二维共形量子场论

数学定义和顶点算子代数表示理论方法

黄一知

Department of Mathematics
Rutgers University
110 Frelinghuysen Road
Piscataway, NJ 08854 USA

北京大学北京国际数学研究中心 北京 100871

E-mail: yzhuang@math.rutgers.edu

摘　要　本文是关于二维共形量子场论数学研究中顶点算子代数表示理论方法的一个综述，尤其是关于一个构造和研究二维共形量子场论的长期研究纲领的总结，包括已经解决的问题和尚未解决的一些主要猜想和问题。

1　引言

量子场论在过去的四十年中已经逐渐发展成为纯数学的一个重要研究领域，在数学中扮演着越来越重要的角色。几乎所有的纯数学领域都和量子场论有着重要的联系。很多数学猜想和结果也已经从对量子场论的研究中得到。量子场论更给数学提供了新的方法、新的理解、新的思路和新的理论框架。

在各种量子场论中，拓扑量子场论的数学构造及其在数学中的应用已经有相当深入的研究，是最为成功的。但非拓扑量子场论的数学构造以及随之而来的深刻猜想离数学上完整的理解还相当遥远。关于非拓扑量子场论最著名也是最困难的数学问题之一是四维Yang-Mills理论的存在性和质量间隙问题。而二维共形量子场论则是数学上了解得最多、并且直接提供了解决数学猜想和问题的思想和方法的一种非拓扑量子场论。很多从弦论中得到的数学猜想其实也是从二维超共形量子场论或高维超对称Yang-Mills理论得到的。要完全理解这些数学猜想和问题，我们需要构造对应的量子场论。

量子场论的早期数学研究从上世纪五十年代便开始了。Wightman公理、Osterwalder-Schrader定理、Haag-Kastler公理系统等等都出现在这一阶段。上个世纪七十年代，I. Segal、Jaffe、Glimm 等人在构造满足一些上面所述公理的理论方面做了重要的工作。详细的讨论见三本经典著作[GJ]、[Ha]、[SW]。但他们的方法仍然无法完整构造四维Yang-Mills理论等数学家和物理学家最有兴趣的理论。

从上个世纪八十年代开始，在物理中路径积分方法的启发下，Kontsevich、G. Segal、Atiyah提出了应该将量子场论看成是从几何范畴到Hilbert空间组成的张量范畴的函子（见[Se]和[A]）。这样一种量子场论的定义和基于此定义的构造和研究在拓扑量子场论的情形下尤其成功。这一成功的主要原因是拓扑量子场论的状态空间一般都是有限维的。对于非拓扑量子场论，它们的状态空间一定是无限维的。因此这些量子场论的构造和研究要困难很多。

在所有这些非拓扑量子场论中，已经有很多数学构造和结果的是二维共形量子场论。本文回顾和总结一个用顶点算子表示理论构造和研究二维共形量子场论的长期研究纲领。本文主要强调一般的理论，而不是以例子为重点。在这个领域的文献中，已经有很多关于各种例子的综述和书，但缺少

的正是对一般理论的总结。这些一般理论的威力直到最近才在一些深入的应用中显示了出来。另一方面，任何数学领域中的唯一性和分类结果都取决于一般理论的发展。这个领域中至今仍然缺少实质性的唯一性和分类结果说明我们仍然需要进一步发展这些一般理论。

在下一节中，我们将讨论一个二维共形量子场论的定义以及一些早期的结果和猜想。在第三节中，我们将讨论上述纲领中所得到的结果，而在第四节中，我们将讨论有待解决的问题和猜想。

2 定义、早期结果和猜想

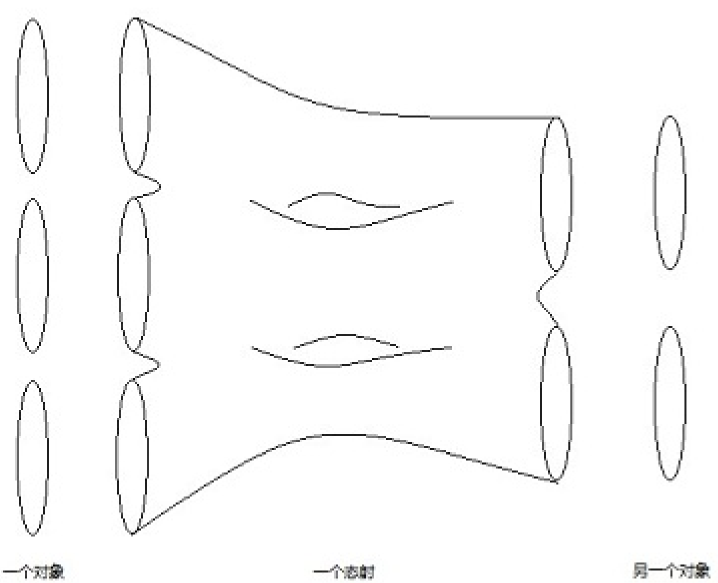
二维共形量子场论最早在弦论的早期研究中出现。闵可夫斯基空间中的经典弦量子化之后便给出一个二维共形量子场论。一些二维共形量子场论的重要组成部分（比如Virasoro代数及其表示、顶点算子等等）都在这些研究中首先被发现（见[GSW]、[P]）。二维共形量子场论在物理中的系统研究则是由Belavin、Polyakov和Zamolodchikov在1984年的一篇文章[BPZ]中开始的。

本文主要讨论共形场论严格的数学研究。所以我们从共形场论的数学定义开始。在这一节中，我们先给出Kontsevich和G. Segal 关于二维共形量子场论的定义。然后我们讨论八十年代末九十年代初由物理学家和数学家得到的一些重要的数学结果和猜想。

2.1 定义

1987年, Kontsevich和G. Segal给出了一个二维共形量子场论的定义。大意上就是将二维共形量子场论定义成为由适当的黎曼面所构成的一种代数结构的线性射影表示。G. Segal还进一步引入了模函子和弱共形场论的概念。见[Se]。

更精确地描述的话，Kontsevich和G. Segal的定义要用一个由圆和黎曼面构成的范畴来描写。这个范畴的对象是有限个单位圆的不相交和，态射是带边界的黎曼面以及从两个对象中的圆到对应的黎曼面边界分量的参数化映照。这个范畴还是一个张量范畴。

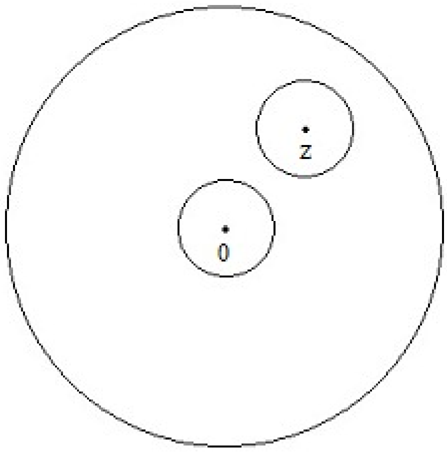


我们也考虑一个对象为Hilbert空间、态射为迹类算子的范畴，和Hilbert空间的张量积一起，构成

一个张量范畴。给定一个Hilbert空间H，所有H的张量积幂次给出了Hilbert空间张量范畴的一个子范畴，可以称为由H生成的张量范畴。我们也考虑同样由H的张量积幂次为对象的一个范畴，但它的态射则是对象之间的迹类算子张成的一维子空间。可以将此范畴称为由H生成的射影张量范畴。我们将从一个范畴到由H生成的射影张量范畴的函子称为一个从这个范畴到由H生成的张量范畴的射影函子。大致来说，Kontsevich和G. Segal 把一个二维共形量子场论定义为一个带非退化厄米形式的局部凸的拓扑向量空间H，和一个从上面所给出的黎曼面构成的张量范畴到由H生成的张量范畴的射影函子，满足一些几何上很自然的条件，包括体现二维共形量子场论主要特征的共形不变性。空间H被称为是这个二维共形量子场论的状态空间。

为简单起见，我们将省略“二维”和“量子”，将二维共形量子场论简称为共形场论。经典的共形场论属于微分几何，数学上早就有很多研究。高维共形量子场论（尤其是四维超对称Yang-Mills 理论）在数学和物理中（尤其是在AdS/CFT对应猜想中）扮演重要的角色。但这些理论目前连一些基本的严格数学定义都还没有，我们在此短文中将不作任何讨论。

早期的共形场论研究主要是关于有理共形场论的。Moore和Seiberg在[MS2] 中给出了有理共形场论的公理和基本假设。限于篇幅，这里无法给出有理共形场论的完整定义，只能大致描述一下。从上面共形场论的定义可以看到，如果考虑几何范畴中从包含两个单位圆的对象到包含一个单位圆的对象的态射，其中有一个态射是在单位圆盘D中切除了两个圆所得到的黎曼面，切除的两个圆一个圆心



在0，另一个圆心在z $(0<|z|<1)$，半径都小于$\min(1-|z|, \frac{|z|}{2})$. 一个共形场论给出的函子将这个黎曼面对应到一个从$H\otimes H$到H的一个态射。这样的态射是依赖于z的。给定H中的元素u, 代入$H\otimes H$中第一个位置，这个态射和这个元素一起便给出了一个从H到H的映照。如果作为取值在H到H的映照空间中自变量为z的函数，它可以解析延拓成为一个z的亚纯函数（取值也在某个映照空间），我们就称这个亚纯函数是一个亚纯场。所有这样的亚纯场全体有一个代数结构（我们后面还会讲到），我们称这个代数结构为这个共形场论的手征代数。大致来说，如果H可以分解成为这个代数的不可约表示和复共轭不可约表示的张量积的有限和，而且所有在共形场论函子下的像之内的态射都可以做类似的（有限）分解，那么这个共形场论就是一个有理共形场论。

2.2 Verlinde猜想和Verlinde公式

1987年，E. Verlinde [V] 基于对两个在有理共形场论中出现的代数的研究，提出了一个影响深远

的猜想。为描述Verlinde猜想，我们需要先简单介绍一下融合规则（fusion rule）和模变换矩阵S.

给定手征代数三个不可约表示空间中的元素，分别放在球面的三个点上，可以定义球面上的三点相关函数。这样的相关函数全体给出了从这三个不可约表示的张量积到一个（多值）解析函数空间的线性映照。这些线性映照全体也构成一个线性空间，它的维数叫做融合规则。对于有理共形场论，手征代数不等价的不可约表示的个数是有限的，记为K。固定一个不可约表示，让其他两个不可约表示在所有不等价的不可约表示的集合中变，对应的融合规则便给出一个K乘K的矩阵。于是我们得到K个这样的矩阵，称为融合矩阵。

手征代数及其模都是阶化向量空间。它们的齐次子空间是能量算子的有限维特征空间。这些齐次特征子空间的特征值称为共形权或简称为权。权为n的齐次子空间的维数乘上一个变量q的n次方后再对n求和，便得到这个模（手征代数也可看作是它自己的模）的阶化维数或真空特征。对有理共形场论，这些阶化维数全体构成一个有限维的线性空间，由不可约表示的阶化维数生成。更重要的是，这个有限维空间应该是模群$SL(2,\mathbb{Z})$的一个表示。我们取$SL(2,\mathbb{Z})$中的元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

也就是对应于模变换$\tau \mapsto -1/\tau$的矩阵。这个元素在不可约表示阶化维数上的作用给出了一个K乘K矩阵S。这个矩阵S作为一个模变换的作用的矩阵，自然是可逆的。

Verlinde的猜想说，矩阵S同时对角化所有K个融合矩阵。Verlinde用此猜想得到了有理共形场论著名的Verlinde公式。对从仿射李代数表示构造出来的有理共形场论Wess-Zumino-Witten模型[Wi1]（也称为Wess-Zumino-Novikov-Witten模型），Verlinde公式给出了融合规则的显式公式，并且推广到了高亏格黎曼面上，得到了一些代数几何公式。

2.3 Moore-Seiberg多项式方程和猜想

1987年和1988年，Moore和Seiberg [MS1] [MS2] 从有理共形场论的公理出发，尤其是在手征顶点算子（chiral vertex operator）的算子乘积展开和模不变性两大重要假定之下，得到了一组多项式方程，推导出了Verlinde猜想，从而得到了Verlinde公式。更重要的是，Moore和Seiberg发现这些多项式方程中的一些方程可以解释为张量范畴中的一些基本性质，而另外一些和模不变性有关的方程则是经典张量范畴理论里没有的。Moore和Seiberg的这一工作是模性张量范畴的起源。

