2 יחסים [1]

כל אובייקט מתמטי הוא קבוצה וכל טענה מתמטית אפשר לרשום באמצעות הסימנים הלוגיים ויחס השייכות. איך אמורים לרשום טענות מתמטיות יסודיות כמו:

- $1 \leq 2,\ \ 3 < \pi,\ \ sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- "הנקודה $\langle 1,1 \rangle$ נמצאת על הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$"
- דוגמא מאלגברה לינארית, איך להגדיר פורמלית את המושג A, B מטריצות דומות?

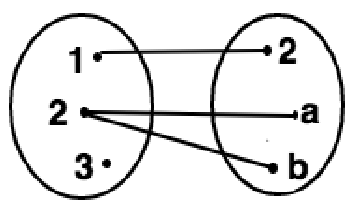
הדבר שמאפיין מושגים אלה, הינו שהם מדברים על קשר כלשהו בין שני אובייקטים. $1 < 2$ מדבר על קשר כלשהו בין 1 ו־2. $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ מדבר על איזשהו קשר בין $\frac{\pi}{2}$ ו־1. הדרך הפורמלית לתאר קשר כזה נקראת יחס. עוד נראה בהמשך איך להבין פונקציות כמקרה פרטי של יחסים.

יחסים

הגדרה 1 יהיו A, B קבוצות. R נקרא יחס מעל A, B אם $R \subseteq A \times B$.

דוגמאות:

- $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$ זה יחס מעל הקבוצות $\{1,2\}, \{1,2,3\}$ כי
$$R \subseteq \{1,2\} \times \{1,2,3\}$$
R הוא גם יחס מעל הקבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{N}$.
- $\{\langle 1, \sqrt{2} \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$ אינו יחס מעל $\mathbb{N}, \mathbb{N}$.
- $$id_{\mathbb{N}} = \{\langle n,n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \leq = \{\langle n,m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} n + k = m\}, \quad < = \{\langle n,m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+ n + k = m\}$$
שלושה יחסים על $\mathbb{N}, \mathbb{N}$. שימו לב כי מתקיים
$$\leq = < \cup id_{\mathbb{N}}$$
- $A = \{\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$ לדוגמא $\langle 3+\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \in A$, $\langle 1, \pi \rangle \notin A$.
- $R = \{\langle X,Y \rangle \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{Z}) \mid X \subseteq Y\}$. R יחס מעל $P(\mathbb{N}), P(\mathbb{Z})$.
- נוח לדמיין יחס כאוסף של קווים שמחברים בין שתי קבוצות, לדוגמא היחס $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,a \rangle, \langle 2,b \rangle\}$ מעל הקבוצות $\{1,2,3\}, \{2,a,b\}$:



<u>זיכרו!</u> יחס זו תת קבוצה של זוגות סדורים ותו לא. לא כל יחס מושרה מרעיון טבעי. הדוגמא הראשונה היא יחס בלי משמעות "אמיתית" (כמובן שאפשר לכפות משמעות).

הגדרה 2 . נסמן $aRb \leftrightarrow \langle a,b \rangle \in R$ (לדוגמא $1 \leq 2$ כיוון ו־$\langle 1,2 \rangle \in \leq$)

2. נאמר כי R יחס מעל הקבוצה A אם R יחס מעל הקבוצות A, A.

3. לכל קבוצה A יש יחס מיוחד מעל A הנקרא יחס הזהות $id_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$.

4. $dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R)\}$.

5. $Im(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A(\langle a, b\rangle \in R)\}$.

דוגמאות:

- $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N}(y^2 + z = x)\}$ **אז**

$dom(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}\langle x, y\rangle \in R\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}\exists z \in \mathbb{N}(y^2 + z = x)\} = [0, \infty)$.

- $sin = \{\langle x, sin(x)\rangle \mid x \in [0, \frac{\pi}{2})\}$ **אזי** $Im(sin) = [0, 1)$.
- $dom(\{\langle\{0\}, X \setminus \{0\}\rangle \mid X \in P(\mathbb{N})\}) = \{\{0\}\}$, $Im(\{\langle\{0\}, X \setminus \{0\}\rangle \mid X \in P(\mathbb{N})\}) = P(\mathbb{N}_+)$

הגדרה 3 יהי R יחס מעל A, B. היחס ההופכי ל־R הוא היחס $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid aRb\}$.

