5 יחסי סדר [1]

יחס סדר כללי

יחסי סדר הם מקרה פרטי של יחס על קבוצה, החשיבות שלהם בבניית הישר הממשי ואופן כללי בתורת הקבוצות היא רבה.

הגדרה 1 תהי A קבוצה, יחס R על A ייקרא

1. יחס סדר חזק אם R טרנזיטיבי ואנטי סימטרי חזק, כלומר

$$(\forall a_1, a_2 \in A(\langle a_1, a_2\rangle \in R \rightarrow \langle a_2, a_1\rangle \notin R))$$

2. יחס סדר חלש אם R טרנזיטיבי רפלקסיבי ואנטי סימטרי חלש, כלומר

$$(\forall a_1, a_2 \in A(\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle \in R \rightarrow a_1 = a_2))$$

3. יחס סדר R חזק או חלש ייקרא מלא/קווי/לינארי/טוטלי אם לכל $a, b \in A$ מתקיים

$$a = b \vee aRb \vee bRa$$

(במצב כזה אומרים כי a, b ברי השוואה)

4. קבוצה סדורה זה זוג $\langle A, R\rangle$ כאשר R יחס סדר חזק או חלש על A.

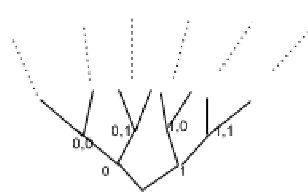
דוגמאות:

1. $A = \{1,2,3\}$ $R = \{\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ אז R הוא יחס סדר חלקי חזק ולא מלא על הקבוצה A.
2. $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ זה יחס סדר חלש ולא מלא, נוכיח זאת: הוא בודאי לא מלא שכן $\{1\}, \{2\}$ לא ברי השוואה

$$\neg(\{1\} = \{2\} \vee \{1\} \subseteq \{2\} \vee \{2\} \subseteq \{1\})$$

זהו יחס טרנזיטיבי כי $A \subseteq B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$. היחס אנטי סימטרי חלש $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$.

3. $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ זה כמובן סדר מלא ולחזק.
4. על $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}^{\{1,\ldots,n\}}$ נגדיר $f \prec g \leftrightarrow f \subseteq g$ נקרא יחס ההמשכה של פונקציות וזה יחס סדר חלש וחלקי. והמבנה הזה נקרא העץ הבינרי:



5. נגדיר סדר על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\langle a, b\rangle <_{LEX} \langle c, d\rangle \quad iff \;\; a < c \vee (a = c \wedge b < d)$$

נקרא הסדר הלקסיקורפי השמאלי על $\mathbb{N}^2$. זה סדר מלא וחזק על.

---

[1] ©הזכויות שמורות לתום בן־אמו בלבד

6. על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר $f \le g$ אמ"ם $\forall n \in \mathbb{N}(f(n) \le g(n))$. נקרא יחס "שליטה בכל מקום" זה יחס סדר חלקי וחלש

7. על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר $f \le^* g$ אמ"ם $\exists m \forall n \ge m(f(n) \le g(n))$. זה לא יחס סדר כיוון והוא לא אנטי סימטרי חלש. נשנה מעט את הקבוצות כך שזה ייצא יחס סדר, נגדיר יחס על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$f \sim g \leftrightarrow \exists n \forall m \ge n f(m) = g(m)$$

בדקו כי $\sim$ אכן יחס שקילות. על קבוצת המנה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim$ נגדיר

$$[f]_\sim \preceq [g]_\sim \leftrightarrow f \le^* g$$

שימו לב הגדרה זו אינה תלויה בבחירת הנציגים שכן אם

$$[f] = [f'], \;\; [g] = [g']$$

אז קיים n_1 כך שלכל $n_1 \le m$ $f(m) = f'(m)$ וקיים n_2 כך שלכל $g(m) = g'(m)$ $m \ge n_2$. נניח כי $f \le^* g$, אז קיים n_3 כך שלכל $m \ge n_3$ מתקיים $f(n) \le g(n)$. נגדיר $n^* = \max(n_1, n_2, n_3)$, אז לכל $m \ge n^*$ מתקיים