Moore和Seiberg是从有理共形场论的公理（其中包括重要的手征顶点算子的算子乘积展开和模不变性以及对应于高亏格曲面的映照的收敛性）得到了Moore-Seiberg多项式方程，由此推出了Verlinde猜想和Verlinde公式。但构造满足这些公理和假定的有理共形场论比证明Moore-Seiberg方程以及Verlinde猜想和公式难得多。Moore和Seiberg的重要工作在数学上可以看作是将关于有理共形场论的研究归结为构造满足这些公理的理论，特别是归结为证明手征顶点算子的算子乘积展开和模不变性以及对应于高亏格曲面的映照的收敛性。其中手征顶点算子的算子乘积展开和模不变性都是在Moore和Seiberg文章中第一次明确写了下来，但并无任何证明。因此，在数学上，这两个重要假定在当时应该被称为Moore-Seiberg 猜想。

因为Moore和Seiberg的工作是基于共形场论的公理（包括应该称为Moore-Seiberg 猜想的两个重要假定），Verlinde猜想和公式以及模性张量范畴结构当时在数学上还是猜想。这些猜想的解决以及它们的应用是后来共形场论数学理论的一个主要方向。

2.4 Witten的猜想和问题

1989年，Witten [Wi2] 用Chern-Simons理论得到扭结和三维流形不变量的同时，也用有理共形场论（尤其是Wess-Zumino-Witten模型）得到了这些不变量。Witten得到这些不变量时用了有理共形场论中上面所讨论的公理和猜想。Witten也猜想从Wess-Zumino-Witten模型得到的不变量应该和从Chern-Simons理论得到的不变量是一样的。

在上面所描述的有理共形场论的大致定义中，我们要求这样一个场论的Hilbert空间H 可以分解成为手征代数的不可约表示和复共轭不可约表示的张量积的有限和，而且所有在共形场论函子下的像之内的态射都可以做类似的（有限）分解。这样的分解将所有上面所说的态射或等价的相关函数分解成为（多值）解析和（多值）反解析的部分。这里我们称这样的分解为解析反解析分解。对任何一个可能是有理共形场论的例子，我们必须要证明有这样的分解。

1991年，Witten [W3] 研究了Wess-Zumino-Witten模型的解析反解析分解问题。Witten在用了一个厄米形式是非退化的假设之后，得到了这些模型的解析反解析分解。因为这个厄米形式的非退化假设并没有被证明，Witten 的工作本质上是将Wess-Zumino-Witten模型的解析反解析分解问题化为了这个厄米形式的非退化问题。这个厄米形式的非退化性是关于Wess-Zumino-Witten模型构造的一个重要问题。

2.5 关于Calabi-Yau非线性西格玛模型的猜想

1985年, Friedan、Candelas、Horowitz、Strominger、Witten、Alvarez-Gaumé、Coleman、Ginsparg、等物理学家[Fr] [CHSW] [ACG] （也参见Nemeschansky和Sen的文章[NS]）提出了以Calabi-Yau流形为目标空间的非线性西格玛模型是$N = 2$超对称共形场论的猜想。

1987年，Gepner [Ge] 从$N = 2$超共形极小模型构造得到的一个$N = 2$超共形场论，现在被称为Gepner模型。他猜想Gepner模型应该同构于上面猜想中当Calabi-Yau流形为四维复射影空间中的费马五次超曲面所得到的非线性西格玛模型，同时也做了计算来说明这个猜想的可信性。

从上面关于Calabi-Yau流形给出$N = 2$超共形场论的猜想以及$N = 2$超共形场论的基本性质，Dixon [D]（1987）, Lerche, Vafa和Warner [LVW]（1988）得到了Calabi-Yau流形应该有镜像对的镜像对称猜想。1989年, Green和Plesser [GP] 用Gepner猜想、轨形（orbifold）构造和Calabi-Yau流形以及$N = 2$超共形场论的变形理论构造了Calabi-Yau流形的镜像流形。Green和Plesser的工作提供了对Calabi-Yau流形以及镜像对称猜想的深刻理解。但因为Gepner猜想、轨形构造和$N = 2$ 超共形场论的变形理论都还没有在数学上发展起来，这些工作仍然停留在数学猜想的阶段。

这里要注意的是，虽然Gepner模型是有理共形场论，以Calabi-Yau流形为目标空间的非线性西格玛模型一般都不是有理共形场论。这使得这些共形场论的数学构造和研究要困难很多。

2.6 中心荷为24的亚纯有理共形场论的分类猜想

共形场论研究中的一个重要问题是有理共形场论的分类。对于一般的有理共形场论，因为这个分类问题可能与有限群分类问题有关，所以应该是极为困难的。但一个相对而言可行的问题是对所谓的亚纯有理共形场论进行分类。所谓亚纯有理共形场论是指每个对应于上面讨论有理共形场论定义时引入的亏格0黎曼面的映照都是从亚纯场的延拓得到的。亚纯有理共形场论完全决定于他们的顶点算子代数。对它们的分类等价于满足一些特殊性质的顶点算子代数的分类。

中心荷为24的亚纯有理共形场论尤为重要。Frenkel、lepowsky和Meurman [FLM] 构造了极为重要的月光模顶点算子代数。一个猜想是它给出一个中心荷为24的亚纯有理共形场论（仍然是猜想是

因为对应于高亏格黎曼面的映照的性质尚未证明）。中心荷24对应于波色弦论的26维在取光锥规范后的维数。

1988年Frenkel、Lepowsky和Meurman [FLM] 提出了月光模的唯一性猜想：假定有一个顶点算子代数满足三个条件：第一、中心荷为24。第二、不存在权为1的元素。第三、这个顶点算子代数是它自己的唯一的不可约模。那么这个顶点算子代数一定同构于月光模顶点算子代数。如果这个猜想成立，那么有限群分类中的最大例外群魔群便可抽象定义为这样一个顶点算子代数的自同构群。

1992年，基于对从亚纯有理共形场论权为1的齐次子空间得到的李代数的研究和猜想，Schellekens [Sc] 给出了权为1 齐次子空间非零、中心荷为24的亚纯有理共形场论的分类猜想。猜想说总共有70个这样的亚纯有理共形场论。但Schellekens的文章并未给出所有这些亚纯有理共形场论，甚至是对应的顶点算子代数的构造。那时已经知道对应于这样的亚纯有理共形场论的顶点算子代数有38个，其中24个是从网格（lattice）构造出来的，另外14个是从这些网格的轨形构造得到（如果包括权为1 的齐次子空间是0的月光模则是15个）。Schellekens 还给出了另外两个，但当时数学上这两个顶点算子代数还没有严格的构造。从数学上来说，Schellekens 的分类（即只有这70个）只是一个猜想。事实上，就连从这样的顶点算子代数中权为1的子空间得到的李代数只有Schellekens列出的70个在当时也只是一个猜想。

如果Frenkel-Lepowsky-Meurman的月光模顶点算子代数唯一性猜想和Schellekens的分类猜想都被证明了，我们就得到了中心荷为24的亚纯有理共形场论的完整分类：总共有71个这样的亚纯有理共形场论，其中由它们的权为1的向量决定的有70个，其中权为1的齐次空间为0 的只有1个，那便是月光模顶点算子代数给出的亚纯有理共形场论。

2.7 早期结果和猜想所提出的数学问题

上面这些共形场论的早期结果和猜想提供了很多重要的数学问题。这里我们选择一些笔者认为是最基本的问题：

问题一 严格表述并证明Verlinde、Moore-Seiberg、Witten的猜想。

问题二 给出满足Kontsevich-Segal公理的共形场论的构造，或者至少给出满足这些公理的共形场论的存在性。作为特例，给出Wess-Zumino-Witten 模型和极小模型的构造，或至少证明他们的存在性。

问题三 发展共形场论的变形理论。研究共形场论的模空间。

问题四 构造以Calabi-Yau流形为目标空间的非线性西格玛模型。证明Gepner猜想。将Green和Plesser的工作变成数学理论，由此给出Calabi-Yau流形镜像对称的共形场论证明。

问题五 给出中心荷为24的亚纯有理共形场论的分类，包括证明Schellekens中心荷为24、由权为1的向量生成的亚纯有理共形场论的分类猜想和证明Frenkel-Lepowsky-Meurman的月光模唯一性猜想。

问题一已经解决。问题二已部分解决，未解决部分主要是和高亏格黎曼面有关的一个收敛性问题。问题三的研究还刚刚开始。问题四在Calabi-Yau流形为K3曲面情形下有一些进展，但在一般情形下连一些基本的构造都还不知道该怎样着手。问题五中的Schellekens分类猜想中的存在性部分已接近

解决，但唯一性部分还没有太多进展，Frenkel-Lepowsky-Meurman 的月光模唯一性猜想还没有任何实质性的结果。我们将在下一节和第四节中更详细地讨论这些问题的现状。

3 一个长期研究纲领和已经解决的主要问题

共形场论的数学构造和研究有各种数学方法，但都可以归类为两种方法中的一种。一种方法是顶点算子代数表示理论方法。另一种是共形网方法。关于共形网方法的介绍，笔者推荐Kawahigashi的综述文章[Ka]（其中也有关于顶点算子代数表示理论方法的一个综述）。本文只介绍顶点算子代数表示理论的方法。两种方法各有优势。虽然已有两种方法等价性的研究（比如Carpi、Kawahigashi、Longo和Weiner的工作[CKLW]），但目前还没有满意的等价性定理。

本节讨论介绍一个用顶点算子代数表示理论构造共形场论的长期研究纲领，并且讨论在这个纲领中已经解决的主要问题。第一种方法和第二种方法的等价性将作为一个主要的问题在下一节中给出。

3.1 一个构造和研究共形场论的长期纲领

在上面描述有理共形场论时，我们已经引进了一个共形场论的手征代数。这是由共形场论中所有亚纯场构成的代数。如果共形场论的构造还没有，我们就不能这样来引进手征代数。但我们可以看一下在一个共形场论存在的假定下，它的亚纯场有什么性质。然后用这些性质来定义手征代数。这就是Belavin、Polyakov和Zamolodchikov在他们那篇对以后发展影响巨大的共形场论文章[BPZ] 中的方法。数学上Borcherds [Bo1] 最早基于顶点算子性质和Frenkel-Lepowsky-Meurman 的月光模构造引进了顶点代数的概念。一个更适合于用来构造共形场论的代数结构是Frenkel-Lepowsky-Meurman加了更强条件之后定义的顶点算子代数[FLM]。顶点算子代数等价于一个共形场论的手征代数，但顶点算子代数的定义不依赖于一个已经假定存在了的共形场论。

限于篇幅，和有理共形场论一样，我们不给出顶点算子代数完整和严格的定义，只是给出一个大致的描述。一个顶点算子代数是一个$\mathbb{Z}$阶化向量空间$V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$，并赋予了一个顶点算子映照

$$\begin{aligned} Y_V:(V\otimes V)\times\mathbb{C}^\times &\to \overline{V}=\prod_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}\\ (u\otimes v,z) &\mapsto Y_V(u,z)v, \end{aligned}$$

一个真空元素$\mathbf{1}$和一个共形元素ω，满足一些基本公理，其中最重要的公理是顶点算子的（亚纯）算子乘积展开，或者叫顶点算子的结合律：给定$u,v\in V$,

$$Y_V(u,z_1)Y_V(v,z_2)=Y_V(Y_V(u,z_1-z_2)v,z_2)$$

在区域$|z_1|>|z_2|>|z_1-z_2|>0$内成立。真空元素$\mathbf{1}$满足类似于结合代数中恒等元的性质，而共形元素ω则给了V一个Virasoro代数表示的结构。顶点算子代数的模是一个$\mathbb{C}$阶化向量空间$W=\coprod_{n\in\mathbb{C}}W_{(n)}$和一个顶点算子映照$Y_W:(V\otimes W)\times\mathbb{C}^\times\to\overline{W}=\prod_{n\in\mathbb{C}}W_{(n)}$ 满足所有对W和Y_W仍然有意义的那些顶点算子代数V的性质。比如Y_W仍然要满足（亚纯）算子乘积展开公式或者结合律。