טענה 4 1. $(R^{-1})^{-1} = R$.

2. $dom(R^{-1}) = Im(R)$

הוכחה:

<u>הוכחה 1</u>: זו טענת שיוויון קבוצות אז נוכיח ע"י שרשרת שקילויות. יהי $\langle a, b\rangle$, לפי הגדרת היחס ההופכי מתקיים:

$\langle a, b\rangle \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in R$.

<u>הוכחה 2</u>: שוב נוכיח ע"י שרשרת שקילות. יהי $b \in B$, לפי הגדרת היחס ההופכי מתקיים:

$b \in dom(R^{-1}) \Leftrightarrow \exists a \in A \;\; bR^{-1}a \Leftrightarrow \exists a \in A \;\; aRb \Leftrightarrow b \in im(R)$

□

הגדרה 5 יהי R יחס מעל A, B ו־S יחס מעל B, C. נגדיר את ההרכבה שלהם

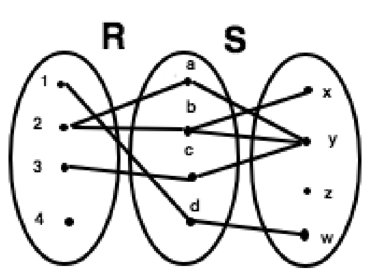
$$S \circ R = \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid \exists b \in B(aRb \wedge bSc)\}$$

דוגמאות:

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}^{-1} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$.
- נוכח לדמיין הרכבה באמצעות רעיון החיצים שציינו בהתחלה, ניקח לדוגמא את היחסים

$R = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$ **מעל** $\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c, d\}$
$S = \{\langle a, y\rangle, \langle b, x\rangle, \langle b, y\rangle, \langle c, y\rangle, \langle d, w\rangle\}$ **מעל** $\{a, b, c, d\}, \{x, y, z, w\}$

בציור



נחשבן $S \circ R = \{\langle 1, w\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, y\rangle\}$. בציור, אלו בדיוק כל הזוגות של נקודות שיש בינהם מסלול מקשר.

הערות:

1. אם R יחס מעל A, B אז R^{-1} הוא יחס מעל B, A.
2. אם R יחס על A, B ו־S יחס על B, C אז $S \circ R$ יחס על A, C.

טענה 6 1. אם R יחס מעל A, B, S יחס על B, C ו־T יחס מעל C, D אז $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. (אסוציטיביות ההרכבה)

2. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
3. $R \circ id_A = R$
4. $id_B \circ R = R$

הוכחה: נשאיר את 4 כתרגיל.
<u>הוכחת 1:</u> שוב זו טענה של שיוון קבוצות. יהי $\langle a, d\rangle \in A \times D$ אז מתקיים:

$$\langle a, d\rangle \in T \circ (S \circ R) \Leftrightarrow \exists c \in C(a(S \circ R)c \wedge cTd) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C \exists b \in B(aRb \wedge bSc \wedge cTd) \Leftrightarrow \exists b \in B(aRb \wedge b(T \circ S)d \Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in (T \circ S) \circ R$$

<u>הוכחת 2:</u> נוכיח שיוויון קבוצות, יהי $\langle x, y\rangle$ זוג סדור אזי

$$\langle x, y\rangle \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in S \circ R \Leftrightarrow \exists z \ \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle z, x\rangle \in S \Leftrightarrow \exists z \ \langle z, y\rangle \in R^{-1} \wedge \langle x, z\rangle \in S^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

<u>הוכחת 3:</u> יהי $\langle x, y\rangle \in R$, לפי הגדרה $\langle x, x\rangle \in id_A$ ולכן $\langle x, y\rangle \in R \circ id_A$. בכיוון השני, אם $\langle a, y\rangle \in R \circ id_A$ אז יש z כך ש־ $\langle a, z\rangle \in id_A$ וגם $\langle z, y\rangle \in R$. מהגדרת יחס הזהות נובע כי $a = z$, ולכן $\langle a, y\rangle = \langle z, y\rangle \in R$.