$$g'(m) = g(m) \ge f(m) = f'(m)$$

לכן $f' \le^* g'$. נראה כי $\preceq$ יחס סדר חלש על מחלקות השקילות, נניח כי $[f] \preceq [g] \preceq [h]$, אזי $f \le^* g \le^* h$, ברור כי $\le^*$ טרנזיטיבי ולכן $f \le^* h$, ולפי הגדרה $[f] \preceq [h]$. נוכיח כי היחס אנטי סימטרי חלש, נניח כי

$$[f] \preceq [g] \wedge [g] \preceq [f]$$

אזי יש n_1 כך שלכל $m \ge n_1$, $f(m) \ge g(m)$ וקיים n_2 כך שלכל $m \ge n_2$ מתקיים $g(m) \ge f(m)$. נגדיר $n^* = \max(n_1, n_2)$ אזי לכל $m \ge n^*$ מתקיים

$$g(m) \ge f(m) \wedge f(m) \ge g(m) \Rightarrow f(m) = g(m)$$

לכן $f \sim g$ ומתקיים $[f] = [g]$.

הערה:

- אם לא מציינים מהו הסדר על קבוצה מסוימת אז מתכוונים לסדר הרגיל שיש עליה. לדוגמא $\mathbb{R}$ זו הקבוצה עם הסדר הרגיל על הממשיים.
- לרוב ביחסי סדר במקום אותיות R, S ניתן לקבוצות שמות שנראים כמו $\le$ כגון $\prec, \preceq, \le_A, <_A$.
- יחס אנטי סימטרי חזק הוא יחס אנטי רפקלקסיבי, כלומר $\forall a \in A(\langle a, a\rangle \notin R)$

טענה 2 אם R יחס סדר חלש בקבוצה A אז $R \setminus id_A$ יחס סדר חזק ואם R יחס סדר חזק בקבוצה A אז $R \uplus id_A$ יחס סדר חלש.

הוכחה: בדיקה פשוטה של הגדרה 1

$\square$

סימון: בהנתן יחס סדר חזק $<$ נסמן $a \le b$ אם $a = b \vee a < b$. ובהנתן יחס סדר חלש $\le$ נסמן $a < b$ אם $a \le b \wedge a \ne b$.

הגדרה 3 יהי R יחס סדר חלש או חזק בקבוצה A, תהא $X \subseteq A$.

1. $x \in X$ יקרא איבר מזערי אם $\forall y \in X((y = x) \vee \neg(yRx))$.
2. $x \in X$ ייקרא איבר קטן ביותר אם $\forall y \in X((y = x) \vee (xRy))$.
3. $x \in X$ ייקרא איבר מירבי אם $\forall y \in X((y = x) \vee (\neg xRy))$.
4. $x \in X$ ייקרא איבר גדול ביותר אם $\forall y \in X(y = x \vee yRx)$.
5. איבר $x \in A$ נקרא חסם מלעיל של X אם $\forall y \in X(yRx \vee x = y)$
6. איבר $x \in A$ נקרא חסם מלרע X אם $\forall y \in X(xRy \vee x = y)$.
7. X נקראת חסומה מלעיל אם קיים ל־X חסם מלעיל , נקראת חסומה מלרע אם קיים ל־X חסם מלרע ונקראת חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע. אחרת תקרא לא חסומה מלעיל ומלרע או לא חסומה, בהתאמה.

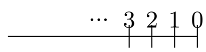
8. איבר $x \in A$ ייקרא חסם עליון קטן ביותר (סופרמום) אם x הוא קטן ביותר מבין כל החסמים העליונים של X כלומר x חסם עליון וגם $\forall y((y\ is\ upper\ bound\ for\ X) \to (xRy \vee x = y))$.

9. איבר $x \in A$ ייקרא חסם תחתון גדול ביותר (אינפימום) אם x הוא גדול ביותר מבין כל החסמים התחתונים של X כלומר x חסם תחתון וגם $\forall y(y\ is\ lower\ bound\ for\ X) \to (yRx \vee x = y))$.

הערה: שימו לב להבדל בין איבר גדול ביותר ואיבר מירבי (וגם בין איבר קטן ביותר ואיבר מיזערי), איבר מירבי לא חייב להיות בר השוואה עם כל האיברים, הדרישה היא שאין איבר שגדול ממנו ביחס. לעומתו, איבר גדול ביותר כן בר השוואה עם כל איבר וגדול ממנו. חסם עליון לעומת איבר גדול ביותר לא חייב להיות שייך לקבוצה.

