו, וכמו־כן העובדות המובאות בפסקה הבאה, נשארות בתקפן גם כלפי ערכי n שאינם ראשוניים; רק שאז, במקום המשואה [1], תבוא משואה בת מעלה מסויימת הקטנה מ־$n-1$.

2. בעצם רק אם n ראשוני; אבל הוא הדין בשאר המקרים, כאמור בהערה הקודמת.

3. תגלית זו, יחד עם שאר מחקריו המכריעים בדבר המשואה של חילוק־המעגל, תאר גאוס בחלק השביעי של ספרו Disquisitiones Arithmeticae (עיין בעמ' 23); תורתו עברה אל כמה

באופן עקרוני קשה יותר להוכיח את הצד השלילי של הטענה הנ"ל, המתבטא במלים „רק אם"; היינו העובדה, שבשביל כל מספר ראשוני p שאינו בעל הצורה 2^l+1, אי־אפשר לחלק בעזרת סרגל ומחוגה את המעגל לp חלקים. לסוג זה שייכים, למשל, המספרים הראשוניים: 19, 13, 11, 7. כך התברר רק בסוף המאה הי"ח, למה טרחו לשוא היוונים העתיקים והדורות הבאים אחריהם לבנות בעזרת המכשירים הנ"ל את המצולע המשוכלל בעל שבע צלעות!

נציין לבסוף מהן תוצאותיו הממשיות של המשפט הנ"ל של גאוס. בשביל $l=0,1,2$ מקבל $p=2^l+1$ את הערכים $p=2,3,5$. הערך $p=2$ מועיל לנו רק אם נשתמש בו פעמיים, במובן האפשרות לחצות כל זוית בעזרת סרגל ומחוגה; בזה נגיע אל המרובע המשוכלל, ז"א אל הריבוע. הערכים 3 ו 5 נותנים לנו את המשולש המשוכלל, ז"א המשולש שווה־הצלעות, ואת המחומש המשוכלל, אשר ייבנה כידוע בעזרת שיטה המכונה „חיתוך־הזהב". תוצאות אלו נמצאות כבר אצל אבקלידס. מאז עברו יותר מאלפיים שנה עד שגילה גאוס את המקרה הבא של מצולע משוכלל בעל p צלעות שאפשר לבנותו בעזרת סרגל ומחוגה, הוא המצולע בעל 17 צלע; שהרי $2^4+1=17$, ולכן 17 הנו אחד מן המספרים המצוינים הנ"ל. ראשי הפרקים של בנין המצולע בעל 17 צלע ינתנו להלן במלואים[1].

באותו המצב נמצאים המספרים הראשוניים $2^8+1=257$ ו $2^{16}+1=65537$[2]. מספרים ראשוניים אחרים בעלי הצורה 2^l+1 לא התגלו עד היום. כמובן מי שזקוק למצולע משוכלל בעל 17 או 257 או 65537 צלע, לא יבנה אותו למעשה בעזרת סרגל ומחוגה, ואולם התגלית, שהדבר אפשרי להלכה, היא בוודאי לכבודו ולתפארתו של השכל האנושי.

---

1. בקשר עם הבנין הגיאומטרי של המצולע המשוכלל בעל 17 צלע עיין למשל:
CHR. VON STAUDT: *Journal f. Mathematik*, 24 (1842)
והתיאור הכללי במאמרו של F. ENRIQUES בקובץ (תרגום גרמני של המקור האיטלקי):
Fragen der Elementargeometrie. II. Leipzig 1907.
בשביל המצולע המשוכלל בעל 257 צלעות, שבו טפל באופן אלגברי F. J. RICHELOT ב *J. f. Math.* 9 (1832). עיין במאמרו של E PASCAL שהופיע ב *Rendiconti della Academia di Napoli* 1887.
את הדרך האלגברית לפתרון המשואה $x^{65\,537}=1$ ציין J. HERMES ב
Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1894.

2. השוה לזה מה שנאמר לעיל בעמ' 34—36, לרבות את ההערה בעמ' 34, שלפיה 2^l+1 בוודאי אינו מספר ראשוני, אם l מתחלק במספר אי־זוגי. משום כך שמנו לב אך למעריכים l שגם הם חזקות של 2.

מלואים לחלק השני.

א) השויון בין זוגות־מספרים (שברים חיוביים) (מלואים לעמ' 72).

מן ההגדרה I בעמ' 72 נובע מיד שקיים היחס $(a,b)=(a,b)$, וכמו כן נובעת העובדה שהשויון $(a,b)=(a',b')$ גורר $(a',b')=(a,b)$. כי אלה הם רק ביטויים אחרים בשביל השויון בין מספרים טבעיים $ab=ab$, ובשביל האפשרות לכתוב את השויון $ab'=a'b$ בצורה $a'b=ab'$. תכונות הרֶפליכסיביות והסימֶטריה שישנן לשויון המוגדר בתוך § בין זוגות־מספרים, נופלות אפוא מאותן התכונות של השויון בין מספרים טבעיים.

נוכיח עתה כי יחס השויון בין זוגות־מספרים הוא גם טרַנסיטיבי, ז"א שמהנחות $(a,b)=(c,d)$ ו $(c,d)=(e,f)$ גוררות $(a,b)=(e,f)$. ההנחות ההן מביעות לפי ההגדרה I: $ad=cb$, $cf=ed$. נכפול זה בזה שויונות אלו בין מספרים טבעיים (לפי העקרון שהכפל בין גורמים שווים יוצר מכפלות שוות) ונקבל: $adcf=cbed$. אחרי חילוק[1] במספר הטבעי cd, ועל־סמך החוק האסוציאטיבי והקומוטטיבי שבין מספרים טבעיים, מתקבל מהשויון הקודם: $af=eb$; והרי זה מביע לפי ההגדרה I, כי $(a,b)=(e,f)$, מש"ל.

השויון בין זוגות־מספרים הנהו אפוא רפליכסיבי, סימטרי וטרנסיטיבי, ז"א הוא יחס של אקוויוַלנטיות במובן הכללי המוגדר בעמ' 8. הבה נראה שיש לו גם התכונה השניה שהוזכרה בעמ' 72! פעולת־החשבון היחידה המוגדרת בתחום § היא הכפל; לכן התכונה הנידונה אומרת: בצרפנו על־ידי הכפל זוגות שווים, נקבל גם מכפלות שוות. יהי אפוא $(a,b)=(a',b')$ ו $(c,d)=(c',d')$, ז"א $ab'=a'b$ ו $cd'=c'd$; נוכיח שקיים השויון: $(a,b)\cdot(c,d)=(a',b')\cdot(c',d')$.

ראשית נכתוב שויון זה, לפי ההגדרה II, בצורה $(ac,bd)=(a'c',b'd')$; מספיק אפוא להוכיח את זאת. אבל לפי I הרי זאת אומרת: $acb'd'=a'c'bd$, ויחס זה הנהו נכון על סמך הנחותינו. בזה הוכחנו כי „לא נשנה" (במובן השויון) את תוצאת הכפל, בשימנו במקום הגורמים הנתונים מראש גורמים שווים להם. ע"י כך הצדקנו לגמרי את הגדרת השויון I.

---

1. לשם קיצור דברנו כאן על „חילוק". לאמיתו של דבר אין כאן חילוק אלא רק שימוש בחוק האומר: השויון $mp=np$ גורר $m=n$. חוק זה קיים, כידוע, לגבי המספרים הטבעיים; השוה בעמ' 70 (וגם המשפט 1 בעמ' 100, המכוון אמנם לחבורה).

ב) הכפל ב0 ובמספרים (שלמים) שליליים (מלואים לעמ' 80).

כדי להגיע לידי ההגדרה (I בעמ' 80) למכפלה $a\cdot 0$, נזכור קודם כל, שלפי החיבור במספרים שלמים (עיין בעמ' 77—79) קיים $a+a=a+0=0$; מאידך יש למשוואה $a+x=a$ הפתרון היחיד $x=0$. נסמן שתי עובדות אלו מתורת החיבור במספרים שלמים כלשהם ב (A) ו (B); ובכן קיים:

$$a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0. \quad \text{(לפי (A))}$$

(לפי החוק הדיסטריבוטיבי, ע"פ „עקרון היציבות").

אם נשים לשם קיצור: $a\cdot 0=z$, הרי נותנת השואת שתי השורות הקודמות: $z+z=z$, וזה גורר לפי (B): $z=0$. מצאנו כך כי $a\cdot 0=0$. אם נרצה לקיים את החוק הקומוטטיבי של הכפל (או לפחות את החוק הדיסטריבוטיבי „השני", עיין לקמן) גם בתחום המספרים השלמים, עלינו לקבוע כמו־כן: $0\cdot a=0$.

כדי למצוא הגדרה מתאימה (II בעמ' 80) למכפלה $a\cdot(-b)$, שבה a ו b מספרים טבעיים, נזכור שתי עובדות נוספות מתורת החיבור במספרים שלמים:

$$a+(-a)=(-a)+a=0. \quad \text{(השוה עמ' 79)} \qquad (C)$$

למשואה $a+x=0$ ישנו הפתרון היחיד $x=-a$. (D)

לכן קיימים השויונות:

$$a\cdot[b+(-b)]=a\cdot b+a\cdot(-b). \quad \text{(לפי החוק הדיסטריבוטיבי)}$$

$$a\cdot[b+(-b)]=a\cdot 0=0. \quad \text{(לפי (C) וההגדרה I)}$$

השואת שתי השורות האלה מראה: $0=a\cdot(-b)+a\cdot b$, ומזה נופק לפי (D): $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$, כאשר קובעת ההגדרה II.

מה שנוגע למכפלה $(-a)\cdot b$, הרי נוכל להפיק את המסקנה $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ מן התוצאה הקודמת, בצירוף החוק הקומוטטיבי של הכפל — או גם ישר, בדרך דומה לשורות האחרונות, על־סמך החוק הדיסטריבוטיבי „השני" $(k+l)\cdot m=k\cdot m+l\cdot m$.

כדי להגדיר את הכפל בין שני מספרים שליליים (הגדרה III), נסתמך עוד פעם על החוק הדיסטריבוטיבי ונמצא, אם a ו b מספרים טבעיים, לפי II:

$$(-a)\cdot(-b)=-(a\cdot(-b))=-(-(a\cdot b))=(-a)\cdot b+(-a)\cdot(-b)=[(-a)+b]\cdot(-b).$$

האגף השמאלי מתאפס מאותו הנימוק כמקודם, ז"א קיים: $0=(-a)\cdot(-b)+(-(a\cdot b))$. מאידך קיים לפי (C): $0=a\cdot b+(-(a\cdot b))$. שני יחסים אלו גוררים לפי (D): $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$, כאשר קובעת ההגדרה III.