□

יחסי שקילות

כעת נצמצם את הדיון ליחסים מעל קבוצה אחת. יחס שקילות מאפשר להגדיר "שני אובייקטים שקולים" לפי פרמטרים שאנחנו בוחרים שהם יהיו שקולים ומבלי שיתקיים שיוויון פורמלי של קבוצות.
כדי להבין את הצורך ביחסי שקילות נעבוד עם דוגמא. נניח ברצונינו לממש את הרעיון של עיגול ברדיוס $r > 0$. כיצד נעשה זאת? תחילה נגדיר מהו עיגול ברדיוס r סביב הנקודה $\langle a, b\rangle$.

$$C_r(\langle a, b\rangle) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)2 = r^2\}$$

אם כך, המימוש שלנו לעיגול הוא תת קבוצה של המישור הממשי. כדי להגדיר את המושג עיגול ברדיוס r, מה שנעשה הוא לזהות בין כל שני עיגולים ברדיוס r כאובייקט אחד. יחסי שקילות הם הדרך שלנו לממש את רעיון הזיהוי בין אובייקטים באמצעות קבוצות.

הגדרה 7 יהי R יחס מעל A. נאמר כי :

1. R רפלקסיבי אם מתקיים $\forall a \in A(aRa)$
2. R סימטרי אם $\forall a, b \in A(aRb \rightarrow bRa)$.
3. R נקרא טרנזיטיבי אם $\forall a, b, c \in A(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$
4. R נקרא יחס שקילות אם R הוא יחס רפלקטיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות:

- id_A, $A \times A$ הם יחסי שקילות.
- $R = \{\langle n, m\rangle \mid \exists k n + k^2 = m\}$ הוא יחס רפלקסיבי, לא סימטרי ולא טרנזיטיבי כי לדוגמא $1 + 1^2 = 2$ $2 + 1^2 = 3$ אבל אבל ההפרש בין $3 - 1 = 2$ אינו ריבוע של מספר טבעי.
- יחס "צאצא של" על קבוצת בני האדם. הוא יחס לא רפלקסיבי כי לדוגמא אני לא צאצא של עצמי. לא סימטרי כי אני צאצא של אבא שלי אבל אבא שלי לא צאצא שלי. כן טרנזיטיבי כי אם אדם א' צאצא של אדם ב' ואדם ב' צאצא של אדם ג' אז אדם א' צאצא של אדם ג'. לעומת זאת "אח של" הוא כן יחס שקילות (שני אנשים הם אחים אם יש להם את אותם שני הורים)

- יהי $n \in \mathbb{Z}$. למי שלא מכיר, אומרים כי m_1, m_2 קונגרואנטים מודולו n ומסמנים $m_1 \equiv m_2 mod n$ אם n מחלק את $m_1 - m_2$ או באופן שקול, של־m_1, m_2 אותה שארית חלוקה ב־n. נגדיר את היחס

$$n \cdot \mathbb{Z} = \{\langle m_1, m_2 \rangle \mid m_1 \equiv m_2 \ mod n\}.$$

זה ייחס שקילות ב־ $\mathbb{Z}$.
הוכחה: רפלקסיביות־ לכל $m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $m - m = 0 = n \cdot 0$ לכן $m \ n \cdot \mathbb{Z} \ m$.
סימטריות־ אם $n_2 \ n \cdot \mathbb{Z} \ n_1$ אז $n_1 - n_2 = k \cdot n$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ אזי $n_2 - n_1 = (-k) \cdot n$ וגם $(-k) \in \mathbb{Z}$ לכן $n_1 \ n \cdot \mathbb{Z} \ n_2$.
טרנזיטיביות־

$$n_1 - n_2 = k_1 \cdot n, \ \ n_2 - n_3 = k_2 \cdot n$$

אזי

$$n_1 - n_3 = n_1 - n_2 + n_2 - n_3 = (n_1 - n_2) + (n_2 - n_3) = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n = (k_1 + k_2) \cdot n$$

ולכן $n_3 \ n \cdot \mathbb{Z} \ n_1$.