דוגמאות

- נגדיר $\mathbb{N}^* = \langle \mathbb{N}, \prec \rangle$ יחס סדר שמוגדר $n \prec m \leftrightarrow m < n$. זה יחס סדר חזק ומלא , לכל קבוצה אינסופית $A \subseteq \mathbb{N}$, אין חסם מלרע. לקבוצה $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ יש חסם מלעיל שאינו איבר גדול ביותר והוא 0.

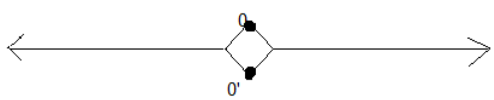


- ביחס הסדר $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ לכל קבוצה $X \subseteq P(\mathbb{N})$ יש חסם עליון קטן ביותר וחסם תחתון גדול ביותר והם $\cup X, \cap X$ בהתאמה.

  לקבוצה $P(\mathbb{N})$ יש איבר גדול ויותר־ $\mathbb{N}$, ואיבר קטן ביותר־ $\emptyset$. עבור $X = P(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$ יש איבר מירבי, לדוגמא $y = \mathbb{N} \setminus \{1\}$: לכל $x \in X$ מתקיים כי $x \neq \mathbb{N}$ ולכן $\neg(y \subsetneq x)$. אבל y אינו איבר גדול ביותר כי לדוגמא אינו בר השוואה אם $\{1\}$.

- ביחס השליטה בכל מקום על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר את הפונקציות f_n ע"י $f_n(0) = n$ ולכל $m > 0$ נגדיר $f_n(m) = 0$. אז לקבוצה $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ אין חסם עליון.

- נגדיר על $\mathbb{R} \cup \{0'\}$ את יחס הסדר $\{0'\} \times (0, \infty) \cup (-\infty, 0) \times \{0'\} \cup <=\prec$. אז לקבוצה $(-\infty, 0]$ יש איבר גדול ביותר והוא 0 ובקבוצה $(-\infty, 0] \cup \{0'\}$ אין איבר גדול ביותר אבל יש שני איברים מירביים $0, 0'$



נשים לב כי $0, 0'$ הם חסמים עליונים של $(-\infty, 0)$ אבל לא חסמים עליונים קטנים ביותר.

טענה 4 יהי R יחס סדר חלש או חזק בקבוצה A ו־$X \subseteq A$. אזי

1. איבר גדול ביותר ב־X הוא איבר מירבי ב־X.
2. איבר קטן ביותר ב־X הוא איבר מזערי ב־X.
3. אם קיים חסם עליון קטן ביותר ל־X אז הוא יחיד ומסומן $sup(X)$. אם קיים חסם תחתון גדול ביותר אז הוא יחיד ומסומן $inf(X)$.
4. אם $x \in X$ איבר גדול ביותר אז $x = sup(X)$ ומסומן $x = \max(X)$. אם $x \in X$ איבר קטן ביותר אז $x = inf(X)$, המסומן $x = \min(X)$
5. יהי R יחס סדר מלא על A אז המושגים מזערי וקטן ביותר מתלכדים וגם המושגים מירבי וגדול ביותר.

הוכחה: נשאיר את $2, 5$ כתרגילים.
<u>הוכחת 1</u>: יהי $x \in X$ איבר גדול ביותר, נראה כי הוא מירבי. יהי $y \in X$, אם $y = x$ סיימנו. אחרת, מכיוון ו־x גדול ביותר , yRx ומכיוון ומדובר ביחס סדר ובפרט אנטי סימטרי (חלש או חזק לא משנה כאן מכיוון שהאיברים שונים) בהכרח $\neg xRy$ ולכן x מירבי.
<u>הוכחת 3</u> : נניח כי $x, y \in A$ חסמים עליונים קטנים ביותר, ונראה כי $x = y$. נניח בשלילה כי $x \neq y$, מכיוון ו־x, y חסמים עליונים קטנים ביותר הם בפרטים חסמים עליונים, אם כך y מכיוון ו־x חסם עליון קטן ביותר ושונה מ־y ניתן להסיק כי xRy. באותו אופן, מכיוון ו־y חסם עליון קטן ביותר מסיקים כי yRx וזו סתירה לאנטי סימטריה, לכן $x = y$.
<u>הוכחת 4</u>: יהי $x \in X$ איבר גדול ביותר ב־X, נראה כי $x = sup(X)$. תחילה, x חסם עליון ל־X מכיוון ו־ x איבר גדול ביותר. נראה כי הוא מזערי, יהי $y \in A$ חסם עליון של X, דהיינו, לכל $a \in X$ מתקיים $aRy \vee a = y$ בפרט $xRy \vee x = y$ ולכן x חסם עליון קטן ביותר.

