לוגיקה

17 באוקטובר 2021

פילוסופיה של המתמטיקה־היקום המתמטי: הגישה הפילוסופית הנפוצה ביותר אצל מתמטיקאים היא הגישה הפלטוניסטית־ הפלטוניסט מאמין שהאובייקטים המתמטיים קיימים באופן אובייקטיבי, ויש איזשהו יקום מקביל ליקום הפיזי שבו מתקיימת כל המתמטיקה. כפועל יוצא מגישה זו, כשם שהפיזיקאי או הכימאי חוקרים את היקום הפיזי שבו אנחנו חיים ואת האובייקטים בו, המתמטיקאי חוקר את היקום המתמטי. ישנן גישות נוספות כגון: פורמליזם, אקסטנציונליזם, פיניטיזם אך לא נרחיב עליהן. ניתן כמה דוגמאות לאובייקטים ביקום המתמטי:

- המספר 1.
- הפונקציה sin.
- אוסף כל הישרים שעוברים בראשית.
- סדרת המספרים $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$
- המישור הממשי.
- משולש זה לא עצם מתמטי ספציפי. אבל המשולש שקודקודיו הם $\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle$ הוא כן עצם ספציפי ביקום המתמטי.

שימו לב להבדל העדין שבין אובייקט מתמטי ספציפי לבין לאוסף כללי של אובייקטים. לדוגמא, פונקציה־ היא אינה אובייקט מתמטי ספציפי אלא כינוי לאובייקט בעל מאפיינים מסוימים ביקום המתמטי. להלן דוגמאות מבלבלות של אובייקטים שאינם שייכים ליקום המתמטי:

- חתולים וכלבים הם אפילו לא עצם ספציפי וגם "החתול משה" שהוא כן אובייקט ספציפי, שייך ליקום הפיזי ולא ליקום המתמטי.
- המסלול של כדור הארץ סביב השמש אינו עצם מתמטי ספציפי. אבל ניתן לתאר את מסלול זה באמצעות פונקציה ביקום המתמטי.
- החוק השני של ניוטון אינו אובייקט ביקום המתמטי. ניוטון עשה שימוש בשפה המתמטית כדי לבטא חוקיות מסוימת ביקום הפיזי.
- הטענה כי כל מספר ראשוני גדול מ־2 הוא אי־זוגי, אינו אובייקט ביקום המתמטי ומבטא תופעה המתרחשת ביקום המתמטי.

השפה המתמטית: במרוצת השנים, המתמטיקאים פיתחו שפה משותפת אשר ביכולתה לתאר שני דברים בלבד: שמות עצם של איברים בעולם המתמטי או טענות אודותיו. כמובן שהשפה המתמטית נבנית על גבי השפה העברית (או האנגלית עבור מתמטיקאים אנגלים). באופן די מפתיע, תגלו כי לרובכם ישנה אינטואיציה די טובה לגבי מה הוא שם עצם ומה היא טענה, גם אם אנחנו לא מבינים את משמעות המשפט. התחביר והדקדוק של השפה ייתבהרו לכם די מהר במהלך הסמסטר. השיעור של היום אמור לתת קוים מנחים כלליים של שימוש בשפה.

שמות עצם

שמות עצם מייצגים אובייקטים ספציפים או לא ספציפיים ביקום המתמטי. דוגמא לשם עצם הוא 1 או π מבטאים אובייקטים ספציפיים ביקום המתמטי. אפשר גם לערב משתנים שלא יצביעו על עצם ספציפי לדוגמא x^2+1, ספרת האחדות של 5^n. טרמינולוגיה שנשתמש בה לעיתים תכופות:

- משתנה או נעלם זו אות, בדרך כלל אנגלית, אשר ממלא את מקומם של אפשרויות שונות לעצמים מתמטיים ספציפיים. בהמשך תראו כי ישנם שני סוגים של משתנים־ חופשיים וקשורים.
- השמה או הצבה של ערך למשתנה, היא החלפת המשתנה בשם של עצם מתמטי ספציפי.

טענות:

כפי שאמרנו, טענות הן אמירות (נכונות או שיקריות) אודות היקום המתמטי ומטרתן היא לתאר אמיתות אודותיו. טענה בדרך כלל תשלב שמות עצם. את מבנה הטענות נתאר באמצעות מילות בנייה לוגיות שיובהרו בהמשך הפרק. דוגמא לטענה אודות היקום המתמטי יכולה להיות

"סכום של שני מספרים זוגיים היא מספר זוגי"

טענה נכונה היא בעלת ערך אמת $TRUE$ וטענה שיקרית היא בעלת ערך אמת $FALSE$ שימו לב כי אנחנו לא חוקרים את נכונות הטענה ברגע זה אלא רק את מבנה הטענה. כעת נעבור לתיאור השפה המתמטית. הרובד הראשון בשפה הוא:

תחשיב הפסוקים

נתחיל בדוגמא:

"בשנים שיש 200 ימים, בכל יום שיורד גשם וברד, אני עצוב. כשיורד גשם גם יורד ברד. מכיוון שאני תמיד שמח ואני חי במדינה שבחודש יש 20 ימים ובשנה יש 10 חודשים, אני חי במדינה שאין בה גשם."

הרבה מהמילים שרשומות בפסקה לא רלוונטיות למבנה הלוגי שלו. לדוגמא "אני חי במדינה שאין בה גשם" לא שונה מבחינה לוגית מ-"לא יורד גשם". עוד דוגמא, "בחודש יש 20 ימים ובשנה יש 10 חודשים" שקול מבחינה לוגית ל" בשנה יש 200 ימים". אם זנקק מילים אלו, אפשר לנסח מחדש באופן הבא:

"אם בשנה יש 200 ימים אז אם יורד גשם וגם יורד ברד אז אני עצוב. אם יורד גשם אז יורד ברד. לא נכון שאני עצוב, וגם בשנה יש 200 ימים. לכן לא יורד גשם"

זו טיעון שאפשר לבחון מבחינה לוגית על אף שה"נתונים" בו אינם נאמני המציאות. כיצד לעשות זאת? נבצע הצרנה של הטענה.

הגדרה: הצרנה היא הפעולה של הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

.בתחום של לוגיקה המתמטית חוקרים את מבנה הטענה (סינטקטיקה) ולא את תוכן הטענה (סמנטיקה). זה יאפשר לנו לבחון את נכונות הטענה באופן מתמטי, כלומר יאפשר לנו לחשב את ערך האמת של טיעון. ניתן שמות ל"נתונים"- שמעתה ייקראו פסוקים יסודיים.

הגדרה פסוקים יסודיים הלו פסוקים אשר באפשרותם שני ערכים בלבד אמת או שקר והם המרכיבים האטומיים של טענה בתחשיב הפסוקים.

בדוגמא שלנו:

A- בשנה יש 200 ימים

B- יורד גשם

C- יורד ברד

D- אני עצוב

כעת הטענה נראית כך:

" אם A אז אם B וגם C אז D. אם B אז C. לא נכון D, וגם A לכן לא נכון B.

כעת נכניס סימונים למילות הקישור הלוגיות.

כנגד ארבע קשרים דיברה התורה של תחשיב הפסוקים:

- $A \vee B$ מסמן את " A או B", נקרא קשר הדיסיונקציה.
- $A \wedge B$ מסמן את "A וגם B" נקרא קשר הקוניונקציה.
- $A \to B$ מסמן את "אם A אז B" נקרא קשר האימפליקציה A נקראת הרישא ו-B נקראת הסיפא.
- $\neg A$ מסמן את "שלילה של A" קשר השלילה.

כעת אפשר לבטא את המשפטים בצורות בלבד, אלה נקראים פסוקים. כשמציגים טיעון נהוג לרשום פסוקים שונים בשורות שונות:

$A \to ((B \wedge C) \to D)$

$B \to C$

$(\neg D) \wedge A$

לכן $\neg B$

המילה "לכן" אינה מוצרנת כי היא בעלת מעמד אחר בטיעון. בניגוד למילים "אם...אז" שאומרות משהו על המשפט שבו הן נמצאות, המילה "לכן" אומרת משהו על הטיעון כולו. במצב שטיעון זה הוא נכון, אומרים כי המסקנה נובעת מהנתונים או הנתונים גוררים טיאוטולוגית את המסקנה.

הגדרה נניח כי $A_1, ..., A_n$ פסוקים יסודיים, טענה בתחשיב הפסוקים זו טענה שמורכבת מפסוקים היסודיים מקושרים ע"י $\neg, \to, \wedge, \vee$.