- בהרבה מקרים מגדירים יחס שקילות על קבוצה A באופן הבא:

$$a \sim b \Leftrightarrow \phi(a,b) \ is \ true.$$

באשר $\phi(a,b)$ איזושהי תכונה. הכוונה היא להגדיר את היחס

$$\sim = \{\langle a,b \rangle \in A^2 \mid \phi(a,b)\rangle\}$$

כמובן שזה לא פותר אותנו מלהוכיח כי זה יחס שקילות. לדוגמא נגדיר על $\mathbb{R}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

נראה כי זה יחס שקילות,
רפלקסיביות־ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ ולכן $x \sim x$.
סימטריות־ נניח $x \sim y$, אזי $x - y \in \mathbb{Z}$. אם כך, $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$ ולכן $y \sim x$.
טרנזיטיביות־ $x \sim y, y \sim z$ אזי $x - y, y - z \in \mathbb{Z}$ ולכן $x - z = x - y + y - z \in \mathbb{Z}$ השתמשנו בכך שסכום של מספרים שלמים הוא מספר שלם. נסמן יחס זה ב־$Res = \{\langle x,y \rangle \mid x \sim y\}$. שימו לב כי היחס $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ הוא למעשה id_A.

- בפתיחה דיברנו על זיהוי כדורים עם אותו רדיוס. נגדיר יחס על קבוצת העיגולים

$$Circ = \{C_r(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+\}, \ Rad = \{\langle C_{r_1}(a_1,b_1), C_{r_2}(a_2,b_2) \rangle \in (Circ)^2 \mid r_1 = r_2\}$$

קל לראות כי זה יחס שקילות על הקבוצה $Circ$.

טענה 8 יהי R יחס מעל A אזי

1. R רפלקסיבי אמ"ס $id_A \subseteq R$.
2. R סימטרי אמ"ס $R^{-1} = R$
3. R טרנזיטיבי אמ"ס $R \circ R \subseteq R$

הוכחה: נשאיר את 1־2 כתרגילים ונוכיח את 3: נניח כי R טרנזיטיבי, ויהי $\langle a,c \rangle \in R \circ R$, מהגדרת ההרכבה קיים $b \in A$ כך ש־ $\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle \in R$. מטרנזיטיביות R נובע כי $\langle a,c \rangle \in R$ ולכן $R \circ R \subseteq R$. בכיוון השני, נניח כי $R \circ R \subseteq R$. נוכיח כי R טרנזיטיבי, יהיו $\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle \in R$ אזי $\langle a,c \rangle \in R \circ R$ לפי הגדרת ההרכבה. מההנחה $\langle a,c \rangle \in R$ כדרוש.

□

הגדרה 9 יהי R יחס שקילות מעל A, נגדיר:

1. מחלקת השקילות של איבר $x \in A$, $[x]_R = \{y \in A \mid xRy\} \subseteq A$
2. קבוצת המנה (ולפעמים אומרים "A מודולו R") , $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq P(A)$.

דוגמאות:

- $[n]_{id_{\mathbb{N}}} = \{m \in \mathbb{N} \mid \langle n,m \rangle \in id_{\mathbb{N}}\} = \{n\}$ אם כך $\mathbb{N}/id_{\mathbb{N}} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- $\mathbb{N}/\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\{\mathbb{N}\}$ ולכן $[n]_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}=\{m \mid \langle n,m\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$. זכרו כי אין אנו רושמים את אותו איבר פעמיים בקבוצה, ולכן בקבוצת המנה בדיוק איבר אחד.

