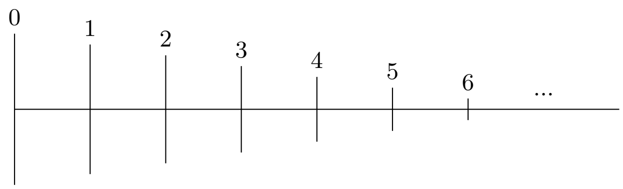
7 סודרים[1]

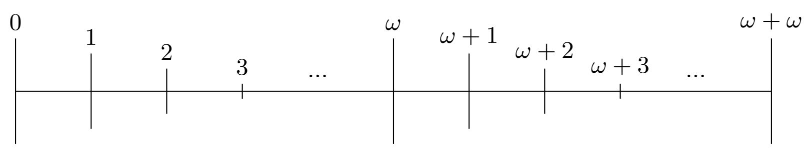
סודרים הם קבוצות יסודיות שמכלילות במובן מסוים את המספרים הטבעים. הם מהווים נציגים לכל סדר טוב אפשרי, כלומר כל סדר טוב יתברר כאיזומורפי לאחד

איך לדמיין סודרים?

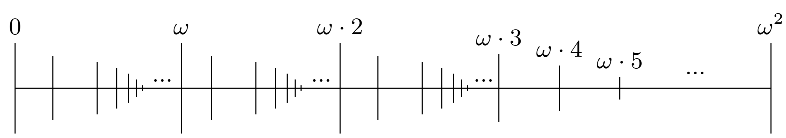
יש לנו שתי פעולות: $+1, sup$ באמצעותן אנחנו בונים את הסודרים בהדרגה.

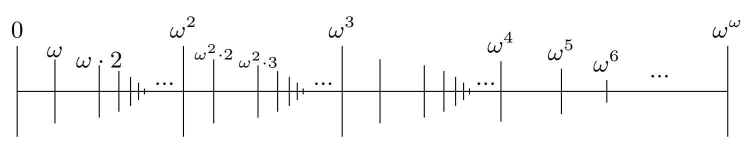


כעת יש בידינו את קבוצת הסודרים $\{0,1,2,...\}$ נהוג לסמן קבוצה זו ב־ω או כפי שכבר ראינו $\mathbb{N}$. מאוחר יותר נראה כי ω אכן סודר ולמעשה שווה לחסם עליון הקטן ביותר של הטבעיים. אפשר להמשיך ל־$\omega+1=\omega\cup\{\omega\}, \omega+2, \omega+3, ...$ ולבסוף לקבל את קבוצת הסודרים $\{\omega,\omega+1,...\}$ ונגדיר $\omega\cdot 2=\omega+\omega=\cup\{\omega,\omega+1,..\}$



באותו אופן אפשר להמשיך לבנות את $\omega\cdot 2+\omega=\omega\cdot 3, \omega\cdot 3+\omega$ וכן הלאה עד שמקבלים את הקבוצת הסודרים $\{\omega,\omega\cdot 2,\omega\cdot 3,...\}$, נגדיר $\omega^2=\cup\{\omega,\omega\cdot 2,...\}$.





נרצה לממש את הרעיון של סודרים באמצעות האובייקטים היסודיים ביותר שיש לנו בתורת הקבוצות: $\emptyset, \in$. שימו לב כי אם X קבוצה, אפשר להגדיר את היחס הבא: $\in_X=\{\langle y,z\rangle\in X^2 \mid y\in z\}$. לעיתים נדירות היחס הזה יוצא סדר ולעיתים עוד יותר נדירות זה יוצא סדר טוב. תנאי הכרחי לכך שיהווה סדר הוא טרנזיטיביות

הגדרה 1 קבוצה X תקרא טרנזיטיבית אם $\forall y(y\in X\to y\subseteq X)$. באופן שקול, $\forall y\in X\forall z\in y(z\in X)$.

דוגמאות: $\emptyset, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ הן קבוצות טרנזיטיביות.

תרגיל 2 יהיו $\{A_i \mid i\in I\}$ משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אזי $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ קבוצות טרנזיטיביות.

הגדרה 3 קבוצה X תקרא סודר אם X טרנזיטיבית ויחס השייכות עליה הוא סדר טוב, כלומר $\langle X,\in_X\rangle$ קבוצה סדורה היטב. נהוג לסמן סודרים ב־$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon....$.