$\square$

הגדרה 5 יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ קבוצות סדורות, נאמר כי:

1. $f:A\to B$ נקראת פונקציה שומרת סדר אס־ $\forall a,a'\in A.aRa'\leftrightarrow f(a)Sf(a')$.
2. $f:A\to B$ נקראת שיכון של סדרים אם f חח"ע ושומרת סדר.
3. $f:A\to B$ איזומורפיזם של סדרים אם f חח"ע על ושומרת סדר
4. $\langle A,R\rangle$ ניתן לשיכון ב־$\langle B,S\rangle$ אם קיים שיכון $f:A\to B$.
5. $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ הסדרים איזומורפים אם קיים איזומורפיזם בינהם.

דוגמאות:

- נתבונן ביחס הסדר על $\mathbb{N}\times\{0,1\}$

$$\prec=\{\langle\langle n,i\rangle,\langle m,j\rangle\rangle\in(\mathbb{N}\times\{0,1\})^2\mid n<m\wedge i=j\}$$

ו־ $\langle\mathbb{N},<\rangle$ היחס הרגיל של הטבעיים. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ המוגדרת $f(n)=\langle n,0\rangle$ היא שיכון שכן $\langle n,0\rangle\prec\langle m,0\rangle\leftrightarrow n<m$.

- $g:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ המוגדרת $g(n,i)=n$ אינה פונקציה שומרת סדר שכן $g(1,0)=1<2=g(2,1)$ אבל $\langle\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle\notin\prec$.
- נזכר ב־$\mathbb{N}^*$ מהדוגמאות הקודמות, ונגדיר $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}$ המוגדרת $f(n)=\frac{1}{n+1}$ היא שיכון.
- נראה כי $\neg(\mathbb{Q}\simeq\mathbb{N})$ נניח בשלילה קיים איזומורפיזם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ נתבונן ב־ $f(n)=q_n<q_{n+1}=f(n+1)$ יהי $q^*=\frac{q_n+q_{n+1}}{2}$ אזי $q_n<q^*<q_{n+1}$ (מדוע יש אי שיוויון חזק?). מכיוון ו־f איזומורפיזם קיים m כך ש־ $f(m)=q^*$ אבל אז בהכרח $n<m<n+1$ סתירה.

תרגיל 6 הוכיחו כי $\neg([0,1]\simeq\mathbb{R})$.

טענה 7 יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים על קבוצות A,B לא ריקות.

1. אם $f:A\to B$ שומרת סדר אזי R חלש אמ"ם S חלש.
2. אם $f:A\to B$ שומרת סדר ו־R יחס סדר חלש, אז f חח"ע.
3. אם $f:A\to B$ שומרת סדר ו־R יחס סדר חזק וקווי אז f חח"ע.
4. אם $f:A\to B$ איזומורפיזם של סדרים אז גם $f^{-1}:B\to A$ איזומורפיזם של סדרים.