- יחס "אח של" על בני האדם

$$[\text{Kim Kardashian}]_{brotherhood}=\{\text{Kim Kardashian, Kourtney Kardashian, Khloé Kardashian, Rob Kardashian}\}$$

- $$[0]_{3\cdot\mathbb{Z}}=\{0,3,-3,6,-6,...\}=\{3\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\},\quad [n]_{3\cdot\mathbb{Z}}=\{n+3\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\}$$

  זה תרגיל פשוט להוכיח כי יש רק 3 מחלקות שקילות שונות $[0]_{3\cdot\mathbb{Z}},\ [1]_{3\cdot\mathbb{Z}},\ [2]_{3\cdot\mathbb{Z}}$. ולכן

  $$\mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z}=\{[0]_{3\cdot\mathbb{Z}},[1]_{3\cdot\mathbb{Z}},[2]_{3\cdot\mathbb{Z}}\}$$

- ביחס Res שהוגדר קודם לכן

  $$[x]_{Res}=\{x+z \mid z\in\mathbb{Z}\}$$

  מה שקובע כאן מחלקת שקילות הוא החלק השברי של x כלומר $\bar{x}=x-\lfloor x\rfloor\in[0,1)$ ולכן

  $$\mathbb{R}/Res=\{[i]_{Res} \mid i\in[0,1)\}$$

- ביחס Rad על $Circ$,

  $$[C_1(0,0)]_{Rad}=\{C_1(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

  . מה שקובע כאן מחלקת שקילות הוא הרדיוס ולכן לכל $r>0$ נקבל מחלקת שקילות שונה,

  $$Circ/Rad=\{[C_r(0,0)]_{Rad} \mid r>0\}$$

  אם כך, המושג הפורמלי שקיבלנו לעיגול עם רדיוס r הוא פשוט $[C_r(0,0)]_{Rad}$.

טענה 10 יהי R יחס שקילות על A. לכל $a,b\in A$

א. או ש־ $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$ או ש־ $[a]_R=[b]_r$.

ב. $aRb\leftrightarrow[a]_R=[b]_R$.

ג. $\neg(aRb)\leftrightarrow[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$.

הוכחה:
הוכחת 1: נניח כי $[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$ אז קיים $z\in[a]_R\cap[b]_R$. צריך להוכיח כי $[a]_R=[b]_R$. נוכיח הכלה בכיוון אחד $[b]_R\subseteq[a]_R$ ומסימטריה יינבע כי $[a]_R\subseteq[b]_R$. יהי $c\in[b]_R$ אזי bRc מסימטריות cRb. לפי הגדרת z, $bRz\wedge aRz$. שוב מסימטריות, zRa כעת מטרנזיטיביות $(cRb\wedge bRz)$ מתקיים cRz, שוב מטרנזיטיביות $(cRz\wedge zRa)$ מתקיים cRa . לבסוף, מסימטריות נובע aRc. אזי $c\in[a]_R$ כדרוש.
הוכחת 2:
$aRb\Rightarrow[a]_R=[b]_R$: נניח כי aRb, לפי הגדרת מחלקת שקילות, נובע כי $b\in[a]_R$. מרפלקסיביות נובע כי $b\in[b]_R$, ולכן $b\in[a]_R\cap[b]_R$. מכאן נובע כי $[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$. מסעיף א', נסיק כי $[a]_R=[b]_R$. $[a]_R=[b]_R\rightarrow aRb$־ נניח כי $[a]_R=[b]_R$, אז שוב מרפלקסיביות $b\in[b]_R$ ומשיוויון קבוצות, $b\in[a]_R$. לפי הגדרת מחלקת שקילות, נובע כי aRb.
הוכחת 3: נובע מ־2 ו־1 שכן $\neg(aRb)\leftrightarrow\neg([a]_R=[b]_R)\leftrightarrow[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$

□

קבוצת המנה מוגדרת באמצעות עקרון ההחלפה וברוב המקרים, תהיינה כפילויות במובן שעבור a־ים שונים נקבל את אותה מחלקת שקילות. ההגדרה הבאה מאפשרת לדבר על אוסף של a־ים בו אין כפילויות.

הגדרה 11 יהי R יחס שקילות על A. $A'\subseteq A$ נקראת מערכת נציגים של היחס R אם

א. $\forall a,a'\in A'(a\neq a'\rightarrow\neg(aRa'))$ (ובאופן שקול $[a]\cap[a']=\emptyset$).