דוגמאות: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ הם סודרים. $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ לא סודר מכיוון ו־ $\emptyset,\{\{\emptyset\}\}$ הם איברים של הקבוצה אשר אינם ברי השוואה ביחס $\in$, ועל כן היחס אינו מלא.

טענה 4 1. לכל סודר α, $\alpha\notin\alpha$.

2. אם α סודר ו־$x \in \alpha$ אז גם x סודר.

3. יהיו α, β סודרים $\beta \subsetneq \alpha \to \beta \in \alpha$.

הוכחה:
<u>הוכחת 1</u> נניח בשלילה כי $\alpha \in \alpha$. אז ב־α יש איבר שמתייחס לעצמו הלוא הוא α. בסתירה לכך ש־$\in$ סדר טוב (ולכן חזק) על α.
<u>הוכחת 2</u>: יהי $x \in \alpha$, נוכיח כי x סודר. x טרנזיטיבית, שכן יהיו $x \ni z \ni w$. מכיוון ו־α סודר, $z, w \in \alpha$ ו־$\in$ סדר על α ובפרט טרנזיטיבי. מתרגיל 11 בפרק 5, $x \subseteq \alpha$ ו־$\in$ סדר טוב על α, אזי $\in$ סדר טוב על x.
<u>הוכחת 3</u>: נניח כי $\beta \subsetneq \alpha$, נגדיר $\gamma = \min_{\in}(\alpha \setminus \beta)$ (מוגדר היטב כי $\beta \neq \alpha$) ונוכיח כי $\gamma = \beta$ זה יסיים את ההוכחה. יהי $\delta \in \beta$, מכיוון ו־$\beta \subseteq \alpha$, נקבל כי $\delta \in \alpha$, אז ו־ δ, γ ברי השוואה. לא ייתכן $\gamma \in \delta$ או $\gamma = \delta$ שכן זה היה גורר כי $\gamma \in \beta$ ולפי הגדרת γ, $\gamma \in \alpha \setminus \beta$, סתירה. לכן $\delta \in \gamma$. בכיוון השני, אם $\delta \in \gamma$ אז $\delta \in \alpha$ ו־$\delta \in \beta$, אחרת, מגיעים לסתירה למינימליות γ.

$\square$

סימון: במקום לרשום $\alpha \in \beta$ נרשום $\alpha < \beta$ ונרשום $\alpha \leq \beta$ אם מתקיים $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ (שקול ל־$\alpha \subseteq \beta$).

מסקנה 5 לכל סודר α, $\alpha = \emptyset \vee \emptyset < \alpha$. ובפרט $\emptyset$ זה הסודר הקטן ביותר.

הוכחה: אם $\alpha = \emptyset$ סיימנו, קיים $\beta = \min(\alpha, \in)$. נוכיח כי $\beta = \emptyset$, אחרת, $\beta \neq \emptyset$, ויש $\gamma \in \beta$, מטרנזיטיביות α, $\gamma \in \alpha$. זאת סתירה לכך ש־ $\beta = \min(\alpha, \in)$.

$\square$

משפט 6 לכל שני סודרים α, β או ש־ $\alpha = \beta$ או ש־ $\beta \in \alpha$ או ש־ $\alpha \in \beta$.
הוכחה: יהיו α, β סודרים. נתבונן ב־$\alpha \cap \beta$, אם $\alpha = \beta$ סיימנו, אחרת $\alpha \neq \beta$ ולכן מספיק להוכיח כי $\beta = \alpha \cap \beta \vee \alpha = \alpha \cap \beta$ שכן מהטענה 4 (3) מקבלים לדוגמא כי $\alpha \subsetneq \beta$ ומזה נובע כי $\alpha \in \beta$. נניח בשלילה כי $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha \wedge \alpha \cap \beta \subsetneq \beta$, שוב מטענה 4$(3)$, מקבלים $\alpha \cap \beta \in \alpha, \alpha \cap \beta \in \beta$ ולכן $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. חיתוך של סודרים הוא סודר, שכן $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ ולכן $\in$ סדר טוב על $\alpha \cap \beta$ לפי תרגיל 11 בפרק 5 וגם קבוצה טרנזיטיבית לפי תרגיל . 2 ולכן $\alpha \cap \beta$ סודר, זו סתירה לטענה 4 (1).

$\square$

טענה 7 (ללא הוכחה)

1. יהי α סודר אז $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר ומסמנים $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. לכל סודר β, אם $\alpha < \beta$ אז או ש־ $\beta = \alpha + 1$ או ש־ $\beta > \alpha + 1$.