הוכחה: עבור 1, נניח כי R חלש, ונניח בשלילה כי S חזק מההנחה, $A\neq\emptyset$ ולכן קיים $a\in A$. לפי הנחה, aRa ולכן $f(a)Sf(a)$, בסתירה לכך ש־S אנטי סימטרי חזק. בכיוון השני, אם R חזק, נניח בשלילה כי S חלש, ויהי $a\in A$. לפי הנחה, $f(a)Sf(a)$ ולכן aRa, שוב סתירה.
עבור 2, לפי 1 נובע כי גם R חלש. נוכיח כי f חח"ע. יהיו $x,y\in A$ ונניח כי $f(x)=f(y)$. אזי מרפלקסיביות, $f(x)Sf(y)$ וגם $f(y)Sf(x)$. כעת, משמירת סדר של f נוסע כי xRy וגם yRx ולכן מאנטי סימטריה חלשה נובע כי $x=y$.
עבור 3, נניח כי R חזק, אז לפי 1 גם S חזק. נוכיח חח"ע, יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש־ $a_1\neq a_2$. נוכיח כי $f(a_1)\neq f(a_2)$. מכיוון והסדר קווי, $a_1Ra_2\vee a_2Ra_1$. בה"כ a_1Ra_2. מכיוון ו־ f שומרת סדר $f(a_1)Sf(a_2)$ ומכיוון ו־ S יחס סדר חזק הוא אנטי רפלקסיבי ולכן $f(a_1)\neq f(a_2)$.
עבור 4, יהיו $a,b\in B$, נותר להוכיח כי $aSb\leftrightarrow f^{-1}(a)Rf^{-1}(b)$. יהיו $a,b\in A$, קיימים $x,y\in A$ כך ש־ $f^{-1}(a)=x,\ \ f^{-1}(b)=y$. נתון כי f שומרת סדר ולכן

$$aSb\leftrightarrow f(x)Sf(y)\leftrightarrow xRy\leftrightarrow f^{-1}(a)Rf^{-1}(b)$$

$\square$

הערה: ב־2 של הטענה הקודמת, ההנחה כי R יחס סדר קווי היא הכרחית, כי לדוגמא הפונקציה $f:\{1,2,3\}\to\{1,2\}$ המוגדרת $f(1)=f(2)=1$ ו־$f(3)=2$ היא בודאי לא חח"ע, אבל אם נבחר את היחסים החזקים $R=\{\langle 1,3\rangle\}$ ו־$S=\{\langle 1,2\rangle\}$ אז f שומרת סדר.

הגדרה 8 יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר. $X\subseteq A$ נקראת שרשרת ב־A אם כל שני איברים של X הם ברי השוואה ב־R.

דוגמא
ביחס "שליטה בכל מקום" על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, קבוצה הפונקציות הקבועות $\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ מהווה שרשרת.

תרגיל

1. נניח כי $f:A\to B$ שומרת סדר וכי R סדר קווי אזי $Im(f)$ שרשרת ב־B.
2. יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ קבוצות סדורות בסדר חזק וקווי. תהא $f:A\to B$ פונקציה. הוכיחו כי אם
$$\forall a,a'\in A(aRa'\to f(a)Sf(a'))$$
אזי f שומרת סדר.

סדרים טובים

הגדרה 9 תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה בסדר חזק, נאמר כי $\prec$ סדר טוב אם הוא מלא ומתקיים :
$$\forall X\subseteq A(X\neq\emptyset\to\exists min_{\prec}(X))$$
במילים, לכל קבוצה לא ריקה יש איבר מינימלי.

דוגמאות:

- $\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל זו קבוצה סדורה היטב.
- כל סדר סופי הוא סדר טוב.
- $\mathbb{Q}$ עם הסדר הרגיל אינו סדר טוב כי $(0,1)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ אבל אין לקבוצה זו איבר מינימלי.
- נגדיר על $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ את הסדר $\langle n,i\rangle\prec_2\langle m,j\rangle$ אמ"ם $i=0,j=1\vee i=j,n<m$. זה סדר טוב שכן זה סדר מלא ואם $A\subseteq\mathbb{N}\times\{0,1\}$ לא ריקה אז או ש־ $A\cap\mathbb{N}\times\{0\}\neq\emptyset$ ואז ניקח $n^*=\min\{n\mid\langle n,0\rangle\in A\}$ והזוג $\langle n^*,0\rangle=min(A)$ או ש־ $A\subseteq\mathbb{N}\times\{1\}$ ואז נגדיר $n^*=\min\{n\mid\langle n,1\rangle\in A\}$ והזוג $\langle n^*,1\rangle=min(A)$.

הגדרה 10 יהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה היטב, רישא של A זו קבוצה $X\subseteq A$ כך ש־$\forall x,y\in A([x\in X\wedge y\prec x]\to y\in X)$.

תרגיל 11 תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה היטב, הוכיחו כי

א. אם $X\subseteq A$ אז $\langle X,\prec\cap(X\times X)\rangle$ סדר טוב.