本文主要讨论的是一个从顶点算子代数表示理论出发构造和研究共形场论的长期研究纲领。这个纲领的第一部分是用顶点算子代数的表示理论来构造共形场论[Hu3] [Hu7] [Hu8]。第二部分是用顶点算子代数的上同调和变形理论[Hu20] [Hu21] 来研究共形场论的模空间。

到目前为止，除了一些高亏格黎曼面上的猜想仍然需要证明之外，有理共形场论的构造已经基本上从顶点算子代数表示理论得到了。这已经证明了这个研究纲领的可行性。我们相信非有理共形

场论也可以用这个方法去构造。

顶点算子代数的上同调理论和变形理论已经开始发展起来。虽然还有大量的问题要解决，尤其是一些和收敛性有关的问题，我们相信这些理论可以用来给出共形场论模空间的一些基本性质和结构。

在这一节其它的篇幅中，我们讨论这个纲领中已经解决的主要问题和猜想。

3.2 顶点算子代数的几何

我们上面已经大致描述了顶点算子代数。数学上顶点算子代数的定义最开始是用纯代数性质定义的。纯代数定义的好处是可以用纯代数的方法构造顶点算子代数和它们的模，不需要考虑收敛性等量子场论研究中通常会遇到的困难。

从Heisenberg代数、网格（lattice），仿射李代数、Virasoro代数、Clifford代数、超共形代数的模构造出来的顶点算子代数和它们的模是最熟悉的一些例子（参见例如[FLM], [FZ], [FFR], [KW]）。一个最有名的顶点算子代数例子是Frenkel-Lepowsky-Meurman构造的月光模顶点算子代数[FLM]，它的自同构群是单纯有限群分类中最大的例外群魔群（Monster)。

要从顶点算子代数的表示理论构造和研究共形场论，首先要证明用纯代数性质定义的顶点算子代数满足共形场论中亚纯场全体满足的所有性质，尤其是和球面的几何性质以及和共形反常有关的性质。

这些顶点算子代数几何性质的研究可以归结为如下的问题：找出一个顶点算子代数的几何定义并证明这个几何定义和代数定义是等价的。

这个问题由笔者在上世纪九十年代初解决。1990年笔者在博士论文[Hu1] 中给出了一个顶点算子代数的几何定义并证明了这个定义和代数定义的等价性。但[Hu1]并没有给出共形反常或中心荷（central charge）完整的几何定义。1991年笔者在[Hu2]中给出了顶点算子代数完整的几何定义。最后笔者在1997年出版的研究专著[Hu8] 中给出了所有的细节及证明。笔者的几何定义将顶点算子代数定义为从带结构的黎曼球的模空间赋予了一个缝纫运算而得到的代数结构的线性射影表示。

更详细地描述的话，我们需要考虑带有限个针孔点(punctures) 和在针孔点为零的局部复坐标的黎曼球（亏格为零的连通紧致黎曼面）。带有这样结构的黎曼球的共形等价类构成一个模空间，这个模空间上有一个行列式解析线丛。对任何一个复数c，可以定义一个称为这个行列式线丛的$\frac{c}{2}$次方的解析线丛。在这个解析线丛上可以定义缝纫运算（sewing operation）。这个解析线丛加上缝纫运算构成了一个部分运算体（partial operad）。对任何运算体（operad，包括部分运算体），都有在这个运算体上代数的概念。对上面的部分运算体，我们还有亚纯代数的概念。大致来说，顶点算子代数的几何定义将一个中心荷为$c \in \mathbb{C}$ 的顶点算子代数定义为上述部分运算体上的亚纯代数。

这个工作的主要定理说这个几何定义和顶点算子代数的代数定义是等价的。这个定理证明的主要难点是要证明一些从顶点算子和Virasoro代数算子得到形式级数是某些从黎曼球和行列式线丛得到的解析函数的展开。这个证明要用到复流形变形理论中Fischer和Grauert的一个定理和行列式线丛缝纫运算的解析性。

3.3 交错算子和顶点张量范畴

顶点算子代数的几何定义说明顶点算子代数大致上是亏格为零的黎曼面构成的代数结构的线性射影表示。很自然地我们会试图用顶点算子代数来构造共形场论。首先我们希望用顶点算子代数构

造对应于亏格为一的黎曼面的映照或相关函数。从共形场论的定义，我们知道这样的结构如果存在，在最简单的情形下就是顶点算子代数的阶化维数或真空特征。亏格为一的黎曼面由上半复平面模掉$SL(2,\mathbb{Z})$所得到的空间里的元素决定。构造对应于这些黎曼面的结构需要证明模不变性（即在模变换群$SL(2,\mathbb{Z})$作用下的不变性）。

顶点算子代数的阶化维数一般不是模不变的。对于从仿射李代数或Virasoro代数的模构造出来的顶点算子代数，我们需要将这个顶点算子代数所有的模的阶化维数放在一起才能得到一个在$SL(2,\mathbb{Z})$下不变的向量空间。这些例子说明要得到模不变性，我们必须考虑顶点算子代数所有的模，不只是顶点算子代数本身。

因为要考虑顶点算子代数的模，我们就要研究模之间的映照，而不只是顶点算子代数的顶点算子映照。这些模之间的映照Moore和Seiberg [MS2] 称之为手征顶点算子（chiral vertex operator），而Frenkel、Lepowsky和笔者[FHL] 称之为交错算子（intertwining operator）。

顶点算子代数最重要的性质是算子乘积展开或结合律。对交错算子也一样。我们前面提到，手征顶点算子或交错算子的算子乘积展开是Moore和Seiberg工作[MS2] 中两大重要假定之一，是Moore-Seiberg猜想之一。

Moore和Seiberg [MS2] 的另一个重要发现是他们所得到的多项式方程和张量范畴极为相似。如前所述，这些多项式方程是从他们关于手征顶点算子也就是交错算子的猜想而推导得到的。显然，要把Moore和Seiberg关于张量范畴的发现变成数学构造和定理，我们必须证明关于交错算子的Moore-Seiberg猜想。

交错算子一般来说是复变量的多值函数。所有交错算子全体构成一个向量空间。通常用来研究顶点算子代数和模的纯代数方法一般来说无法使用，必须发展新的方法。

1991年，Lepowsky和笔者[HL1] 在一些自然的有限可约性条件下，用交错算子构造了顶点算子代数模的张量积。完整的构造和证明[HL2] [HL3] [HL4] 在1995年发表。1994年，基于这个张量积构造和笔者1995年发表的张量积结合律（[Hu4], 见下面的讨论），Lepowsky和笔者[HL5]引进了顶点张量范畴的概念，并宣布了满足适当条件的顶点算子代数的模范畴是一个顶点张量范畴的结果。同一篇文章中也说明了怎样从一个顶点张量范畴得到辫化张量范畴，从而也宣布了满足适当条件的顶点算子代数的模范畴是一个辫化张量范畴的结果。

1995年，笔者[Hu4] 证明了在满足一个有限可约条件和一个收敛和延拓性质的情况下，交错算子的结合律成立。笔者也证明了交错算子的结合律等价于Lepowsky和笔者所构造的张量积双函子的结合律同构的存在性，由此很容易得到1994年在[HL5]中已经宣布的顶点张量范畴结构和辫化张量范畴结构的详细构造。同一年，对从Virasoro代数表示构造出来的极小模型中的交错算子，笔者[Hu6] 证明了它们的结合律。用这个工作，笔者[Hu5](也参见[Hu23])得到了月光模顶点算子代数的另一个构造。1997年，对从仿射李代数表示构造出来的Wess-Zumino-Witten模型中的交错算子，Lepowsky和笔者[HL6] 证明了它们的结合律。1999年和2000年，对从$N=1$和$N=2$超共形代数表示构造出来的超共形极小模型中的交错算子，Milas和笔者[HM1] [HM2] 证明了它们的结合律。

2002年，笔者[Hu11] 完全解决了这个问题。笔者证明了如果顶点算子代数的模都满足一个叫C_1-余有限性的条件、完全可约性条件和其他一些纯代数的自然条件，上面所提到的收敛和延拓性质成立，从而交错算子的结合律成立。这个证明的主要想法是用C_1-余有限性条件证明交错算子的乘积满足带正规奇点的微分方程，用这一类微分方程的一般理论便可证明收敛和延拓性质。上面所提到的几个模型，都可以用这个定理得到交错算子的结合律。这个结果也证明了在这些条件下，顶点算子代数模范畴有自然的顶点张量范畴和辫化张量范畴结构。

上面的结果都假定顶点算子代数的模（甚至更一般的模）是完全可约的。物理中把顶点算子代数模不一定都可约的共形场论称为对数共形场论，在很多物理现象的描写中都有应用。数学上模完全可约是一个非常强的假设，而且即使要验证这个假设，也必须先研究事先并不能假定是完全可约的模。

对数共形场论是近年来很活跃的研究领域，物理上它们起源于1991年Rozansky和Saleur [RS] 对超李群上的Wess-Zumino-Witten模型和1993年Gurarie [Gu] 对无序现象的研究。用一般的顶点算子代数表示理论研究对数共形场论则是从2001年Milas的工作[Mil] 开始的。在这一时期，物理学家和数学家已经构造并研究了一些顶点算子代数的例子和它们的模，并且研究了这些模之间的对数交错算子。要完全构造出对数共形场论，除了对应的顶点算子代数、它们的模以及单个的对数交错算子外，我们必须证明对数交错算子的算子乘积展开或结合律。我们也需要构造出包括不完全可约模在内的顶点算子代数模范畴的张量范畴结构。

从2001年起，Lepowsky、张林和笔者便开始将前面讨论过的在完全可约条件下的理论推广到对数共形场论。2003年，宣布这个推广的文章[HLZ1] 首先在预印本网站贴出。在一些自然的假定下，最一般的理论和详细证明在2010 年至2011 年的一系列文章[HLZ2]–[HLZ9] 中完整给出。主要结果一是证明了对数交错算子的结合律（或者叫对数算子乘积展开），二是给出了顶点张量范畴以及辫化张量范畴的构造。这些理论中的假定虽然自然，它们的证明也常常是相当困难的。笔者[Hu17] 在2007年证明了如果假定代数和模都满足C_1-余有限性的条件，并同时假定不可约模最低权之差是有界的，便可证明上面工作中的那些自然假定成立。这些条件通常都不难验证。比如对三重$\mathcal{W}$代数和其他一些代数都可以验证满足这些条件，从而对这些代数的对数交错算子，对数算子乘积展开成立，同时在这些代数的模范畴上有顶点张量范畴和辫化张量范畴的结构。

3.4 模不变性

在2.3节中，我们讨论了Moore-Seiberg猜想。其中一个重要猜想是对于有理共形场论，手征顶点算子（或交错算子）的算子乘积展开成立。从3.3节我们知道这个猜想已经完全解决。Moore-Seiberg的另一个重要猜想是模不变性。这个猜想说手征顶点算子（即交错算子）的乘积取适当的迹（所谓的q-迹）给出环面上所有的相关函数，从而给出了环面上所有的共形块。

从Moore和Seiberg的工作[MS1] [MS2] 已经可以看到，这个猜想至为重要。很多后来得到的重要结果，都依赖于这个猜想的彻底解决。特别要注意到的是，即使对Wess-Zumino-Witten模型和极小模型的模不变性，在最后对一般情况彻底解决这个猜想之前，也一直未被证明。

要证明这个猜想要做两件事情。因为顶点算子代数的模一般都是无限维的，所以首先要证明交错算子的乘积的q-迹在适当区域里是收敛的。其次要证明这些收敛的q-迹所构成的空间在模变换下是不变的，也就是说这些收敛的q-迹全体生成一个$SL(2,\mathbb{Z})$的表示。

1990年，朱永昌在他重要的博士论文[Z1] 中证明了这个猜想的一个特殊情况。修改后的论文[Z2] 在1997年发表。朱永昌假定所考虑的顶点算子代数不存在负共形权的元素，某一类弱模都是完全可约的，同时假定这个顶点算子代数满足一个叫C_2-余有限性的条件。朱永昌的论文也假定了顶点算子代数可以分解成为Virasoro代数最低权模的直和，但这个条件后来被董崇英、李海生和Mason [DLM2] 去掉了。对一个顶点算子代数的模，除了有一个阶化向量空间外，还有一个顶点算子映照。这个顶点算子映照是交错算子的特例。朱永昌考虑了这些特殊交错算子乘积的q-迹，证明了它们在适当区域里的收敛性，并证明了这些特殊交错算子的q-迹构成的空间是模不变的。