2. אם X קבוצת סודרים, $\cup X$ סודר. יתר על כן, $\cup X = \sup_{\in}(X)$ ואם ב־X יש איבר גדול ביותר אז $\cup X = \max_{\in}(X)$.

3. אם X קבוצת סודרים לא ריקה אז $\cap X$ סודר ו־$\min(X) = \cap X$.

המספרים הטבעיים כסודרים

: מבחינה פורמלית אנו מגדירים את המספרים הטבעיים כסודרים. הסודרים הראשונים הם

$$\emptyset \quad \{\emptyset\} \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}...$$

הגדרה 8

$$\emptyset = 0$$

$$\{\emptyset\} = 1$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3$$

$$...$$

$$n \cup \{n\} = n + 1$$

הגדרה 9 יהי α סודר, α נקרא סודר עוקב אם קיים סודר β כך ש־ $\alpha=\beta+1$ אחרת α נקרא סודר גבולי.

משפט 10 (ללא הוכחה) תהי $\langle A,\le_A\rangle$ קבוצה סדורה היטב, אז קיים ויחיד סודר α כך ש־ $\langle A,\le_A\rangle\simeq\langle\alpha,\in\rangle$.

הגדרה 11 תהי $\langle A,\le_A\rangle$ קבוצה סדורה היטב, נסמן ב־ $otp(A,\le_A)=\alpha$ כאשר α זה הסודר היחיד האיזומורפי ל־ $\langle A,\le_A\rangle$ שמובטח מהמשפט הקודם, סודר זה נקרא טיפוס הסדר של $\langle A,\le_A\rangle$.

דוגמאות:

- נתבונן בקבוצה $\{-1,0,1,...,\}$ עם הסדר הרגיל. זה סדר טוב ומתקיים ω $otp(\{-1,0,1,...\},<)=\omega$. ההעתקה $\pi(x)=x+1$ היא בבירור איזומורפיזם של סדרים בין $\{-1,0,1,...,\}$ ו־ ω.
- $otp(\mathbb{N}\times\mathbb{N},<_{LEX})=\omega^2$, נגדיר $\pi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\omega^2$ על ידי $\pi(\langle n,m\rangle)=\omega\cdot n+m$. π היא איזומורפיזם של סדרים ולפי הגדרת טיפוס הסדר, $otp(\mathbb{N}\times\mathbb{N},<_{LEX})=\omega^2$.

מחלקת הסודרים

הגדרה 12 נגדיר את מחלקת הסודרים

$$On=\{x\mid x\ ix\ an\ ordinal\}$$

כמובן שפרדוקס ראסל אומר שצריך להזהר כשמגדירים כאלה אובייקטים. ומסתבר שגם On איננה קבוצה.

טענה 13 On איננה קבוצה.

הוכחה: אחרת, נסמן את הקבוצה On ב־X. לפי טענה 7 (2) $\cup X$ גם סודר המקיים $\sup(X)=\cup(X)$ אם כך $\cup X\in On$ איבר גדול ביותר, אבל גם $(\cup X)+1\in On$ בסתירה.

□

אינדוקציה טרנספיניטית וחשבון סודרים

משפט 14 (משפט האינדוצקיה הטרנספיניטית) נניח $P(x)$, תכונה של סודרים. אם מתקיים:

1. (בסיס האינדוקציה) $P(0)$.
2. (צעד אינדוקציה עוקב) $\forall\alpha\in On(P(\alpha)\to P(\alpha+1))$
3. (צעד אינדוקציה גבולי) לכל γ סודר גבולי מתקיים $(\forall\delta<\gamma P(\delta))\to P(\gamma))$

אזי לכל סודר $\alpha\in On$ מתקיים $P(\alpha)$.

הוכחת עקרון האינדוקציה: נניח כי $1,2,3$ מתקיימים ונוכיח כי $\forall\alpha(P(\alpha))$. נניח בשלילה כי $\exists\alpha(\neg P(\alpha))$. יהי α סודר כך ש־ $\neg P(\alpha)$. אם $\forall\beta<\alpha(P(\beta))$, נסמן $\alpha^*=\alpha$. אחרת, $\alpha^*=\min(\{\beta\mid\neg P(\beta)\})=\min(\{\beta<\alpha\mid\neg P(\beta)\})$, אם כך, α^* היא הדוגמא הנגדית המינימלית. כלומר, מתקיים $\neg P(\alpha^*)$ וגם $\forall\beta<\alpha^*(P(\beta))$. נחלק לשלושה מקרים:
מקרה 1 $\alpha=0$ אז לפי 1 מתקיים $P(0)$.
מקרה 2: $\alpha^*=\beta+1$, ממינימליות α^*, מתקיים $P(\beta)$, לפי 2 מתקיים $P(\beta)\to P(\beta+1)$ ולכן מתקיים $P(\alpha^*)$ וזו כאמור סתירה.
מקרה 3: α^* גבולי, שוב ממינימליות α^* מתקיים כי $\forall\beta<\alpha^*(P(\beta))$ ולפי 3 מתקיים $\forall\beta<\alpha^*(P(\beta))\to P(\alpha^*)$ ולכן $P(\alpha^*)$. שוב סתירה.