ב. $\forall a\in A\exists a'\in A'(aRa')$ (ובאופן שקול $A/R=\{[a']_R \mid a'\in A'\}$).

הגדרה 12 תהא A קבוצה. אוסף $\Pi\subseteq P(A)\setminus\{\emptyset\}$ נקרא חלוקה של A אם :

א. $\forall X,Y\in\Pi(X\neq Y\to(X\cap Y=\emptyset))$

ב. $\biguplus_{X\in\Pi} X=A$

ג. $\emptyset\notin\pi$

תרגיל: הוכיחו כי אם Π_1,Π_2 חלוקות של אותה הקבוצה A אזי $\Pi_1\subseteq\Pi_2\to\Pi_1=\Pi_2$.

הגדרה 13 תהא π חלוקה של A, נגדיר את היחס המושרה מ־π, המסומס R_π, להיות היחס:

$$R_\pi=\biguplus_{X\in\pi} X^2$$

תרגיל: הוכיחו כי $R_\pi=\{\langle a,b\rangle\in A^2\mid\exists x\in X.a,b\in x\}$.

כעת נציג את הקשר בין הגדרה 12 לבין קבוצת המנה.

משפט 14 א. יהי R יחס שקילות מעל A אז A/R זו חלוקה של A (נקראת החלוקה המושרית על A מ־R).

ב. תהא Π חלוקה של A אז היחס המושרה על A, R_Π הינו יחס שקילות על A.

ג. אלה פעולות הופכיות, דהיינו, $A/(R_\Pi)=\Pi$ ו־ $R_{(A/R)}=R$.

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: נראה כי A/R זו חלוקה של A נוודא את הגדרה 12. (1) לפי טענה 10 אם $[a]_R,[a']_R\in A/R$ מחלקות שקילות שונות אז $[a]_R\cap[a']_R=\emptyset$. (2) לכל $a\in A$ $a\in[a]_R$ לכן

$$\biguplus_{X\in A/R} X=A$$

(3) מכיוון ש־R יחס רפלקסיבי, לכל $[a]_R\in A/R$ מתקיים

$$a\in[a]_R\neq\emptyset$$

ולכן A/R חלוקה.

<u>הוכחת 2</u>: נוכיח כי $R_\Pi=\biguplus_{X\in\Pi} X\times X$ הינו יחס שקילות. היחס רלפלקסיבי שכן מתכונה (2) של חלוקה לכל $a\in A$ קיים $X\in\Pi$ כן ש־ $a\in X$. אם כך,

$$\langle a,a\rangle\in X\times X\subseteq R_\Pi$$

נראה סימטריות, יהי $\langle a,b\rangle\in R_\pi$ אז קיים $X\in\Pi$ כך ש־ $\langle a,b\rangle\in X\times X$ לכן $a,b\in X$ ומזה נובע כי

$$\langle b,a\rangle\in X\times X\subseteq R_\Pi$$

טרנזיטיביות, נניח כי $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in R_\Pi$ אזי קיימים $X,Y\in\Pi$ כך ש־ $a,b\in X,$ ו־$b,c\in Y$. מכיוון ו־$b\in X\cap Y$ בהכרח $X=Y$ ולכן

$$\langle a,c\rangle\in X\times X\subseteq R_\pi$$

<u>הוכחת 3</u>: לפי הגדרה,

$$R_{A/R}=\biguplus_{X\in A/R} X\times X=\bigcup_{a\in A}[a]_R\times[a]_R$$

לכן מספיק להוכיח כי

$$\bigcup_{a\in A}[a]_R\times[a]_R=R$$

נוכיח זאת, יהי $\langle a,b\rangle\in R$, לפי טענה 10 $[a]_R=[b]_R$ לכן

$$\langle a,b\rangle\in[a]_R\times[b]_R=[a]_R\times[a]_R\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]_R\times[a]_R$$