ג) החילוק בתחום המספרים הרציונליים (מלואים לעמ' 85).

כדי להוכיח את המשפט 3 בעמ' 84, נכתוב את המספרים הרציונליים — בהתאם להגדרתם — כזוגות של מספרים שלמים; אז המשואה שעלינו לפתרה היא:

$$(a,b)\cdot(x,y)=(c,d). \qquad (1)$$

נניח שכאן הזוג (a,b) שונה מן הזוג הניטרלי של החיבור (אפס), היינו מן $(0,1)$, ולכן גם מכל הזוגות $(n,0)$, השווים ל $(0,1)$. מכיון שהאיבר השני שבכל זוג שונה מ 0. נוכל לנסח את הנחתנו כך: לא רק b אלא גם a שונה מ 0.

אם ישנו פתרון (x,y) למשואה (1), נופק מהגדרת השויון והכפל: $axd=cby$, או $x(ad)=(cb)y$, ולכן לפי הגדרת השויון: $(x,y)=(cb,ad)$. יצויין מיד שזהו מספר רציונלי, ז"א ש cb ו ad מספרים שלמים ו $ad\neq 0$; שהרי $d\neq 0$ בהיותו האיבר השני בזוג הרציונלי (c,d), ו $a\neq 0$ לפי הנחתנו דלעיל, ולכן לפי ההגדרות II ו III בעמ' 80 גם $ad\neq 0$.

עד כאן הוכחנו רק: אם ישנו בכלל פתרון (x,y) למשואה (1), שווה הפתרון ל (cb,ad); לכן קיים אז פתרון יחיד. הבה נבדק אם באמת זהו פתרון! לשם כך נכניס זוג זה תחת (x,y) באגף השמאלי של (1); אגף זה, $(cb,ad)\cdot(a,b)$, שווה לפי הגדרת הכפל ל (acb,bad), ולכן (לפי הגדרת השויון) ל (c,d), מש"ל. אפשר אפוא להפוך את הכפל באופן יחיד, אם מתמלא התנאי דלעיל $(a,b)\neq(0,1)$.

לבסוף עלינו להראות שאך בתנאי זה אפשר להפוך את הכפל; לשון אחר: לא רק שהחילוק בכל מספר רציונלי שונה מאפס אפשרי באופן יחיד, אלא מאידך החילוק באפס (ז"א ב $(0,1)$) אינו אפשרי, או אינו אפשרי באופן יחיד.

יהי אפוא $(a,b)=(0,1)$, והמשואה העומדת לבדיקה תהיה: $(c,d)=(x,y)\cdot(0,1)$. עלינו להבדיל בין שני המקרים: $c\neq 0$ ו $c=0$.

אם $c\neq 0$, אי־אפשר לפתור את המשואה. כי ממנה נובע $0\cdot x\cdot d=c\cdot 1\cdot y$. והנה כאן האגף השמאלי שווה ל 0. לעומת זאת כל גורמי המכפלה שמימין שונים מ 0 (בפרט $y\neq 0$ בהיותו האיבר השני בזוג רציונלי); ולכן גם המכפלה שונה מ 0. יחס בעל הצורה $0\cdot x\cdot d=c\cdot 1\cdot y$ לא יוכל אפוא להתמלא.

אם $c=0$, נקבל באותה דרך את המשואה $0\cdot x\cdot d=0\cdot 1\cdot y$, המתמלאת ע"י כל זוג רציונלי (x,y). במקרה זה נוכל אמנם להפוך את הכפל, אבל לא באופן יחיד; נקבל אינסוף פתרונים, שהם כביכול הערכים האפשריים למנה $\frac{0}{0}$ (שאינה מוגדרת ואינה ניתנת להגדרה).

החוק הדיסטריבוטיבי בתחום המספרים הרציונליים

(מלואים לעמ' 85).

נוכיח את הנוסחה הראשונה של המשפט 6 בעמ' 85, היינו את החוק הדיסטריבוטיבי „הראשון", שנכתבנו בעזרת זוגות־מספרים כך:

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f).$$

לפי ההגדרות C ו D בעמ' 84 ועל־סמך החוק הדיסטריבוטיבי בין מספרים שלמים קיימים השויונות:

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(cf+ed,df)=[a(cf+ed),bdf]=$$
$$=(acf+aed,bdf).$$

$$(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)=(ac,bd)+(ae,bf)=(acbf+aebd,bdbf).$$

והנה לבסוף קיים, לפי הגדרת השויון (B) בעמוד 84:

$$(acf+aed,bdf)=(acbf+aebd,bdbf).$$

לכן שווים גם האגפים השמאליים, מה שהיה להוכיח.

ד) דוגמות לחוגים (מלואים לעמ' 106).

4) תסמֶנה האותיות $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ מספרים שלמים, ונכניס — בהשתמשנו בסמלים i_1, i_2, i_3 שהופיעו בדוגמה שבעמ' 98 — את הקְוַטֶרניונות בעלות הצורה $\alpha+\beta i_1+\gamma i_2+\delta i_3$. נקבע את השויון, את החיבור ואת הכפל ביניהם ע"י ההגדרות הבאות:

I) $$\alpha+\beta i_1+\gamma i_2+\delta i_3=\alpha'+\beta' i_1+\gamma' i_2+\delta' i_3$$

אם, ורק אם: $\alpha=\alpha', \beta=\beta', \gamma=\gamma', \delta=\delta'$ (שויונות בין מספרים שלמים).

II) $$(\alpha+\beta i_1+\gamma i_2+\delta i_3)+(\alpha'+\beta' i_1+\gamma' i_2+\delta' i_3)=$$
$$=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')i_1+(\gamma+\gamma')i_2+(\delta+\delta')i_3.$$

III) מכפלת שתי קוטרניונות מתקבלת ע"י כפל מיכני רגיל של הביטויים המופיעים כגורמים, ואולם מתוך שמירה קפדנית על סדר הגורמים i_k; ז"א:

$$(\alpha+\beta i_1+\gamma i_2+\delta i_3)\cdot(\alpha'+\beta' i_1+\gamma' i_2+\delta' i_3)=\alpha\cdot\alpha'+(\beta\cdot\alpha')i_1+(\gamma\cdot\alpha')i_2+$$
$$+(\alpha\cdot\beta')i_1+(\beta\cdot\beta')(i_1\cdot i_1)+(\gamma\cdot\beta')(i_2\cdot i_1)+(\delta\cdot\beta')(i_3\cdot i_1)+$$
$$+(\alpha\cdot\gamma')i_2+(\beta\cdot\gamma')(i_1\cdot i_2)+(\gamma\cdot\gamma')(i_2\cdot i_2)+(\delta\cdot\gamma')(i_3\cdot i_2)+$$
$$+(\alpha\cdot\delta')i_3+(\beta\cdot\delta')(i_1\cdot i_3)+(\gamma\cdot\delta')(i_2\cdot i_3)+(\delta\cdot\delta')(i_3\cdot i_3).$$

כדי לקבל מביטוי זה בן 16 איברים, שאין לו עדיין צורת קוטרניון, את הצורה הדרושה $\varkappa+\lambda i_1+\mu i_2+\nu i_3$, נשים במקום כל מכפלת שנים מן הסמלים i_1, i_2, i_3 את הערכים שהגדרנום בדוגמה הנ"ל (עמ' 98). ועתה נאסוף, בהחליפנו את סדר המחוברים כפי רצוננו, את כל האיברים בעלי הצורה εi_1 ו ηi_1 ונחברם לאיבר אחד $(\eta+\varepsilon)i_1$; וכן לגבי i_2 ו i_3. בדרך זו נקבל את המכפלה בצורה $\varkappa+\lambda i_1+\mu i_2+\nu i_3$, שבה:

$$\varkappa=\alpha\cdot\alpha'-\beta\cdot\beta'-\gamma\cdot\gamma'-\delta\cdot\delta';\quad \lambda=\beta\cdot\alpha'+\alpha\cdot\beta'-\delta\cdot\gamma'+\gamma\cdot\delta';$$
$$\nu=\delta\cdot\alpha'-\gamma\cdot\beta'+\beta\cdot\gamma'+\alpha\cdot\delta';\quad \mu=\gamma\cdot\alpha'+\delta\cdot\beta'+\alpha\cdot\gamma'-\beta\cdot\delta'.$$

1. הסימנים + שבתוך הסוגריים באגף הימני מורים על החיבור בין מספרים שלמים; הסימן + בין שני הסוגריים באגף השמאלי מורה על חיבור קוטרניונות. וכן להבא, גם לגבי נקודת הכפל.

כמעט מובן מעצמו שמתקבלת כך חבורה לגבי החיבור. בפחות קלות, אבל בלי כל קושי עקרוני, יש לראות שלגבי הכפל יש לפנינו קבוצה מתקשרת, הממלאת את החוק האסוציאטיבי[1]; ובפרט, שלשויון המוגדר יש התכונה הדרושה לה (עיין בעמ' 89/90) גם לגבי הכפל. קיימים בתחום זה גם שני החוקים הדיסטריבוטיביים, כאשר אפשר להסיק מחשבון משעמם אמנם אבל מיכני. לכן התחום הוא חוג. בחוג זה יש יחידה (המספר 1) אבל איננו קומוטטיבי (השוה בעמ' 98).

ה ע ר ה: בדוגמה זו נוכל לכתוב תחת „מספר שלם" תמיד „מספר רציונלי" ואף למשל „מספר ממשי", בלי לשנות מאומה ממה שכתוב כאן.

5) הקורא הבקי בתורת הקוצבים (דֶטֶרמינַנטים) והמַטריצות, יבין מיד שגם מערכת מתאימה של מטריצות — למשל של המטריצות הריבועיות בעלות n שורות, שאיבריהן מספרים ממשיים — מהווה חוג לגבי החיבור והכפל המוגדרים שם. גם מערכת הפולינומים המתוארת בעמ' 175/6 מהווה חוג, כאשר בארנו שם.

ה) הוספות להגדרות השויון, החיבור והכפל בין סמלים ממשיים (מלואים להגדרות I – III בעמ' 128).

נוכיח, ש ל ש ו י ו ן המוגדר ב I ישנן שלוש התכונות של כל אקווילנטיות.

ראשית: השויון המוגדר הוא רֶפליכסיבי, ז"א קיים תמיד: $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}$.

כדי להוכית זאת עלינו להראות, בהתאם להגדרה I, כי $a_n\leqq\bar a_n$, דבר הנופק מן התכונה השלישית שבהגדרה היסודית (עמ' 126).

