שיעור 8(דטרמיננטה)

הגדרה: ״המקבילון של מטריצה״ 2X2, 3X3.

טענה:(רעיון גיאומטרי) A הפיכה אמ״ם עמודות A בסיס אמ״ם שטח/נפח המקבילון אינו 0.

שטח המקבילית- מכפלת אחת הצלעות בגובה אליה:

אורך הצלע של העמודה הראשונה $\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}}$

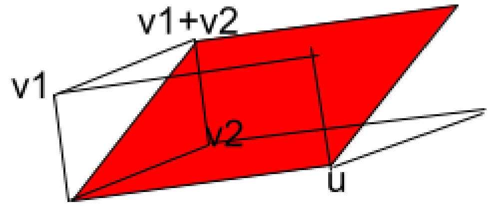
גובה- מרחק העמודה השנייה (a_2, b_2) מהישר של העמודה הראשונה : שני תיאורים
$\{t(a_1, b_1) \mid t \in R\}$ או פשוט הישר שעובר בראשית ונקודה (a_1, b_1).
$Ax + By + C = 0$. עובר בראשית ולכן $C = 0$ ועובר בנקודה a_1, b_1 ולכן $Aa_1 + Bb_1 = 0$
אפשר לקחת לדוגמא $B = a_1,\ A =- b_1$ ואז המוואה מתקיימת. לכן משוואת הישר היא:
$$a_1y - b_1x = 0$$
תזכורת: מרחק נקודה מישר- $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
לכן הגובה במקבילית הוא $\frac{|a_1b_2-b_1a_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}}}$.

ואז מקבלים שהשטח של המקבילית הוא $|a_1b_2 - b_1a_2|$.

הגדרת דטרמיננטה לפי פונקציית נפח: $N: M_n(F) \to F$ המקיימת את התכונות

1. לינאריות לפי שורה (שתי תכונות).
2. שווה ל-0 אם יש שתי שורות שוות.
3. נירמול. $N(I) = 1$

הסבר גיאומטרי לכל אחת מהתכונות:
1.



כפל בסקלר זה ברור כי השטח כפלי לכל אחת מהצלעות לפי הנוסחה.

2. שתי שורות שוות מקבלים ישר אז ברור.
3. השטח של ריבוע הוא 1.

טענה: אם ב-A יש שורת 0 אז $N(A) = 0$ (ע״י כפל בסקלר 0).
הוכחה: 0+0=0 ואז מצמצמים.

משפט: אם ψ פעולה אלמטרית ו-A מטריצה אזי $N(\psi(A)) = x_{\psi} \cdot N(A)$ באשר:

1. ψ חילוף שורות אז $x_{\psi} =- 1$.
2. אם ψ כפל בסקלר α אז $x_{\psi} = \alpha$.
3. ψ הוספת שורה אחת מוכפלת בסקלר לשורה אחרת אז $x_{\psi} = 1$.

הוכחה:

1. מפתחים ...= $0 = N(v_1,..., v_i + v_j,.., v_i + v_j,..., v_n)$
2. ישירות מתכונות דטרמיננטה.
3. $N(v_1,.., v_i,..., v_i + \alpha v_j,..., v_n) = N(A) + \alpha N(\text{זהות שורות שתי}) = N(A)$

מסקנות:

1. $N(E_{\psi}) = N(\psi(I)) = x_{\psi} \cdot 1 = x_{\psi} \neq 0$.
2. אם A שקולת שורות ל-B אזי $N(A) \neq 0 \Leftrightarrow N(B) \neq 0$.
3. A הפיכה אמ״ם $N(A) \neq 0$.

הוכחה:
1,2 ישיר. ל-3, אם A הפיכה אז A שקולת שורות ל-I_n לכן $N(A) \neq 0$.
אם A לא הפיכה אז A שקולת שורות למטריצה J עם שורת 0 (כי היא ריבועית) ולפי התרגיל $N(J) = 0$ אזי $N(A) = 0$.