朱永昌的定理的一个推论是一个对Wess-Zumino-Witten模型和极小模型已经通过直接计算得到的结果，即所有顶点算子代数不可约模的阶化维数生成一个模不变的向量空间。于是我们得到了

在Verlinde猜想和Verlinde 公式中需要用的矩阵S。但要证明Verlinde猜想和公式，从Moore和Seiberg的工作[MS2] 可以看出，朱永昌的定理作为Moore-Seiberg猜想的一个特殊情况是远远不够的，因为朱永昌定理中的交错算子只是模的顶点算子映照，不是一般的交错算子，因此无法得到模变换和一般交错算子空间的维数（等于融合规则）的关系（即Verlinde 猜想和公式）。

一种试图证明Moore-Seiberg 猜想的思路是直接推广朱永昌的方法。对一个一般的交错算子和任意个模的顶点算子映照的乘积的q-迹，朱永昌的证明可以基本上照搬。这个推广的细节由Miyamoto [Miy1] 给出，他将朱永昌的证明用在这个稍微广一些的情形下，证明了这些q-迹在同样的区域里收敛，而且所生成的空间是模不变的。另外，董崇英、李海生和Mason [DLM2] 也用同样的方法将朱永昌定理推广到了顶点算子代数有限阶自同构的扭曲模。

然而，朱永昌的方法只适用于这些特殊情况，无法用来证明原来的Moore-Seiberg 模不变性猜想。无法用的原因是朱永昌方法中有一步是用模的顶点算子映照的交换关系推出一个递推关系，将关于n个顶点算子映照的乘积的q-迹的问题化为关于$n-1$个这样映照的乘积的q-迹的问题。问题就出在对于一般的交错算子而言，这样的交换关系不存在。

朱永昌的方法无法使用是Moore-Seiberg模不变性猜想在朱永昌定理证明之后十多年之内没有实质进展的主要原因。要证明Moore-Seiberg模不变性猜想，必须发展新方法。

2003年，笔者[Hu12] 在和朱永昌定理大致相同（稍微弱一些）的条件下证明了Moore-Seiberg模不变性猜想。作为具体例子，对Wess-Zumino-Witten模型和极小模型，Moore-Seiberg模不变性猜想成立，

这个证明能成功关键是使用了交错算子的结合律和一个新方法。和朱永昌用交换关系得到递推关系不同，这个新方法先证明这些q-迹作为形式级数满足具正规奇点的微分方程，从而证明这些级数的收敛性。然后用交错算子的结合律（或算子乘积展开）证明这些收敛级数满足亏格为1黎曼面上的结合律（或亏格为1 黎曼面上的算子乘积展开）。再用这个亏格为1黎曼面上的结合律将n个交错算子的乘积的收敛q-迹表示为$n-1$个交错算子的乘积的收敛q-迹，最后化为单个交错算子的收敛q-迹。然后用朱永昌定理和Miyamoto在一个交错算子情形下的推广便得到了模不变性。

2002年，Miyamoto [Miy2] 将朱永昌的模不变性定理推广到了顶点算子代数的模不一定完全可约的情况，但还要加上一个所有不可约模都是无限维的条件。最后这个条件在中心荷不为0 的情况下一定满足。这个推广应该看成是对数共形场论里模不变性的一个特殊情况。对数共形场论的一般模不变性应该是对数交错算子的模不变性。笔者猜想对数交错算子的模不变性在同样的条件下成立。2015年，在他的博士论文[Fio1] 中，Fiordalisi取得了关于这个猜想的主要进展。这个猜想的详细证明在[Fio2]以及Fiordalisi和笔者正在撰写的文章[FH] 中给出。

3.5 Verlinde公式、刚性和模性性质

2004年，笔者[Hu15] 用交错算子的结合律和交错算子的模不变性证明了Verlinde 猜想和Verlinde公式。这个结果除了模不变性定理中所需的非负共形权条件、完全可约性条件和C_2-余有限性条件之外，还要求顶点算子代数权为0的子空间是由真空张成的一维空间，并且假定顶点算子代数上非退化不变双线性形式的存在性。这些条件是一个有理共形场论的手征代数必须满足的性质。

这个工作首先证明了一些Moore-Seiberg多项式方程对满足这些条件的顶点算子代数成立，然后用线性代数便可得到Verlinde猜想和Verlinde公式。在证明Moore-Seiberg多项式方程时所发展的理论作为比Verlinde猜想和Verlinde公式更强有力的方法和工具在顶点算子代数模范畴上张量范畴结构的刚性和模性性质的证明中扮演重要角色。

前面已经讨论过，对一个满足适当性质的顶点算子代数，用交错算子以及它们的结合律，我们已经得到了它的模范畴上的顶点张量范畴和辫化张量范畴结构的数学构造。要证明Moore-Seiberg模性张量范畴猜想，还要证明刚性和非退化性质。除此以外，还需要证明模性张量范畴从最简单的链环得到的S矩阵和模不变性定理中对应于模变换$\tau \mapsto -1/\tau$的S矩阵是相等的。显然，最后一个性质成立的话，非退化性质是一个马上得到的推论。我们把后一个性质称为这些辫化张量范畴的模性性质。

这些关于刚性和模性性质的猜想如果从Moore-Seiberg的文章算起，大约有十七年一直悬而未决。很多数学家开始认为这两个性质应该是简单的推论。但一直到2005年之前，即使是对研究得最多的Wess-Zumino-Witten模型，所对应的张量范畴的刚性也还没有一个完整证明。

2005年，笔者[Hu16] 用在Verlinde公式证明中得到的公式，证明了刚性和模性性质猜想。这个定理要求顶点算子代数满足和Verlinde公式证明中所需要的同样的条件。这个定理完成了模性张量范畴的构造。笔者在2005年的两篇文章[Hu13] 和[Hu14] 中，宣布并介绍了Verlinde猜想、Verlinde公式的证明和模性张量范畴的构造。

结合在[Hu16] 中给出的模性张量范畴的构造和Turaev [Tu1] 从模性张量范畴构造扭结和三维流形不变量的结果，我们便从满足上面构造定理中条件的顶点算子代数的模范畴构造了扭结和三维流形不变量，解决了2.4节中讨论的Witten在1989年的猜想，即可以从有理共形场论构造出扭结和三维流形不变量。

如上所述，在刚性猜想的证明中，要用到在Verlinde公式证明中得到的一些公式。这些公式在逻辑上都依赖于模不变性定理。这一点是非常出乎意料的，因为刚性看起来似乎是一个只和亏格为0的黎曼面有关的性质，而模不变性则是一个和亏格为1的黎曼面有关的性质。

很多年以来，在一些广泛传播的文章、报告甚至教科书中，都声称对Wess-Zumino-Witten 模型，辫化张量范畴的刚性和模性质早已被证明，而且对一般的有理共形场论，证明也是一样的。近年来，人们才发现这些声称其实是错误的。目前已有共识，以前声称的证明并不存在。

这里特别要讨论一下Wess-Zumino-Witten模型的辫化张量范畴的刚性。对这个模型，最早Finkelberg 1993年在他的博士论文[Fin1] 和修改之后1996年发表的文章[Fin2] 中声称Beilinson、Feigin、Mazur在一篇至今尚未发表的手稿[BFM] 中已经证明了辫子张量范畴的刚性。而他的工作则用Kazhdan和Lusztig [KL1]–[KL5]在非半单情形下的等价性定理证明了这个刚性辫子张量范畴和对应的量子群模范畴的一个半单子商范畴是等价的。这个等价性的一个推论是Verlinde公式。但[BFM] 并没有给出刚性的证明，而且[BFM]中所用的方法也无法证明刚性。之后很多数学家认为Finkelberg修改后发表的博士论文可以看作是用量子群模范畴半单子商范畴上的刚性证明了Wess-Zumino-Witten模型的辫化张量范畴的刚性。如果这些工作的确证明了刚性，说明至少对Wess-Zumino-Witten模型，刚性和模不变性可能的确无关。但笔者在2012年发现Finkelberg的文章有一个漏洞。因为笔者发现漏洞时早已证明了Verlinde 公式和对应张量范畴的刚性，笔者用这些结果补上了这些漏洞。在笔者通过Ostrik 告知Finkelberg这个漏洞之后，Finkelberg [Fin3] 也用Faltings [Fa] 和Teleman [Te] 证明的Wess-Zumino-Witten模型的Verlinde公式补上了这一漏洞。注意到Verlinde公式和模不变性有关，所以补上漏洞之后的证明再次说明了即使在这个特殊情况下，刚性也依赖于模不变性。

虽然Finkelberg文章中的漏洞补上了，但Finkelberg的等价性定理因为Kazhdan-Lusztig工作中刚性性质的限制，在几个例外情况下仍然没有证明，其中包括李代数为E_8, 水平为2的重要例子。对这些例外情况，即使补上了漏洞，Finkelberg的工作仍然无法提供刚性的证明，仅有的刚性的证明由[Hu16] 给出。

3.6 全共形场论和开-闭共形场论

到目前为止，我们讨论的结果都是关于手征共形场论的，也就是关于可能是一个共形场论的解析或反解析部分的。为了区分手征共形场论和共形场论，我们将满足Kontsevich-Segal 定义的共形场论称为全共形场论。构造共形场论不单要构造手征共形场论，还要构造全共形场论。更重要的是，一些物理学家得到的猜想，比如关于Calabi-Yau流形的性质、镜像对称、量子上同调等，都需要全共形场论，只用手征共形场论无法得到这些猜想。

要构造全共形场论，我们必须将手征共形场论和反手征共形场论（即将手征共形场论中的黎曼面或复变量用它们的共轭来取代得到的场论）适当地拼起来得到全共形场论。从Kontsevich-Segal的定义可以看到，全共形场论中对应于黎曼面的映照都必须是单值的。而上面讨论的交错算子结合律和模不变性给出了对应于亏格为0和1的黎曼面的映照，但因为交错算子一般是多值的，这些映照也是多值的。因为要从多值的映照构造出单值的映照，所以从手征共形场论和反手征共形场论构造全共形场论是非常难的问题。

2005年，孔良和笔者[HK2] 构造了亏格为0黎曼面上的全共形场论。2006年，孔良和笔者[HK3] 又构造了亏格为1黎曼面上的全共形场论。在这两个构造中，主要的工作是在交错算子的空间上构造一个非退化双线性形式，而其中主要的难度在于证明所得到的双线性形式是非退化的。

我们回顾一下2.4节关于Wess-Zumino-Witten模型的解析反解析分解问题的讨论。Witten的工作基于一个厄米形式非退化性的假定。这个厄米形式的非退化性等价于上面所讨论的双线性形式的非退化性。因此，上面所说的构造全共形场论的工作的一个推论就是这个厄米形式的非退化性，从而解决了另一个早期共形场论研究中的问题。

这个双线性形式非退化性的证明是另一个出乎我们意料的地方。这个双线性形式是定义在交错算子的空间上的，而交错算子是对应于亏格1黎曼面的。但这个双线性形式的非退化性证明却要用到笔者在证明Verlinde公式时得到的一个公式，而这个公式和Verlinde 公式的证明都依赖于交错算子的模不变性。让我们惊讶的是，一个定义在对应于亏格0 黎曼面的空间上的双线性形式的非退化性居然要用对应于亏格1黎曼面的结构来证明。

这个非退化性其实等价于手征共形场论所对应的张量范畴的刚性。这是另一个为什么这个刚性的证明需要用到模不变性而且那么困难的原因。这些都说明了可能有一个非常深刻的原理，还需要进一步的研究。

到现在为止，所有的讨论（包括共形场论的定义）都是关于闭共形场论的。闭共形场论对应于闭弦的微扰理论，所以这些理论中黎曼面的边界连通分量都对应于闭弦。但弦论一般情况下也应包括开弦，而有开弦的理论里一定也包含闭弦，所以我们也要构造描写开弦和闭弦的共形场论，称为开-闭共形场论。共形场论也可以用来描写二维物理现象。当所描写的物理现象牵涉到二维物体的边界时，我们需要最早由Cardy开始研究的边界共形场论[C1] [C2] [C3]。边界共形场论等价于开-闭共形场论。这是另一个要构造开- 闭共形场论的原因。