שנית: השויון סִימֶטרי, ז"א $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n\\ \bar b_n\end{pmatrix}$ גורר $\begin{pmatrix}b_n\\ \bar b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}$. לפי הגדרת השויון מובנת מאליה גם עובדה זו.

כדי להוכיח טרַנסיטיביותו של השויון המוגדר, נניח שקיים $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n\\ \bar b_n\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}c_n\\ \bar c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n\\ \bar b_n\end{pmatrix}$. עלינו להוכיח: $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n\\ \bar c_n\end{pmatrix}$. ההנחות הנ"ל מביעות, לפי ההגדרה I, קיומם של אי־השויונות:

$$a_n\leqq\bar b_n,\quad b_n\leqq\bar a_n,\quad b_n\leqq\bar c_n,\quad c_n\leqq\bar b_n.$$

לפי חוקי החשבון במספרים רציונליים גוררים אי־השויונות הראשון והשלישי: $a_n+b_n\leqq\bar b_n+\bar c_n$; וכמו כן השני והרביעי: $\bar b_n+b_n\leqq\bar a_n+c_n$. נוכל לכתוב את שני היחסים האחרונים גם בצורה:

$$(1)\ a_n\leqq\bar c_n+(\bar b_n-b_n),\quad (2)\ c_n\leqq\bar a_n+(\bar b_n-b_n).$$

המעבר משני אי־שויונות אלו אל אי־השויונות שאנו זקוקים להם, היינו אל $a_n\leqq\bar c_n$ ו $c_n\leqq\bar a_n$, מסתמך על תכונותיהן של הסדרות העולות והיורדות;

1. קל לראות שמספיק להוכיח חוק זה בשביל האיברים 1, i_1, i_2, i_3.

בייחוד על התנאי הרביעי (עמ' 126/7), שלפיו $\bar{b}_n - b_n$ קטן מכל מספר חיובי נתון בשביל ציונים n גדולים למדי. בהוכחה זו נלך דרך שלילה; נ נ י ח אפוא שהיה קיים ציון מסויים N שבשבילו $a_N > \bar{c}_N$. את המספר החיובי $a_N - \bar{c}_N$ נסמן ב p: $a_N = \bar{c}_N + p$. מכיון ש(a_n) סדרה עולה ו$(\bar{c}_n)$ סדרה יורדת, גורר השויון $a_N = \bar{c}_N + p$ את אי־השויון:

$$a_{N+m} \geqq \bar{c}_{N+m} + p. \qquad (3)$$

(m מספר טבעי כלשהו)

ואולם אי־שויון זה סותר את התנאי הרביעי הנ"ל בשביל הסמל $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$. שהרי אם נקבע באי־השויון (1) את הציון n גדול כל־כך עד שבשבילו (ולכן בשביל הציונים הגדולים יותר) האיבר $\bar{b}_n - b_n$, שבאגף הימני של (1), יקטן מp, נקבל:

$$a_n < \bar{c}_n + p. \qquad (4)$$

בין הציונים הללו n נמצאים גם בעלי הצורה $N+m$ (עיין לעיל); לכן, אם נכניס ב (3) תחת $N+m$ את n, נקבל שם: $a_n \geqq \bar{c}_n + p$. הסתירה שבין יחס זה ובין (4) מראה: אין במציאות N שבשבילו $a_N > \bar{c}_N$, ולכן קיים בשביל כל n: $a_n \leqq \bar{c}_n$.

הקורא ילמד הרבה, הן לגבי רציונה המרכזי של הוכחה זו הן בכלל לגבי אפיין של ההוכחות דרך שלילה, אם יתעמק בהוכחה זו עד שיקננה לו כרכוש הגיוני מוחלט.

בדרך דומה יש להוכיח, שקיים בשביל כל n: $c_n \leqq \bar{a}_n$; בזה תושג מטרתנו.

בדבר ה ח י ב ו ר עלינו להוכיח כי $\begin{pmatrix} a_n + b_n \\ \bar{a}_n + \bar{b}_n \end{pmatrix}$ יהוא סמל ממשי. נסתמך על כך ש $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$ ממלאים את תנאֵי ההגדרה היסודית; לפיכך קיימים לכל ערך של n אי־השויונות:

$$a_n \leqq \bar{a}_n; \quad (7) \quad \bar{a}_n \geqq \bar{a}_{n+1}, \quad (6) \quad a_n \leqq a_{n+1}, \quad (5)$$

$$b_n \leqq \bar{b}_n. \quad (7') \quad \bar{b}_n \geqq \bar{b}_{n+1}, \quad (6') \quad b_n \leqq b_{n+1}, \quad (5')$$

לפי חוקי החשבון שבין מספרים רציונליים נקבל, בחברנו את אי־השויונות (5) ו(5'): $a_n + b_n \leqq a_{n+1} + b_{n+1}$; כמו־כן מ (6) ו (6'): $\bar{a}_{n+1} + \bar{b}_{n+1} \geqq \bar{a}_n + \bar{b}_n$; ומ (7) ו (7'): $a_n + b_n \leqq \bar{a}_n + \bar{b}_n$. שלשת אי־השויונות האלה מראים שזוג הסדרות $\begin{pmatrix} a_n + b_n \\ \bar{a}_n + \bar{b}_n \end{pmatrix}$ מקיים את שלושת התנאים הראשונים של ההגדרה היסודית. מה שנוגע לתנאי הרביעי, הרי עלינו להוכיח, שבשביל ערכי n גדולים למדי יהיה $(\bar{a}_n + \bar{b}_n) - (a_n + b_n)$ קטן מכל מספר חיובי ε נתון מראש. לשם זה

נשתמש בתנאי הרביעי כלפי $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$, ונבחר בציון כך שבשביל הערכים n הגדולים ממנו קיים: $\bar{a}_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ו $\bar{b}_n - b_n < \frac{\varepsilon}{2}$; בחברנו שני אי־השויונות האלה נקבל: $(\bar{a}_n + \bar{b}_n) - (a_n + b_n) < \varepsilon$, מש"ל.

הערה להוכחה זו: אם $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ממלא את תנאֵי ההגדרה היסודית, אז גם $\begin{pmatrix} -\bar{a}_n \\ -a_n \end{pmatrix}$ ממלא אותם. כי $\bar{a}_n \geqq \bar{a}_{n+1}$ גורר $-\bar{a}_n \leqq -\bar{a}_{n+1}$, ז"א $(-\bar{a}_n)$ סדרה עולה. כמו־כן $(-a_n)$ סדרה יורדת, הואיל ו $a_n \leqq a_{n+1}$ גורר $-a_n \geqq -a_{n+1}$. מן $a_n \leqq \bar{a}_n$ (תנאי שלישי) נופק כי $-a_n \leqq -\bar{a}_n$. לבסוף הרי קיים $a_n - \bar{a}_n = (-\bar{a}_n) - (-a_n)$, ומכיון שאגפו הימני של שויון זה קטן כפי רצוננו (לפי התנאי הרביעי כלפי $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$), קיים אותו הדבר בשביל האגף השמאלי — עובדה המאשרת כי $\begin{pmatrix} -\bar{a}_n \\ -a_n \end{pmatrix}$ ממלא גם את התנאי הרביעי, מש"ל.

בדבר ה כ פ ל עלינו להוכיח כי $\begin{pmatrix} a_n b_n \\ \bar{a}_n \bar{b}_n \end{pmatrix}$ ממלא את תנאֵי ההגדרה היסודית. אם a_n ו b_n כולם חיוביים, נצליח בדרך, המתאימה בחלקה הראשון לגמרי לדרך שהלכנו בה בהוכחה הקודמת; כי אי־השויונות (5) — (7) ו (5') — (7') דלעיל גוררים, לפי החשבון במספרים רציונליים, את אי־השויונות:

$$a_n b_n \leqq \bar{a}_n \bar{b}_n, \qquad \bar{a}_n \bar{b}_n \geqq \bar{a}_{n+1} \bar{b}_{n+1}, \qquad a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1}.$$

אך הוכחת התנאי הרביעי כאן מסובכת קצת יותר. נשים לשם קיצור: $a_n \cdot b_n = p_n$, $\bar{a}_n \cdot \bar{b}_n = \bar{p}_n$. עלינו להוכיח: אם ε מספר חיובי נתון (קטן כרצוננו), אז בשביל ציונים n גדולים למדי (למשל: בשביל ערכי n הגדולים ממספר מתאים N) קיים $\bar{p}_n - p_n < \varepsilon$. נצא מן הזֶהות

$$\bar{p}_n - p_n = \bar{a}_n \bar{b}_n - a_n b_n = \bar{b}_n (\bar{a}_n - a_n) + a_n (\bar{b}_n - b_n), \qquad (8)$$

ונגדיר מספר חיובי ε' ע"י $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}$. הואיל ו $\begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} b_n \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$ מקיימים את התנאי הרביעי של ההגדרה היסודית, נוכל לבחור בציון N כך, שלכל ציון n הגדול מN קיים $\bar{a}_n - a_n < \varepsilon'$, וכמו־כן $\bar{b}_n - b_n < \varepsilon'$. אי־השויון הראשון גורר: $\bar{b}_n (\bar{a}_n - a_n) < \varepsilon' \cdot \bar{b}_n$ (9); אי־השויון השני ואי־השויון $\bar{a}_n \leqq a_n$ (תנאי שלישי) גוררים: $a_n (\bar{b}_n - b_n) < \varepsilon' \cdot \bar{a}_n$ (9'). והנה חיבורם של (9) ו (9') מראה שהאגף הימני

---

1. המכנה $\bar{a}_1 + \bar{b}_1$ הנו חיובי; שהרי $\bar{a}_1 \geqq a_1$ ו $\bar{b}_1 \geqq b_1$, והלוא הנחנו שכל ה a_n וה b_n חיוביים. (די להניח ש a_1 ו b_1 חיוביים). — לפי זה אף כל המספרים $\bar{a}_n$ ו $\bar{b}_n$ חיוביים.

של (8) קטן מ $\varepsilon'\bar{b}_n+\bar{a}_n\varepsilon'$; אבל מכיון ש $(\bar{a}_n)$ ו $(\bar{b}_n)$ שתיהן סדרות יורדות, הרי $\bar{a}_n\leqq\bar{a}_1$ ו $\bar{b}_n\leqq\bar{b}_1$, ולכן $\bar{a}_n+\bar{b}_n\leqq\bar{a}_1+\bar{b}_1$. מצאנו כך שערך הביטוי (8) קטן מ $\varepsilon=(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\bar{a}_1+\bar{b}_1}$ לפי ערכו הנ"ל של ε'; ובכן ממלא $\begin{pmatrix}p_n\\ \bar{p}_n\end{pmatrix}$ גם את התנאי הרביעי, מש"ל.