□

הערות:

- אינדוקציה על מספרים טבעיים, היא מקרה פרטי של אינדוקציה טרנספיניטית שבא לא מגיעים לשלב גבולי, על כן, בהוכחה אינדוקטיבית רגילה מוכיחים רק צעד עוקב.
- בהוכחה באינדוקציה טרנספיניטית, יש כעת שלושה שלבים־מקרה בסיס , צעד עוקב וצעד גבולי. לא ניתן להשמיט אף אחד מהם.

- אפשר להוכיח באינדוקיצה על סודרים כפי שהוכחנו עבור סדרים טובים, כלומר, הנחת האינדוקציה היא שלכל סודר $\beta < \alpha$ הטענה נכונה ומוכיחים ל־α, מבלי לפצל למקרים ש־α עוקב או גבולי.

הגדרה 15 סדרה טרנספיניטית בקבוצה X היא פונקציה $f : \alpha \to X$ **באשר** α סודר כלשהו. מסמנים סדרה $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ כאשר $a_\beta = f(\beta)$, הסודר α נקרא אורך הסדרה. נאפשר להגדיר גם סדרות באורך כל הסודרים ונסמן זאת $\langle a_\alpha \mid \alpha \in On \rangle$, שימו לב כי הגדרה כזו איזה מניבה פונקציה שכן On איננה קבוצה.

דוגמאות:

- נגדיר סדרת מספרים ממשיים באורך $\omega + 1$, נגדיר $a_n = n$, $a_\omega = \pi$.
- נגדיר סדרה של תתי קבוצות של טבעיים באורך $\omega \cdot 2$

$$a_n = (\mathbb{N} \setminus \{0, ..., n\}) \cup \mathbb{N}_{even}$$
$$a_\omega = \mathbb{N}_{even}$$
$$a_{\omega+n} = \mathbb{N}_{even} \setminus \{0, ..., n\}$$

שימו לב כי $\alpha < \beta < \omega \cdot 2$ אז $a_\beta \subsetneq a_\alpha$

- נגדיר $\langle \alpha - 1 \mid \alpha \in On \rangle$, אם $\alpha = \beta + 1$ נגדיר $\alpha - 1 = \beta$ אחרת $\alpha - 1 = \alpha$.

עקרון הרקורסיה הטרנספיניטית: כמו במקרה של אינדוקציה רגילה, אפשר להגדיר באופן רקורסיבי סדרות טרנספיניטיות.

נניח ברצוננו להגדיר סדרה טרנספיניטית $\langle X_\alpha \mid \alpha \in On \rangle$ ניתן לעשות זאת באופן הבא:

1. להגדיר את X_0
2. בהנתן שלכל $\alpha \leq \beta$ הגדרנו את X_β נגדיר את $X_{\alpha+1}$.
3. בהנתן שלכל $\gamma < \delta$ הגדרנו את X_γ נגדיר את X_δ."

הערה: שימו לב שכשהגדרתם סדרה ברקורסיה טרנספיניטית ותרצו להוכיח תכונות שלה, ככל הנראה תשתמשו באינדוקציה טרנספיניטית.

פעולות על סודרים

חיבור סודרים

באופן אינטואיטיבי, הסכום $\alpha + \beta$ זה פשוט טיפוס הסדר של הסדר שמתחיל בסודר α ומעליו מסדרים את β. באופן פורמלי נגדיר את הסכום באופן הבא

הגדרה 16 נקבע α, ונגדיר ברקורסיה על β את הסכום $\alpha + \beta$:
מקרה בסיס־ $\alpha + 0 := \alpha$.
נניח הגדרנו את $\alpha + \beta$, נגדיר־ $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$.
נניח δ סודר גבולי והגדרנו לכל $\gamma < \delta$ $\alpha + \gamma$, נגדיר־ $\alpha + \delta = \sup(\alpha + \gamma \mid \gamma < \delta)$.