דוגמאות: להלן פסודקים בתחשיב הפסוקים מעל הפסוקים היסודיים A, B, C:

$$(A \to B) \wedge (A \to B), \quad \neg(C \to (C \wedge C)) \vee B, \quad B, \quad C, \quad A.$$

להלן מחרוזות שלא חוקיות וחסרות משמעות מתחשיב הפסוקים:

$$B \to, \quad \wedge B, \quad BC \wedge A, \quad A \wedge \vee B \quad A \wedge B \to C.$$

הסיבה שהביטוי האחרון חסר משמעות היא שהעדר הסוגריים גורם לכפל ומשמעות. לטענות $(A\wedge B)\to C$ ו־ $A\wedge(B\to C)$ יש משמעות שונה.

ערכי אמת

לפסוקים היסודיים $A_1,...,A_n$ אין ערך אמת קבוע עד שלא הוענק לו כזה על ידי המשתמש. ערך האמת של הקשרים הלוגיים יתואר באופן מפורש לכל אפשרות של ערכי אמת עבור הפסוקים היסודיים שמרכיבים אותו.

הגדרה: השמה של ערכי אמת עבור הפסוקים היסודיים $A_1,...,A_n$ היא קביעה של ערך T/F עבור **כל** אחד מהם. אם קבענו עבור A_i את T נסמן זאת $V(A_i)=T$ ואם קבענו F, נסמן $V(A_i)=F$.

הערות: בהשמה ספציפית כל פסוק הוא או אמת או שקר ולא שניהם. (יש לוגיקות בהן זה לא המצב, כלומר יש טענות ביניים).

טענה: יש 2^n השמות ערכי אמת לפסוקים היסודיים $A_1,...,A_n$.

הוכחה: לכל $i=1,...,n$ יש שתי אפשרויות להשמה של ערך אמת ל־A_i־T/F, ולכן יש $2\cdot2...\cdot2=2^n$ השמות של ערכי אמת.

$\square$

אם קבענו השמה של ערכי אמת לפסוקים היסודיים אז כל הפסוקים בתחשיב הפסוקים מקבלים גם הם ערכי אמת.
החוקים המדויקים איך לחשב את ערכי האמת של הפסוקים מהפסוקים היסודיים ניתנת ע"י טבלאות אמת:

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A\wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	$A\vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	B	$A\to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

הערה: שימו לב לקשר האימפליקציה, אנחנו רגילים לחשוב על הטענה $A\to B$ כשהרישא היא טענה נכונה, אבל מה קורה אם הרישא איננה נכונה? לדוגמא "אם רומא בירת צרפת אז $0=1$", לפי הגדרת הגרירה זו טענה נכונה כי הרישא של הגרירה היא F!

הגדרה: טבלת האמת של פסוק α בתחשיב הפסוקים היא טבלה ששורותיה הן כל ההשמות האפשריות לערכי אמת עבור הפסוקים היסודיים שמופיעים ב־α, בעמודות השמאליות של הטבלה יש תחילה את המשתנים היסודיים ובעמודה הימנית ביותר יש את ערך האמת α המתאים להשמה של כל שורה.

הגדרה: נאמר כי שני פסוקים (לא בהכרח יסודיים) C,D הם שקולים ומסמנים $C\equiv D$ אמ"ם לכל השמה של ערכי אמת, $V(C)=V(D)$. באופן שקול, אם יש לפסוקים את אותה טבלת אמת.

טענה

1. $A\to B\equiv(\neg A)\vee B$.
2. $A\to B\equiv(\neg B)\to(\neg A)$.
3. $\neg(\neg(A))\equiv(A)$.
4. $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.
5. $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.
6. כלל מורגן הראשון: $\neg(A\wedge B)\equiv(\neg A)\vee(\neg B)$.
7. כלל דה מורגן השני: $\neg(A\vee B)\equiv(\neg A)\wedge(\neg B)$.
8. $\neg(A\to B)\equiv A\wedge\neg B$.

9. $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

10. $A \vee B \equiv B \vee A$.

11. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.

12. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.

הוכחה נוכיח לדוגמא את $1,6$ ונשאיר את שאר הטענות כתרגילים.
הוכחת 1: אנחנו רוצים להוכיח כי לכל השמת ערכי האמת ל־A, B, $V(A \to B) = V((\neg A) \vee B)$. $V(A \to B) = F$ רק כאשר $V(A) = T \wedge V(B) = F$ וזה קורה רק כאשר $V(\neg A) = F \wedge V(B) = F$ זה בדיוק המצב בו $V(\neg A \vee B) = F$ ולכן יש שקילות.
להוכחת 6 דרך נוספת להוכיח שקילות היא פשוט לחשב את טבלת האמת ולוודא שאכן עבור בכל שורה (השמה) אכן מתקבל אותו ערך ערך אמת עבור הפסוק (העמודה הימנית ביותר):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

רואים כי יש בדיוק אותם ערכי אמת.
הוכחת 8: בשקילות ניתן להחליף תתי פסוקים בביטויים שקולים להם שהוכחנו את זהותם:

$$\neg(A \to B) \equiv^{(1)} \neg(\neg(A) \vee B) \equiv^{(7)} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \equiv^{(3)} A \wedge \neg B$$

הגדרה: נגדיר קשר לוגי נוסף הנקרא שקילות או אמ"ם (אם ורק אם) המסומן $A \leftrightarrow B$. $V(A \leftrightarrow B) = T$ כאשר $V(A) = V(B)$ כלומר אם A, B נכונים או שקריים יחדיו.
תרגיל: בנו את טבלת האמת של הקשר $\leftrightarrow$ והראו כי $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B \wedge B \to A)$.
הגדרה: פסוק נקרא טאוטולוגיה אם הוא נכון לכל השמת ערכי אמת. פסוק נקרא סתירה אם הוא שקרי לכל השמה של ערכי אמת .
הערה: שלילה של טאוטולוגיה היא סתירה ולהיפך
טענה: הפסוקים הבאים הם טאוטולוגיה:

1. $P \to P$.

2. $P \vee \neg P$.

סימון: טאוטולוגיה נסמן ב־T וסתירה נסמן ב־F.
טענה:

1. $\alpha \wedge T \equiv \alpha$.

2. $\alpha \vee T \equiv T$.

3. $\alpha \to T \equiv T$, $T \to \alpha \equiv \alpha$.

4. $\alpha \wedge F \equiv F$.

5. $\alpha \vee F \equiv \alpha$.

הגדרה: נאמר כי פסוק α נובע סמנטית מפסוקים $\alpha_1, ..., \alpha_n$ אם כל השמה כך ש־ $V(\alpha_1) = ... = V(\alpha_n) = T$ גוררת כי $V(\alpha) = T$.

דוגמא: נניח כי

$$\alpha_1 = A \to (B \wedge C), \ \ \alpha_2 = A \vee C, \ \ \alpha = A \wedge B$$

ננסה לבנות השמה לערכי האמת היסודיים שעושית את המסקנה שגויה ואת הנתונים נכונים. כדי ש־ $V(\alpha)=F$ צריך ש־ $V(A)=V(B)=F$ ואז מתקיים כי $V(\alpha_1)=T$ כי הרישא בטענה זו היא F. לגבי α_2, נרצה שהנתון הזה יהיה נכון ולשם כך אנו עדיין חופשיים בבחירת ערך האמת של C, נגדיר $V(C)=T$ ואז $V(\alpha_2)=T$. אם כך ההשמה $V(A)=F,\ V(B)=F,\ V(C)=T$ עושה את הנתונים נכונים ואת המסקנה שיקרית. לכן המסקנה לא נובעת מהנתונים.

סיום דוגמא מתחילת השיעור. בתחילת השיעור היו לנו הפסוקים היסודיים A,B,C,D והפסוקים

$$\alpha_1=A\rightarrow((B\wedge C)\rightarrow D),\quad \alpha_2=B\rightarrow C,\quad \alpha_3=\neg D\wedge A,\quad \alpha=\neg B$$

ננסה לבדוק האם α נובע מ־$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. כלומר, נבחן האם קיימת השמה שעושה את $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ אמת אבל את α שיקרי (ומכך ייגבע כי α לא נובע מהפסוקים). נניח כי $V(\alpha)=F, V(\alpha_1)=V(\alpha_2)=V(\alpha_3)=T$ אז $V(\neg B)=F$ ולכן $V(B)=T$.
מכך ש־ $V(B\rightarrow C)=T$ נובע כי
$V(C)=T$
ומכך ש־ $V(\neg D\wedge A)=T$ נובע כי
$V(D)=F,\ V(A)=T$.
אם כך $V(B\wedge C\rightarrow D)=F$ וגם $V(A)=T$ אז $V(\alpha_1)=F$, בניגוד להנחה הראשונית כי $V(\alpha_1)=T$ ולכן לא קיימת כזו השמה של ערכי אמת. אם כך α נובע מ־$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

תחשיב היחסים

אנחנו עדיין לא מסוגלים לבטא טענות מתמטיות מאוד בסיסיות כמו:

" קיים x כך ש־$x\neq 0$"

כשנצרין טענה זו בתחשיב הפסוקים נתייחס אליה כפסוק יסודי, למרות שאנו רואים שיש מבנה לוגי שאנו מתעלמים ממנו. זה נובע מכך שהמבנה של תחשיב הפסוקים לא מספיק עשיר כדי לתאר את כל הטענות המתמטיות.
תחילה, אנו צריכים להגדיר סימנים עבור טענות מהסוג $x\neq 0$. זו למעשה טענה לגבי האובייקט x (שטרם ברור מהו). נסמן טענה זו ב־$P(x)$. הסימון $P(x)$ נקרא **פרידיקט חד מקומי**.