לפי אותן ההנחות — היינו כי $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$ קובע מספר ממשי וכי ה a_n כולם חיוביים — אפשר להוכיח שגם $\begin{pmatrix}q_n\\ \bar{q}_n\end{pmatrix}$ קובע מספר ממשי, אם $q_n=\frac{1}{a_n}$ ו $\bar{q}_n=\frac{1}{\bar{a}_n}$. בהוכחת שלושת התנאים הראשונים לא ימצא הקורא כל קושי; עליו רק להתאמץ קצת כדי להוכיח את התנאי הרביעי, תפקיד שלא יתקשה בו אחרי נתחו היטב את הוכחת חתנאי הרביעי כלפי $\begin{pmatrix}p_n\\ \bar{p}_n\end{pmatrix}$ (עיין לעיל).

מה שנוגע לתכונתו האחרונה של יחס־השויון (עמ' 129 למעלה, תפקיד שלישי), נניח ש $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n\\ \bar{c}_n\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}b_n\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_n\\ \bar{d}_n\end{pmatrix}$; עלינו להוכיח:

$$\begin{pmatrix}a_n+b_n\\ \bar{a}_n+\bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n+d_n\\ \bar{c}_n+\bar{d}_n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_nb_n\\ \bar{a}_n\bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_nd_n\\ \bar{c}_n\bar{d}_n\end{pmatrix}.$$

לפי ההגדרה I (עמ' 128) קיימים, על סמך הנחותינו, אי־השוויונות:

$$a_n\leqq\bar{c}_n,\ c_n\leqq\bar{a}_n,\ b_n\leqq\bar{d}_n,\ d_n\leqq\bar{b}_n.$$

חיבורם של אי־השויון הראשון והשלישי נותן: $a_n+b_n\leqq\bar{c}_n+\bar{d}_n$; כמו־כן חיבורם של השני והרביעי: $c_n+d_n\leqq\bar{a}_n+\bar{b}_n$. והנה שני היחסים האלה מגידים לנו בהתאם להגדרה: $\begin{pmatrix}a_n+b_n\\ \bar{a}_n+\bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n+d_n\\ \bar{c}_n+\bar{d}_n\end{pmatrix}$, מש"ל.

ההוכחה בשביל הכפל יוצאת לפועל בדרך דומה, כמובן על־סמך ההנחה שהמספרים הרציונליים כולם חיוביים.

ו) המספר הנגדי למספר ממשי נתון (מלואים לעמ' 132).

הוכחנו לעיל (עמ' 209) כי $\begin{pmatrix}-\bar{a}_n\\ -a_n\end{pmatrix}$ קובע מספר ממשי. לפי הגדרת החיבור קיים: $\begin{pmatrix}a_n-\bar{a}_n\\ \bar{a}_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar{a}_n\\ -a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$. אבל בהתאם לתנאי השלישי של ההגדרה היסודית קיים לכל ערך n: $a_n\leqq\bar{a}_n$; לכן $a_n-\bar{a}_n\leqq0$, $0\leqq\bar{a}_n-a_n$.

שני היחסים האחרונים מגידים, לפי הגדרת השויון (I): $\begin{pmatrix}a_n-\bar{a}_n\\ \bar{a}_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,\ 0,\ \dots\\ 0,\ 0,\ \dots\end{pmatrix}$,

ז"א $\begin{pmatrix}-\bar{a}_n\\ -a_n\end{pmatrix}$ קובע מספר, הנגדי למספר הנקבע ע"י $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$, מש"ל.

נראה מיד ב ז) שיש רק מספר יחיד כזה.

ז) היפוך החיבור והכפל בתחום המספרים הממשיים (מלואים לעמ' 132).

יהיו $\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}=A$, $\begin{pmatrix}b_n\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}=B$. עלינו להוכיח ראשונה, שישנו $\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=X$ אחד ויחיד[1] שבשבילו $A+X=B$; ז"א $\begin{pmatrix}b_n\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$.

קודם כל ממלא $\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}$ משוואה זו, אם $x_n=b_n-\bar{a}_n$, $\bar{x}_n=\bar{b}_n-a_n$[2]. שהרי קיים $\begin{pmatrix}b_n\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+b_n-\bar{a}_n\\ \bar{a}_n+\bar{b}_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n-\bar{a}_n\\ \bar{b}_n-a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_n\\ \bar{a}_n\end{pmatrix}$ לפי הגדרת השויון (I בעמ' 128). הואיל ו $a_n\leqq\bar{a}_n$, $b_n\leqq\bar{b}_n$ (תנאי שלישי של ההגדרה היסודית), ולכן מצד אחד: $b_n\leqq\bar{b}_n\leqq\bar{a}_n+\bar{b}_n-a_n$, מצד שני: $a_n+b_n-\bar{a}_n\leqq b_n$.

נניח עתה שגם $\begin{pmatrix}y_n\\ \bar{y}_n\end{pmatrix}$ ממלא את המשוואה $A+X=B$, ז"א שקיים: $B=\begin{pmatrix}a_n+y_n\\ \bar{a}_n+\bar{y}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+x_n\\ \bar{a}_n+\bar{x}_n\end{pmatrix}$. מזה נופק $\bar{y}_n+\bar{a}_n\leqq x_n+a_n$, $\bar{x}_n+\bar{a}_n\leqq a_n+y_n$ לפי הגדרת השויון. בחַסרנו בשני אגפיו של כל אי־שויון את a_n, נקבל:

$$x_n\leqq(\bar{a}_n-a_n)+\bar{y}_n,\quad y_n\leqq(\bar{a}_n-a_n)+\bar{x}_n.$$

לפי השיטה שהשתמשנו בה לעיל (בעמ' 207/8), גוררים שני אי־שויונות אלו: $\bar{y}_n\leqq x_n$, $\bar{x}_n\leqq y_n$, כלומר: $\begin{pmatrix}y_n\\ \bar{y}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}$; מש"ל.

שנית: כדי לפתור את המשוואה $A\cdot X=B$, נעסוק קודם כל במקרה המיוחד כי הלוא: $\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n-\bar{a}_n\\ \bar{b}_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar{a}_n\\ -a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_n\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}$.

---

1. ביטוי זה מתכוון, כמו תמיד, לכך שכל סמל ממשי אחר, הממלא את התנאי, ישווה ל $\begin{pmatrix}x_n\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}$.
2. שזהו סמל הקובע מספר ממשי, נופק מההוכחה שבעמ' 209 בקשר עם הגדרת החיבור;

שבו A מספר ממשי חיובי וB המספר הנקבע ע"י $\binom{1,\ 1,\ 1,\ \dots}{1,\ 1,\ 1,\ \dots}$. מקרה זה, המכוון לקביעת הערך ה„הפוך" למספר החיובי A, יקל עלינו לגשת אחר כך אל המקרה הכללי.

נניח, כמו לעיל, שהמספר החיובי A ייקבע ע"י $\binom{a_n}{\bar{a}_n}$ כך שכל a_n ולכן גם כל $\bar{a}_n$ חיובי; נוכיח קודם כל שישנו לפחות פתרון אחד X הממלא את משוואתנו. בעמ' 210 ראינו שקיים המספר הממשי הנקבע ע"י $\binom{q_n}{\bar{q}_n}$, אם $q_n=\frac{1}{a_n}$ ו$\bar{q}_n=\frac{1}{\bar{a}_n}$. ניצור את המכפלה $\binom{a_n}{\bar{a}_n}\cdot\binom{q_n}{\bar{q}_n}=\binom{a_n q_n}{\bar{a}_n \bar{q}_n}$; מכיון שלפי התנאי השלישי של ההגדרה היסודית קיים $a_n\leqq\bar{a}_n$, מראה הכפל במספר הרציונלי החיובי $\frac{1}{\bar{a}_n}$ (לפי חוקי החשבון במספרים רציונליים), כי $1\leqq\frac{a_n}{\bar{a}_n}$; כמו־כן הכפל במספר החיובי $\frac{1}{a_n}$, כי $\frac{\bar{a}_n}{a_n}\leqq 1$. שני אי־שויונות אלו מגידים: $\binom{a_n q_n}{\bar{a}_n \bar{q}_n}=\binom{1,\ 1,\ 1,\ \dots}{1,\ 1,\ 1,\ \dots}$.

הואיל ואגפו הימני של שויון זה מתאים למספר הרציונלי 1, מתברר שהסמל $\binom{q_n}{\bar{q}_n}$ שהגדרנוהו הפוך לסמל הנתון $\binom{a_n}{\bar{a}_n}$. קבלנו כך פתרון $X=A^{-1}$ למשואה $A\cdot X=\binom{1,\ 1,\ \dots}{1,\ 1,\ \dots}$. בכפלנו שני אגפיו של $\binom{a_n}{\bar{a}_n}\cdot\binom{q_n}{\bar{q}_n}=\binom{1,\ 1,\ \dots}{1,\ 1,\ \dots}$ במספר ממשי כלשהו B הנקבע ע"י $\binom{b_n}{\bar{b}_n}$, נקבל: $\binom{q_n}{\bar{q}_n}\cdot\binom{b_n}{\bar{b}_n}=A^{-1}\cdot B=\frac{B}{A}$. הנהו פתרון למשואה $A\cdot X=B$. פתרון זה נקבע אפילו באופן חד־ערכי, דבר המתברר באופן דומה לזה שבו הוכחנו לעיל את חד־ערכיותו של פתרון המשואה $A+X=B$ (או, בשני המקרים, בהתאם לשיטה של עמ' 72).

נשאר רק לטפל במקרה של מספר ממשי שלילי A. (שהרי התנאי לטענתנו על היפוך הכפל היה $A\neq 0$.) לפי הגדרת הכפל במקרה, שאחד הגורמים או שניהם מספרים שליליים (עמ' 132), נופק: אם מצאנו פתרונה X של המשואה $A\cdot X=B$, הרי $Y=-X$ הוא פתרון המשואה $Y=B\cdot(-A)$. קיים אפוא פתרון ממשי אחד ויחיד לכל משואה בעלת הצורה $A\cdot X=B$, אם $A\neq 0$, מש"ל.

ח) הוכחה שהסדרות (r_n) ו$(\bar{r}_n)$ מקיימות את התנאי השלישי והרביעי של ההגדרה היסודית (מלואים לעמ' 134).

המספרים הממשיים A_n ו$\bar{A}_n$ ממלאים לפי ההנחה את התנאים שנקבעו בהגדרה היסודית בשביל סדרות של מספרים רציונליים. לכן קיים (תנאי שלישי):

$A_{n+1}\leqq\bar{A}_{n+1}$. מאידך קבענו בעמ' 134 את אי־השויונות $r_n<A_{n+1}$ ו$\bar{r}_n<\bar{A}_{n+1}$. שלושת היחסים האלה יחד מראים כי $\bar{r}_n<r_n$, ז"א שהתנאי השלישי מתמלא.