ב. יהי $a\in A$, נסמן $A[a]=\{a'\in A\mid a'\prec a\}$ אז $A[a]$ הינה רישא של A.

ג. $\forall a,a'\in A(A[a]=A[a']\to a=a')$

ד. $f:\langle A,\prec\rangle\to\langle P(A),\subset\rangle$ המוגדרת $f(a)=A[a]$ היא שיכון של סדרים.

דוגמאות:

- $\{0,1,2\}$ היא רישא של $\mathbb{N}$ בסדר הרגיל. $\{5,6,7,..\}$ היא רישא של $\mathbb{N}^*$.
- לכל קבוצה סדרה היטב, $\langle A,\prec\rangle$, A היא רישא. רישא X נקראת רישא של ממש אם $X\neq A$.
- $\mathbb{N}\times\{0\}$ היא רישא של $\langle\mathbb{N},<_2\rangle$. לעומת זאת, $\mathbb{N}\times\{1\}$ היא לא רישא.

טענה 12 תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה היטב ו־ $X\subseteq A$ רישא, אז או ש־$X=A$ או שקיים $a\in A$ כך ש־ $X=A[a]$.

הוכחה: אם $A=X$ סיימנו, אחרת $A\setminus X\neq\emptyset$, נגדיר $a=\min(A\setminus X)$ שקיים לפי ההנחה, נראה כי $X=A[a]$, אם $x\in X$ אז $x\prec a$ אחרת, $a\prec x$ (שכן $x\in X, a\notin X$ לכן $a\neq x$). מכיוון ו־X רישא, $a\in X$ סתירה. לכן $x\in A[a]$, $x\prec a\to x\in A[a]$, בכיוון השני, אם $a'\in A[a]$ אז $a'\prec a$ ממינימליות a מתקיים כי $a'\notin A\setminus X$ ולכן $a'\in X$.

□

טענה 13 אם $f:\langle A,\prec\rangle\to\langle A,\prec\rangle$ שיכון ו־ $\langle A,\prec\rangle$ זה סדר טוב אז לכל $x\in A$ מתקיים $x\preceq f(x)$
הוכחה: אחרת, נסמן ב־ $X=\{a\in A\mid f(a)\prec a\}$ אז $X\neq\emptyset$. יהי $x^*=\min(X)$ אם כל $f(x^*)\prec x^*$. מכיוון ו־f שומרת סדר, $f(f(x^*))\prec f(x^*)$ ולכן $f(x^*)\in X$ בסתירה למינימליות X.

$\square$

מסקנה 14 קבוצה סדורה היטב אינה ניתנת לשיכון (ובפרט איננה איזומורפית) לרישא של ממש של עצמה.
הוכחה: אחרת, תהא X רישא של ממש של A ושיכון $f : A \to X$. כלומר $X \subsetneq A$, ולפי טענה 12 קיים $a \in A$ כך ש־ $X = A[a]$. מכיוון ו־ $X \subseteq A$, $f : A \to A$ מקיימת $f(a) \in A[a]$ ולכן $f(a) \prec a$. סתירה לטענה 13.

$\square$

מסקנה 15 אם $\langle A, \prec \rangle$ סדר טוב ו־ $f : \langle A, \prec \rangle \to \langle A, \prec \rangle$ איזומורפיזם אזי $f = id_A$.
הוכחה: במקרה זה מתקיים כי $x \preceq f(x)$ ומכיוון ו f הפיכה גם f^{-1} שומרת סדר ולכן מקיימת $x \preceq f^{-1}(x)$, לפי טענה 13 עבור f^{-1}. מכיוון ש־f שומרת סדר, מתקיים כי $x = f(f^{-1}(x)) \preceq f(x)$ ולכן מתקיים $x = f(x)$.

$\square$

מסקנה 16 אם $\langle A, <_A \rangle$ סדר טוב, $f : \langle A, <_A \rangle \to \langle B, <_B \rangle$ איזומורפיזם אזי הוא יחיד.
הוכחה: אם , $g : \langle A, <_A \rangle \to \langle B, <_B \rangle$ איזומורפיזם נוסף אזי $g^{-1} \circ f$ זה איזומורפיזם מ־A ל־A. לכן $g^{-1} \circ f = id_A$, $f = (g^{-1})^{-1} = g$.

$\square$