פרק א: תורת הקבוצות הנאיבית[1]

מבוא ורקע היסטורי

אבי תורת הקבוצות הוא גאורג קנטור ($1845-1915$). מחקרו של קנטור התמקד בעיקר בישר הממשי, אכן הישר הממשי מהווה מוטיבציה מרכזית לרעיונות של קנטור בתורת הקבוצות. העיסוק באינסוף־ מושא נוסף של תורת הקבוצות גרר ביקורת חריפה מצד מתמטיקאים אחרים בתקופתו כדוגמת־ קרונקר. כפועל יוצא מזה, קנטור שקע בדיכאון עמוק ואושפז בבתי חולים פסיכיאטריים לעיתים תכופות. באופן לא יוצא דופן בהיסטוריה האנושית, קנטור לא זכה להכרה הראויה לו בזמן חייו, אך כיום אין ספק לגבי היותו מהפכן ומתמטיקאי דגול. דויד הילברט אמר עליו:

"אף אחד לא ייגרש אותנו מגן העדן שקנטור בנה לנו."

תורת הקבוצות צמחה באופן טבעי משאלות על קבוצות של מספרים ממשיים ומחקר האובייקטים היסודיים במתמטיקה, אולם מאז ימי קנטור השימוש בתורת הקבוצות חרג מכותלי הישר הממשי ומהווה שפה משותפת למרבית המתמטיקאים. כיום, המחקר בתורת הקבוצות שונה מאוד מזה של קנטור והרבה מהתוצאות שמצוינות ברשימות אלה לא היו ידועות לו. השינוי המרכזי התרחש בתחילת המאה העשרים, כשהמחסור בבסיס פורמלי איתן ובאקסיומטיזציה של תורת הקבוצות התיר פרדוקסים שלא איפשרו יותר לעבוד במתכונת הקלאסית שהתווה קנטור־ מה שנקרא היום הגישה הנאיבית ובה נתרכז בקורס זה. מאידך, ישנה הגישה האקסיומתית שכאמור לא מהווה חלק מקורס זה על אף שנרחיב מעט לגביה בתת־פרק הבא. בין המתמטיקאים הבולטים של תורת הקבוצות המודרנית אפשר למנות את: קורט גדל, פול כהן ששינו גם את פני הלוגיקה. ארנסט צרמלו ואברהם פרנקל על ניסוח האקסיומות ZF ורבים אחרים. ישראל היא אחת המדינות המובילות בחקר תורת הקבוצות וכמה מחוקריה הבולטים הם: עזריאל לוי, שהרן שלח, מנחם מגידור ומרדכי גיטיק ואחרים. כדי לתת טעימה מתורת הקבוצות המודרנית נזכיר כמה מתחומי המחקר האקטואלי: כפייה והוכחות אי תלות־ פעמים רבות נציין שלא ניתן להוכיח טענה ספציפית. אין כוונתנו שזו משימה קשה, אלא שישנה הוכחה לכך שלא ניתן להוכיח טענה זו. תופעה כזו נקראת אי תלות של טענה במערכת אקסיומות. כדי להשיג הוכחה כזו משתמשים בכלי שנקרא כפייה $forcing$ שמייצר מודלים של מתמטיקה עם תכונות משתנות. תחום פופולארי נוסף הוא מונים גדולים־ אובייקטים מתמטיים מופשטים מאוד, שעצם קיומם זו טענה בלתי תלויה לפי מובן שציינו קודם. אחד השימושים של אובייקטים כאלה הוא להעריך כמה רחוקה טענה מסוימת מלהיות נכונה ובזאת להבין יותר טוב איך נראה היקום המתמטי. ישנם תחומים רבים אחרים: קומבינטוריקה אינסופית, תורת הקבוצות התיאורית, טופולוגיה קבוצתית ועוד.

גישה אקסיומתית מול גישה נאיבית

כפי שצוין במבוא, אנו נעסוק בגישה הנאיבית של תורת הקבוצות. ננסה לעמוד על ההבדל בין גישה זו לבין הגישה האקסיומתית. באופן לא כל כך מפתיע, האובייקט היסודי ביותר בתורת הקבוצות הוא המושג של קבוצה, ולמעשה זהו האובייקט הקדום ביותר בתורות מתמטיות המבוססת על תורת הקבוצות. ננסה לתת אנלוגיה קצת יותר קרובה למציאות־ אובייקטים שאנחנו פוגשים בחיי היום יום, כמו עצים, בני אדם, מכוניות וחתולים כולם מורכבים מאותו אובייקט יסודי יותר שנקרא מולקולה, מולקולה בתורה מורכבת מאטומים שמורכבים מפרוטונים אלקטרונים וניוטרונים. על אף שאין בפיזיקה וכימיה עסיקנן, האנלוגיה תתבהר בעוד מספר רגעים. אובייקטים מהחיים המתמטיים היום יומיים הם לדוגמא:

1. מספרים־$0,1,2,3,4...$ מה שנקרא מספרים טבעיים.
2. שליליים $-1,-2,-3...$
3. שברים $\frac{1}{2}, \frac{1001}{2298}$.
4. מספרים שאנחנו לא יודעים בדיוק מהם אבלו בטוחים בקיומם, כגון היתר במשולש ישר זוית שאורך הניצבים שלו הם 1 ו־1, לפי משפט פתגורס מספר זה שווה ל־$\sqrt{2}$.
5. פונקציות לדוגמא $f(x)=x+1$ או $f(x)=sin(x)$.
6. מטריצות (למי שעשה אלגברה לינארית) .
7. יצורים גיאומטריים כמו משולש, ריבוע, מעגל, עיגול, מקבילון וטטרהדרון.
8. סימן השיוויון ו־$<$

יש עוד המון אובייקטים שתתקלו בהם בעתיד אבל כרגע הדוגמאות שציינו מספיקות. כפי שישנו אובייקט שמרכיבים את העולם ־ מה שעוזר להבין טוב יותר את הטבע הפיזיקלי. גם אנחנו המתמטיקאים היינו רוצים מושג קדום יותר לכל אלה, שכשנחקור אותו נגלה חוקים כלליים לגבי הטבע המתמטי־ המושג הזה נקרא קבוצה. יבוא הקורא הסקפטי ויישאל: " אז ממה מורכבת קבוצה? הלוא מולקולות מורכבות מאטומים שמורכבים מפרוטונים ואלקטרונים וכו'" . הבעיה הזו היא בעיה עתיקת יומין, ומגיע לימי אוקלידס וספרו "יסודות" . אוקלידס ניסע להגדיר באופן מדויק את הגיאומטריה ונקלע לאותה מצוקה־ מה הם האובייקטים הגיאומטרים היסודיים ביותר? מבחינתו היו אלה הנקודה הקו והקו הישר. לאחר מכן הוא מתאר את הפוסטולטים־ טענות לגבי האובייקטים היסודיים שנכונתן לא עומדת במבחן, היום אנו קוראים לטענות כאלה

אקסיומות. מה מצדיק לקבל אקסיומות כאלה או אחרות? זו שאלה פילוסופית, אבל ברור שנכונות האקסיומות צריכה להיות שקופה. גם לגבי אובייקטים יסודיים וגם לגבי אקסיומות אין סיבה שקורא רשימות אלה ייקבלן כמובן מאליו. אדרבה, אין דבר המונע להציע אלטרנטיבות, אך יש זמן לדיון פילוסופי ויש זמנים לדיון מתמטי שמניח אובייקטים יסודיים ואקסיומות. אם כך, קבוצה היא אובייקט יסודי. מה הן האקסיומות? מערכת האקסיומות המקובלת ביותר הכיום היא ZFC קיצור ל־ $Zermelo-Frenkel-Choice$. על אקסיומת הבחירה אנחנו נרחיב בסוף הקורס. ניתן דוגמא אחת רק כדי להמחיש איך נראית אקסיומה ב־ZFC:

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

אקסיומה זו נקראת אקסיומת הקבוצה הריקה והיא אומרת כי קיימת קבוצה x בעלת התכונה שאין בה איברים, שאר האקסיומות יוסתרו היטב בתוך כל ההגדרות והעקרונות השונים שיינתנו בהמשך. אם כך בגישה האקסיומתית, האקסיומות ידועות לנו ואין לנו שום יומרה לאמר מהי קבוצה־ אנחנו בסך הכל קוראים לאיזשהו אובייקט שקיים קבוצה, ומניחים אילושהן טענות שאין אנו מצדיקים את נכונותן, ובהנתן כל זה, הדיון הוא: "נניח ואנחנו מקבלים את נכונות האקסיומות אז ...". בגישה הנאיבית יש לנו רעיון אינטואיטיבי של קבוצה ומשם אנחנו חוקרים אובייקט זה־ זו הייתה הגישה של קנטור, שהתבררה כמוליכה לפרדוקסים (בהמשך נציין את אחד הפרדוקסים שנקרא פרדוקס ראסל) . לרוב, הסיבה לקיום הפרדוקסים נעוצה בדיוק בנקודה הזו, שאין לנו מושג פורמלי של קבוצה. גורם מרכזי נוסף לקיומם של פרדוקסים הוא חוסר הזהירות בכתיבה־ בתורת הקבוצות הפורמלית יש חוקים מדויקים של מהי טענה. החוקים הם עד כדי כך מדוקים שמחשב יכול לבדוק מחרוזות של תווים, להחליט מהטענה לגיטית, לבדוק האם הוכחה מסוימת נכונה והיום אפילו יש מחשב מסוגל לייצר הוכחה בעצמו!!. חשוב מאוד להבין איך רושמים מתמטיקה באופן פורמלי, זה יעזור לכם להבין יותר טוב את החומר ולהמנע מטעויות לא נחוצות, יותר מזה, אי אפשר להפריד בין מתמטיקה לפורמליות המתמטית. לקורא הסקרן המעוניין ללמוד את תורת הקבוצות האקסיומתית מומלץ תחילה ללמוד לוגיקה מתמטית ולאחר מכן לפנות לספר הנפלא:

Introduction to Independence Proofs מאת *K. Kunen*.