דוגמאות

- עבור $n \in \mathbb{N}$ $\alpha + n = (...((\alpha + 1) + 1) + 1)...) + 1$, חיבור סודרים מכליל חיבור של מספרים טבעיים אבל יש לו תכונות שונות כפי שנראה בטענות בהמשך.
- $2 + \omega = \sup(2 + n \mid n < \omega) = \omega$, $\omega + 2 > \omega + 1 > \omega$ אם כך $\omega + 2 \neq 2 + \omega$.

כפל וחזקת סודרים

נשתמש בחיבור שכבר הגדרנו כדי להגדיר את הכפל

הגדרה 17 1. נגדיר $\alpha \cdot \beta$ באינדוקציה על β:
$\alpha \cdot 0 = 0$
$\alpha \cdot (\beta + 1) := \alpha \cdot \beta + \alpha$
עבור δ גבולי $\alpha \cdot \delta = \sup(\alpha \cdot \gamma \mid \gamma > \delta)$.

2. נגדיר חזקת סודרים α^β באינדוקציה על β:
$\alpha^0 = 1$
$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
עבור δ גבולי נגדיר $\alpha^\delta = \sup(\alpha^\gamma \mid \gamma < \delta)$.

דוגמאות:

- $\alpha \cdot n = \underbrace{(...((\alpha+\alpha)...)+\alpha}_{n\ times}$, $\alpha^n = (...((\alpha\cdot\alpha)...)\cdot\alpha$ כפל וחזקה של סודרים מכליל כפל וחזקה של מספרים טבעיים.
- $2\cdot\omega = \sup(2\cdot n \mid n<\omega) = \omega$, $\omega\cdot 2 = \omega\cdot(1+1) = \omega+\omega = \sup(\omega+n \mid n<\omega) > \omega$ ולכן $2\cdot\omega \neq \omega\cdot 2$.
$2^\omega = \sup(2^n \mid n<\omega) = \omega$

טענה 18 1. מונוטוניות חלשה משמאל $\alpha \le \beta \to \alpha+\gamma \le \beta+\gamma$.

2. מונוטוניות חזקה מימין $\alpha < \beta \to \gamma+\alpha < \gamma+\beta$.

3. אם $X \subseteq \delta$ באשר δ סודר גבולי אזי $\sup(X) = \delta \Rightarrow \sup(\alpha+x \mid x\in X) = \alpha+\delta,\ \sup(\alpha\cdot x \mid x\in X) = \alpha\cdot\delta,\ \sup(\alpha^x \mid x\in X) = \alpha^\delta$.

4. סוציאטיביות החיבור $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

5. אסוציאטיביות הכפל $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

6. חוק הפילוג משמאל $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

7. חוקי חזקות $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma, (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}, (\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$.

8. $\alpha\cdot\beta = 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.

הוכחה:
<u>הוכחת 2</u>: באינדוקציה על β נוכיח לכל α,γ. עבור $\beta = 0$ הטענה מתקיימת באופן ריק שכן לא קיים $\alpha < \beta$. בשלב עוקב, $\beta = \delta+1$ יהי $\alpha < \beta$, אזי $\alpha \le \delta$. אם $\alpha = \delta$, לכל γ מתקיים

$$\gamma+\delta < (\gamma+\delta)+1 = \gamma+(\delta+1) = \gamma+\beta$$

אם $\alpha < \delta$, אז לפי הנחת האינדוקציה,

$$\gamma+\alpha <^{I.H} \gamma+\delta < \gamma+\beta$$

עבור β גבולי, יהי $\alpha < \beta$ אז $\alpha+1 < \beta$ ולפי הנחת האינדוקציה עבור $\alpha+1$ מתקיים:

$$\gamma+\alpha <^{I.H} \gamma+(\alpha+1) \le \sup(\gamma+\xi \mid \xi<\beta) = \gamma+\beta$$

<u>הוכחת 3</u>: נוכיח לדוגמא כי $\sup(\alpha+x \mid x\in X) = \alpha+\delta$ ממונוטוניות חזקה מימין, $\beta+x < \beta+\delta$ ולכן $\sup(\alpha+x \mid x\in X) \le \delta$. מכיוון ו־$\delta$ גבולי, $\beta+\delta = \sup(\beta+\gamma \mid \gamma<\delta)$ ולכן לכל $\xi < \beta+\delta$, קיים $\gamma < \delta$ כך ש־ $\xi < \beta+\gamma$. מכיוון ו־$\sup(X) = \delta$, קיים x כך ש־ $\gamma \le x$ ולכן $\xi < \beta+\gamma \le \beta+x$. אזי $\beta+\delta = \sup(\beta+\gamma \mid\mid \gamma<\delta) \le \sup(\beta+x \mid x\in X)$ כדרוש.
<u>הוכחת 4</u>: באינדוקציה על γ נוכיח לכל α,β. עבור $\gamma = 0$, $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+\beta = \alpha+(\beta+0)$. בשלב עוקב,