2004年，孔良和笔者[HK1] 用交错算子构造了开弦顶点算子代数。开弦顶点算子代数的模对应于弦论中物理学家发现的重要的D-膜。2006年，孔良[Ko1] [Ko2] 进一步研究了由开弦顶点算子代数和全共形场论满足适当条件构成的开-闭共形场论的张量范畴以及几何描述。在开-闭共形场论中，联接开共形场和闭共形场的是由Cardy首先发现的Cardy条件[C3]。孔良[Ko3]也用顶点算子代数模范畴上的模性张量范畴结构研究了Cardy条件。

3.7 上同调和变形理论

要研究共形场论的模空间，必须发展共形场论的变形理论。因为共形场论可以从顶点算子代数的表示出发去构造，我们首先需要一个顶点算子代数的变形理论。和结合代数、李代数以及其他代数类似，要发展顶点算子代数的变形理论和研究顶点算子代数的结构和表示理论，需要一个顶点算子代数的上同调理论。

早在上世纪九十年代初，就有关于顶点算子代数上同调理论的建议。可惜的是，这些建议并不给出顶点算子代数的上同调理论，因为它们不满足一个代数的上同调理论所必须满足的基本性质，比如一阶变形和上同调之间的关系。

顶点算子代数包含两部分结构，第一部分由顶点算子映照给出，第二部分由Virasoro表示结构给出。Virasoro表示结构的变形可以用Virasoro代数的表示理论来研究，而顶点算子映照给出的结构的变形则是之前一直研究得不够的。去掉顶点算子代数定义中的共形元素之后剩下的代数结构称为阶限制顶点代数。我们需要的是阶限制顶点代数的上同调和变形理论。

2010年，笔者[Hu20] [Hu21] 引进了阶限制顶点代数的上同调理论，并证明了这个上同调理论具有上同调理论所必需有的基本性质。这个上同调理论主要克服的困难是怎样处理阶限制顶点代数相较于结合代数和李代数等经典代数所特有的、和有理函数有关的性质。克服这一困难的新想法是用从代数的张量积到取值于模的代数完备化空间的有理函数空间的映照全体来构造上同调，而不是像经典代数理论里用从代数的张量积到模的映照全体来构造。

在同一个工作中，笔者证明了阶限制顶点代数的一阶变形对应于系数在代数中的二阶上同调。2011年，笔者基于大量的计算证明了阶限制顶点代数的形式变形的障碍是三阶上同调和一个这个上同调理论特有的收敛性。这个工作计算量很大，笔者希望在引进一些新概念和方法之后能减少计算量，所以此工作尚未发表。

Wess-Zumino-Witten模型、极小模型和其他一些理论都可以看作是先从经典理论的顶点算子代数经过变形和其他一些运算得到顶点算子代数，然后用对应的表示理论通过我们描述的构造而得到。上面的定理说明了这些变形都是由相应的经典理论的顶点算子代数的二阶上同调里面的元素决定的。

2015年，齐飞和笔者[HQ] 在一个收敛性假设下，证明了任意系数一阶上同调为0的阶限制顶点代数的阶限制的有限长度广义模都是完全可约的。虽然收敛性假设还需要证明，这个结果给出了判定完全可约性的一个新方法。

3.8 顶点算子代数的扭曲模和不动点子代数

轨形（orbifold）共形场论在共形场论的构造和应用中扮演重要的角色。Frenkel、Lepowsky和Meurman [FLM] 构造的月光模顶点算子代数是轨形共形场论构造的第一个例子。在物理学家关于镜像对称猜想的研究中，基于轨形共形场论的猜想是一个重要的方法。在3.9节中将要讨论的关于分类猜想的工作中，关于轨形共形场论的结果和猜想也是一个主要的工具。

研究轨形共形场论首先要研究顶点算子代数的扭曲模。关于有限阶自同构的扭曲模最早出现在Frenkel-Lepowsky-Meurman [FLM] 和Lepowsky [Le] 关于扭曲顶点算子的工作中。这些工作给出了网格顶点算子代数关于有限阶自同构的扭曲模。月光模顶点算子代数的构造便用到了这样的扭曲模。

董崇英、李海生和Mason [DLM1] [DLM2] 研究了满足一些基本条件的顶点算子代数关于有限阶自同构的扭曲模。他们在C_2-余有限性条件和一些其他次要的条件下证明了这样的扭曲模的存在性。他们也证明了在这些条件下这样的扭曲模的一个模不变性定理。

对一个顶点算子代数和这个代数的一个无限阶自同构，上面这些关于有限阶自同构的扭曲模的定义和结果都不再有效或成立。2009年，笔者[Hu19] 引进了顶点算子代数关于任意阶自同构的扭曲

模的定义，并给出了一些例子，包括一些从三重$\mathcal{W}$代数构造的例子。在这个无限阶情形下，出乎意料的是，如果所考虑的自同构在顶点算子代数上的作用不是半单的，扭曲顶点算子不只有变量的非整数幂次，还有变量的对数的非负整数次幂。这个重要性质使得在这个情况下的扭曲模的研究要比有限阶自同构的情况难很多。因为扭曲顶点算子包含变量的对数，必须用解析延拓来描写这些算子的性质，笔者给出的扭曲模的定义由交换律、结合律和一些次要的性质给出。2015 年，Bakalov [Ba] 用扭曲顶点算子看作是变量的对数的多项式时的常数项算子来描写扭曲模，得到了扭曲模的一个纯代数定义。最近，杨进伟和笔者[HY] 系统研究了这些最一般的扭曲模，希望将来能用所得到的结果来构造轨形共形场论，尤其是对数轨形共形场论。

要研究扭曲模的表示理论，需要先研究顶点算子代数在一个自同构群的子群作用下的不动点子代数的性质。Miyamoto在2013年[Miy4]证明了如果一个顶点算子代数是C_2-余有限的，那么这个代数在一个有限阶自同构作用下的不动点子代数也是C_2-余有限的。2016年，Carnahan和Miyamoto[CM]证明了如果一个顶点算子代数的弱模（weak module）都是完全可约的，则在一个有限阶自同构作用下的不动点子代数的弱模也都是完全可约的。第二个结果的证明要用到笔者在证明交错算子模不变性的文章[Hu12] 和证明Verlinde猜想的文章[Hu15]中得到的结果和发展的方法，以及Lepowsky、张林和笔者[HLZ1]–[HLZ9]关于对数交错算子和相应的辫子张量范畴理论。这两个关于不动点子代数的结果使得前面那些需要C_2-余有限性和某些广义模完全可约性条件的定理都可以用到这些不动点子代数的模之间的交错算子以及这些模构成的范畴上去。最近Carnahan宣布用所有这些结果以及下面要讨论的van Ekeren、Möller和Scheithauer的工作等，他证明了Norton的广义月光猜想，推广了Borcherds[Bo2]证明的月光猜想。这些新结果都再一次说明了共形场论的顶点算子代数表示理论方法的重要性。

3.9 关于Schellekens分类猜想的研究进展

在中心荷为24的亚纯有理共形场论的分类猜想中，Schellekens分类猜想中的存在性部分已经有一些重要进展。其中一些重要结果不只是纯粹技术性的计算，也要用到前面所讨论过的一些深刻的定理。

Schellekens分类猜想分两部分，一部分是将Schellekens所列出的70个顶点算子代数都构造出来，另一部分则是证明只有70个这样的顶点算子代数。

近年来，Lam [La]、Lam-Shimakura [LS1] [LS2] [LS3]、Miyamoto [Miy3]、Shimakura-Sagaki [SS]、van Ekeren-Möller-Scheithauer [EMS] 给出了Schellekens所列出的70个顶点算子代数中68个的构造。在[EMS]中，van Ekeren、Möller和Scheithauer还证明了这样一个顶点算子代数权为1 的子空间构成的李代数只能是Schellekens所列出的70个中的一个。van Ekeren、Möller和Scheithauer的工作用到了3.5节中讨论的Verlinde公式和模性张量范畴结构。

分类猜想中的唯一性部分，包括由权为1齐次子空间非零、中心荷为24的亚纯有理共形场论只有Schellekens 列出的70个的猜想和Frenkel-Lepowsky-Meurman的月光模唯一性猜想，还没有实质性的进展。

4 有待解决的问题和猜想

虽然在非拓扑量子场论中，共形场论在数学上是我们了解得最多的，但有待解决的问题和猜想和已经解决的相比还是要多得多。总的来说，一个数学理论都需要解决包括存在性、分类和在其它数学

分支和其它学科中应用在内的问题。对于共形场论而言，虽然在有理共形场论的情况下有了亏格0和亏格1理论的构造，但因为高亏格的理论仍然有一个重要的收敛性问题尚未解决，目前连存在性问题都还没有彻底解决。

这一节笔者选取讨论一些公认的和一些笔者本人认为重要的有待解决的问题和猜想。笔者希望通过强调这些问题的重要性来推动共形场论的数学研究。

2015年8月15和17日在University of Notre Dame举行的会议Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics上，笔者主持讨论顶点算子代数和共形场论中未解决的问题。为此笔者准备了幻灯片，列出了一系列问题。本节从基于这些幻灯片而写的英文文章翻译之后改写而成。英文文章[Hu22]会在上述会议的文集中发表。这一节应该看作是[Hu22] 的中文编译。

4.1 构造满足Kontsevich-Segal-Moore-Seiberg公理的有理共形场论

问题 4.1.1 给出满足Kontsevich-Segal-Moore-Seiberg公理的有理共形场论的构造，或者至少证明这样的有理共形场论的存在性。作为重要例子，给出Wess-Zumino-Witten模型和极小模型的构造或证明它们的存在性。

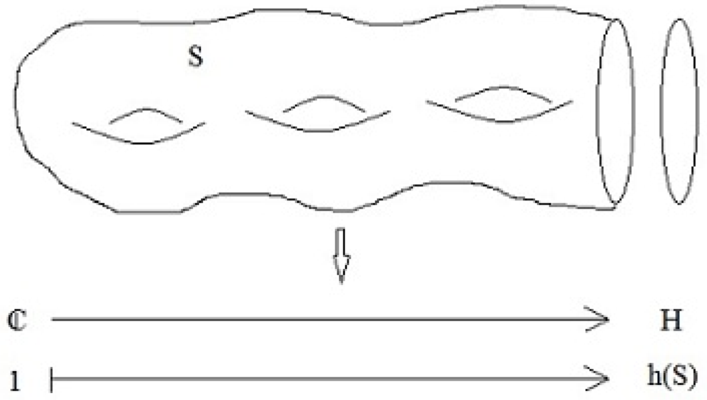
我们在上一节中已经讨论了有理共形场论的构造。目前有理全共形场论的亏格0和亏格1的相关函数已有构造并且已被证明满足应有的性质。但高亏格相关函数的构造还没有。另外，这些构造中得到的空间只是带非退化双线性或厄米形式的阶化空间，要得到完整的共形场论，必须构造出带非退化厄米形式的局部凸的完备拓扑向量空间。

高亏格相关函数的构造是主要没有解决的问题。从共形场论的公理可以知道如果共形场论的构造已经给出，那么高亏格相关函数可以展开成为用交错算子构成的级数。因为我们尚未构造出满足所有公理的共形场论，虽然用交错算子仍然可以写下这些级数，但我们并不能用共形场论的公理来推出这些级数的收敛性。如果能证明这些级数是收敛的，它们的和便给出了Teichmüller空间上的函数，然后用已经是定理的交错算子结合律和交错算子模不变性，便可证明这些Teichmüller空间上的函数给出了模空间上解析平坦向量从的平坦截面，即相关函数。所以高亏格相关函数的构造问题其实可以归结为这些级数的收敛性问题，这个收敛性问题是交错算子结合律定理和交错算子模不变性定理中的收敛性在高亏格情形下的推广。

问题 4.1.2 证明这些用交错算子构造高亏格相关函数所得到的级数的收敛性。

要证明这个收敛性，需要证明一些关于在带参数化边界黎曼面的无限维Teichmüller空间和模空间上某些函数的猜想。近几年来，Radnell，Schippers和Staubach [RS1]–[RS3] [RSW1]–[RSW5] 在这些Teichmüller 空间和模空间的研究上取得了重要进展。我们期待上面提到的关于无限维Teichmüller空间和模空间上某些函数的猜想会在不远的将来得到解决成为定理，从而可以用来证明高亏格相关函数构造中所需要的收敛性。