קבוצה

בפרק הקודם אמרנו כי הרעיון האינטואיטיבי של אובייקט הקבוצה הוא " קבוצה היא אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות". יש שלוש דרכים להגדיר קבוצות באופן פורמלית:

<u>דרך ראשונה לסימון קבוצות־ רשימת איברים:</u> $\{a,b,c,...,z\}$

מגדירים $a \in \{a_1,...,a_n\}$ אמ"ם $a=a_1 \vee a=a_2 ... \vee a=a_n$

!

<u>דרך שנייה לסימון קבוצות־ עקרון ההפרדה:</u> $\{x \in A \mid \phi(x)\}$

נגדיר $a \in \{x \in A \mid \phi(x)\}$ אמ"ם $a \in A \wedge \phi(a)$

<u>דרך שלישית לסימון קבוצות־עקרון ההחלפה:</u> $\{f(x) \mid x \in A\}$

נגדיר כי $a \in \{f(x) \mid x \in A\}$ אמ"ם $\exists x \in A (f(x)=a)$

כיוון שהעולם המתמטי מורכב רק מקבוצות, בתורת הקבוצות הכמתים מכמתים על פני כל הקבוצות האפשריות.

- **תרגיל**: הוכיחו כי $5 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{Z}. y+x=5\}$.
  הוכחה: לפי עקרון ההפרדה יש להוכיח כי $5 \in \mathbb{N} \wedge \exists y \in \mathbb{Z}. y+5=5$. זו טענת וגם, לכן נוכיח כל חלק לחוד. $5 \in \mathbb{N}$ לפי הגדרת הטבעיים ואם נגדיר $y=0$, אז $y \in \mathbb{Z}$ לפי הגדרת השלמים ומתקיים $y+5=0+5=5$.
- **תרגיל**: הוכיחו כי $\{1\} \in \{\{n,1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. **הוכחה**: לפי עקרון ההחלפה יש להוכיח כי $\exists n \in \mathbb{N}. \{1\} = \{1,n\}$. נגדיר $n=1$, אכן $1 \in \mathbb{N}$ ומכיוון שבקבוצה אין חזרות מתקיים $\{1,n\}=\{1,1\}=\{1\}$.

הכלה ושיוויון קבוצות

הגדרה 1 : יהיו A,B שתי קבוצות, נאמר A מוכלת ב־B ונסמן $A \subseteq B$ אם מתקיים:

$$\forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

במילים אחרות, אם כל איבר של A הוא איבר של B.

הערה: שימו לב הכלה בין קבוצות היא טענה ויש להצדיק (להוכיח) אותה.

דוגמאות:

- **תרגיל**: $\{2,-1\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\}$
הוכחה: צריך להוכיח את הטענה

$$\forall y.y \in \{2,-1\} \to y \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\}$$

יהי y_0 צריך להוכיח כי $y_0 \in \{2,-1\} \to y_0 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\}$. **זו טענת גרירה ולכן נניח כי** $y_0 \in \{2,-1\}$, כעת צריך להוכיח כי $y_0 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\}$. **יש שני מקרים לבודק**, $y_0 = 2$ אז $2 \in \mathbb{Z}$ וגם $2^2 = 4 > 2$ ולכן, $2 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\}$ נכונה. באותו אופן בודקים את המקרה $y_0 = -1$.

- **תרגיל**: הוכיחו כי $\{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_{even}$.
הוכחה: צריך להוכיח

$$\forall y.y \in \{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\} \to y \in \mathbb{N}_{even}$$

יהי $y_0 \in \{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\}$[2] נוכיח כי $y_0 \in \mathbb{N}_{even}$. מהגדרת הקבוצה (עקרון ההחלפה) $\exists n \in \mathbb{N}.n^2 + n = y_0$, יהי n_0 עבורו $n_0^2 + n_0 = y_0$[3] אם כך $y_0 = n_0(n_0+1)$, נחלק למקרים:

1. אם $n_0 \in \mathbb{N}_{even}$, אז y_0 הוא כפולה של מספר זוגי ולכן $y_0 \in \mathbb{N}_{even}$[4]
2. אם $n_0 \in \mathbb{N}_{odd}$, אז $n_0 + 1$ מספר זוגי ושוב נקבל $y_0 \in \mathbb{N}_{even}$

לכן בכל מקרה $y_0 \in \mathbb{N}_{even}$

- **תרגיל**: נניח כי $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b < c < d$ אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש־ $[b-\epsilon, c+\epsilon] \subseteq (a,d)$
הוכחה נגדיר $\epsilon_1 = \frac{d-c}{2}, \epsilon_2 = \frac{b-a}{2}, \epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. מכיוון ו־$a < b < c < d$, $\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2} > 0$ ולכן $\epsilon > 0$. כעת נוכיח כי $[b-\epsilon, c+\epsilon] \subseteq (a,d)$, יהי $x \in [b-\epsilon, c+\epsilon]$ אזי

$$a = \tfrac{a+a}{2} < \tfrac{b+a}{2} \le b - \tfrac{b-a}{2} \le b - \epsilon \le x \le c + \epsilon \le c + \tfrac{d-c}{2} \le \tfrac{c+d}{2} < \tfrac{d+d}{2} = d$$

הוכחנו כי $a < x < d$ אז $x \in (a,d)$ וזה מוכיח ש־$[b-\epsilon, c+\epsilon] \subseteq (a,d)$ ולכן קיים ϵ שעונה על הדרישה.