הגדרה: נוסיף לשפה משתנים $x,y,z,w,...x_1,y_1,...$. משתנה חופשי בנוסחה הינו משתנה שניתן להציב בו ערכים.

דוגמא: "ספרת האחדות של x היא 5" או $x+1$. פה x הוא משתנה חופשי. "לכל x מספר, $x+1>x$. כאן x אינו משתנה חופשי כי הצבת ערכים במקום x תניב ביטוי חסר משמעות.

הגדרה: פרידיקט חד מקומי הינו סימן המייצג טענה לגבי משתנה כללי x. נהוג לסמן זאת ע"י $P(x),Q(x),R(x),...$

כשם שבתחשיב הפסוקים לקחנו פיסות מידע וקראנו להם בשמות של אותיות שאותן הגדרנו כ"משתנים יסודיים", במקרה של תחשיב היחסים נקודד פיסות מידע בסיסיות כפרידיקטים.
דוגמא:

"x הוא מספר שספרת האחדות שלו היא y"
בטענה זו מעורבים שני משתנים x,y. בנוסף, יש שני פרידיקטים :
$P(x)\equiv$ "x הוא מספר".
$Q(x,y)\equiv$ "y זו ספרת האחדות של x".
ואז הטענה שרשומה למעלה היא

$$P(x)\wedge Q(x,y)$$

$Q(x,y)$ נקרא פרדיקט דו מקומי. באופן כללי ניתן להגדיר מהו פרדיקט n־מקומי.
בכדי לבטא טענות כלליות בתחשיב היחסים, נוסיף לשפה שלנו סימנים עבור "לכל" ו־"קיים" .
כנגד שני כמתים דיברה התורה של תחשיב היחסים:

$\exists$־קיים (באנגלית $Exists$ ולכן הסימון הוא E הפוכה)
$\forall$־לכל (באנגלית All ולכן הסימון הוא A הפוכה)

הגדרה: טענה כללית בתחשיב היחסים היא מהצורה $\exists x.P(x)$ או $\forall x.Q(x)$ באשר $P(x),Q(x)$ פרידיקטים כלשהם, או שילוב של טענות כאלה בתחשיב הפסוקים.

דוגמא לטענות בתחשיב היחסים:

$$\forall x.p(x)\wedge Q(x),\quad \exists x.\forall y.p(x,y),\quad \forall x.\forall y.(p(x)\wedge Q(x))\rightarrow p(x),\quad (\exists x.p(x))\rightarrow(\forall y.q(y))$$

דוגמא לטענות לא חוקיות בתחשיב היחסים:

$$p(x) \wedge \forall y.p(y), \quad \forall x.p(x)\forall y, \quad \exists\forall xp(x), \quad \exists xp(x) \to Q(x), \quad \forall x.p(x).Q(x)$$

הערה: אפשר לשים סוגריים כדי לשפר את אפשרות הקריאה $\exists x(P(x))$. **ואשר לשלב כמה כמתים** $\forall x.\exists y.P(x,y)$. **בנוסף** אפשר גם לשלב את תחשיב הפסוקים לטענות מהצורה הבאה $\forall x.(\exists yP(y)) \to (Q(x) \wedge P(x))$
דוגמא להצרנה בתחשיב היחסים:
נצריך את הטענה " קיים מספר שלם x כך ש־ $x \neq 0$"

$$P(x) \equiv "x \neq 0"$$

$Q(x) \equiv$ "x מספר שלם"

נוכל לבטא את הטענה המקורית:

$$\exists x.Q(x) \wedge P(x)$$

דוגמא נוספת:

"כל העורבים שחורים וגם קיים עורב. לכן קיים עורב שחור"

נצרין בתחשיב היחסים:

$P(x) = "x\ is\ a\ crow"$
$Q(x) = "x\ is\ a\ black\ bird"$

אז הטיעון המלא הוא:

$$[\forall x(P(x) \to Q(x))]$$

$$[\exists xP(x)]$$

לכן

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

לעומת זאת, בתחשיב הפסוקים אנו חייבים להצרין באופן הבא:

$A \wedge B$
לכן C

ברור כי זו אינה גרירה טיאוטולוגית (לדוגמא ניקח את ההשמה $V(A) = V(B) = T,\ V(C) = F$). כלומר בתחשיב הפסוקים הטענה אינה נובעת מהנתונים. בהמשך נראה כי בתחשיב היחסים דווקא המסקנה כן נובעת מהנתונים.

נכונות בתחשיב היחסים

בתחשיב הפסוקים, כדי לקבוע אם טענה נכונה או לא, קבענו השמה של ערכי אמת עבור פסוקים היסודיים **ובהנתן השמה של ערכי אמת** נקבעו ערכי האמת של שאר הפסוקים. בתחשיב היחסים המצב אחר מכיוון ואין לנו פסוקים יסודיים, והנכונות של טענה מסוימת נקבעת ע"י הצבה של אובייטים ספציפיים במקום המשתנים.

השמה של ערכים במשתנים: אם $p(x)$ פרידקט חד מקומי, ו־a אוביקט כלשהו, $p(a)$ זו הטענה ללא משתנים שמחליפים כל ביטוי של x ב־a.

לדוגמא: נניח כי $p(x)$ הינו הפרדיקט "$p(x) = "x > 5$" אז "$p(2) = "2 > 5$.

הבעיה הראשונה שמתעוררת היא שהנכונות של טענה תלויה בהצבה. ולכן הדבר הנכון להגדיר הוא נכונות עבור פסוקים ללא משתנים חופשיים.
ובכל זאת, נכונות הטענה תלויה באפשרויות השונות של המשתנים. כדי להבין זאת, נתבונן בדוגמא הבאה:

דוגמא:
$P(x)$ מייצג את הטענה $6 > x > 5$ ואנו נתבונן בטענה $\alpha \equiv \exists x.P(x)$ אז נכונות הטענה תלויה בתחום הכימות שלנו, אם מדובר לדוגמא בתחום הכימות שכולל רק את המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ שהם המספרים $0, 1, 2, 3, ...$ אז הטענה איננה נכונה, לעומת זאת, אם תחום הכימות הינו $\mathbb{R}$־ המספרים הממשיים, אז הטענה דווקא כן נכונה.

הגדרה: בתחשיב היחסים <u>תחום הכימות</u> הינו אוסף האובייקטים או קבוצה שמהווים את המקור להצבות של משתנים. בתת פרק הבא אנו נרחיב את הדיון על קבוצות.

הגדרה: עבור תחום כימות D, ופריקידט $p(x)$, אינטרפרטציה של $p(x)$ ב־D היא טענה לגבי איברי D.

דוגמא: תחום הכימות $\mathbb{N}$ הינו אוסף כל המספרים השלמים האי שליליים, $0,1,2,3...$, אינטרפרטציה של $p(x)$ ב־$\mathbb{N}$ היא לדוגמא $p(x) \equiv x \neq 0$. אינטרפרטציה של $Q(x,y)$ יכולה להיות $Q(x,y) \equiv x < y$.

הגדרת נכונות בתחשיב היחסים: עבור אינטרפרטציה של פרידיקט $P(x)$ ב־D, נומר כי $\forall x.P(x)$ נכונה בתחום כימות D, אם לכל a בתחום הכימות D, $P(a)$ נכון ב־D (מסמנים $D \models \forall x.p(x)$). בנוסף, נומר כי $D \models \exists x.P(x)$ אם קיים לפחות a אחד בתחום הכימות D כך ש־ $P(a)$ נכון ב־D.