בכיוון השני, אם $\langle a,b\rangle\in[a']_R\times[a']_R$ אז לפי טענה 10 $aRa'\wedge a'Rb$ ולכן aRb כלומר $\langle a,b\rangle\in R$. עבור השיוויון השני, לפי סעיף א אנו יודעים כי $\Pi,A/(R_\Pi)$ הן חלוקות של אותה הקבוצה A. לפי התרגיל, מספיק להוכיח הכלה בכיוון אחד לכל $X\in\Pi$ מתקיים כי $X\neq\emptyset$ ניקח $x\in X$, מתקיים

$$[x]_{R_\Pi}=\{a\in A\mid\langle x,a\rangle\in R_\Pi\}=\{a\in A\mid\langle x,a\rangle\in X\times X\}=X$$

$\square$

דוגמאות:

- לכל קבוצה A, היחסים $id_A, A\times A$ הם יחסי שקילות ב־A. מחלקות השקילות הן $[a]_{id_A}=\{a\},\ \ [a]_{A\times A}=A$ ובהתאם החלוקות המושרות הן

$$\{\{a\}\mid a\in A\}=A/id_A,\quad \{A\}=A/A\times A$$

ביחס id_A, אפשר לבחור מערכת נציגים A וביחס $A\times A$ כל איבר ב $a\in A$ ייקיים כי $\{a\}$ מערכת נציגים.

- ביחס $3\cdot\mathbb{Z}$, מתקיים לדוגמא כי $[0]=\{3\cdot n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ החלוקה המושרית על $\mathbb{Z}$ היא

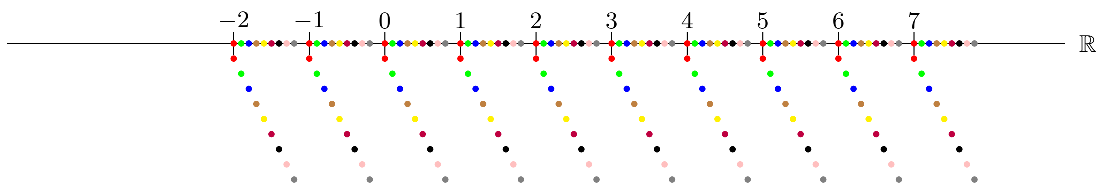
$$\mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z}=\{\{3k\mid k\in\mathbb{Z}\},\{3k+1\mid k\in\mathbb{Z}\},\{3k+2\mid k\in\mathbb{Z}\}\}$$

ומערכות נציגים אפשריות הן: $\{0,1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{0,5,7\}$. הקבוצה $\{0,1,2,3\}$ איננה מערכת נציגים כי $3\ (3\cdot\mathbb{Z})\ 0$.

- ביחס Res על $\mathbb{R}$ ראינו כי $[0,1)$ הינה מערכת נציגים. החלוקה המושרית היא

$$\{\{i+z\mid z\in\mathbb{Z}\}\mid i\in[0,1)\}$$

אם נצבע את $\mathbb{R}$ לפי האיברים השונים בחלוקה נקבל:



מערכות נציגים נוספות: $(0,1)\cup\{2\}$

- נתבונן בחלוקה של $P(\mathbb{N})$

$$\Pi=\{\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\notin X\},\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\in X\}\}$$

יחס השקילות המושרה הינו

$$R_\Pi=\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\in X\}\times\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\in X\}\cup\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\notin X\}\times\{X\subseteq\mathbb{N}\mid 17\notin X\}$$

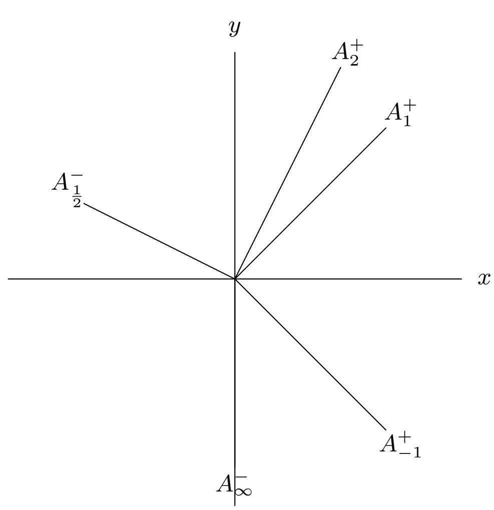
או באופן מפורש

$$X\sim Y\Leftrightarrow(17\in X\wedge 17\in Y)\vee(17\notin X\wedge 17\notin Y)\Leftrightarrow 17\notin X\Delta Y$$