טענה 2 לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$

הוכחה : תהי A קבוצה כלשהי, צריך לוודא את נכונות הפסוק: $\forall x.x \in \emptyset \to x \in A$. יהי x, מהגדרת הקבוצה הריקה $x \notin \emptyset$ ולכן הרישא של הפסוק $x \in \emptyset \to x \in A$ שיקרית. בסיטואציה כזו אומרים כי" הפסוק מתקיים באופן ריק" ולכן הפסוק הוא פסוק אמת.
הערות:

1. מסמנים $A \nsubseteq B$ אם $\neg(A \subseteq B)$ כלומר $\exists x \in A(x \notin B)$
2. כאן הסימון $A \subset B$ זהה ל־$A \subseteq B$, אך במקומות אחרים עלולים להשתמש בסימן זה באופן מעט שונה.

טענה 3 אם $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

הוכחה: תרגיל

■

<u>עקרון האקסטנציונליות</u> A, B קבוצות שוות ומסמנים $A = B$ אם רק אם מתקיים:

$$\forall x.x \in A \leftrightarrow x \in B$$

במילים אחרות אם ל־A ול־B יש בדיוק את אותם איברים. מכיוון ו־ $\leftrightarrow$ זה למעשה גרירה דו כיוונית, נקבל:

$$A = B \overset{\text{אקסטנציונליות}}{\Leftrightarrow} \forall x.x \in A \leftrightarrow x \in B \overset{\text{זהות}}{\Leftrightarrow} \forall x.(x \in A \leftarrow x \in B) \wedge (x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{שקילות ביחסים}}{\Leftrightarrow} (\forall x.x \in A \to x \in B) \wedge (\forall y.y \in B \to y \in A) \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

---

[2] שימו לב כי קיצרנו, כלומר, אנו גם לוקחים איבר כללי וגם מניחים שהרישא נכונה באותו המשפט. זה קיצור שתמיד משתמשים בו בהוכחת הכלה.
[3] כשנתון לנו שטענת קיים נכונה, אנחנו לוקחים איבר ספציפי המעיד על כך. לרוב מקצרים את השלב הזה ואומרים "קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n_0^2 + n_0 = y_0$" ומובן ממשפט זה כי n_0 כבר איבר ספציפי.
[4] איך יודעים מתי להספיק לנמק? אין תשובה מדויקת, אבל כלל האצבע בקורס הוא שטענות שראינו בתיכון לא צריך לנמק, לדוגמא "כפל של מספר זוגי בכל מספר שלם הוא מספר זוגי" היא טענה בסיסית דיו שלא מצריכה הוכחה.

זכרו: לרוב כשמוכיחים שיוויון קבוצות רוצים להראות הכלה דו־כיוונית.

הערה: עקרון האקסטנציונליות זו אקסיומה של תורת הקבוצות ומעתה והילך יכולה לשמש כהגדרה של שיוויון קבוצות.

תרגיל: לכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \leftrightarrow r \in \mathbb{Q}$
הוכחה: זו טענת אם ורק אם לכן נוכיח גרירה דו כיוונית.
$\underline{\rightarrow}$: נניח כי מתקיים $\{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$ ונוכיח כי $r \in \mathbb{Q}$. אכן, $r = r + 0$ ומכיוון ו־$0 \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $r \in \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$ מכיוון וקבוצה זו שווה ל־$\mathbb{Q}$, יש להם את אותם איברים ובפרט $r \in \mathbb{Q}$.
$\underline{\leftarrow}$: לכיוון הזה נעזר בטענה הבאה:
ט. עזר: אם $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ אז $q_1 + q_2, q_1 - q_2, q_1 \cdot q_2, \frac{q_1}{q_2} \in \mathbb{Q}$
הוכחת ט.עזר: תרגיל.
נניח כי $r \in \mathbb{Q}$ ונוכיח כי $\mathbb{Q} = \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$. זו טענה של שיוויון קבוצות ולכן נוכיח הכלה דו כיוונית:
$\mathbb{Q} \subseteq \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$: יהי $x \in \mathbb{Q}$, נוכיח כי $x \in \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$. נגדיר $q' = x - r$ אז לפי טענת העזר $q' \in \mathbb{Q}$. יתר על כן, $x = x - r + r = q' + r \in \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
$\mathbb{Q} \supseteq \{q+r \mid q \in \mathbb{Q}\}$: יהי $x = q' + rq' \in \mathbb{Q}$, שוב מטענת העזר , כיווין ש־x הוא סכום של שני מספרים רציונלים מתקיים $x \in \mathbb{Q}$. סך הכל הוכחנו הכלה דו־כיוונית אז יש שיוויון.