דוגמא: נתבונן בטענה

$$\forall x.P(x) \to Q(x)$$

נתבונן בתחום הכימות $\mathbb{N}$ ובאינטרפרטציה "ראשוני x" $P(x) \equiv$ ו־$Q(x,y) \equiv x > 1$. עבור מספר טבעי כללי a, יש שני מצבים: אם a אינו ראשוני אז $P(a)$ לא נכון ב־D ולכן $P(a) \to Q(a)$ מתקיים כיוון שהרישא שיקרית. אם a ראשוני אז $a > 1$ ולכן גם $Q(a)$ נכון. ולכן הטענה

$$D \models \forall x.P(x) \to Q(x)$$

אנחנו נדבר על הוכחות בהרחבה בהמשך. כעת נפרט קצת יותר על קבוצות:

קבוצה

בקורס שלנו תחום כימות (בקורסים אחרים זה נקרא מודל) זו למעשה קבוצה. קבוצה היא האובייקט היסודי ביותר ברוב תחומי המתמטיקה ועל בסיסה מוגדרים שאר האובייקטים. אחת הבעיות של אובייקטים יסודיים היא שאין להם הגדרה אבסלוטית. לכן בקורס שלנו אנו נסתפק בחוקים וכללי אצבע שעוזרים לנו לדמיין, להבין, ולייצר קבוצות. הרעיון האינטואיטיבי הבא מסביר איך אמורים לחשוב על קבוצה

" קבוצה היא אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות"

כדי להבין את המשפט הזה יותר לעומק, נצלול ישר למים ונתחיל לבנות קבוצות בסיסות.

<u>דרך ראשונה לסימון קבוצות־ רשימת איברים:</u>

$$\{a,b,c,...,z\}, \ \{1,5,17\}, \ \{\{1,2\},\{2,3\}\}$$

מסמנים קבוצה בסוגריים מסולסלים $\{,\}$ ובין הסוגריים רושמים את חברי הקבוצה (אומרים איברי קבוצה) מופרדים בפסיקים. נגדיר $a \in \{a_1,...,a_n\}$ אמ"ם $a = a_1 \vee a = a_2 ... \vee a = a_n$
נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$$

הערות:

1. לשם נוחות הסימון, מגדירים קבוצה על ידי אות ואז כשרוצים לדבר על הקבוצה פשוט שמים את האות במקומה, לדוגמא, כשנרצה לדבר על המספרים הטבעיים נשתמש באות $\mathbb{N}$. אם מופיע אות חדשה שאתם לא יודעים לקשר אותה למה שרשום לפני כן אז אתם יודעים שמדובר בסימון. למי שבקיא בתכנות הרעיון דומה לרעיון ה־$pointer$.
2. האיברים שאנו רשאים לשים בתוך קבוצה הם רק אובייקטים מתמטיים למרות שלשם הדגמה לפעמים נשים בקבוצה גם פרות כלבים חתולים ובני אדם.
3. הזהרו בשימוש ב". . ." ־לגיטימי רק כאשר ברור מה חסר בשלוש נקודות
4. המשמעות שאין חשיבות לסדר היא שסדר האיברים לא משנה, לדוגמא , הקבוצות $\{1,2,3\},\{2,3,1\}$ שוות, כלומר אנו לא מבדילים בינהם.
5. המשמעות שאין חזרה היא שאנו לא מכלילים את אותו איבר כמה פעמים באותה הקבוצה, לדוגמא, הקבוצות $\{1,1,2,3\},\{1,2,3\}$ שוות.

יחס השייכות: את העובדה שאיבר מסוים שייך לקבוצה מסמנים באות $\in$ (אפסילון). לדוגמא:

$$1 \in \{1\}, \{2,2\} \in \{\{1\},\{2\}\}, \{3\} \notin \{3,4,5\}, \{1,10,100\} \ni 1, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

כמתים חסומים: כשאנחנו רושמים טענה מהצורה $\forall x.p(x)$ או $\exists x.p(x)$, אנחנו מכמתים על פני כל האפשרויות של הצבה עבור x ביקום המתמטי. הרבה טענות מתייחסות רק לעצמים מתמטיים ספציפים כמו מספרים, ולשם כך נוח יהיה נוח אם נוכל לחסום את אפשרויות ההצבה של כמת לקבוצה נתונה A. לכן נכניס שני סימונים:

$$\forall x \in A.p(x) \equiv \forall x.x \in A \to p(x)$$

$$\exists x \in A.p(x) \equiv \exists x.x \in A \land p(x)$$

דרך שנייה לסימון קבוצות־ עקרון ההפרדה:

תהי A קבוצה, ניתן לפריד את כל האיברים ב־A שמקיימים תכונה מסוימת $\phi(x)$. מסמנים זאת באופן הבא

$$\{x \in A \mid \phi(x)\}$$

וקוראים זאת "קבוצת כל ה x – בA כך ש־ $\phi(x)$ פסוק אמת". נגדיר $a \in \{x \in A \mid \phi(x)\}$ אמ"ם $a \in A \land \phi(a)$

דוגמאות:

- $\{x \in \{1,2,6,7\} \mid x > 3\} = \{6,7\}$
- $\phi(x)$ זו התכונה $\exists k \in \mathbb{N}(3 \cdot k = x)$. אפשר להפריד מתוך $\mathbb{N}$:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}(3 \cdot k = x)\} = \{0,3,6,9,....\}$$

- $A = \{1,3,6,11,21,17\}$, $\{x \in A \mid x+1 \ is \ prime\} = \{1,6\}$
- $B = \{\{1\},\{2\},\mathbb{N},\{\mathbb{N}\},\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot x = x\}\}$

$$\{x \in B \mid 1 \notin x\} = \{\{2\},\{\mathbb{N}\}\}$$

הערות:

1. שימו לב שאנחנו חייבים להפריד מתוך קבוצה קיימת, ולא יכולים פשוט להגדיר לדוגמא $\{x \mid x = x\}$.
2. מה זה אומר בדיוק ש־$\phi(x)$ היא תכונה? זה כבר לקורס אחר, אבל באופן אינטואיטיבי כל דבר שאתם יכולים לנסח מתמטית הוא לגיטימי.

דרך שלישית לסימון קבוצות־עקרון ההחלפה:

תהי A קבוצה ונניח כי $f(x)$ היא פעולה על איברי A אז אפשר להחליף כל איבר שלA בתוצאת הפעולה עליו. מסמנים קבוצה זו באופן הבא:

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

הפרמטר x רץ על כל איברי הקבוצה A ומחליפים את x ב־$f(x)$. נגדיר כי $a \in \{f(x) \mid x \in A\}$ אמ"ם $\exists x \in A.f(x) = a$

דוגמאות:

- $f(x) = 2^x$ $\{2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2^0,2^1,2^2,....\} = \{1,2,4,8,16,....\}$
- $\{\{x\} \mid x \in \{1,4,3\}\} = \{\{1\},\{3\},\{4\}\}$ קבוצות מהצורה $\{a\}$ נקראות סינגלטון/יחידון.
- $\{x+1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$

הערות: כמו קודם, כדי להרכיב קבוצה באמצעות עקרון ההחלפה, חייבים להחליף מקבוצה נתונה.

קבוצות מפורסמות

- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,....\}$ אנחנו מניחים שאנחנו יודעים לחבר לכפול לעלות בחזקה ולכל הפעולות שאתם מכירים על טבעיים. בנוסף יש כמה תכונות חשובות של המספרים הטבעיים שכדי לציין כעת: לכל מספר טבעי יש מספר עוקב מיידי לו ולכל מספר אחר חוץ מ־0 יש קודם מיידי. המספרים הטבעיים מסודרים בסדר טוב (נגדיר פורמלית בהמשך הקורס) כרגע זה פשוט אומר כי בכל קבוצה של מספרים טבעיים סופית או אינסופית, יש איבר קטן ביותר. ולכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים קיים איבר גדול ביותר. דבר נוסף שאנו מניחים שידוע הוא הוכחה באינדוקציה (ראו נספח הוכחות).
- $\mathbb{N}_+=\{x\in\mathbb{N}\mid x>0\}=\{1,2,3,4,....\}$
- $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$
- $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\wedge n\neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים לא ניתן לתאר כרגע אבל באופן אינטואיטיבי זה כל המספרים שיש, בינהם גם $\sqrt{2},e,\pi$ וכל מספר המיוצג בפיתוח עשרוני אינסופי לימין כדוגמאת $15.6755897847566372......$ תכונות חשובות של הישר הממשי הן שקבוצת הרציונלים צפופה ברציונלים:

$$\forall r_1,r_2\in\mathbb{R}\ \left(r_1<r_2\ \ \rightarrow\exists q\in\mathbb{Q}(r_1<q<r_2)\right)$$

ושלקבוצה אין "חורים"־זה לא אמור להיות מובן כרגע ובאופן אינטואיטיבי זה אומר שגבול של מספרים ממשיים הוא מספר ממשי. למי ששמע על כך בחדו"א, זה אמר כי הישר הממשי הוא שלם. נסמן

$$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}.$$

- – $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ האינטרבל/מרווח פתוח בין a ל־b.
  – $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$ האינטרבל/מרווח הסגור
  – $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$ האינטרבל החצי פתוח חצי סגור. באופן דומה מגדירים $(a,b]$.
  – $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$ נקראת קרן. באופן דומה מגדירים $[a,\infty),(-\infty,a),(-\infty,a]$. שימו לב כי $(a,\infty]$ לא מוגדר ובצדק, כי ∞ זה לא מספר ורק מהווה סימון.