לשם הוכחת התנאי הרביעי נקח מספר חיובי ε כפי רצוננו. מכיון שהתנאי הרביעי מתמלא אצל הסדרות (A_n) ו$(\bar{A}_n)$, קיימים בשביל ערכים גדולים למדי של הציון n היחסים $\bar{A}_n-A_n<\varepsilon$. מצד שני הגענו בעמ' 134 אל היחסים $\bar{r}_n<\bar{A}_n$ ו$r_n\leqq A_n$, ותחת האחרון נוכל לכתוב: $r_n<A_n$. ע"י חיבורם נקבל אפוא: $\bar{r}_n-r_n<\bar{A}_n-A_n$. מכיון ש$\bar{A}_n-A_n<\varepsilon$ (עיין לעיל), מקיימות הסדרות (r_n) ו$(\bar{r}_n)$ גם את התנאי הרביעי. לכן מקיים $\binom{r_n}{\bar{r}_n}$ את ההגדרה היסודית, מש"ל.

ט) חד־ערכיותו של תיאור המספרים הממשיים כשברים עשרוניים „אינסופיים" (מלואים לעמ' 139/40).

עלינו להוכיח ששני שברים עשרוניים „אינסופיים", השונים בכתיבתם לפחות במקום אחד, אינם שווים—במובן השויון בין מספרים ממשיים. נניח שהשברים העשרוניים α וα' חיוביים, ושהמקום הk־י הוא הראשון שבו מופיעות ספרות שונות. הכתיב של α וα' מתחיל אפוא כדלקמן:

$$\alpha=A,a_1a_2\dots a_{k-1}a_k\dots,\quad \alpha'=A,a_1a_2\dots a_{k-1}a_k'\dots.\qquad (a_k\neq a_k')$$

יהי $a_k'<a_k$. מכיון שα' אינסופי, הרי ישנן אחרי הספרה a_k' ספרות השונות מ0; תהי a_l' הספרה הראשונה אחרי a_k' השונה מ0 ($k<l$). ועתה ננצל תכונה שמצאנוה בעמ' 132: מספר ממשי הנקבע ע"י שתי סדרות, שווה או גדול מכל מספר שבסדרה העולה, ושווה או קטן מכל מספר שבסדרה היורדת. לפי זה α שווה או קטן למשל מן המספר הרציונלי העומד במקום ה$(k+1)$ שבסדרה היורדת של α (עיין בעמ' 136 למטה), ז"א:

$$\alpha\leqq A+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{a_k+1}{10^k}=\alpha_k.\qquad (1)$$

מאידך α' שווה או גדול מן המספר הרציונלי העומד במקום ה$(k+1)$ שבסדרה העולה של α', ז"א מן השבר העשרוני הסופי: $A,a_1a_2\dots a_{k-1}a_k'$. ואולם במקרה זה נוכל לדייק ולאמור: α' גדול דוקא מן השבר העשרוני הנ"ל, ולא שווה לו. שהרי בהמשיכנו לבדוק עד המקום ה$(1+l)$, נראה כי α' גם שווה או גדול מן השבר הסופי $A,a_1\dots a_k'\dots a_l'$; והלא שבר עשרוני זה בוודאי גדול מזה שנרשם מקודם, בהיות $a_l'\neq 0$. קבלנו אפוא:

---

1. יצויין שאנו משתמשים באינסופיות של α' בלבד; ההוכחה בעינה עומדת אף אם α סופי (אבל לא אם α' סופי; השוה בעמ' 138/9). — ההפליה בין α' וα מתבטאת ב$a_k<a_k'$ (עיין לעיל).

$$\alpha_k' = A + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k'}{10^k} < \alpha' . \qquad (2)$$

לבסוף נוכיח כי $\alpha_k \leq \alpha_k'$. באמת יכולים α_k ו α_k' להיות שונים רק באיברים האחרונים שבתיאוריהם (1) ו (2), הם האיברים $\frac{a_k+1}{10^k}$ ו $\frac{a_k'}{10^k}$. אבל הרי a_k ו a_k' הנן ספרות, ו $a_k < a_k'$; לכן גדול a_k' מ a_k לפחות ב 1, וז"א $a_k + 1 \leq a_k'$, משו"ל.

נקבל אפוא בעזרת (1) ו (2) את אי־השויונות $\alpha' > \alpha_k' \leq \alpha_k \leq \alpha$, הקובעים יחד כי $\alpha' > \alpha$. לכן באמת $\alpha' \neq \alpha$, כאשר רצינו להראות.

ז) ביסוס אריתמיטי של המספרים המרוכבים על־יסוד הקונגרואַנציה בין פונקציות (מלואים לעמ' 168).

נצייר כאן בקווים קצרים שיטה אחרת, המצדיקה גם היא — כמו שיטת זוגות־המספרים לפי המילטון — את שדה המספרים המרוכבים, ללא הסתמכות על מושגים גיאומטריים. לשם כך נשתמש בשתי הכנות שנבארן בקיצור נמרץ.

הכנה אחת מכוונת לחשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) ב„פולינומים" $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (השוה בעמ' 175/6), שמקדמיהם a_k הנם מספרים ממשיים. אם $a_0 \neq 0$, ייקרא $f(x)$ „פולינום בעל המעלה n". לשם פשטות נראה פה גם את המספר 0 — כמו כל מספר ממשי — כפולינום בעל המעלה 0. למעשה לא נזדקק בדברים שיבואו כאן למעלה הגדולה מ 2; מספיק אפוא לדון בפולינומים בעלי הצורה $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$. פעולות החיבור, החיסור והכפל בין פולינומים הנן פשוטות וידועות. מה שנוגע לחילוק, נציין רק שאפשר לחלק כל פולינום $f(x)$ בפולינום אחר $g(x)$ בצורה: $f(x) = g(x) \cdot h(x) + r(x)$, כך שמעלת ה„שארית" $r(x)$ קטנה ממעלת המחלק $g(x)$ (עמ' 176). אם בפרט $g(x)$ בעל המעלה 2, תהיה השארית $r(x)$ או בעלת המעלה 1 או מספר ממשי.

ההכנה השניה: נעביר את מושגי ההתחלקות והקונגרואנציה (עיין בעמ' 38 ו 176) לפולינומים הנ"ל. נאמר אפוא „$f(x)$ מתחלק ב $g(x)$" אם קיים פולינום $h(x)$ כך ש $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. כמו־כן נכנה שני פולינומים $f(x)$ ו $g(x)$ „קונגרואנטיים מודולו הפולינום $m(x)$" (בסימנים: $f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}$) אם $f(x) - g(x)$ מתחלק ב $m(x)$. למשל קיים: $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} \equiv 2x \pmod{(x^2+1)}$, מפני שההפרש $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ מתחלק ב $x^2 + 1$.

נסתכל עתה בכל הפולינומים כולם (או — מה שמהווה אותו הדבר, כאשר נראה מיד — בכל הפולינומים בעלי המעלות 0 ו 1: $a_0 x + a_1$) לאור הקונגרואנציה מודולו $x^2 + 1$; בחלקנו פולינום כלשהו $f(x)$ ב $x^2 + 1$ נקבל $r(x) + g(x) \cdot (x^2+1)$ וז"א:

$$f(x) \equiv r(x) \pmod{(x^2+1)};$$

השארית $r(x) = a + bx$ כאן או מספר ממשי או פולינום בעל המעלה 1. נכנה מעתה שני פולינומים שווים אם הם קונגרואנטיים מודולו $x^2 + 1$, ונגדיר את הסכום ואת הכפל גם־כן מודולו $x^2 + 1$. לפי זה הסכום ממילא פולינום בעל המעלה 0 או 1; בכפל נגיע אמנם פעמים (אם שני הגורמים בעלי המעלה 1) אל המעלה 2, אבל נוכל להורידה מיד אל המעלה 0 או 1, על־פי השויון המוגדר. לפי הגדרות אלו של השויון, החיבור והכפל מהווה תחום כל הפולינומים $a + bx$ ש ד ה, שבו 1 (וז"א הפולינום $x \cdot 0 + 1$) האיבר הניטרלי של הכפל. לפי זה קיימים היחסים:

$$1^2 = 1, \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad x^2 = -1 .$$

היחס האחרון אומר לפי הגדרת השויון, כי $x^2 - (-1)$ מתחלק ב $x^2 + 1$. ובכן קבלנו יחסים, המקבילים ליחסים הידועים לנו מעמ' 157/8:

$$1^2 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad i^2 = -1.$$

נצרף להקבלה זו את העובדה כי שדה הפולינומים $a + bx$ מכיל שדה חלקי, שאיבריו כל הפולינומים בעלי המעלה 0, היינו המספרים הממשיים a. לכן, אם „נתונים" המספרים המרוכבים $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ מהשקפה נאיבית, בלי כל הצדקה לסמל $\sqrt{-1} = i$ ולזכות־קיומו במתימטיקה, נוכל להתאים את המספרים המרוכבים לפולינומים שלפנינו התאמה חד־חד־ערכית, כך ש $a + bx$ יהיה בן־זוגו של $a + bi$. התאמה זו היא איסומורפית; שהרי הסכומים

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$
$$(a_1 + b_1 x) + (a_2 + b_2 x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) x$$

מתאימים זה לזה לפי כלל ההתאמה הנ"ל, ואותו הדבר קיים בשביל מכפלותיהם של איברים מותאמים. זה נופק אף בלי חשבון מן האיסומורפיות בין הכפל של 1 ו i ובין הכפל של 1 ו x, המתבטא ביחסים שהובאו לעיל. על התאמה איסומורפית זו נסתמך, ונטען בצורה דומה לטענה שבעמ' 164 כלפי ההתאמה לווקטורים, כדלקמן:

מוטלת לפנינו הבעיה להצדיק את המספרים המרוכבים $a + bi$ הנראים כחשודים ומדומים. בוודאי אין חשד כזה כלפי הפולינומים $a + bx$ יחד עם ההגדרות שהכנסנון לעיל. ברם מכיון שקיימת התאמה איסומורפית בין המספרים ההם ובין הפולינומים, נוכל לתרגם כל נוסחה בין מספרים מרוכבים לשפת הפולינומים, ולכן כל סתירה שתקום בתחום המספרים המרוכבים תגרור אחריה סתירה מתאימה בין הפולינומים. הואיל ואנחנו בטוחים שאין סתירה בשדה הפולינומים, נופק שגם תחום המספרים המרוכבים יחד עם חיבורם וכפלם הוא מחוסר־סתירה.