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+1) = ((\alpha+\beta)+\gamma)+1 = (\alpha+(\beta+\gamma))+1 = \alpha+((\beta+\gamma)+1) = \alpha+(\beta+(\gamma+1)).$$

בשלב גבולי

$$(\alpha+\beta)+\gamma = sup((\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\gamma) = \sup(\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma) =^{by\ 1} \sup(\alpha+\xi \mid \xi<\beta+\gamma) = \alpha+(\beta+\gamma)$$

<u>הוכחת 6</u>: באינדוקציה על γ, עבור $\gamma = 0$ מתקיים

$$\alpha(\beta+0) = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0 = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0$$

בשלב עוקב, $\gamma = \delta+1$, מהנחת האינדוקציה ולפי 4,

$$\alpha(\beta+(\delta+1)) = \alpha((\beta+\delta)+1) = \alpha(\beta+\delta)+\alpha =^{I.H} (\alpha\beta+\alpha\delta)+\alpha =^{by\ 4} \alpha\beta+(\alpha\gamma+\alpha) = \alpha\beta+\alpha(\gamma+1)$$

בשלב הגבולי,

$$\alpha(\beta+\gamma) = \sup(\alpha\cdot\xi \mid \xi<\beta+\gamma) = \sup(\alpha(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma)) = \sup(\alpha\beta+\alpha\delta \mid \delta<\gamma) = \sup(\alpha\beta+\xi \mid \xi<\alpha\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

הוכחת 8: מימין לשאמל נשאיר את הטענה כתרגיל. באינדוקציה על β, עבור $\beta=0$ הטענה נכונה לפי הגדרת הכפל. בשלב עוקב $\beta=\delta+1\neq 0$ נניח כי $\alpha\cdot\beta=0$ אז $\alpha\delta+\alpha=0$ נניח בשלילה כי $\alpha>0$ אז $\alpha\geq 1$ ולכן $\alpha\delta+\alpha\geq\alpha\delta+1>0$ סתירה. בשלב הגבולי, נניח כי β גבולי, אם $\beta=0$ סיימנו, אחרת $\beta>1$ ומתקיים $\alpha\beta=0$ אז $\sup(\alpha\gamma\mid\gamma<\beta)=0$ ולכן לכל $\gamma<\beta$ $\alpha\gamma=0$ ובפרט $\alpha\cdot 1=0$ כלומר $\alpha=0$.

□

בהגדרות רקורסיביות רבות נותנים גם תנאי עצירה, כלומר תנאי שאם הוא מתקיים בשלב כלשהו ברקורסיה אז הרקורסיה מפסיקה. המשפט האחרון אומר שאם התהליך הרקורסיבי הוא מתוך קבוצה והוא נעשה באופן חח"ע אז קיים שלב ברקורסיה בוא תנאי העצירה ייתקיים. אם ההגדרה הרקורסיבית היא של איברים מקבוצה נתונה, הרקורסיה חייבת להעצר באיזשהו שלב־ זה נובע מעקרון ההחלפה (תזכורת:בהנתן פונקציה f עם תחום A, מתקיים כי $\{f(a)\mid a\in A\}$ היא גם קבוצה).

משפט 19 נניח כי x_α מוגדרים בצורה רקורסיבית ובאופן חח"ע , כלומר אם $\alpha\neq\beta$ אז $x_\alpha\neq x_\beta$. האוסף $\{x_\alpha\mid\alpha\in O_n\}$ לא מהווה קבוצה.

הוכחה: אחרת, נסמן ב־ $A=\{x_\alpha\mid\alpha\in On\}$ ונגדיר $f(a)=\alpha$ עבור $\alpha\in On$ הסודר היחיד כך ש־ $a=x_\alpha$, אם כך f זו פונקציה שתחומה הוא הקבוצה A ולכן $On=\{f(a)\mid a\in A\}$ היא גם קבוצה לפי עקרון ההחלפה, בסתירה לטענה 13.

□