构造带非退化厄米形式的局部凸的拓扑向量空间和高亏格相关函数的构造有关。从Kontsevich-Segal公理可以看到，在一个共形场论中，一个带一个边界连通分量的黎曼面S对应于一个从复数域



到状态空间的映照。这样一个映照等价于一个在状态空间中的元素$h(S)$。于是我们看到，一个共形场论的状态空间一定包含对应于任意亏格黎曼面的元素，只有在构造出高亏格相关函数之后，我们才能完整了解共形场论状态空间的结构。上一节讨论的亏格0全共形场论也有一个阶化的状态空间，但这个空间只是由顶点算子代数的模的张量积和直和得到的，并不包含那些对应于高亏格黎曼面的元素。笔者在1998年[Hu9] 和2000 [Hu10] 年构造了顶点算子代数的局部凸拓扑完备化。如果有了高亏格相关函数的构造，可以将对应于高亏格黎曼面的元素用[Hu9]和[Hu10]中的方法加入亏格0全共形场论的阶化状态空间，从而构造出所需要的完备的状态空间，也即带非退化厄米形式的局部凸的完备拓扑向量空间。

如果亏格0全共形场论的阶化状态空间上有一个关于由交错算子得到的共形场不变的内积（我们称之为相容的内积），那么这个阶化状态空间也有一个Hilbert空间完备化。我们有如下的猜想：

猜想 4.1.3 如果亏格0全共形场论的阶化状态空间上有一个相容的内积，那么由加入高亏格元素得到的局部凸拓扑完备化和Hilbert空间完备化作为带阶化结构和非退化厄米形式的局部凸的完备拓扑向量空间是同构的。

4.2 阶限制顶点代数上同调理论和模的完全可约性

在表示论中，模的完全可约性是一个基本的问题。对结合代数，如果代数作为自己的模是完全可约的，则这个代数的模都是完全可约的，而且所有不可约模都出现在这个代数的不可约模直和分解中。但对顶点算子代数，即使作为自己的模是不可约的，一般情况下也还有很多其他的不可约模和不是完全可约的模。对于具体的顶点算子代数的例子，模的完全可约性的证明都是化为一些其他代数模的完全可约性或者一些其他性质来得到的，并不是从一个一般的、容易验证所需条件的完全可约性定理得到的。

一个结合代数是半单的（等价于所有模都完全可约）当且仅当这个代数以任何双模为系数的一阶Hochschild上同调都为0。对顶点算子代数，完全可约性和共形元素无关。所以我们只需要考虑阶限制顶点代数。另一方面，上面关于结合代数的完全可约性定理也同样适用于交换代数，并不需要将对应的上同调换成Harrison上同调，因为交换性和完全可约性无关。阶限制顶点代数也有一个交换律，也和模的完全可约性无关。所以如果有一个类似的完全可约性定理，应该是关于更一般的不一定满足交换律的代数。笔者在2012年[Hu22]引进了一种称为亚纯开弦顶点代数的概念，应该看作是阶限制

顶点代数的非交换推广。笔者2010年给出的阶限制顶点代数上同调构造其实分成两步，第一步是构造一个类似于Hochschild上链复形的上链复形，从这个上链复形也可以得到一个上同调。第二步是定义一个类似于Harrison上链复形的上述上链复形的子上链复形，这个子上链复形的上同调才是阶限制顶点代数的上同调。第一步中构造的上同调其实是不考虑阶限制顶点代数的交换律时的上同调，也就是将阶限制顶点代数当成是亚纯开弦顶点代数时的上同调。这一步中的上链复形和上同调都可以推广到亚纯开弦顶点代数，所以对这样的代数也有上同调。

如果将阶限制顶点代数类比于交换结合代数，那么亚纯开弦顶点代数就应该类比于结合代数。用同样的类比加上对阶限制顶点代数模的了解，我们便可得到如下的猜想：

猜想 4.2.1 一个亚纯开弦顶点代数所有的阶限制的有限长度广义模都是完全可约的，当且仅当它以任何双模为系数、阶大于1的上同调为0。特别地，一个阶限制顶点代数所有的阶限制的有限长度广义模都是完全可约的，当且仅当它作为一个亚纯开弦顶点代数以任何双模为系数、阶大于1的上同调为0。

2015年齐飞和笔者[HQ] 在假定了一个收敛性的条件下证明了当一个亚纯开弦顶点代数以任何双模为系数的一阶上同调为0时，它所有的阶限制的有限长度广义模都是完全可约的。上面的猜想也化为证明所假定的收敛性和证明当一个亚纯开弦顶点代数所有的阶限制的有限长度广义模都是完全可约时，它的阶大于1的上同调为0。

因为我们已经知道Wess-Zumino-Witten模型的顶点算子代数、极小模型的顶点算子代数、网格顶点算子代数和月光模顶点算子代数阶限制的有限长度广义模都是完全可约的，所以这个猜想成立的话，它们作为亚纯开弦顶点代数的所有上同调都为0。因此要加强上述猜想的可信度，应该先验证这些顶点算子代数作为亚纯开弦顶点代数的所有上同调都为0。但因为这些上同调的计算都牵涉到一个收敛性问题，所以证明这些上同调为0也是一个非平凡的问题。

猜想 4.2.2 Wess-Zumino-Witten模型的顶点算子代数、极小模型的顶点算子代数、网格顶点算子代数和月光模顶点算子代数作为亚纯开弦顶点代数的所有上同调都为0。

猜想4.2.1如果能证明的话，我们得到了一个用上同调来判定完全可约性的条件。而且如果只是用来判定完全可约性，上面所述[HQ]中的结果也说明这个条件可以简化为以任何双模为系数的一阶上同调为0。但这个条件要对所有双模成立，仍然不容易验证。我们希望的是这个用上同调来表述的充分必要条件能帮助我们找到一个容易验证的条件。

问题 4.2.3 找出一个能用所考虑的阶限制顶点代数来直接验证的判定完全可约性的条件。

笔者认为从李代数上同调和KIlling形式之间的关系或许能找到一些解决此问题的线索。

4.3 共形场论的模空间

模空间在数学中一直都扮演着重要的角色。从黎曼面的模空间到Yang-Mills 方程自对偶和反自对偶解的模空间，很多重要数学的结果都是从它们的研究中得到的。共形场论的模空间也是一个重要的数学结构，在物理上则和弦论的解空间有密切关系，也可能和拓扑序有紧密联系。但目前我们连模空间上的拓扑应该怎样定义都尚不清楚。

问题 4.3.1 研究共形场论的模空间。给出模空间上的拓扑和几何结构。证明有理共形场论在模空间里是离散点。

研究模空间的一个方法是发展共形场论的变形理论。变形理论至少会对了解模空间可能有什么

样的拓扑结构有帮助。上一节中已经讨论了阶化顶点代数的变形理论。

问题 4.3.2 找出阶限制顶点代数形式变形收敛到解析变形的条件。将阶化顶点代数变形理论推广到亏格0全共形场论。

4.4 对数共形场论的构造和研究

虽然还需要构造高亏格的相关函数并证明所有的Kontsevich-Segal-Moore-Seiberg公理，我们已经有了很多关于有理共形场论的重要结果，包括交错算子的算子乘积展开、模不变性、Verlinde公式、模性张量范畴结构、三维拓扑量子场论、扭结和3维流形不变量、亏格0和1的手征和全共形场论。见第3节的讨论。但对于对数共形场论，这些结果的推广很多都还没有被证明，甚至还不知道应该怎样严格给出相应的猜想。

笔者在2009年[Hu18] 给出了如下的刚性猜想：

猜想 4.4.1 假定一个单纯顶点算子代数V满足下面两个条件：一、V的权为0的齐次子空间是由真空张成的一维向量空间，权为负的齐次子空间都为0，而且作为V-模，V' 等价于V。二、V满足C_2-余有限性条件。那么由阶限制的广义V-模构成的辫化张量范畴是刚性的。

在有理共形场论的情形下，刚性的证明是用到了模不变性的。对满足C_2-余有限性并且没有非0负权元素的顶点算子代数，在3.4节中我们已经提到，Fiordalisi的工作[Fio1] [Fio2]以及Fiordalisi和笔者正在完成的一篇文章[FH]证明了对数交错算子的模不变性也是成立的。我们期待这个模不变性可以用来证明刚性猜想。

对有理共形场论，它们对应的顶点算子代数的模范畴不只是一个刚性的辫化张量范畴，而且还满足一个非退化条件，所以是一个模性张量范畴。但这个非退化条件是用范畴中不可约物件（不可约模）给出的，因为对有理共形场论，范畴是半单的，也就是说所有的物件都是不可约物件的直和。对于对数共形场论，因为范畴不是半单的，我们不能只考虑不可约模，所以什么是在对数共形场论情形下的模性张量范畴也是一个重要的有待解决的问题。

问题 4.4.2 给出一个非半单情形下的模性张量范畴的定义，并证明猜想4.4.1中的辫化张量范畴有这样一个模性张量范畴结构。对这样一个非半单模性张量范畴，是否仍然可以构造出3维拓扑量子场论以及扭结和3维流形不变量？

我们在3.3节中已经讨论过，对于满足C_1-余有限性条件的顶点算子代数，对数交错算子的算子乘积展开已经被证明了。从3.4节和上面的讨论，我们也知道对于满足C_2-余有限性并且没有非0负权元素的顶点算子代数，模不变性也已经被证明了。这两个结果已经给出了对应的对数共形场论的亏格0和1的手征相关函数。但我们并不知道对应的对数全共形场论亏格0和1的相关函数应该怎样构造。

问题 4.4.3 对于满足猜想4.4.1中条件的顶点算子代数，是否能从亏格0和1的手征相关函数构造得到全共形场论亏格0和1的相关函数？从这些亏格0和1的相关函数，能否构造出满足Kontsevich-Segal公理的共形场论？

4.5 轨形共形场论

3.8节中我们讨论了扭曲模的构造和研究，但扭曲模的构造和研究离轨形共形场论的完整构造还很远。首先笔者有下面的猜想：

猜想 4.5.1 假定V是一个满足如下条件的顶点算子代数：一、V的权为0的齐次子空间是由真空张成的一维向量空间，权为负的齐次子空间都为0，而且作为V-模，V' 等价于V。二、V满足C_2-余有限性条件。三、每个阶限制的阶化广义V-模都是完全可约的。假定G是一个V的自同构组成的有限群。那么不可约g-扭曲V-模$(g \in G)$之间的扭曲交错算子满足交换律、结合律和模不变性。

如果我们将Kirillov, Jr. [Ki1] 的一个关于顶点算子代数扭曲模范畴的猜想（见[Ki1]中的Example 5.5)中要求顶点算子代数是有理的条件换为上面猜想中精确的条件，那么我们得到下面这个猜想：

猜想 4.5.2 假定V是满足猜想4.5.1中三个条件的顶点算子代数，G是一个V的自同构组成的有限群。那么所有g-扭曲V-模$(g \in G)$ 的范畴是一个在Turaev意义下的G交叉张量范畴[Tu2]。

这两个猜想都是在完全可约假设之下，同时也是关于V的有限自同构群的。对于不是完全可约和无限自同构群的情况，我们有如下的猜想和问题：

猜想 4.5.3 假定V是一个满足猜想4.5.1中第一和第二个条件的顶点算子代数。假定G是一个V的自同构组成的有限群。那么g-扭曲V-模$(g \in G)$之间的扭曲对数交错算子满足交换律、结合律和模不变性。

问题 4.5.4 假定V是一个顶点算子代数，G是一个V的自同构组成的群。如果G是无限群，在什么条件下，扭曲V-模之间的扭曲对数交错算子的交换律、结合律和模不变性成立？在什么条件下，扭曲V-模范畴构成一个的G交叉张量范畴？

4.6 月光模顶点算子代数的唯一性和中心荷为24的亚纯有理共形场论的分类

我们在3.9节中已经讨论了近年来在Schellekens分类猜想上的进展。这个分类猜想中的存在性猜想除了还有两个在Schellekens列表中的顶点算子代数有待构造之外，剩下的也是难得多的问题是唯一性猜想：

猜想 4.6.1 假定有一个顶点算子代数满足两个条件：第一，中心荷为24。第二，这个顶点算子代数是它自己的唯一的不可约模，而且它所有的模都是完全可约的。证明这个顶点算子代数由它的权为1的齐次子空间上的李代数结构唯一决定。