- ניקח חלוקה של $\mathbb{R}^2\setminus\{\langle 0,0\rangle\}$ (המישור ללא ראשית הצירים). לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$A_\lambda^+=\{\langle x,y\rangle|x\in(0,\infty),\ \ y=\lambda x\},\ A_\infty^+=\{\langle 0,y\rangle\mid y\in(0,\infty)\}$$
$$A_\lambda^-=\{\langle x,y\rangle|x\in(-\infty,0),\ \ y=\lambda x\}\ \ A_\infty^-=\{\langle 0,y\rangle\mid y\in(-\infty,0)\}$$

הוכיחו כי זו אכן חלוקה. בציור מתקבלת החלוקה הבאה:

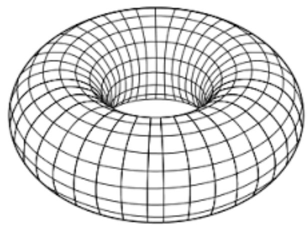


היחס המושרה הוא באופן פורמלי הוא

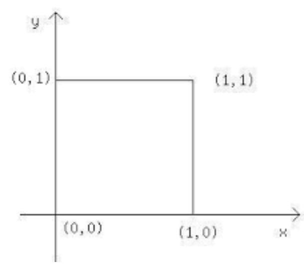
$$\langle x,y\rangle\sim\langle a,b\rangle\Leftrightarrow[x\cdot a>0\wedge\exists\lambda(\langle x,y\rangle=\langle\lambda\cdot a,\lambda\cdot b\rangle)]\vee[a=x=0\wedge b\cdot y>0]$$

באופן אינטואיטיבי $\langle x,y\rangle\sim\langle a,b\rangle$ אם יש קרן שיוצאת מהראשית שעוברת דרך הנקודות $\langle x,y\rangle,\langle a,b\rangle$. מעגל ברדיוס $r>0$ מהווה מערכת נציגים.

- נניח אנחנו רוצים להגדיר מבנה מתמטי שנראה כמו דונאט, אפשר באופן ישיר על ידי משוואות לתאר צורה זו כתת קבוצה של $\mathbb{R}^3$. דרך נוספת לעשות זאת היא באמצעות יחסי שקילות:



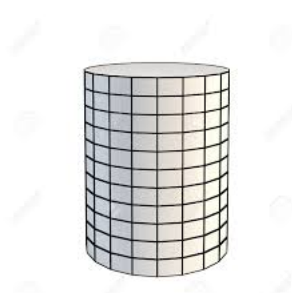
ניקח את הריבוע $[0,1]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^2$



ונגדיר עליו יחס שקילות ע"י הדבקת ה"שפות". תחילה נדביק את הדפנות $[0,1]\times\{0\}$ ו־$[0,1]\times\{1\}$. פורמלית נוסיף ל־$id_{[0,1]\times[0,1]}$ את הזוגות:

$$\{\langle\langle 0,i\rangle,\langle 1,i\rangle\rangle\mid i\in[0,1]\}$$

עד כה קיבלנו גליל



נדביק את דפנות הגליל כדי לקבל את הדונאט ע"י הוספת הזוגות

$$\{\langle\langle i,1\rangle,\langle i,0\rangle\rangle\mid i\in[0,1]\}$$

נשאיר כתרגיל לקורא את הבדיקה שזה אכן יחס שקילות על $[0,1]\times[0,1]$ וכי האינטואיציה שלנו שהצורה הגיאומטרית המתקבלת היא דונאט אכן נכונה, כלומר שבקבוצת המנה כל נקודה פנימית מהווה מחלקת שקילות נפרדת ונקודות בדפנות הריבוע מודבקות עם הנקודות המתאימות. לקריאה מתקדמת על בניות כאלו ראו: טבעת מוביוס ובקבוק קליין.