- $\emptyset$ נקראת הקבוצה הריקה, והיא מקיימת את התכונה הבאה:
$\forall x(x\notin\emptyset)$. כלומר הקבוצה הריקה זה קבוצה ללא איברים כלל. אנחנו נוכיח בהמשך כי יש בדיוק קבוצה אחת כזו. לפעמים נוח לסטודנטים לחשוב עליה כ־$\emptyset=\{\}$.

הכלה

הגדרה 1.1 : יהיו A,B שתי קבוצות, נאמר A מוכלת ב־B ונסמן $A\subseteq B$ אם מתקיים:

$$\forall x.x\in A\rightarrow x\in B$$

במילים אחרות, אם כל איבר של A הוא איבר של B.

דוגמאות:

- $\{1,5\}\subseteq\mathbb{N}_{odd}\subseteq\mathbb{N}_+\subseteq\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.
- $\{2,-1\}\subseteq\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2>x\}$.
- הוכיחו כי $\{n^2+n\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}_{even}$.
- נוכיח בהמשך כי לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\subseteq A$.
- אם $A\subseteq B\wedge B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$.

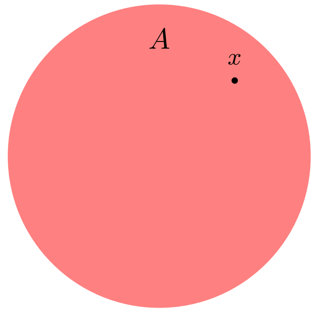
הערות:

1. מסמנים $A\nsubseteq B$ אם $\neg(A\subseteq B)$ כלומר $\exists x\in A.x\notin B$
2. כאן הסימון $A\subset B$ זהה ל־$A\subseteq B$, אך במקומות אחרים עלולים להשתמש בסימן זה באופן מעט שונה.

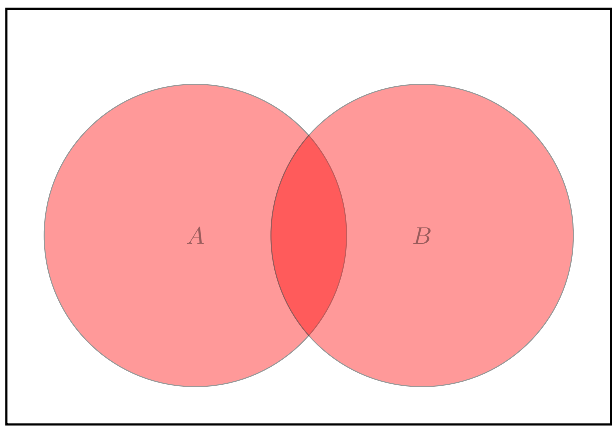
הוכחה: תרגיל

0.1 דיאגרמת ואן($Venn$)

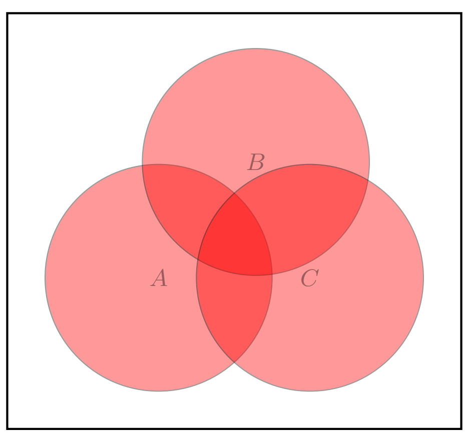
נוח לדמיין קבוצה A בתור שטח ואיבר בקבוצה $x \in A$ בתור נקודה כמתואר באיור הבא:



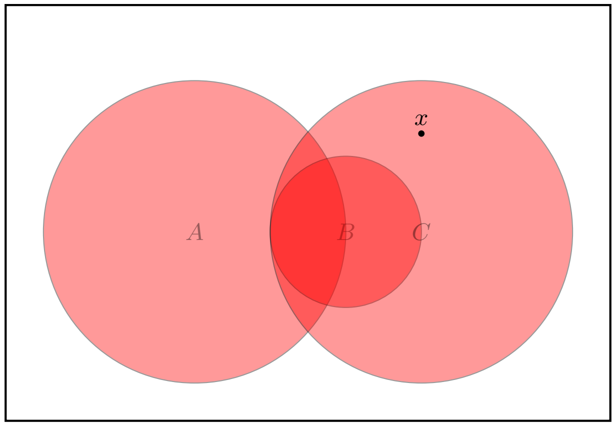
דיאגרמת ואן של שתי קבוצות או יותר היא דיאגרמה בא הקבוצות במצב כללי ביותר, שבו כל יחס בין הקבוצות אפשרי.
שתי קבוצות:



שלוש קבוצות:



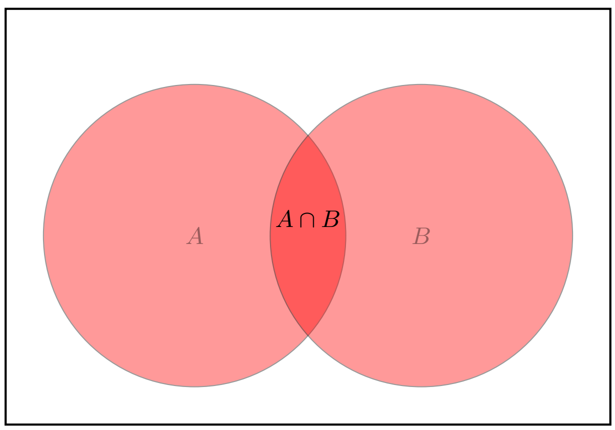
אם נתון לנו בנוסף כי לדוגמא $C \subsetneq B$ נוכל לבטא זאת בדיאגרמה:



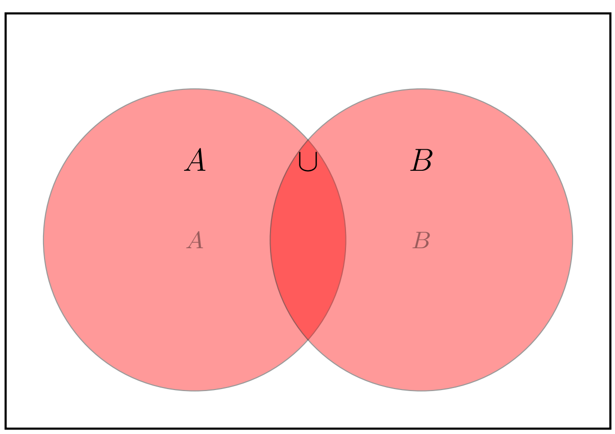
שימו לב כי האיבר x מעיד על כך שיש איבר ששייך ל־C ולא ל־B. עם זאת, הציור לא מדויק שכן אנחנו לא יודעים אם האיבר הזה מגיע גם מ־A או רק מ־B

פעולות על קבוצות

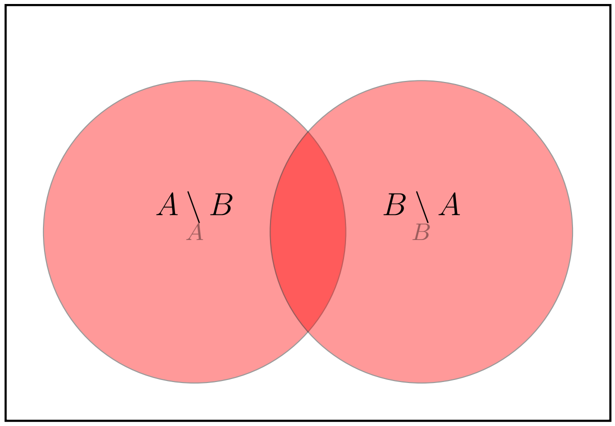
חיתוך־ יהיו A, B שתי קבוצות, נגדיר את החיתוך שלהן $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



איחוד־ יהיו A, B שתי קבוצות, נגדיר את האיחוד שלהן $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

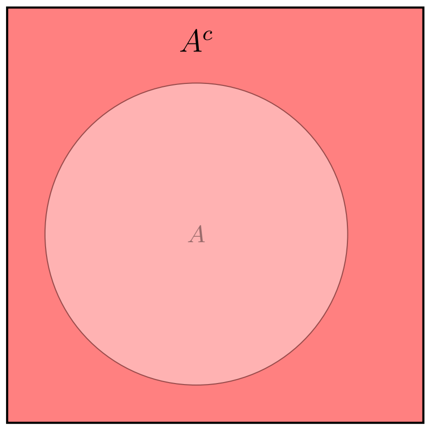


חיסור־ יהיו A, B שתי קבוצות, נגדיר את החיסור שלהן $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



יש המסמנים חיסור קבוצות $A - B$.