טענה 4 הקבוצה הריקה מוגדרת ביחידות, כלומר, אם X קבוצה נוספת המקיימת $\forall y (y \notin \emptyset)$ אז $X = \emptyset$.

הוכחה: תהא X קבוצה כך ש־$\forall y (y \notin X)$. נראה שיוויון קבוצות, יהי y כלשהו אז $y \notin \emptyset$ וגם $y \notin X$ לכן הפסוק $y \in \emptyset \leftrightarrow y \in X$ הוא פסוק אמת, מכלליות y זה נכון לכל y, אזי $X = \emptyset$.

$\square$

הערות:

1. $A \neq B \equiv \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \equiv \neg(A \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A) \equiv \exists x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$ כלומר שתי קבוצות הן שונות אם קיימת דוגמא לאיבר שנמצא באחת ולא בשנייה. בשקילות האמצעית השתמשנו בחוקי דה מורגן.
2. אומרים כי A מוכלת ולא שווה ל־ B ומסמנים $A \subsetneq B$ אם מתקיים כי $A \subseteq B \wedge A \neq B$. במילים, כל איבר של A הוא איבר של B אבל קיים איבר של B שאינו איבר של A. לדוגמא, $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ כי לדוגמא $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\wedge$ $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

פעולות על קבוצות

הגדרה 5 חיתוך: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

איחוד: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

חיסור: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

משלים: $A^c = \{x \mid x \notin A\}$.

הפרש סימטרי: $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$

טענה 6 יהיו A, B, C קבוצות אזי:

1. אסוצייטיביות:
   (א) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
   (ב) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
   (ג) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
2. חילופיות:
   (א) $A \cap B = B \cap A$.
   (ב) $A \cup B = B \cup A$.
   (ג) $A \Delta B = B \Delta A$.

3. חוק הפילוג:

(א) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(ב) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4. זהויות של הפרש וכללי דה־מורגן:

(א) $A\setminus B=A\cap B^c$.

(ב) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

(ג) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

(ד) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

(ה) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

5. זהויות הנוגעות לקבוצה ריקה:

(א) $A\cap\emptyset=\emptyset$.

(ב) $A\cup\emptyset=A$.

(ג) $A\setminus\emptyset=A$.

(ד) $\emptyset\setminus A=\emptyset$.

(ה) $A\Delta\emptyset=A$.

6. זהויות הנוגעות לקבוצה עם עצמה:

(א) $A\cap A=A$.

(ב) $A\cup A=A$.

(ג) $A\setminus A=\emptyset$.

(ד) $A\Delta A=\emptyset$.

הוכחה: נוכיח את 1א,3ב ו־4ב לדוגמא ואת היתר נשאיר כתרגיל מעולה עבורכם להפנמת ההגדרות.
הוכחת 1:

$$x\in A\cap(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\cap C\leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge x\in C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\cap B\wedge x\in C\leftrightarrow x\in(A\cap B)\cap C$$

הוכחת 2: נוכיחו הכלה דו כיוונית, מימין לשמאל, יהי $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ נחלק למקרים, אם $x\in A\cap B$ אז $x\in A\wedge x\in B$ ולכן $x\in B\cup C$ סכ"ה $x\in A\cap(B\cup C)$. מקרה שני, יהי $x\in A\cap C$ אז $x\in A\wedge x\in C$ ושוב $x\in B\cup C$ אזי $x\in A\cap(B\cup C)$. בכל מקרה הוכחנו כי $x\in A\cap(B\cup C)$. נשאיר את הוכחת ההכלה בכיוון השני גם כתרגיל.
הוכחת 4: נוכיח את $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$$x\in(A\cup B)^c\leftrightarrow x\notin A\cup B\leftrightarrow(x\notin A\wedge x\notin B)\leftrightarrow(x\in A^c\wedge x\in B^c)\leftrightarrow x\in A^c\cap B^c$$

□

טענה 7 הבאים שקולים:

1. $A\subseteq B$
2. $A\cap B=A$
3. $A\setminus B=\emptyset$
4. $A\cup B=B$

הוכחה: נוכיח $(1)\to(2)\to(3)\to(4)\to(1)$.
$(1)\to(2)$: נניח כי $A\subseteq B$. אזי $A\cap B\subseteq A$ טריוויאלי. בכיוון השני, יהי $x\in A$ כיוון ש־$A\subseteq B$ גם $x\in B$ אזי $x\in A\cap B$ ולכן $A=A\cap B$.
$(2)\to(3)$: יהי x כלשהו, נראה כי $x\notin A\setminus B$, אם $x\notin A$ בוודאי $x\notin A\setminus B$, אם $x\in A$, מ־(2) נובע כי $x\in A\cap B$ בפרט $x\in B$ אזי $x\notin A\setminus B$.
$(3)\to(4)$: $B\subseteq A\cup B$ מקרה פרטי של טענה 6 סעיף 5. יהי $x\in A\cup B$ מ־(3) $x\notin A\setminus B$ לכן אם $x\in A$ אז $x\in B$ אז בכל אופן $x\in B$ ולכן $A\cup B=B$.
$(4)\to(1)$: $A\subseteq A\cup B=B$.