这个猜想包括最早、相信也是最难的唯一性猜想是月光模顶点算子代数的唯一性猜想：

猜想 4.6.2 (Frenkel-Lepowsky-Meurman) 假定有一个顶点算子代数满足三个条件：第一，中心荷为24。第二，不存在非零的、权为1的元素。第三，这个顶点算子代数是它自己的唯一的不可约模，而且它所有的模都是完全可约的。证明这个顶点算子代数一定同构于月光模顶点算子代数。

这两个猜想可能还需要更强的完全可约性条件。完全可能我们需要假定所有弱模都是完全可约的。

在权为1的齐次子空间非零的情况下，可以用对应的Schellekens列表中有限维李代数所有可能生成的顶点代数来研究猜想4.6.1。月光模顶点算子代数的唯一性猜想的难度在于没有这样的有限维李代数结构可以用。这两个猜想中或许还需要加上C_2-余有限性条件。笔者相信这些猜想的证明需要已经发展和正在发展起来的更精细的关于顶点算子代数的理论和工具。

4.7 Calabi-Yau超共形场论

对于以Calabi-Yau流形为目标的非线性西格玛模型给出$N = 2$超共形场论的猜想，目前数学上第

一步需要构造的是对应的顶点算子代数。

问题 4.7.1 构造一个从Calabi-Yau流形的范畴到$N=2$超共形顶点算子代数范畴的函子，使得四维复射影空间中的费马五次超曲面对应于Gepner模型的$N=2$超共形顶点算子代数，并且使得Calabi-Yau流形的变形在此函子下对应于$N=2$超共形顶点算子代数的变形。

虽然已有一些从Calabi-Yau流形的例子构造出来的$N=2$超共形顶点算子代数，目前并没有一个一般的构造可以得到上面问题中的函子。

问题 4.7.2 如果能构造出对应于Calabi-Yau流形的$N=2$超共形顶点算子代数，研究这些顶点算子代数的表示理论，用这个表示理论构造对应的$N=2$超共形场论，包括证明交错算子的算子乘积展开，模不变性，模性张量范畴的构造，以及全超共形场论的构造。

对于Calabi-Yau流形而言，全超共形场论（full superconformal field theories）的构造是极为重要的，因为物理学家给出的猜想（比如量子上同调和镜像对称等等）很多都是从全超共形场论出发得到的。无法只从手征共形场论得到。

问题 4.7.3 如果能构造出对应于Calabi-Yau流形的$N=2$超共形顶点算子代数，并能得到那些代数表示理论的基本结果和对应的$N=2$全超共形场论，用这些结果和构造从数学上发展物理学家的方法来严格表述和证明物理学家关于Calabi-Yau流形的猜想（比如量子上同调和镜像对称）。

最近关于对应于$K3$ 曲面的全超共形场论和超共形顶点算子代数的研究有非常有意义的进展。早在在2001年，在假定全超共形场论存在的情形下，Wendland[We]研究了对应于一个特殊$K3$曲面的全超共形场论，发现这个全超共形场论有非常大的但还是有限的自同构群。2013年，同样在全超共形场论存在的假定下，Gaberdiel, Taormina, Volpato和Wendland[GTVW]用这个全超共形场论不同的描述方式完全决定了它巨大的有限自同构群。2015年，Duncan和Mack-Crane[DM-C2]发现这个全超共形场论Neveu-Schwarz部分的状态空间作为Virasoro代数的模和他们在2014年[DM-C1]构造得到的Conway群的月光模顶点算子代数$V^{S\natural}$作为Virasoro代数的模是等价的。他们也证明了这个全超共形场论Ramond部分的状态空间作为Virasoro代数的模和$V^{S\natural}$ 的一个扭曲模作为Virasoro代数的模是等价的。通过这些工作给出的联系，Taormina和Wendland进一步用顶点算子代数$V^{S\natural}$ 来描写这个对应于特殊$K3$曲面的全超共形场论。这些研究将为以后Calabi-Yau全超共形场论的一般构造提供重要的数学想法和例子，包括对上面这些数学问题解答的思路和想法。

4.8 顶点算子代数方法和共形网方法的关系

我们在第3节开始时提到共形场论的两种方法。除了我们已经详细讨论的顶点算子代数表示论方法，还有一个方法是共形网的方法。对共形网方法，笔者推荐Kawahigashi的综述[Ka]，对顶点算子代数表示理论方法和共形网方法的关系的一些结果，见[CKLW] . 这两种方法都得到了对应于有理共形场论的模性张量范畴，而在其他问题的研究上各有优势。

问题 4.8.1 找出顶点算子代数表示论方法和共形网方法的关系。证明至少对有理共形场论，这两种方法是等价的。

致谢 本文是基于笔者于2015年6月3日在中科院数学所讲座所作的报告扩展而成。笔者感谢张晓、席南华、冯琦、付保华的邀请，也感谢席南华、张晓、王友德、付保华为编辑数学所讲座讲稿所做的努力。笔者感谢Lepowsky多年来对笔者研究工作的支持，感谢合作者们的重要贡献，感谢学生们的

问题、讨论和研究成果。笔者感谢Carnahan、Duncan、Kawahigashi、Lam、Scheithauer和Wendland关于他们的工作的解释和讨论。陈凌在阅读本文初稿中发现了一些笔误，笔者也在此表示感谢。

参 考 文 献

[ACG] L. Alvarez-Gaumé, S. Coleman and P. Ginsparg, Finiteness of Ricci flat $N = 2$ supersymmetric σ-models, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986), 423–430.

[A] M. Atiyah, Topological quantum field theories, Pub. Math. IHES **68** (1988) 175–186.

[Ba] B. Bakalov, Twisted logarithmic modules of vertex algebras, *Comm. Math. Phys.*, to appear; arXiv:1504.06381.

[BFM] A. Beilinson, B. Feigin and B. Mazur, Introduction to algebraic field theory on curves, preprint, 1991 (provided by A. Beilinson, 1996).

[BPZ] A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333–380.

[Bo1] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), 3068–3071.

[Bo2] R. E. Borcherds, Monstrous Moonshine and Monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405 - -444.

[CHSW] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys.* **B258** (1985), 46–74.

[CM] S. Carnahan and M. Miyamoto, Rationality of fixed-point vertex operator algebras, to appear; arXiv:1603.05645

[C1] J. L. Cardy, Conformal invariance and surface critical behavior, *Nucl. Phys.* **B240** (1984), 514–532.

[C2] J. L. Cardy, Effect of boundary conditions on the operator content of two-dimensional conformally invariant theories, *Nucl. Phys.* **B275** (1986), 200–218.

[C3] J. L. Cardy, Boundary Conditions, Fusion Rules And The Verlinde Formula, *Nucl. Phys.* **B324** (1989) 581–596.

[CKLW] S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo, M. Weiner, From vertex operator algebras to conformal nets and back, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, to appear; arXiv:1503.01260.

[D] L. Dixon, Some world-sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise, *Summer Workshop in High-energy Physics and Cosmology - Superstrings, unified theories and cosmology, June 29–August 7, 1987, Trieste, Italy*, ed. G. Furlan, J. C. Pati, D. W. Sciama, ICTP Ser. Theoret. Phys., Vol. 4, World Scientific, Singapore, 1989, 67–126.

[DLM1] C. Dong, H. Li and G. Mason, Twisted representations of vertex operator algebras, *Math. Ann.* **310** (1998), 571–600.

[DLM2] C. Dong, H. Li and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.

[DM-C1] J. F. R. Duncan and S. Mack-Crane, Derived equivalences of $K3$ surfaces and twined elliptic genera, *Res. Math. Sci.* **3** (2016), 3:1.

[DM-C2] J. F. R. Duncan and S. Mack-Crane, The moonshine module for Conway's group, *Forum Math. Sigma* **3** (2015), e10.

[EMS] J. van Ekeren, S. Möller, N. R. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras, to appear; arXiv:1507.08142

[Fa] G. Faltings, A proof for the Verlinde formula, *J. Alg. Geom.* **3** (1994), 347–374.

[FFR] A. Feingold, I. Frenkel and J. Ries, Spinor Construction of Vertex Operator Algebras, Triality, and $E_8^{(1)}$, *Contemporary Math.*, Vol. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[Fin1] M. Finkelberg, Fusion categories, Ph.D. thesis, Harvard University, 1993.

[Fin2] M. Finkelberg, An equivalence of fusion categories, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), 249–267.

[Fin3] M. Finkelberg, Erratum to: An equivalence of fusion categories, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), 249–267; *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), 810–811.

[Fio1] F. Fiordalisi, Logarithmic intertwining operators and genus-one correlation functions, Ph.D. thesis, Rutgers University, 2015.

[Fio2] F. Fiordalisi, Logarithmic intertwining operators and genus-one correlation functions, *Comm. Contemp. Math*, to appear; arXiv:1602.03250.

[FH] F. Fiordalisi and Y.-Z. Huang, Modular invariance for logarithmic intertwining operators, in preparation.

[FHL] I. B. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, preprint, 1989; *Memoirs Amer. Math. Soc.* **104**, 1993.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[FZ] I. B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[Fr] D. Friedan, Nonlinear Models in $2+\varepsilon$ Dimensions, *Annals of Physics* **163** (1985), 318–419.

[GTVW] M. Gaberdiel, A. Taormina, R. Volpato, K. Wendland, A $K3$ sigma model with $\mathbb{Z}_2^8$: $\mathbb{M}_20$ symmetry, *JHEP* **2** (2014), 022.

[Ge] D. Gepner, Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models, *Nucl. Phys.* **B296** (1988), 757–778.

[GJ] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum physics: A functional integral point of view*, Second Edtion, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1987.

[GSW] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory, Vol. 1, Introduction*, 25th anniversary edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[GP] B. Greene and R. Plesser, Duality in Calabi ‑ Yau moduli space, *Nucl. Phys.* **B338** (1990), 15–37.

[Gu] V. Gurarie, Logarithmic operators in conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B410** (1993), 535–549.

[Ha] R. Haag, *Local quantum physics: Fields, particles, algebras*, Second Enlarged and Revised Edition, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Hu1] Y.-Z. Huang, On the geometric interpretation of vertex operator algebras, Ph.D. thesis, Rutgers University, 1990.

[Hu2] Y.-Z. Huang, Geometric interpretation of vertex operator algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **88** (1991), 9964–9968.

[Hu3] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras and conformal field theory, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992), 2109–2151.

[Hu4] Y.-Z. Huang, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, IV, *J. Pure Appl. Alg.* 100 (1995) 173–216.

[Hu5] Y.-Z. Huang, A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra, in: *Moonshine, the Monster and related topics, Proc. Joint Summer Research Conference, Mount Holyoke, 1994*, ed. C. Dong and G. Mason, Contemporary Math., Vol. 193, Amer. Math. Soc., Providence, 1996, 123–148.

[Hu6] Y.-Z. Huang, Virasoro vertex operator algebras, (nonmeromorphic) operator product expansion and the tensor product theory, *J. Alg.* **182** (1996), 201–234.

[Hu7] Y.-Z. Huang, Intertwining operator algebras, genus-zero modular functors and genus-zero conformal field theories, in: *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences*, ed. J.-L. Loday, J. Stasheff, and A. A. Voronov, Contemporary Math., Vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, 335–355.

[Hu8] Y.-Z. Huang, *Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras*, Progress in Mathematics, Vol. 148, Birkhüuser, Boston, 1997.

[Hu9] Y.-Z. Huang, A functional-analytic theory of vertex (operator) algebras, I, *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), 61–84.

[Hu10] Y.-Z. Huang, A functional-analytic theory of vertex (operator) algebras, II, *Comm. Math. Phys.* **242** (2003), 425–444.

[Hu11] Y.-Z. Huang, Differential equations and intertwining operators, *Comm. Contemp. Math.* **7** (2005), 375–400.

[Hu12] Y.-Z. Huang, Differential equations, duality and modular invariance, *Comm. Contemp. Math.* **7** (2005), 649–706.

[Hu13] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras, the Verlinde conjecture, and modular tensor categories, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** (2005), 5352–5356.

[Hu14] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras, fusion rules and modular transformations, in: *Non-commutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics*, ed. by J. Fuchs, J. Mickelsson, G. Rozenblioum and A. Stolin, Contemporary Math., Vol. 391, Amer. Math. Soc., Providence, 2005, 135–148.