משלים- עקרון המשלים של קבוצה קצת מבלבל, כשאומרים המשלים של קבוצה A מתכוונים לקבוצה $A^c = \{x \mid x \notin A\}$. כפי שראינו, אם לא מפרידים מתוך קבוצה נתונה עלולים להתקל בפרדוקסים. לכן כשאנו מדברים על משלים אנחנו למעשה מניחים כי יש איזה "עולם" ברקע. פורמלית זה פשוט אומר קבוצה שמכילה את A ואז המשלים מוגדר כחיסור הקבוצות. בדיאגרמה, נחשוב על המשלים כך



דוגמאות:

- $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}, \ \ \{1,4,5\} \cap \{2,4,4\} = \{4\}, \ \ [0,\infty) \cap (-\infty,1) = [0,1)$
- $A \cap A = A \cup A = A, \ \ \{1,2,6\} \setminus \{2,7,8\} = \{1,6\}$, קבוצת המספרים האי רציונלים $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

טענה:

1. אסוצייטיביות:

   (א) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   (ב) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

   (ג) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

2. חילופיות:

   (א) $A \cap B = B \cap A$.

   (ב) $A \cup B = B \cup A$.

   (ג) $A \Delta B = B \Delta A$.

3. חוק הפילוג:

   (א) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   (ב) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. זהויות של הפרש וכללי דה־מורגן:

(א) $A \setminus B = A \cap B^c$.

(ב) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(ג) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(ד) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(ה) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

5. זהויות הנוגעות לקבוצה ריקה:

(א) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(ב) $A \cup \emptyset = A$.

(ג) $A \setminus \emptyset = A$.

(ד) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

(ה) $A \Delta \emptyset = A$.

6. זהויות הנוגעות לקבוצה עם עצמה:

(א) $A \cap A = A$.

(ב) $A \cup A = A$.

(ג) $A \setminus A = \emptyset$.

(ד) $A \Delta A = \emptyset$.

0.2 שקילות בתחשיב היחסים

שקילות ברמה של תחשיב היחסים צריכה להיות לא תלויה במשמעות של הפרידיקטים ולא תלויה בתחום הכימות.
שקילות של טענות בתחשיב היחסים: נגדיר כי שתי טענות α, β הן שקולות לוגית ונסמן זאת $\alpha \equiv \beta$ אם לכל בחירה של תחום כימות ואינטרפרטציה של יחסים בטענות α, β,

$$D \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

טענה:

1. $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$.
2. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$.
3. $\forall x \forall y (\phi(x,y)) \equiv \forall y \forall x (\phi(y,x))$.
4. $\exists x \exists y (\phi(x,y)) \equiv \exists y \exists x (\phi(y,x))$.
5. $\forall x \exists y (\phi(x,y)) \not\equiv \exists y \forall x (\phi(y,x))$.
6. $\forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\forall x \phi(x)) \wedge (\forall y \psi(y))$.
7. $\exists x (\phi(x) \vee \psi(x)) \equiv (\exists x \phi(x)) \vee (\exists y \psi(y))$.

הוכחה: אין בידנו את כל הכלים הדרושים כדי להוכיח שקילות של טענות, לגבי זה נרחיב בתת פרק הבא. כעת נוכיח לדוגמא את $5, 7$: עבור 5 נמצא תחום כימות והשמה ל־$\phi(x,y)$ שבא הטענה לא תיהיה נכונה, לדוגמא תחום הכימות יהיה המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$, ו־$\phi(x,y) \equiv x < y$. הטענה $\forall x \exists y x < y$ במספרים הטבעיים שכן היא אומרת שלכל מספר טבעי יש מספר טבעי שגדול ממנו. והטענה $\exists y \forall x (x < y)$ איננה נכונה שכן היא אומר כי קיים מספר טבעי שגדול מכל המספרים הטבעיים. עבור 7, השתמש ב־6 ונקבל את השקילות

$$\forall x (\neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)) \equiv (\forall x \neg\phi(x)) \wedge (\forall y \neg\psi(y))$$

ולכן

$$\neg(\forall x (\neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x))) \equiv \neg[(\forall x \neg\phi(x)) \wedge (\forall y \neg\psi(y))]$$

נפשט כל אחד מהאגפים לפי כללי שלילת כמתים ולפי כללי דה מורגן

$$\exists x \neg(\neg\phi(x) \wedge \neg\psi(x)) \equiv (\neg(\forall x \phi(x))) \vee (\neg(\forall y \psi(y)))$$

ושוב מכללי דה מורגן ושלילת כמתים

$$\exists x(\neg\neg\phi(x)) \vee (\neg\neg\psi(x)) \equiv (\exists x \neg\phi(x))) \vee (\exists y \neg\psi(y)))$$

$$\exists x(\phi(x)) \vee (\psi(x)) \equiv (\exists x \neg\phi(x))) \vee (\exists y \neg\psi(y)))$$

הוכחות פורמליות

כל הטענות שתתקלו בהן הן טענות בתחשיב היחסים. כמובן שאין סיבה להצרין כל פעם את הטענה אבל חשוב להבין את המבנה הלוגי שלה־ קשרים לוגיים וכמתים ולפרש את הטענה לפי הגדרת הקשרים. לעיתים הניסוח לא יהיה מהצורה הסטנדרטית של מבנה לוגי וצריך להבין מה הכוונה, כשתצברו נסיון זו תיהיה משימה קלה אך בהתחלה לא תמיד מבינים את המשמעות המלאה של טענה. לאחר שהבנתם את הטענה באופן מלא, מגיע השלב בו צריך להכריע האם הטענה נכונה או לא. אם הטענה נכונה־ מוכיחים אותה, ואם הטענה לא נכונה־ מוכיחים את שלילתה או במילים אחרות **מפריכים את הטענה**.

<u>**זכרו!**</u> כדי להפריך טענה יש להוכיח את שלילת הטענה.

מה זה אומר להוכיח טענה? לא נוכל לענות על שאלה זו באופן מלא והגדרה מדויקת מקבלים בקורס לוגיקה. נוח לדמיין הוכחה כשרשרת של טענות שכל טענה בשרשרת או נובעת ממה שקדם לכך בהוכחה או נובעת מטענה אחרת שכבר הוכחה בקורס. למזלינו יש כללים מאוד ברורים ומילים ספציפיות מוסכמות בין כותב וקורא ההוכחה. יש לעקוב באדיקות אחר המבנה הפורמלי של הוכחה כפי שיודגם המון במהלך הקורס.

איך מוכיחים ואיך מפרשים

אם ברצונינו להוכיח טענה צריך להבין מה המבנה הלוגי החיצוני ביותר. אם מדובר בקשר לוגי, פונים להגדרה שלו באמצעות טבלאות האמת ומוכיחים כי אחת מההשמות של ערכי האמת אשר עושה את הקשר נכונה מתקיימת. זה משפט את הטענה שיש להוכיח. יש כמה כללי אצבע חשובים שעוזרים להוכיח טענות:

$A \vee B$־ בדרך כלל נוח לחלק למקרים. אפשרות נוספת היא להניח כי A אינו מתקיים ולהוכיח את B(או להיפך).

$A \wedge B$־ מפשטים ע"י פיצול ההוכחה לשני חלקים, מוכיחים את A לחוד ואת B לחוד

$A \to B$־ אם הרישא שיקרית אז הגרירה נכונה תמיד (אומרים: באופן ריק) . אחרת, מניחים כי A נכון ומוכיחים כי B נכון בהוכחה נפתח במילים "נניח כי A ונוכיח את B".

$\neg A$־ מוכיחים כי השלילה של A נכונה בדרך כלל על ידי פירוש טענה שקולה לה שמתקבלת מכללי דה מורגן וההערה על שלילת כמתים.

דבר לא חות חשוב בהוכחה הוא איך להפיק האינפורמציה במהלך ההוכחה מטענות שאנו יודעים כי הן נכונות:

$A \wedge B$־ אפשר להסיק כי A נכון וגם B נכון

$A \vee B$־ לרוב מחלקים לשני מקרים, נניח כי A נכון או B נכון.

$A \to B$־ אפשר להסיק כי בהנתן ש־A נכון אז גם B נכון זה לא אומר ש־B נכון וזה גם לא אומר ש־A נכון.

המצב יותר מסובך כאשר יש כמתים מעורבים.