$\square$

הגדרה 8 תהא I קבוצה כלשהי, ותהא $\{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות (נהוג לאמר משפחה של קבוצות) נגדיר

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\}$$

דוגמאות והערות:

- I נקראת קבוצת אינדקסים של המשפחה.
- $A_n = [n, n+1], n \in \mathbb{N}$, קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,\infty)$. זה כמובן דורש הוכחת שיוויון בין הקבוצות:
אם $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ אז לפי הגדרת האיחוד קיים n כך ש־ $x \in [n, n+1]$ בפרט $x \geq 0$ לכן $x \in [0,\infty)$. אם $x \in [0,\infty)$ אז $0 \geq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$. נסמן $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ אז $x \in [n, n+1]$ ולכן $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (נזכיר את פונקציית הערך השלם התחתון והעליון $\lfloor x \rfloor = max(z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x)$, $\lceil x \rceil = \min(z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x)$).
- $\bigcap_{r\in[-1,0)} [r, r+2] = [0,1]$. קבוצת האינדקסים כאן היא $[-1,0)$. יהי $x \in [0,1]$ אז $0 \leq x \leq 1$. נוכיח כי x שייך לחיתוך, יהי $r \in [-1,0)$ מכיוון ו־$r < 0$ מתקיים כי $r \leq x$ ומכיוון ו־ $r \geq -1$ מתקיים כי $x \leq -1+2 \leq r+2$ לכן $x \in [r, r+2]$ וזה כאמור נכון לכל $r \in [-1,0)$ אז x בחיתוך. בכיוון השני, יהי $x \in \bigcap_{r\in[-1,0)} [r, r+2] = [0,1]$ בפרט $x \in [-1, -1+2]$ ולכן $x \leq 1$. נניח בשלילה כי $x < 0$ אז קיים r כך ש־ $max(x,-1) < r < 0$, ומתקיים כי $x \notin [r, r+2]$ בסתירה להגדרת x. לכן $0 \leq r$ וקיבלנו כי $x \in [0,1]$
- אם קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}$ נהוג לסמן $\bigcup_{n=0}^{\infty}$
- שימו לב כי החיתוך לא מוגדר אם קבוצת האינדקסים היא קבוצה ריקה.
- אם אוסף הקבוצות $\{A_i \mid i \in I\}$ זה אוסף של קבוצות זרות בזוגות, כלומר, $i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$ האיחוד שלהן נקרא איחוד זר ומסומן $\biguplus_{i\in I} A_i$. אנו רשאים להשתמש באיחוד הזר רק אם הוכחנו שהקבוצות זרות בזוגות
- פעולה חשובה נוספת היא ההפרש הסימטרי,

$$A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = A \cup B \setminus B \cap A$$

ציירו את דיאגרמת $Venn$ של ההפרש הסימטרי.
- נניח כי $A = \{a_1, ..., a_n\}$ ו־ $B = \{b_1, ..., b_m\}$ קבוצות סופיות. אז מספר האיברים ב־ $A \cup B$ הוא לכל היותר $n+m$. יתר על כן, מספר זה שווה $n+m$ אמ"ם הקבוצות A, B זרות
- בספרות וגם בהמשך הרשימות יופיע הסימון $\bigcup X$ ללא קבוצת אינדקסים. הכוונה היא ש־X היא קבוצה של קבוצות ו־ $\bigcup X = \bigcup_{y\in X} y$. באופן דומה מאמצים את הסימון $\bigcap X$. לדוגמא, $\bigcup\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$.
- אם $I = \emptyset$ אז

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \underbrace{\exists i \in I(x \in A_i)}_{always\ \ F}\} = \emptyset$$

הביטוי.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \underbrace{\forall i \in I(x \in A_i)}_{always\ \ T}\}$$

אינו מוגדר שכן הוא אמור להיות קבוצת כל הקבוצות שלפי מסקנה 20 איננה קבוצה. לכן כשחותכים קבוצות חשוב לוודא כי יש לפחות קבוצה אחת משתתפת בחיתוך.

תרגיל 9 1. $\forall i \in I A_i \subseteq B \to \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$

2. $\forall i \in I A_i \supseteq B \to \bigcap_{i\in I} A_i \supseteq B$

3. חשבו את הקבוצות הבאות:

(א) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2})$

(ב) $\epsilon > 0$ $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (q-\epsilon, q+\epsilon)$

(ג) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in} [q + \frac{1}{n+1}, q + \frac{1}{n+1})$

(ד) $\bigcap_{x\in[0,1]} [x, x+1]$

קבוצת החזקה

הגדרה 10 תהא A קבוצה, נגדיר את קבוצת החזקה $P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$ קבוצת כל התתי קבוצות של A.

