מאת: מתן שיק

<u>נסיון להראות ש-$\mathbb{N}$ בלתי אפשרית</u>

נציג שתי הוכחות:

1. נתבונן בקבוצת הטבעיים כשהיא סדורה מהקטן לגדול. מה שמיוחד במספרים בקבוצה, שהם מציינים כמה מספרים יש בקבוצה עד אליהם (כולל. לשם הנוחות, נניח לכל אורך החיבור שהטבעי הקטן ביותר הוא אחד), למשל המספר 1000 מציין שעד אליו יש 1000 מספרים. אך מכיוון שכל המספרים בקבוצה הם טבעיים ועל כן סופיים:
או שהקבוצה סופית, וזה לא נכון כי לעולם אפשר ליצור מספר טבעי שלא נמצא בקבוצה, העוקב למספר האחרון.
או שהקבוצה אין-סופית, וגם זה לא נכון כי כל המספרים בקבוצה סופיים, מה שאומר שמניין המספרים בקבוצה גם הוא סופי.

נמחיש את התובנה הזאת באמצעות משל נחמד: יום אחד הוחלט לערוך משאל בין כל חברי קבוצת הטבעיים. לפניי המשאל, ביקשו מחברי הקבוצה להסתתדר בטור מהקטן לגדול. המשאל כלל שאלה אחת פשוטה ״האם מניין המספרים בטור עד אליך (כולל) הוא סופי?״. <u>כל</u> החברים השיבו את אותה התשובה ״כן. אני סופי, אז מניין המספרים עד אליי גם כן סופי״. עורכי המשאל הסיקו את המתבקש; אם כל המספרים אמרו שמניין המספרים עד אליהם הוא סופי, אז קבוצת הטבעיים היא קבוצה סופית.

קבוצת הטבעיים מובילה לסתירה, מה שמוכיח שאינה אפשרית.

טיעון נגד: ההוכחה נופלת בכשל לוגי הנקרא כשל ההרכבה. כמו שהטיעון הבא לא תקף: מניין הקבוצה {2,4,6} הוא זוגי כי כל איבריה זוגיים. כך גם הטיעון כאן לא תקף: קבוצת הטבעיים היא סופית כי כל איבריה סופיים.
תשובה: בקבוצה {2,4,6} כל מספר מעיד על עצמו בלבד, ואילו כאן כל מספר מעיד על חלק מהכלל.

טיעון נגד: אין בקבוצת הטבעיים מספר ׳שרואה׳ את כל חברי הקבוצה ולכן לא נובע מהיות כל המספרים סופיים שהקבוצה סופית.
תשובה: זהו בדיוק מה שההוכחה מנסה לעקוף. העקיפה היא בזכות העובדה המוסכמת לכל, שכל המספרים, ללא יוצא מן הכלל, מעידים שעד אליהם המניין הוא סופי.

2. התבוננו ברשימה הבאה:

1	[1]
2	[1,2]
3	[1,2,3]
4	[1,2,3,4]
5	[1,2,3,4,5]
6	[1,2,3,4,5,6]
…	…

בצד שמאל, קבוצת הטבעיים. ובצד ימין מותאם לכל מספר קבוצה של כל העוקבים מאחד עד אליו (כולל).
ניתן לראות שכל טבעי מצביע על כמה איברים יש בקבוצה המותאמת לו. והנה המופת: מה בטור השמאלי לא חסר אף טבעי, כך גם בטור הימני לא חסר (הכוונה שכל טבעי מופיע בלפחות אחת מן הקבוצות בטור), מה שאומר שבטור הימני נכללת גם קבוצה המכילה את כל הטבעיים.
אסביר זאת בדרך השלילה. נניח שאין קבוצה המכילה את כל הטבעיים בטור הימני. הקבוצה הראשונה חסרה את כל הטבעיים למעט המספר 1. הקבוצה השנייה חסרה את כל הטבעיים למעט 1 ו-2, וכך הלאה, כלומר, כל קבוצה בטור מתקרבת במספר אחד יותר מקודמתה, לעבר השלמת כל הטבעיים. כעת, מכיוון שהנחנו שלא נמצאת בטור קבוצה המכילה את כל הטבעיים, נובע מכך שאף קבוצה בטור לא מצליחה להשלים את כל הטבעיים החסרים. אבל אז ייצא שלא כל הטבעיים מופיעים בטור הימני, מה שכאמור לא נכון, לכן ההנחה שקבוצה המכילה את כל הטבעיים לא נמצאת שם, שגויה.

אם כן, ישנו מספר בטור השמאלי שמותאם לה. אם הוא סופי, הקבוצה המכילה את כל הטבעיים גם כן סופית, מה שלא נכון כנ״ל. ואם הוא אין-סופי, הרי זה סותר את היות קבוצת הטבעיים מספרים טבעיים בלבד. שוב הגענו לסתירה המוכיחה את אי ההיתכנות של קבוצת הטבעיים.

טיעון נגד: העובדה שאף קבוצה לא משלימה את הטבעיים החסרים אינה עומדת בסתירה לכך שכל הטבעיים מופיעים בטור, כי כל טבעי שתגיד, הראה לך מיד באיזו שורה הוא מופיע לראשונה.
תשובה: כל טבעי שאגיד ותראה לי באיזו שורה הוא מופיע לראשונה, אינה אלא ראיה לאותו טבעי בלבד, ומכיון שאיני יכול לומר את כל הטבעיים, הטענה אינה ראיה לכך שכל הטבעיים מופיעים בטור.

אציין משל חביב להמחשה: קוסם נעמד בכיכר העיר והכריז שיש לו חליפת קסמים, שמכילה פתק עבור כל מספר טבעי. התקבצו סביבו ההמון, וקראו ״זה לא יכול להיות, למספרים הטבעיים אין-סוף!״. השיב הקוסם ״הוכיח לכם, אמרו איזה טבעי שרק תרצו ואשלוף לכם מיד את הפתק שלו״. הקהל קרא את המספר 1000, והקוסם שלף במהירות פתק מתוך החליפה עם המספר 1000 עליו. וכך מספר אחר מספר שהקהל קורא, הקוסם שולף להם את הפתק שלו. הקהל היה בשוק ונאלץ להודות ״הקוסם צדק, יש לו חליפה עם פתק עבור כל טבעי״. אמנם היה אדם נבון אחד בקהל שהבין ״המחזה של הקוסם הוא לכל היותר הוכחה לכך שהחליפה הכילה את הטבעיים שהוא שלף, בלבד״.

← נקודה חשובה: הדרך היחידה לפתור את הסתירה שהצגנו היא ע״י כך שיהיו בקבוצת כל העוקבים מאחד, גם מספרים אין-סופיים. אך גם הקבוצה הזו לא תיתכן, משום שיש בה קפיצה לוגית בעייתית, מספר סופי שבהוספת אחד נהיה אין-סופי, מה שבוודאות התרחש איפשהו בתוך הקבוצה.
לפיכך נאלץ להיפרד לחלוטין מקבוצת העוקבים האין-סופית, ואולי, מהאין-סוף בכלל.
העובדה שתמיד אפשר ליצור מספר טבעי חדש לא אומרת אלא שהמספרים הטבעיים הם אין-סוף פוטנציאלי, לא ממשי. הסוף.