[Hu15] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture, *Comm. Contemp. Math.* **10** (2008), 103–154.

[Hu16] Y.-Z. Huang, Rigidity and modularity of vertex tensor categories, *Comm. Contemp. Math.* **10** (2008), 871–911.

[Hu17] Y.-Z. Huang, Cofiniteness conditions, projective covers and the logarithmic tensor product theory, *J. Pure Appl. Alg.* **213** (2009), 458–475.

[Hu18] Y.-Z. Huang, Representations of vertex operator algebras and braided finite tensor categories, in: *Vertex Operator Algebras and Related Topics, An International Conference in Honor of Geoffery Mason's 60th Birthday*, ed. M. Bergvelt, G. Yamskulna and W. Zhao, Contemporary Math., Vol. 497, Amer. Math. Soc., Providence, 2009, 97–111.

[Hu19] Y.-Z. Huang, Generalized twisted modules associated to general automorphisms of a vertex operator algebra, *Comm. Math. Phys.* **298** (2010), 265–292.

[Hu20] Y.-Z. Huang, A cohomology theory of grading-restricted vertex algebras, *Comm. Math. Phys.* **327** (2014), 279–307.

[Hu21] Y.-Z. Huang, First and second cohomologies of grading-restricted vertex algebras, *Comm. Math. Phys.* **327** (2014), 261–278.

[Hu22] Y.-Z. Huang, Meromorphic open-string vertex algebras, *J. Math. Phys.* **54** (2013), 051702.

[Hu23] Y.-Z. Huang, Two constructions of grading-restricted vertex (super)algebras, *J. Pure Appl. Alg.*, to appear; arXiv:1507.06098.

[Hu22] Y.-Z. Huang, Some open problem in mathematical two-dimensional conformal field theory, in: *Proceedings of the Conference on Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics, held at University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, August 14-18, 2015*, ed. K. Barron, E. Jurisich, H. Li, A. Milas, K. C. Misra, Contemp. Math, American Mathematical Society, Providence, RI, to appear.

[HK1] Y.-Z. Huang and L. Kong, Open-string vertex algebras, tensor categories and operads, *Comm. Math. Phys.* **250** (2004), 433–471.

[HK2] Y.-Z. Huang and L. Kong, Full field algebras, *Comm. Math. Phys.* **272** (2007), 345–396.

[HK3] Y.-Z. Huang and L. Kong, Modular invariance for conformal full field algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 3027–3067.

[HL1] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, Toward a theory of tensor product for representations of a vertex operator algebra, in *Proc. 20th Intl. Conference on Diff. Geom. Methods in Theoretical Physics, New York, 1991*, ed. S. Catto and A. Rocha, World Scientific, Singapore, 1992, Vol. 1, 344–354.

[HL2] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, Tensor products of modules for a vertex operator algebras and vertex tensor categories, in: *Lie Theory and Geometry, in honor of Bertram Kostant,* ed. R. Brylinski, J.-L. Brylinski, V. Guillemin, V. Kac, Birkhäuser, Boston, 1994, 349–383.

[HL3] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, I, *Selecta Mathematica (New Series)* **1** (1995), 699–756.

[HL4] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, II, *Selecta Mathematica (New Series)* **1** (1995), 757–786.

[HL5] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, III, *J. Pure Appl. Alg.* **100** (1995) 141–171.

[HL6] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, Intertwining operator algebras and vertex tensor categories for affine Lie algebras, *Duke Math. J.* **99** (1999), 113–134.

[HLZ1] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, A logarithmic generalization of tensor product theory for modules for a vertex operator algebra, *Internat. J. Math.* **17** (2006), 975–1012.

[HLZ2] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory for generalized modules for a conformal vertex algebra, I: Introduction and strongly graded algebras and their generalized modules, in: Conformal Field Theories and Tensor Categories, Proceedings of a Workshop Held at Beijing International Center for Mathematics Research, ed. C. Bai, J. Fuchs, Y.-Z. Huang, L. Kong, I. Runkel and C. Schweigert, Mathematical Lectures from Beijing University, Vol. 2, Springer, New York, 2014, 169–248.

[HLZ3] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, II: Logarithmic formal calculus and properties of logarithmic intertwining operators, to appear; arXiv:1012.4196.

[HLZ4] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, III: Intertwining maps and tensor product bifunctors, to appear; arXiv:1012.4197.

[HLZ5] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, IV: Constructions of tensor product bifunctors and the compatibility conditions, to appear; arXiv:1012.4198.

[HLZ6] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, V: Convergence condition for intertwining maps and the corresponding compatibility condition, to appear; arXiv:1012.4199.

[HLZ7] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, VI: Expansion condition, associativity of logarithmic intertwining operators, and the associativity isomorphisms, to appear; arXiv:1012.4202.

[HLZ8] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, VII: Convergence and extension properties and applications to expansion for intertwining maps, to appear; arXiv:1110.1929.

[HLZ9] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky and L. Zhang, Logarithmic tensor category theory, VIII: Braided tensor category structure on categories of generalized modules for a conformal vertex algebra, to appear; arXiv:1110.1931.

[HM1] Y.-Z. Huang and A. Milas, Intertwining operator superalgebras and vertex tensor categories for superconformal algebras, I, *Comm. Contemp. Math.* **4** (2002), 327–355.

[HM2] Y.-Z. Huang and A. Milas, Intertwining operator superalgebras and vertex tensor categories for superconformal algebras, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 363–385.

[HQ] Y.-Z. Huang and F. Qi, The first cohomology, derivations and the reductivity of a (meromorphic open-string) vertex algebra, to appear.

[HY] Y.-Z. Huang and J. Yang, Associative algebras and (logarithmic) twisted modules for a vertex operator algebra, to appear; arXiv:1603.04367.

[Ka] Y. Kawahigashi, Conformal Field Theory, Tensor Categories and Operator Algebras *J. Phys.* **A48** (2015), 303001.

[KW] V. Kac and W. Wang, Vertex operator superalgebras and their representations, in *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992)*, Contemp. Math., Vol. 175, 161–191.

[KL1] D. Kazhdan and G. Lusztig, Affine Lie algebras and quantum groups, *Duke Math. J., IMRN* **2** (1991), 21–29.

[KL2] D. Kazhdan and G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras, I, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 905–947.

[KL3] D. Kazhdan and G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras, II, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 949–1011.

[KL4] D. Kazhdan and G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras, III, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 335–381.

[KL5] D. Kazhdan and G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras, IV, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 383–453.

[Ki1] A. Kirillov, Jr, On G–equivariant modular categories, arXiv:math/0401119.

[Ko1] L. Kong, Cardy condition for open-closed field algebras, *Comm. Math. Phys.* **283** (2008), 25 – 92.

[Ko2] L. Kong, Open-closed field algebras, *Comm. Math. Phys.* **280** (2008) 207-261.

[Ko3] L. Kong, Cardy condition for open-closed field algebras, *Comm. Math. Phys.* **283** (2008) 25 – 92.

[La] C.H. Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153 – -198.

[LS1] C.H. Lam and H. Shimakura，Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540- – 576.

[LS2] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Amer. J. Math.* **137** (2015), 111 – -137.

[LS3] C.H. Lam and H. Shimakura，Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, *Comm. Math. Phys.*, to appear; arXiv:1501.05094.

[Le] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **82** (1985), 8295–8299.

[LVW] W. Lerche, C. Vafa and N. Warner, Chiral rings in $\mathcal{N} = 2$ superconformal theories, *Nucl. Phys.* **B324** (1989), 427–474.

[Mil] A. Milas, Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras, in *Recent Developments in Infinite-Dimensional Lie Algebras and Conformal Field Theory*, ed. S. Berman, P. Fendley, Y.-Z. Huang, K. Misra, and B. Parshall, Contemp. Math., Vol. 297, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, 201–225.

[Miy1] M. Miyamoto, Intertwining operators and modular invariance, math.QA/0010180.

[Miy2] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness, *Duke Math. J.* **122** (2004), 51–91.

[Miy3] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, in *Symmetries, integrable systems and representations*, Springer Proc. Math. Stat., Vol. 40, Springer, Heidelberg, 2013, 319 – -344.

[Miy4] M. Miyamoto, C_2-cofiniteness of cyclic-orbifold models, *Comm. Math. Phys.* **335** (2015), 1279-1286

[MS1] G. Moore and N. Seiberg, Polynomial equations for rational conformal field theories, *Phys. Lett.* **B212** (1988), 451–460.

[MS2] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 177–254.

[NS] D. Nemeschansky and A. Sen, Conformal invariance of supersymmetric σ-models on Calabi-Yau manifolds, *Phys. Lett.* **B178** (1986), 365–369.

[P] J. Polchinski, *String theory, Vol. I, An introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[RS1] D. Radnell and E. Schippers, Quasisymmetric sewing in rigged Teichmüller space, *Comm. Contemp. Math.* **8** (2006), 481–534.

[RS2] D. Radnell and E. Schippers, A complex structure on the set of quasiconformally extendible nonoverlapping mappings into a Riemann surface, *J. Anal. Math.* **108** (2009), 277–291.

[RS3] D. Radnell and E. Schippers, Fiber structure and local coordinates for the Teichmüller space of a bordered Riemann surface, *Conform. Geom. Dyn.* **14** (2010), 14–34.

[RSW1] D. Radnell and E. Schippers and W. Staubach, A Hilbert manifold structure on the Weil-Petersson class Teichmüller space of bordered Riemann surfaces, *Comm. Contemp. Math.* **17**(2015), 1550016.

[RSW2] D. Radnell and E. Schippers and W. Staubach, Weil-Petersson class non-overlapping mappings into a Riemann surface, *Comm. Contemp. Math.*, to appaer; DOI: 10.1142/S0219199715500601.

[RSW3] D. Radnell and E. Schippers and W. Staubach, Quasiconformal maps of bordered Riemann surfaces with L^2 Beltrami differentials, *J. Anal. Math.*, to appear.

[RSW4] D. Radnell and E. Schippers and W. Staubach, Convergence of the Weil-Petersson metric on the Teichmüller space of Bordered Riemann Surfaces, *Comm. Contemp. Math.*, to appear.

[RSW5] D. Radnell and E. Schippers and W. Staubach, Quasiconformal Teichmüller theory as an analytical foundation for two dimensional conformal field theory, in; *Proceedings of the Conference on Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics, held at University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, August 14-18, 2015*, ed. K. Barron, E. Jurisich, H. Li, A. Milas, K. C. Misra, Contemp. Math, American Mathematical Society, Providence, RI, to appear.

[RS] L. Rozansky and H. Saleur, Quantum field theory for the multi-variable Alexander-Conway polynomial, *Nucl. Phys.* **B376** (1991), 461–509.

[SS] D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a Z3-orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 1621-1646.

[Sc] A. N. Schellekens，Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993) 159–186.

[Se] G. Segal, The definition of conformal field theory, in: *Topology, Geometry and Quantum Field Theory: Proceedings of the 2002 Oxford Symposium in Honour of the 60th Birthday of Graeme Segal*, ed. U. Tillmann, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 308, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 421–577.

[SW] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Corrected Third Edition, Princeton Landmarks in Physics, Princeton University Press, Princeton, 2000.

[Te] C. Teleman, Lie algebra cohomology and the fusion rules, *Comm. Math. Phys.* **173** (1995), 265–311.

[Tu1] V. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and* 3*-manifolds*, de Gruyter Studies in Math., Vol. 18, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[Tu2] V. Turaev, Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories, arxiv:math.GT/0005291.

[V] E. Verlinde, Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B300** (1988), 360–376.

[We] K. Wendland, Orbifold constructions of $K3$: A link between conformal field theory and geometry, in: *Proceedings of the Conference on Mathematical Aspects of Orbifold String Theory held at the University of Wisconsin, Madison, WI, May 4 - 8, 2001*, ed. A. Adem, J. Morava and Y. Ruan, Contemp. Math., Vol. 310, 2002, 333-358.

[Wi1] E. Witten, Non-abelian bosonization in two dimensions, Comm Math. Phys. **92** (1984), 455–472.

[Wi2] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

[W3] E. Witten, On holomorphic factorization of WZW and coset models, Comm Math. Phys. **144** (1992), 189–212.

[Z1] Y. Zhu, Vertex operators, elliptic functions and modular forms, Ph.D. thesis, Yale University, 1990.

[Z2] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–307.