דוגמאות:

- $P(\{0,1\})=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$
- $P(\{\{1\},2\})=\{\emptyset,\{\{1\}\}.\{2\},\{\{1\},2\}\}$
- $\emptyset,A\in P(A)$

תרגיל 11 $A\subseteq B$ אמ"ם $P(A)\subseteq P(B)$

משפט 12 אם A קבוצה סופית עם n איברים אז, מספר האיברים ב־$P(A)$ הוא 2^n.

הוכחה: נסמן $A=\{a_1,...,a_n\}$. תהא $X\subseteq A$, אז כל איבר ב־A או שייך ל־X או לא שייך ל־X ו־X נקבעת על סמך האיברים שלה. לכל $i=1,...,n$, נשאל האם $a_i\in X$ לשאלה זו יש שתי תשובות אפשריות כן או לא. נניח ידוע לנו התשובות של כל האיברים. לדוגמא:

- a_1 אמר כן
- a_2 אמר לא
- a_3 אמר לא
- $a_4,...,a_n$ אמרו כן

מאוסף תשובות אלה אנו יכולים לחשב במדויק כי $X=\{a_1,a_4,...,a_n\}$. כלומר, בהנתן תת קבוצה של A, אפשר להתאים לה אוסף תשובות. נשים לב כי בהנתן אוסף של תשובות, נקבעת תת קבוצה של A. לכן, כדי לקבוע כמה תתי קבוצות , נספור כמה אפשרויות יש לרשימה של תשובות. ל־a_1 יש שתי אפשרויות ל־a_2 יש שתי אפשרויות וכן הלאה. כלומר יש

$$\underbrace{2\cdot 2....2}_{ntimes}=2^n$$

$\square$

תרגיל 13 מצאו אוסף של תשובות שמתאים ל:$\emptyset,A$.

0.1 זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

עד כה יש לנו את אוביקט הקבוצה שבו אין חזרות ואין חשיבות לסדר. איך נקבל אוביקט בו יש חשיבות לסדר וחזרות? לדוגמא, איך נממש זוג מספרים ממשיים? את המישור הממשי והמרחב הממשי? הגישה הכללית הינה שהמימוש לכשעצמו אינו מעניין, העיקר שהוא משיג את הרעיון. אם כך, המטרה היא להגדיר אוביקט בוא יש חשיבות לסדר ויש חשיבות לחזרות. בתרגול תראו שאפשר להגדיר באופן אחר ולקבל את אותה תכונה.

הגדרה 14 יהיו x,y שתי קבוצות. נגדיר את הזוג הסדור $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

טענה 15 לכל a,b,c,d מתקיים

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח כי $a=c,b=d$ אז $\{a\}=\{c\}\wedge\{a,b\}=\{c,d\}$ לכן $x\in\{\{c\},\{c,d\}\}\leftrightarrow x\in\{\{a\},\{a,b\}\}$ אזי $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח כי $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ אז $\{a\},\{a,b\}\in\{\{c\},\{c,d\}\}$ נחלק למקרים:

1. אם $\{a\}=\{c\}$ אז $a=c$.
   (א) אם $\{a,b\}=\{c,d\}$ או $d=b$ וסיימנו את מקרה זה, או ש־ $d=a$ ואז $d=c$ ובההרח $b=c=d=a$ בפרט $b=d$ לכן בכל מקרה $b=d$
   (ב) אם $\{a,b\}=\{c\}$ אז $a=c=b$ ולכן $\{\{a,b\},\{a\}\}=\{\{a\}\}$ אז $\{c,d\}=\{a\}$ (כי $\{c,d\}\in\{\{a,b\},\{a\}\}$) ולכן $a=b=c=d$ כדרוש.
2. אם $\{a\}=\{c,d\}$ אז $a=c=d$ ולכן $\{c,d\}=\{c\}$ ומתקיים $\{a,b\}=\{a\}$ אזי $a=b=c=d$ כדרוש.

$\square$

הגדרה 16 המכפלה הקרטזית (ע"ש רנה דאקרט) מוגדרת

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A,B\in B\}$$

נגדיר את החזקות של הקבוצה A עבור $n\in N_+$

$$A^1=A,\ \ A^2=A\times A,\ \ A^3=A^2\times A,...,\ \ A^{n+1}=A^n\times A$$

סימון: נסמן $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle\in A^3$ באמצעות $\langle a,b,c\rangle$

תרגיל 17 הראו כי לכל a,b,c,d,a',b',c',d' מתקיים:

$$\langle a,b,c,d\rangle=\langle a',b',c',d'\rangle\Leftrightarrow a=a'\wedge b=b'\wedge c=c'\wedge d=d'$$

דוגמאות:

- $\{1,2\}\times\{3,4\}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
- $\{2,3\}^2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
- אם $A=\{a_1,...,a_n\}$ ו־$B=\{b_1,...,b_m\}$ אז $A\times B=\biguplus_{1\le i\le n}\{a_i\}\times B$ לכן מספר האיברים ב־$A\times B$ שווה ל־ $\underbrace{m+m+m....+m}_{ntimes}=m\cdot n$

טענה 18 1. $A\times(B\cup C)=A\times B\cup A\times C$, $A\times(B\cap C)=A\times B\cap A\times C$

2. אם A,A' זרות אז לכל קבוצה B, $A\times B,A'\times B$ זרות.