כך השגנו את מטרתנו: לבסס ביסוס חדש את המספרים המרוכבים. שיטה זו אינה מסתמכת על הגיאומטריה; ולא עוד אלא היא בעלת אופי אריתמיטי־אלגברי, בלי כל קשר עם תורת הפונקציות. הסמל x המופיע בפולינומים מתאר „גודל לא־מסויים" במובן האלגברה (עיין בעמ' 174), ולא „גודל משתנה" במובנה של תורת הפונקציות (פרק תשיעי; השוה שם את ההערה שבעמ' 246/7).

הצדקה זו של המספרים המרוכבים ניתנה למעשה, אם גם לא מהשקפה כה עיונית, ע"י קושי בשנת 1847. אחר כך הכליל קרונקר את השיטה והשתמש בה כדי להצדיק מספרים אלגבריים כלשהם (עיין בעמ' 174/5). גם שיטתו של שטייניץ (עמ' 196) מסתמכת על נקודת־מוצאו של קושי.

י"א) הרחבת מושג־המספר: הקווטרניונות[1] (מלואים לעמ' 172).

בקשר עם „אי־האפשרות" להרחיב את מושג־המספר מעבר למספר המרוכב והלאה, יתכן לשאול: אם עלינו לקבל גזירה זו בנוגע למושג־מספר כללי יותר המקיים את כל חוקי השדה, הנוכל אולי לוותר על חלק מן החוקים האלה, על־מנת לקבל חלף זה תחום רחב יותר? הנסיון המתימטי מראה שהחוק הקומוטטיבי של הכפל הוא התנאי (בין תנאֵי השדה), שביטולו מהווה את הרע במיעוטו. נשאל אפוא: היש תחום של „מספרים מרוכבים מוכללים" α, שבשבילם יוכל להיות $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq \alpha_2 \cdot \alpha_1$, בו בזמן שכל שאר תנאי השדה, פרט לחוק הנ"ל, מתמלאים? התשובה היא חיובית; כבר הכרנו לדעת (בעמ' 206) תחום כזה, הוא תחום הקווטרניונות $a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 + a_3 \times e_3 + a_4 \times e_4$; כאן a_k ממשי ו־e_k הן היחידות 1, i_1, i_2, i_3 שהכנסנום שם, בתתנו את ערכי המכפלות $e_k e_l$. תחום זה ממלא באמת את כל תנאי השדה, פרט לחוק הקומוטטיבי של הכפל. (תחום כזה מכנים בשם „שדה משופע".) חשיבותן העיקרית של הקווטרניונות תלויה אמנם לא בתכונותיהן הנ"ל כי אם בשימושן בגיאומטריה ובמיכניקה שבעבורו המציאן המילטון. תפקידן העיקרי שם נמצא אצל ה„סוב־מתיחה" במרחב בן שלשה ממדים (השווה את הסוב־מתיחה במישור, עמ' 149); היינו סיבובי הווקטורים במרחב יחד עם שינוי ערכיהם המוחלטים. חשיבותן זו של הקווטרניונות גדלה עוד הרבה בזמננו בקשר עם התפתחותה החדישה של הפיסיקה.

משפט מפורסם של פרובניוס[2] משנת 1878 מרחיק לכת ממשפטו של וירשטרס (עמ' 172) ואומר: בין כל התחומים של מספרים בעלי שתים או יותר יחידות ישנם בעיקר רק שנים המהווים שדה או שדה משופע, והם: תחום המספרים המרוכבים הרגילים (שדה), ותחום הקווטרניונות (שדה משופע). במובן זה מצטיינים אפוא המספרים בעלי ארבע יחידות ביחס לאלה בעלי שלוש יחידות.

ישנה פרשה ארוכה של שאלות קשות למדי לגבי תחומים של מספרים מרוכבים מוכללים, המקיימים רק חלק של חוקי השדה. במובן ידוע הפשוטים

---

1. המלה הרומית quaternio פירושה: רביעיה.
2. G. Frobenius. ראה: *Journal f. d. Reine u. Angewandte Mathematik* כרך 84. השווה C. S. Peirce ב *American Journal of Mathematics* כרך 4, 1881. להתפתחות כל הנושא (לרבות ביסוסם של המספרים המרוכבים הרגילים) השווה

A. Fraenkel: Zahlbegriff und Algebra bei Gauss. (Aus den *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*) Leipzig 1920.

ביניהם הם התחומים, שבהם הכפל — אף מלבד הכפל ב־0 — אינו ניתן להיפוך כללי, ושבהם מכפלה יכולה להתאפס מבלי התאפס אחד הגורמים (השוה את החוגים 3) בעמ' 106). הפשוטים בין התחומים האלה הם המבוססים על כללי־הכפל הבאים (בשביל ערך כלשהו n):

$$e_k^2 = e_k; \quad e_k \cdot e_l = 0 \quad (k \neq l). \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

בעיקר החל מספרו של הנקל (עיין בעמ' 172) התפתחה ספרות רחבה על תחומי מספרים מרוכבים מוכללים.

בסוף נציין שהמשפט על אי־האפשרות של שדה מספרים מרוכבים, פרט למספרים המרוכבים הרגילים, נכון רק אם נגביל את מספר ה„יחידות" למספר סופי. ישנן דוגמות פשוטות לשדה, שאיבריו יש לתאר כמספרים מרוכבים בעלי אינסוף יחידות.

י"ב) הוכחה, שכנגד כל מספר טבעי g יש רק מספר סופי של משואות אלגבריות שלהם „הגובה" g (מלואים לעמ' 179).

לפי הגדרת הגובה (שבה n מעלת המשואה, a_k מקדמיה שהם מספרים שלמים)

$$g = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|, \qquad (1)$$

קיים קודם כל: $n \leqq g$; שהרי $a_0 \neq 0$, ו־$|a_0|$ שווה אפוא לכל הפחות ל־1; לכן: $1 + (n-1) \leqq g$. לפי זה מספרם של $n+2$ המחוברים שב־(1) אינו עולה על $g+2$. המחוברים הללו הנם מספרים שלמים לא־שליליים. אבל הרי יש רק מספר סופי של דרכים שונות כדי לייצג את המספר g כסכום של, לכל היותר, $g+2$ מספרים שלמים לא־שליליים; לשון אחר: ישנו רק מספר סופי של מערכות סדורות שונות, המכילות לכל היותר $g+2$ מספרים שלמים לא־שליליים

$$(n-1,\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n),$$

כך שסכומם ישווה ל־g, ושבפרט $A_0 \neq 0$.

את כל המערכות האלה נקבל בנקל בדרך מיכנית; למשל, בתתנו לכל איבר שבמערכת הסדורה כל פעם את הערך הגדול ביותר האפשרי, בתנאי שהמערכת לא תתלכד עם אחת המערכות שקדמוה.

לבסוף מתאים לכל אחת מן המערכות $(n-1,\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n)$ רק מספר סופי של משואות בעלות המעלה n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

כך שיהיה: $a_0 = \pm A_0$, $a_1 = \pm A_1$, $\ldots$, $a_n = \pm A_n$. את המשואות האלה

נקבל, בתתנו את הסימנים $+$ ו $-$ כפי רצוננו לאותם הערכים A_k השונים מ 0. מספרן אינו עולה על 2^{n+1}, ושווה ל 2^{n+1} אם כל הערכים A_k שונים מ 0.

כנגד כל גובה נתון g קבלנו בדרך זו מספר סופי של מערכות, כך שלכל מערכת מתאים רק מספר סופי של משואות בנות הגובה g; ובכן מספר כל המשואות בנות הגובה g הוא סופי.

נקח כדוגמה את הגובה $g=3$. כאן באות בחשבון רק משואות בעלות המעלה 1 או 2 או 3. שהרי אם המעלה n שווה ל 4, יעבור (1) לצורה

$$3=(4-1)+|a_0|+\ldots+|a_n|,$$

ולא נוכל לקבל בשביל שום מקדם ערך השונה מ 0. לכן תהיה צורת (1):

$$3=(n-1)+|a_0|+\ldots+|a_n|. \qquad (a_0\neq 0;\ n=1,\ 2,\ 3)$$

את הנוסחה הזאת אפשר לקיים ע"י ערכים שלמים לא־שליליים ל $|a_0|, \ldots, |a_n|$ רק בשבעת האפנים הבאים, כאשר מראה נסיון קל:

$$3=2+1+0+0+0,$$
$$3=1+2+0+0 \quad =1+1+1+0=1+1+0+1,$$
$$3=0+3+0 \quad =0+2+1 \quad =0+1+2.$$

השורה הראשונה מתאימה למשואות בעלות המעלה 3 (ארבעה מקדמים), השניה למשואות בעלות המעלה 2 (שלושה מקדמים), השלישית למשואות בעלות המעלה 1 (שני מקדמים). מאידך גיסא מתאימות לכל אחד משבעת התיאורים האלה של המספר 3 עוד משואות שונות, כנגד פילוגיהם האפשריים של הסימנים $+$ ו $-$ בתיאור הנידון, אך בתנאי שהמחובר הראשון (המציין את הערך $n-1$ שאינו שלילי) לא יקבל את הסימן $-$. כך, למשל, מתאימות לתיאור הראשון שתי הצורות:

$$3=2+|1|+|0|+|0|+|0|=2+|-1|+|0|+|0|+|0|.$$

ואילו לתיאור השלישי מתאימות ארבע הצורות הבאות:

$$3=1+|1|+|1|+|0|=1+|-1|+|1|+|-1|+|0|=1+|1|+|-1|+|-1|+|0|=$$
$$=1+|-1|+|-1|+|-1|+|0|.$$

נציין עוד את המשואות האלגבריות בנות הגובה 3, המתאימות לשש הצורות האלה:

$$x^3=0;\ -x^3=0.$$

$$x^2+x=0;\ x^2-x=0;\ -x^2+x=0;\ -x^2-x=0.$$

קל לראות שמכל שבעת האפנים, שבהם תארנו מקודם את המספר 3, נקבל ס"ה 22 משואות, המהוות את כל המשואות בנות הגובה 3.

דוגמה זו מראה שמשואות שונות (כמו $x^2-x=0$ ו $-x^2+x=0$) אינן צריכות להוליכנו לקראת שרשים שונים, ז"א לקראת מספרים אלגבריים שונים.

סדרת כל המספרים האלגבריים, לרבות את המרוכבים, מתחילה לפי זה כך:

$$0\ (g=1);\ -1,1\ (g=2);\ i,-i,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-2,2\ (g=3);\ldots$$

י"ג) הוכחת Cauchy למשפט היסודי של האלגברה

(מלואים לעמ' 187).