הוכחת טענת קיים כדי להוכיח כי הטענה $\exists x P(x)$ נכונה בתחום הכימות D, לרוב צריך פשוט להביא דוגמא ספציפית a מתחום הכימות ולהוכיח כי מתקיים $P(a)$. האנלוגיה הכי מוצלחת מגיע מעולם המשפט, נניח היינו רוצים לשכנע את בית המשפט כי פיל ורוד. הדרך הכי משכנעת היא להביא פיל ורוד שיעיד בבית המשפט. הפיל הוא עדות לכך שקיים פיל ורוד. האנלוגיה תשמש אותנו רבות בהוכחות. כשנרצה להוכיח כי קיים משהו אנחנו נביא עדות לכך.

דוגמא: הוכיחו את הטענות הבאות בתחום המספרים הממשיים:

1. $\exists x(x+1=0)$
2. $(\exists x(x^2<0)) \vee (\exists x(x^2>0))$.

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: המבנה הלוגי החיצוני ביותר הוא כמת הקיים ולכן צריך לתת דוגמא ספציפית שמקיימת $x+1=0$, ה־a הספציפי שניקח יהיה $a=-1$ שמודאי מקיים $(-1)+1=0$. לרוב נקצר את המשפט הזה ונגדיר "נגדיר $x=-1$". באנלוגיה לבית המשפט -1 עד לכך ש־$\exists x(x+1=0)$.

<u>הוכחת 2</u>: המבנה הלוגי החיצוני ביותר הוא $\vee$ לכן צריך להוכיח שלפחות אחד מבין $\exists x(x^2+1<0)$ ו־ $\exists x(x^2>0)$ נכון. נוכיח כי $\exists x x^2>0$ נכון (למה דווקא את זה? כי ברור שהטענה השנייה לא נכונה). כעת המבנה הלוגי החיצוני ביותר הוא כמת קיים, נגדיר $x=1$ אז מתקיים $1^2=1>0$. 1 מעיד על נכונות הטענה.

$\square$

הוכחת טענת לכל כדי להוכיח כי טענת $\forall x P(x)$ נכונה בתחום כימות מסוים, יש כמה דרכים. הדרך הראשונה היא אם תחום הכימות קטן דיו שנוכל באופן טכני לעבור על האפשרויות "אחד־אחד". מה זה קטן דיו? זה תלוי במי שמוכיח, אם נניח יש 1000 איברים זה יכול יותר מדי כדי שתרשמו הוכחה. אבל מחשב כן יוכל לעבור על כל המקרים. ואכן יש דוגמאות למשפטים שללא מחשב לא יכולנו לדעת את נכונותם־ ראו משפט ארבעת הצבעים.

דוגמא:

1. בתחום הכימות $D=\{0,1,2\}$ הוכיחו כי $\forall x.x^2-2\leq x$
2. בתחום הכימות $D=\{-5,.....,19\}$, $\exists y\forall x(x\neq 0\vee x+y=1)$

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: המבנה הלוגי החיצוני ביותר הוא טענת לכל אזי לכל x צריך הוכיח $x^2-2\leq x$ לכל אחד מהמקרים $x=0,1,2$. נעבור "אחד־אחד" על המקרים עללו, $0^2-2=-2\leq 0$, $1^2-2=-1\leq 0$, $2^2-2=2\leq 2$.
לכל x צריך להוכיח $(2x\neq x)\vee(100^x=1)$. נשים לב כי לכל $x\neq 0$ מתקיים $2x\neq x$ שכן אפשר לצמצם את x משני אגפי המשוואה ולכן לפחות אחת הטענות בדיסיונקציה מתקיים. אם כך לכל $x\neq 0$, $(2x\neq x)\vee(100^x=1)$ טענה נכונה. נותר לעבור על $x=1$, אבל $100^0=1$ ולכן $(2x\neq x)\vee(100^x=1)$ טענה נכונה.
<u>הוכחת 2</u>: המבנה הלוגי החיצוני ביותר הוא כמת קיים, אם כך נביא עד לנכונות הטענה $\forall x(x\neq 0\vee x+y=1)$, נגדיר $y=1$ ונוכיח את טענת הלכל, אם $x\neq 0$ אז $x\neq 0\vee x+y=1$ טענה נכונה. אם $x=0$ אז $x+y=0+1=1$.

$\square$

במקרה ואין אנו יכולים לעבור "אחד־אחד" על המקרים מה שעושים הוא לקחת x כללי ביותר מתחום הכימות ומייצרים עבורו הוכחה. אם הצלחנו לייצר הוכחה בלי להניח שוב דבר על x אז אם ניצוק לתוך x מקרה ספציפי הרי שההוכחה תיהיה נכונה ולכן לכל a שניקח מתחום הכימות הוכחנו כי $D\models P(a)$ ולכן הוכחנו כי $D\models\forall x.P(x)$. באופן פורמלי, כדי להצהיר כי x כללי ביותר פותחים במילים "יהי x". הקורא יודע כעת ש־x הוא כללי ביותר וכל דבר שנוכיח לגבי x יהיה נכון לכל x. אבל *with great power comes great responsibility*, ואם לקחנו x כללי ביותר אנחנו חייבים לנקוט משנה זהירות לגבי ההנחות שיש לנו על x לדוגמא לא נוכל להניח כי x חיובי או ש־$x^2-1>0$, הטענות היחידות שנוכל לטעון לגבי x הן טענות נכונות לכל x בתחום הכימות. לדוגמא, אם תחום הכימות הוא מספרים ממשיים נוכל להסיק כי $x^2\geq 0$. לא נוכל להניח כי $x^2>0$ כי לא כל x מקיים זאת (מי לא מקיים זאת?). מה שעושים בדרך כלל בסיטואציה כזו הוא שוב חלוקה למקרים: אם $x=0$... אם $x>0$ אז $x^2>0$...

אם מוכיחים טענה מהצורה $\forall x\exists y...$ ההוכחה מתחילה ב־ " יהי x נוכיח כי קיים y" כעת ההגדרה של y יכולה להכין את x כפרמטר, כלומר הגדרת y יכולה להיות תלויה ב־ x.

דוגמא: תחום הכימות הוא מספרים ממשיים:

1. $\forall x(x+1>0\vee x^2\geq 1)$
2. $\forall x((\forall y.x\cdot y=0)\rightarrow x=0)$

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: יהי x_0, הטענה $\forall y(y>-1\vee y\leq -1)$ היא טענה נכונה ולכן אפשר להסיק כי $x_0>-1\vee x_0\leq -1$, נחלק לשני מקרים. אם $x_0>-1$ אז $x_0+1>0$ ולכן $x_0+1>0\vee x_0^2\geq 1$ היא טענה נכונה. במקרה השני $x_0\leq -1$ אז $x_0^2\geq 1$ ולכן $x_0+1>0\vee x_0^2\geq 1$ ובכל מקרה $x_0+1>0\vee x_0^2\geq 1$.
<u>הוכחת 2</u>: יהי x, נוכיח כי $(\forall y(y\cdot x=0)\rightarrow x=0)$, זו טענת גרירה ולכן נניח כי $\forall y(y\cdot x=0)$ נוכיח כי $x=0$, מההנחה לכל y מתקיים $y\cdot x=0$ נובע כי עבור $y=1$ מתקיים $x=x\cdot 1=0$, כדרוש.

איך מפרשים טענות עם כמתים? אם ידוע לנו נכונות של טענה $\exists x P(x)$ בתחום כימות D, אז אנחנו יודעים כי קיים לפחות a בתחום D אחד עבורו הטענה $P(a)$ נכונה, הבעיה שאנחנו לא יודעים בדיוק מי ה־a הזה. אם אנחנו יודעים להוכיח את $P(a)$ עבור a ספציפי אז אין בעיה לבחור את a באופן נקודתי. אבל רוב המקרים אנחנו לא נדע מי הוא a ואז שוב אנחנו בסיטואציה ש־a הוא כללי ביותר ואין לנו שום אפשרות להגביל את הכלליות של a לכן, כשיהיה נתון לנו כי $\exists a P(x)$ נצהיר שוב על כלליות a "יהי a עבורו מתקיים $P(a)$". אם ידוע לנו טענה $\forall x P(x)$ בתחום הכימות D הרי שלכל a ב־D שניקח, ייתקיים $P(a)$. כלומר אפילו מבלי לדעת מה הטענה $P(a)$, אם נתון כי $\forall x P(x)$ בתחום הכימות $\mathbb{R}$ אז בפרט מתקיים $P(0),P(\pi)$ וכו'.

0.3 הוכחה בשלילה

המבנה של הוכחה בשלילה הוא כזה: נניח אנו רוצים להוכיח טענה ϕ. נניח בשלילה כי $\neg\phi$ זו טענה נכונה וננסה להגיע לסתירה, אם הצלחנו אז $\neg\phi$ היא טענה שיקרית ולכן $\phi \equiv \neg(\neg\phi)$ היא טענה נכונה, כדרוש.