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: נראה הכלה דו כיוונית, יהי $x\in A\times(B\cup C)$ אז קיים $a\in A,y\in B\cup C$ כך ש־ $x=\langle a,y\rangle$, נחלק לשני מקרים, אם $y\in B$ אז $\langle a,y\rangle\in A\times B$ ואם $y\in C$ אז $\langle a,y\rangle\in A\times C$, בכל אופן $\langle a,y\rangle\in A\times B\cup A\times C$. הכיוון השני יישאר כתרגיל.

<u>הוכחת 2</u>: נניח בשלילה כי $x\in A\times B\cap A'\times B$, אז $x=\langle a,b\rangle$. $a\in A$ שכן $x\in A\times B$ וגם $a\in A'$ שכן $x\in A'\times B$ זו סתירה לכך ש־ A,A' זרות.

□

n־יות סדורות

נרצה להגדיר אובייקט שיש בו יותר משני איברים עם חשיבות לסדר ועם חזקה. זה נקרא n־יה ומסומן $\langle a_1,...,a_n\rangle$.
נגדיר זאת ברקורסיה על n.
הגדרה: 1־יה סדורה $\langle a\rangle=a$. באופן רקורסיבי מגדירים $n+1$־יה סדורה:

$$\langle a_1,...,a_n,a_{n+1}\rangle=\langle\langle a_1,...,a_n\rangle,a_{n+1}\rangle$$

כלומר זוג סדור (שהוגדר קודם) של n־יה סדורה (שמוגדרת באופן רקורסיבי) והאיבר הימני ביותר.
טענה:(התכונה המרכזית של n־יות סדורות) לכל $a_1,..,a_n,b_1,..,b_n$

$$\langle a_1,..,a_n\rangle=\langle b_1,...,b_n\rangle\leftrightarrow\forall 1\le i\le n.a_i=b_i$$

פרדוקס ראסל

מבחינה היסטורית, עקרון ההפרדה לא היה מנוסח באופן מדויק וברנרד ראסל נתן דוגמא זו כדי להמחיש כי חוסר זהירות בניסוח האקסיומות עלול להוביל לפרדוקסים. על כן, פרדוקס ראסל איננו פרדוקס אלא דוגמא לבעיה שעלולה להיווצר עקב חוסר דיוק. רעיון הפרדוקס משול לסיפור הבא: בעיר מסוימת יש ספר שמספר את כל מי ורק מי שלא מספר את עצמו. זו סיטואציה פרדוקסיאלית שכן יש שני מצבים אפשריים, או שהספר מספר את עצמו או שהספר לא מספר את עצמו. אם הספר מספר את עצמו אז לפי הגדרה הוא לא מספר את עצמו וזו סתירה. אם הספר לא מספר את עצמו אז לפי הגדרה הספר אמור היה לספר את עצמו ושוב הגענו לסתירה.

משפט 19 קיימת נוסחה $\phi(x)$ כך ש־ $\{x \mid \phi(x)\}$ איננה קבוצה.

הוכחה: נתבונן בנוסחה $x \notin x$. נראה כי קיום של הקבוצה $\{x \mid x \notin x\}$ מוביל לסתירה. הסתירה דומה לזו מין ההקדמה.
נניח בשלילה כי קיימת קבוצה $D = \{x \mid x \notin x\}$, נחלק לשני מקרים:
מקרה ראשון: $D \in D$ במקרה זה לפי הגדרת D, עבור $x = D$ לא מתקיים $x \notin x$ ולכן $D \notin D$, סתירה.
מקרה שני: $D \notin D$, שוב לפי הגדרה D מתקיים $D \in D$ ושוב הגענו לסתירה. אם בכל מקרה הגענו לסתירה, בהכרח לא קיימת הקבוצה D.

□

מסקנה 20 לא קיימת קבוצת כל הקבוצות.
הוכחה: אחרת, תהא X קבוצה כך ש־$\forall y(y \in X)$. לפי עקרון ההפרדה, $\{x \mid x \notin x\} = \{x \in X \mid x \notin x\}$ היא קבוצה, סתירה למשפט 19.

□

הערה:

- בפרדוקס ראסל הגדרנו את הקבוצה $D = \{x \mid x \notin x\}$, נשים לב כי קבוצה טיפוסית שייכת ל־D, לדוגמא $\emptyset \in D$ שכן בקבוצה הריקה אין שום איבר ובפרט $\emptyset \notin \emptyset$. גם $\{\emptyset\} \notin D$.
- בהמשך להערה הקודמת, האם בכלל תתכן קבוצה $x \notin D$? קבוצה כזו צריכה לקיים $x \in x$. ייתכן וקיימות כאלה קבוצות אבל אנחנו לא נתקליס בהם במתמטיקה ועל כן לא רלוונטיות לבעיית המתמטיקה (ולמעשה יש אקסיומה שאומרת כי לא קיימת קבוצה כזו). כאן אין אנו מניחים כי לכל קבוצה $x \notin x$.