בטרם נתאר את הקו הכללי של ההוכחה הנידונה, נלבישנה בגד הסתכלותי במקצת. נרשה לגודל הלא־מסויים x, המופיע בפולינום הנתון $f(x)$, לקבל את כל הערכים המרוכבים! בתארנו את המספרים המרוכבים (השוה עמ' 163) כנקודות ב„מישור של גאוס", נוכל לבדוק את התנהגות הפולינום $f(x)$ בכל תחומו של מישור זה. תחת דברנו על תכונותיו של $f(x)$ „אצל ערכים ידועים של x", נדבר אפוא על תכונותיו „במקומות ידועים של המישור". כמו־כן נוכל לדבר על „סביבה" של ערך מסויים $x=a$ במובן זה, שנתכוון לכל הערכים (הנקודות) שבתוך עיגול „קטן" סביב הנקודה המתאימה למספר המרוכב a. (השוה פרק תשיעי, §2.)

אחרי הכנה זו נחלק את ההוכחה שלפנינו לשלושה חלקים; הראשון ביניהם איננו אפייני להוכחה הבאה, אלא משותף לרוב ההוכחות של המשפט היסודי.

א) נוכל למצוא מעגל שמרכזו בנקודה 0 של המישור, כך שבקו־המעגל עצמו ומחוצה לו $f(x)$ שונה על כל פנים מ 0; לא יימצא שם אפוא כל שורש למשואה $f(x)=0$. בעצם הוכחנו טענה זו כבר בעמ' 185 (משפט 4): מצאנו שם שבשביל ערכים ממשיים גדולים למדי של x יהיה האיבר הראשון a_0x^n של $f(x)$ האיבר המכריע. והרי דבר זה קיים, מפני אותם הנמוקים גופא, גם אם נרשה ל x לקבל ערכים מרוכבים כלשהם; במקום „ערך x גדול למדי" עלינו לאמור במקרה זה: „x בעל ערך מוחלט גדול למדי". נוכל גם לדייק ולאמור: בשביל ערכי x בעלי $|x|$ גדול למדי (ז"א גדול ממספר ממשי חיובי ידוע R) יימצא בין $|f(x)|$ ובין $\frac{1}{2}|a_0x^n|$ ובין $\frac{3}{2}|a_0x^n|$; על כל פנים יהיה אפוא $f(x)\neq 0$, אם $|x|>R$.

לפי תיאורם הגיאומטרי של המספרים המרוכבים קיים $|x|=R$ בשביל אותם ערכי x (ורק בשבילם), המתאימים לנקודות שבקו־המעגל בעל המחוג R סביב המרכז 0. לכן אי־השויון $|x|>R$ מתאים לאותו חלק של המישור הנמצא מחוץ למעגל הנ"ל. לפיכך לא יוכל להמצא שורש למשואה $f(x)=0$ מחוץ למעגל $|x|=R$. (הנחנו כמובן ש $f(x)$ איננו קבוע!)

ב) יהי נתון ערך כלשהו של x, כגון $x=a$. יוכל להיות ש $f(x)$ מתאפס אצל a, ז"א שקיים $f(a)=0$. אם אין הדבר כך, יהיה $|f(a)|$ מספר ממשי חיובי. משפט־העזר הדרוש לנו טוען לגבי מקרה זה: אי־אפשר שיהיה $|f(a)|$ ערך מינימלי של $|f(x)|$ בסביבה של $x=a$. ביתר פירוט: אין במציאות סביבה של $x=a$ (למשל, עיגול סביב $x=a$) כך, שערכי $|f(x)|$ בסביבה הנידונה כולם גדולים מ $|f(a)|$ או שווים לו[1]. ישנן אפוא בסביבה כלשהי של $x=a$

1. עובדה זו היא מקרה פרוט למשפט כללי מתורת־הפונקציות, והעובדה תשאר בתקפה אם נשים „ערך מכסימלי" במקום „ערך מינימלי".

נקודות x, שבשבילן $|f(x)|<|f(a)|$. טענה זו יש להוכיח ע"י חשבון, שאין בו קושי. אפשר להגדיר בפירוש ערכי x בסביבת a, הממלאים אי־שויון זה.

ברור שהעובדה הנ"ל לא תשאר בתקפה באותו המקרה שהוצאנוהו בתחילת ב), הוא המקרה $f(a)=0$. במקרה זה יש ל $|f(x)|$ בוודאי ערך מינימלי אצל $x=a$, שהרי 0 הנהו הערך הקטן ביותר אשר $|f(x)|$ יכול לקבלו בכלל!

ג) החלק השלישי והאחרון של ההוכחה מוקדש למשפט כללי על פונקציות $f(x)$, הנכון לא רק בשביל פולינומים כי אם בשביל פונקציות כלליות יותר (רציפות; השווה בפרק י"א, § 4). המשפט אומר: אם נתון לנו במישור של גאוס „עיגול סגור", היינו: תחום הכולל את כל נקודותיו של קו־מעגל מסויים ואת כל הנקודות שבפנים המעגל, אז ישנו ערך מינימלי בין ערכי $|f(x)|$ המתאימים לנקודות העיגול[1]. (אין זה אמנם מן הנמנע, שאותו הערך המינימלי מתקבל אצל נקודות שונות בעיגול.) הקורא יטען אולי: הרי זה מובן מאליו, שבין כל ערכי x בתחום מסויים יהיה ערך מינימלי; ואולם אין הדבר כך; עיין בסוף הפרק העשירי[2].

שלושת החלקים האלה מצטרפים להוכחה של המשפט היסודי של האלגברה: לפי א) נבחר במספר ממשי חיובי R כך, שמחוץ למעגל $|x|=R$ יהיה $f(x)\neq 0$. לכן יוכלו שרשי המשואה $f(x)=0$ להמצא רק בעיגול הסגור $|x|\leq R$. בעיגול זה ישנו, לפי ג), ערך או ערכי x, למשל $x=a$, שם מקבל $|f(x)|$ ערך מינימלי. נניח לרגע כאילו היה ערך מינימלי זה חיובי (הרי על כל פנים הוא ממשי ולא־שלילי). אז ישנן, לפי ב), בסביבת הנקודה a נקודות x שאצלן $|f(x)|<|f(a)|$; בפרט נוכל לקבוע את הסביבה הנידונה כך שהיא תימצא כולה בעיגול הנ"ל[3]. ואולם בזה קבלנו סתירה להגדרת הערך a, אשר לפיה $|f(a)|$ קטן או שווה מערכי $f(x)$ שבכל העיגול, ועל אחת כמה וכמה בסביבה הנידונה. משום כך אנו מוכרחים לבטל את הנחתנו, כאילו הערך המינימלי של $|f(x)|$ בעיגול $|x|\leq R$ היה חיובי. הערך המינימלי הזה שווה אפוא ל 0; לשון אחר: ישנו במישור של גאוס — ובפרט בעיגול הנ"ל — ערך של x, שאצלו $f(x)=0$. בזה נגמרה הוכחת המשפט היסודי של האלגברה.

הכרנו לדעת, מבין ההוכחות הרבות למשפט היסודי של האלגברה, אחת מן הסוג האריתמיטי (עמ' 187) ואחת מן הסוג האנליטי (לעיל) — לפחות לפי כווני

1. אין לזה חשיבות שהתחום הנידון הנו עיגול; היינו יכולים לשים במקומו כל תחום המכונה „תחום סגור" (השוה בפרק התשיעי, § 2).

2. נסתפק כאן בזה שנטה את לב הקורא אל הפונקציה $f(x)=2^x$, שאין לה ערך מינימלי לא בשביל ערכי x המשמשים ולא בשביל ערכי x המרוכבים; כנגד כל ערך a אפשר למצוא ערכי x כך ש $|2^x|<|2^a|$. יש להשוות זאת לעובדה הפשוטה, שבין אינטוף הערכים $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ אין ערך, הקטן מכל חבריו.

3. במקרה $|a|=R$ יש צורך בשינוי קל; במקרה זה יש לבחור ב R אחֵר כך, שמחוץ למעגל יהיה למשל $|f(x)|>|a_n|$.

המחשבה בדרך כלל. יש סוג שלישי: הסוג הגיאומטרי. בראש ההוכחות מסוג זה עומדת „הוכחתו הראשונה" של גאוס, שהופיעה כעבודת־הדוקטור שלו ב 1799. שיטת ההוכחה ההיא אינה מדוייקת לפי מושגינו (השוה בעמ' 188), בהסתמכה יותר מדי על ההסתכלות ההנדסית. ואולם במשך הזמן שופרה השיטה בהרבה. ובצורה המשוכללת שהגיעו אליה לפני זמן־מה שני חוקרים יהודים[1], מצטיינת ההוכחה מהשקפת ההסתכלות וההגיון גם יחד.

י"ד) פתירתן האלגברית של המשואות בנות המעלות 3 ו 4 (מלואים לעמ' 189)[2].

כדי לפתור את המשואה בעלת מקדמים ממשיים כלשהם

$$a_0 x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3=0,$$

נוכל להכניס תחת הנעלם x נעלם חדש y, בהציבנו: $x=y-\frac{a_1}{3a_0}$. חשבון קל מראה שנקבל ע"י זה משואה חדשה בעלת הצורה: $b_0 y^3+b_2 y+b_3=0$. (הנעלם מסומן כאן ב y, והמקדם של ריבוע־הנעלם מתאפס; אגב קיים $b_0=a_0$.) ע"י חילוק ב b_0 נעבור לצורה:

$$y^3+cy+d=0. \qquad (1)$$

(c ו d ממשיים)

נגדיר את הגדלים u ו v על־ידי

$$u=\sqrt[3]{-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}},\quad v=-\frac{c}{3u}.$$

לפי זה יהיה $y_1=u+v$ אחד השרשים של המשואה (1). כדי למצוא את שני השרשים האחרים, נסמן ב ε אחד משרשי המשואה $x^3=1$, שבה עסקנו בעמ' 199. בתנאי ש $\varepsilon\neq 1$. (אחד מן השרשים הללו הוא $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$.) אז יהיו השורש השני והשלישי של המשואה (1):

$$y_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2,\quad y_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon.$$

על־סמך הנחתנו, כי המקדמים a_k, ולכן גם c ו d, כולם ממשיים. נוכל להבדיל בין שלושה מקרים:

1. TH. MOTZKIN und A. OSTROWSKI: Über den Fundamentalsatz der Algebra *Sitzungsber. d. Preuss. Akademie d. Wiss.*, Phys.-Math. Klasse, 1933.