משפט $\sqrt{2}$ מספר אי רציונלי, כלומר,לא ניתן להציגו כשבר. בנוסחה, נסמן $I(x)$ את התכונה כי x מספר שלם: $\neg(\exists n \exists m (I(n) \wedge I(m) \wedge \sqrt{2} = \frac{n}{m}))$.

הוכחה: נניח בשלילה כי המשפט לא נכון, כלומר אפשר לרשום את $\sqrt{2}$ כמנה של שני מספרים שלמים, $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. ננסה להגיע לסתירה, ואם נצליח נוכל להסיק כי ההנחה הראשונית הייתה שיקרית כלומר לא ניתן להציג את $\sqrt{2}$ כמנה של שני מספרים שלמים. אפשר להניח כי לפחות אחד משני המספרים n, m הוא אי זוגי, אחרת שני המספרים זוגיים ונוכל לצמצם 2 מהמונה ומהמכנה, אם שוב הגענו למספרים זוגיים נוכל לצמצם שוב 2 עד שנגיע למספר אי זוגי (פורמלית צריך להפעיל כאן אינדוקציה, עליה נדבר בהמשך). נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ והשוויון נשמר, כלומר $2 = \frac{n^2}{m^2}$ היא טענה נכונה. אם כך $2 \cdot m^2 = n^2$ נטען כי נובע מכך ש־ n מספר זוגי. אחרת (שוב מניחים בשלילה) n אי זוגי ואז $n^2 = n \cdot n$ הוא מכפלה של מספרים אי זוגיים ולכן בעצמו מספר אי זוגי זו סתירה שכן $n^2 = m^2 \cdot 2$ ולכן מספר זוגי. אם כך n זוגי כלומר קיים מספר שלם k כך ש־ $n = 2k$, נציב k במשוואה ונקבל $(2k)^2 = m^2 \cdot 2 \to 4k^2 = 2m^2 \to 2k^2 = m^2$ מאותו הנימוק עבור n מקבלים כי m מספר זוגי. זו סתירה שלפחות אחד מבין n, m הוא אי זוגי.

□

טענה: לכל שבר $\frac{n}{m}$, $\sqrt{2} + \frac{n}{m}$ לא ניתן להציג כשבר.

הוכחה: אחרת קיימים n, m שלמים כך ש־ $\sqrt{2} + \frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, אזי $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{n}{m} = \frac{am-nb}{mb}$. כפל חיסור וחיבור של מספרים שלמים זה מספר שלם ולכן $am - bn, mb$ הם משפרים שלמים, אם כך, הצגנו את $\sqrt{2}$ כשבר וזו סתירה למשפט הקודם.

□

אינדוקציה ורקורסיה

הוכחה באינדוקציה היא הוכחה של טענה לגבי המספרים הטבעיים־ $0, 1, 2, 3, 4, ...$ בהמשך הקורס נדבר באופן יותר מדויק על משפט האינדוקציה. לשם הדגמת עקרון ההוכחה באינדוקציה ניקח טענה פשוטה לגבי מספרים טבעיים, לדוגמא

$$\forall n \geq 1 (n + 1 \leq 2n)$$

הוכחה באינדוקציה משתמשת במה שכבר הוכחנו שנכון כדי לדחוף את ההוכחה למספר הטבעי הבא. במקרה של הטענה הקודמת, עבור 1 מתקיים

$$1 + 1 = 2 \leq 2 = 2 \cdot 1$$

לכן הטענה נכונה עבור 1. כעת עבור 2, מתקיים

$$2 + 1 = (1 + 1) + 1$$

כעת, לפי מה שאנחנו כבר יודעים לגבי 1, נוכח להחליף את המחובר $1 + 1$ ב־$2 \cdot 1$. ולקבל

$$(1 + 1) + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1 \leq 2 \cdot 1 + 2 = 2 \cdot 2$$

אז הטענה נכונה ל־2. עבור $n = 3$ נשתמש בנכונות עבור 2

$$3 + 1 = (2 + 1) + 1 \leq 2 \cdot 2 + 1 \leq 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 3.$$

לכן הטענה נכונה ל־3. באופן כללי נניח כי הטענה נכונה ל־n, כלומר נניח וכבר הוכחנו כי $n + 1 \leq 2n$ ונוכיח־ את הטענה עבור $n + 1$

$$(n + 1) + 1 \leq 2n + 1 \leq 2n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$$

וכאן מסתיימת ההוכחה. השלבים המהותיים באינדוקציה. השלבים הם:

בסיס האינדוקציה־ הוכחה עבור הטבעי הראשון שהטענה נכונה עבורו בדרך כלל 0.
הנחת האינדוקציה־ הנחה כי הטענה מתקיימת עבור n.
צעדה האינדוקציה־ הוכחה עבור $n + 1$.

טענה לכל n מתקיים $0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה:
בסיס האינדוקציה: ברור כי מתקיים $0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$.
הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה ל־n כלומר, השיוויון $0 + 1 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ נכון. צעד האינדוקציה: נוכיח את הטענה עבור $n + 1$.מתקיים

$$0+1+2+...+n+(n+1)=(0+1+...+n)+(n+1)$$

לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים

$$(0+1+...+n)+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

וסיימנו את הוכחת האינדוקציה

$\square$

למעשה הוכחה באינדוקציה מניחה את נכונות הטענה עבור **כל** המספרים על n ונעזרת בכך כדי להוכיח את הטענה עבור $n+1$. בהרבה מקרים אין שימוש בנכונות עבור $k<n$ אבל במקרים מסוימים זה הכרחי

טענה: כל שבר $q=\frac{m}{n}$ ניתן לכתוב כשבר של שני מספרים זרים, כלומר ניתן לכתוב $q=\frac{m'}{n'}$ כך שהמספר היחיד שמחלק את m'וגם מחלק את n' הוא 1.

הוכחה: נוכיח בינדוקציה על m כי הטענה נכונה לכל n, כלומר אנחנו מוכיח באינדוקציה כי על m אתה הטענה

"לכל $n\neq 0$ קיימים שני מספרים זרים n',m' כך ש־ $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$"

בסיס האינדוקציה, עבור $m=0$ מתקיים כי לכל n, $\frac{0}{n}=\frac{0}{1}$. המספר היחיד שמחלק את 1 הוא 1. כעת נניח כי הטענה נכונה לכל $k\leq m$ ונוכיח עבור $m+1$. אנו נוכיחים טענת לכל ולכן נפתח ביהי n מספר טבעי שונה מ־0. נחלק לשני מקרים, אם $n,m+1$ זרים אז אפשר לקחת $n=n',m=m'$. אחרת, $n,m+1$ אינם זרים. כלומר קיים מספר $r>1$ שמחלק גם את n וגם את $m+1$. אם כך, $\frac{m+1}{r}=k_1\leq m$ ו־ $\frac{n}{r}=k_2\leq n-1$ באשר k_1,k_2 מספרים טבעיים ומתקיים $\frac{m+1}{n}=\frac{k_1}{k_2}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $k_1\leq m$ לכל n אפשר להציג את $\frac{k_1}{n}$ כמנה של שני מספרים זרים. בפרט עבור k_2 קיימים n',m' זרים כך ש־ $\frac{k_1}{k_2}=\frac{m'}{n'}$. אזי $\frac{m+1}{n}=\frac{m'}{n'}$. שימו לב כי ייתכן ש־ $k_1<m$ ולכן הנחת האינדוקציה הייתה חייבת להיות לכל $k\leq m$ ולא מספיק להניח נכונות רק עבור $k=m$.

$\square$

רקורסיה: רקורסיה היא דרך נפוצה להגדיר סדרה אובייקטים ע"י הגדרת האיבר הראשון בסדרה וכלל של איך מתקבל האיבר הבא בסדרה מהאיברים הקודמים בסדרה.

דוגמאות:

1. לדוגמא סדרת פיבוננצ'י נתונה ע"י הכלל $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ שמתאר את היחס כי כל איבר בסדרה הוא סכום שני האיברים הקודמים. שימו לב שאנו לא יודעים איך סדרה זו מתחילה ולכן אין באפשרותנו לחשב. נניח התחלנו עם $a_0=1,a_1=1$ אז נוכל לחשב כי $a_2=1+1=2$ ואז $a_3=2+1$, $a_4=3+2$...
2. נגדיר $A_0=0$ ו־ $A_{n+1}=\{A_n\}$. אז $A_n=\underbrace{\{\{\{...\{0\}...\}\}\}}_{n\text{ פעמים}}$
3. נגדיר $0!=1$ ו־$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$.