2. כאן תנתן רק הדרך המובילה־לפתרון, ועל הקורא מוטל לאשר ע"י חשבונות את הצעדים הבודדים השונים.

3. לא אובפת איזה ערך, מבין שלושת הערכים האפשריים לביטוי הנ"ל, נקח בשביל u. לפי הנוסחה השניה יהיה $v=\sqrt[3]{-\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}}$. ואולם הצורה דלעיל קובעת, איזה ערך עלינו לקחת בשביל v, מבין שלושת הערכים האפשריים של הביטוי האחרון.

א) אם $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}>0$, יהיה אחד מן השרשים ממשי, ושני האחרים מספרים מרוכבים הצמודים זה לזה.

ב) אם $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}=0$, מתלכדים שנים בין שלושת השרשים. השרשים כולם ממשיים במקרה זה.

ג) אם $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}<0$, יהיו כל שלושת השרשים ממשיים; ואולם נקבל את השרשים בצורה, המכניסה גם מספרים דמיוניים.

תורת־גלוע (עיין בעמ' 190) מראה שבמקרה ג) אי־אפשר להנצל מן ההכרח להכניס מספרים מרוכבים, אעפ"י שנגיע רק למספרים ממשיים — אם נתכוון לפתירה אלגברית. ואולם נוכל למצוא את השרשים בדרך המשתמשת רק במספרים ממשיים, בהכניסנו גם שיטות „טרַנסצֶנדֶנטיות", למשל פונקציות טריגונומטריות.

את המשואה $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ בת המעלה 4 נוכל להעביר, בהציבנו $x=y-\frac{a_1}{4a_0}$, אל משואה $b_0y^4+b_2y^2+b_3y+b_4=0$, שבה $b_0=a_0$; ממנה נקבל ע"י חילוק ב b_0 את הצורה:

$$y^4+cy^2+dy+g=0. \qquad (2)$$

כך הוצאנו את האיבר המכיל את החזקה השלישית של הנעלם. כדי לפתור את המשואה (2), משתמשים במשואה „הפותרת" בת המעלה 3:

$$z^3+\frac{c}{2}z^2+\frac{c^2-4g}{16}z-\frac{d^2}{64}=0.$$

אם z_1, z_2, z_3 הם שרשי המשואה הפותרת, יהיו שרשי המשואה (2):

$$y_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\ ;\ y_2=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\ ;$$

$$y_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\ ;\ y_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}.$$

לגבי $\sqrt{z_1}$ ו $\sqrt{z_2}$ לא איכפת אי־אלו ערכים של השרשים הריבועיים נקח (רק תמיד אותם הערכים!); לעומת זאת נקבע על־ידם הערך הנחוץ ל$\sqrt{z_3}$, והוא:

$$\sqrt{z_3}=-\frac{d}{8\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}}.$$

אם המקדמים a_k, ולכן גם c, d, g, כולם ממשיים, אז המכפלה $z_1\cdot z_2\cdot z_3$, השווה ל$\frac{d^2}{64}$, איננה שלילית. מזה יוצא בנקל שיש בעיקר שלושת המקרים הבאים:

א) z_1, z_2, z_3 כולם חיוביים; אז יש למשואה (2) ארבעה שרשים ממשיים.

ב) z_1 חיובי, z_2 ו z_3 שליליים; אז y_1 ו y_2 הנם מספרים מרוכבים צמודים זה לזה, וכמו־כן y_3 ו y_4.

ג) z_1 חיובי, z_2 ו z_3 מספרים מרוכבים צמודים; אז y_1 ו y_2 הנם ממשיים. y_3 ו y_4 מספרים מרוכבים צמודים.

אם בפרט $d=0$, ישווה אחד משרשי המשואה „הפותרת" ל 0. ולמשואה (2) יהיו שני זוגות־שרשים, כך שכל זוג מכיל את הערכים הנגדיים לערכי הזוג השני.

ט"ו) המשפט היסודי של האלגברה לאור האלגברה המופשטת

(מלואים לעמ' 196).

בסמננו את שדה כל המספרים המרוכבים ב $\mathfrak{K}$, נוכל לבטא את המשפט היסודי כך: לכל משואה אלגברית בעלת מקדמים מתוך $\mathfrak{K}$ יש שורש בתוך $\mathfrak{K}$. מאידך גיסא נקבל את השדה $\mathfrak{K}$ מתוך השדה $\mathfrak{Q}$ של כל המספרים הממשיים, בספחנו אל איברי $\mathfrak{Q}$ את „היחידה הדמיונית" i, לרבות את שאר המספרים הנחוצים ליצירת שדה. מטעמים שהוסברו בעמ' 183 (משפט 1) מספיק לטפל במשואות בעלות מקדמים מתוך $\mathfrak{Q}$.

אם נרצה לראות דברים אלו לאור האלגברה המופשטת, תהיה הבעיה העקרית להגדיר את המושג „ממשי" בעזרת מושגים אריתמיטיים בלבד, בלי שנשען על המושגים האנליטיים (מספר ממשי) שהוכנסו בפרק הששי. פתרון לבעיה זו נמצא בזכרנו את העובדה הפשוטה, שכל סכום של ריבועי מספרים שונים מ 0 מתוך $\mathfrak{Q}$, שונה גם הוא מ 0. אין זה נכון בתוך $\mathfrak{K}$; למשל קיים $1^2+i^2=0$. הבדל זה מניע אותנו להגדיר בדרך כלל: שדה כלשהו (לאו דוקא שדה של מספרים) ייקרא שדה „ממשי", אם התאפסות סכום של ריבועי איברים מתוך השדה גוררת תמיד, שכל איברי השדה הנידונים שווים ל 0. הגדרה זו הנה אך ורק אלגברית.

ועתה אפשר להוכיח בשיטה אלגברית: כנגד כל שדה ממשי ישנה הרחבה ידועה X, המהווה גם היא שדה ממשי, כך שלכל משואה בעלת מקדמים מתוך X יש שרשים בתוך השדה $\mathfrak{Z}$, הנוצר מ X ע"י סיפוח „היחידה הדמיונית" כלפי X; היינו: אחד משרשי המשואה $x^2+\varepsilon=0$, שבה מסמן 0 את איבר האפס, ו ε את יחידת השדה.

ברור כבר מדוגמת המספרים, שטענתנו נכונה רק לגבי הרחבה מתאימה X של השדה הממשי הנתון, ולא כלפי כל שדה ממשי בעצמו. גם שדה המספרים הרציונליים, למשל, הנהו שדה ממשי, ובספחנו אליו את המספר i לא נקבל שרשי משואה כגון $x-2=0$. כדי לקבל, ע"י סיפוח היחידה הדמיונית, שדה שהוא „סגור־באופן־אלגברי", עלינו לצאת משדה ממשי, המקיף במידה מספיקה; שדה המכונה „סגור־באופן־ממשי". במקרה של המשפט היסודי של האלגברה, שבעבורו מורחב שדה כל המספרים הממשיים לשדה המספרים המרוכבים, בוודאי מתמלא התנאי הנ"ל; כי שדה כל המספרים הממשיים הוא השדה הממשי (של מספרים במובן הרגיל) הרחב ביותר שנוכל להשיגו, בצאתנו משדה המספרים הרציונליים (השוה בעמ' 172 ו 195/6).

ט"ז) פתירת המשואה של חילוק־המעגל ל17 חלקים,
בעזרת משואות ריבועיות (מלואים לעמ' 202).

המשואה שלפנינו היא (השווה המשואה [1] בעמ' 200):

$$x^{16}+x^{15}+\ldots+x^2+x+1=0.$$

לא נוכל לתאר כאן את הרעיונות הכלליים שעל פיהם יימצא הפתרון למשואה זו כמו לכל משואה דומה (אם במקום 17 עומד מספר ראשוני $p=2^l+1$). לכן נסתפק במסירת התוצאה הסופית ולא נדאג לשיטה המדריכה אותנו לקראתה.

ראשית, נקבע את שרשי המשואה $x^2+x-4=0$ שהם:

$$\eta_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ (<0)\ ,\quad \eta_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

המשואה הבאה תהיה $x^2-\eta_1 x-1=0$, ושרשיה הם:

$$\eta_{11}=\frac{\eta_1+\sqrt{\eta_1^2+4}}{2}\ ,\quad \eta_{12}=\frac{\eta_1-\sqrt{\eta_1^2+4}}{2}.$$

משואה שניה, המתאימה לאחרונה, היא $x^2-\eta_2 x-1=0$, ושרשיה הם:

$$\eta_{21}=\frac{\eta_2-\sqrt{\eta_2^2+4}}{2}\ ,\quad \eta_{22}=\frac{\eta_2+\sqrt{\eta_2^2+4}}{2}.$$

לבסוף נקח את המשואה $x^2-\eta_{22}x+\eta_{11}=0$; שרשיה הם:

$$\eta_{221}=\frac{\eta_{22}-\sqrt{\eta_{22}^2-4\eta_{11}}}{2}\ ,\quad \eta_{222}=\frac{\eta_{22}+\sqrt{\eta_{22}^2-4\eta_{11}}}{2}.$$

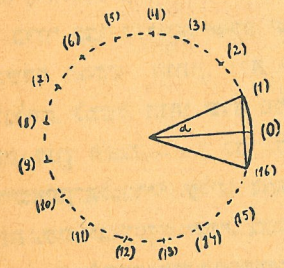
אם נסמן ב ξ את השורש „הפרימיטיבי"

$$\xi=\cos\frac{360^0}{17}+i\sin\frac{360^0}{17} \qquad [1]$$

של המשואה $x^{17}=1$ (שורש שמספיק לקבעו כדי לפתור את הבעיה שלפנינו), יהיה:

$$\xi^{16}=\cos\frac{360^0}{17}-i\sin\frac{360^0}{17} \qquad [2]$$

הערך הצמוד. (עיין בציור 17, שאל סימוניו יש להשוות מה שנאמר בעמ' 197.)
חשבון שאיננו קשה ביותר נותן את התוצאה $\eta_{222}=\xi^{16}+\xi$.



ציור 17

$$\alpha=\frac{360^0}{17}$$

$$(1):\quad \cos\frac{360^0}{17}+i\sin\frac{360^0}{17}$$

$$(16):\quad \cos\frac{360^0}{17}-i\sin\frac{360^0}{17}$$

מאידך הרי קיים לפי [1] ו [2]: $\xi+\xi^{16}=2\cos\frac{360^0}{17}$. לכן נוכל לצייר את הזוית $\frac{360^0}{17}$ בעזרת השורש η_{222} אשר קבענוהו על־סמך משואות ריבועיות בלבד, כלומר על־סמך פעולות שיש להגשימן בעזרת סרגל ומחוגה.