טענה: $N(EA) = N(E) \cdot N(A)$ באשר A מטריצה אלמנטרית
הוכחה: $N(E_{\psi}A) = N(\psi(A)) = x_{\psi}N(A) = N(E_{\psi}) \cdot N(A)$.

<u>מסקנה:</u> אם A לא הפיכה אז $N(A) = 0$ ואם A הפיכה אז $N(A) = x_{\psi_1} \cdot ... \cdot x_{\psi_n}$ בהתאם לפעולות הדירוג לצורה הקנונית.

<u>מסקנה (משפט היחידות):</u> יש רק פונקציית נפח אחת.
הוכחה: יהיו N_1,N_2, אז שיוויון הפונקציות נובע מהמסקנה הקודמת. (זה לא מוכיח קיום עדיין)

<u>משפט:</u> $N(AB) = N(A) \cdot N(B)$.
<u>הוכחה:</u> אם A לא הפיכה אז $N(A) = 0$ וגם AB לא הפיכה (ראינו משפט) ולכן גם $N(AB) = 0$ ומתקיים השיוויון.
אם A הפיכה אז $A = E_1,..., E_n$ (פורמלית באינדוקציה על n) ולכן
$N(AB) = N(E_1... E_nB) = N(E_1)... N(E_n)N(B) = N(A)N(B)$.

<u>משפט:</u> $N(A) = N(A^t)$
<u>הוכחה:</u> אם לא הפיכות אז ברור. אם הפיכות אז נציג כמכפלה של אלמנטריות ונפעיל טרנספוז ואז מספיק להוכיח שזה נכון לאלמנטריות.

כפל שורה בסקלר ברור (כי המטריצה סימטרית)
בהחלפת שורות המטריצה המתקבלת מהחלפת שורות היא תמיד סימטרית (הוכחה ע״י איבר ישיר).
אם הוספנו שורה i מוכפלת בסדקלר לשורה j אז בטרנספוז הוספנו שורה j מוכפלת בסקלר לשורה i וגם היא עם ערך 1.

דטרמיננטה

הגדרת מינור i,j.(ע״י נוסחא)

הגדרת דטמנינננטה בצורה רקורסיבית, פיתוח לפי עמודה j כלשהי. (למטריצה מסדר 1 זה פשוט המספר)

דוגמאות: וידוא נוסחה של 2 (עבור שתי העמודות), דוגמא מספרים ל-3, מציאת כלל עם משולשים ל-3.

<u>משפט:</u> הדטרמיננטה היא פונקציית נפח:
1. הדטרמיננטה של 0 היא 0 והדטרמיננטה של I היא 1.
2. הדטרמיננטה היא לינארית בשורות.
3. אם יש שתי זורות זהות אז הדטרמיננטה היא 0.

1,2 באינדוקציה זה קל.
עבור 3, המקרה n=2 ברור ישירות מהנוסחא שפיתחנו. נניח הוכחנו את הטענה עד n-1 (ובפרט הנוסחא עבור n-1 מגדירה פונקציית נפח וכל מה שהוכחנו עבור פונקציית נפח כללית תקף) ונוכיח עבור n.
השורות ה- k וה-l זהות. k<l. נעבור על המינורים: A_{ij} אם $i \neq k, l$ זה 0. נשים לב כי $(A)_{k,j} = (A)_{l,j}$ (כי השורות שוות). מה קרה למינורים? A_{kj}, A_{lj}. אם לוקחים את המינור ה-A_{lj} וע״י חילופי שורות צמודות מורידים את השורה ה-l להיות השורה ה-k ביצענו חילופי שורות מהצורה r,r+1 ששינו בכל פעם את ערך הדטרמיננטה ב-(-1).
כמה חילופי שורה עשינו? $((l - 1, l - 2), (l - 1, l - 2),..., (l - (l - k - 1), k)$(נשים לב כי במינור ה-lj המיקום של השורה ה-l המקורית הוא השורה ה-l-1 (כי מחקנו מתחת את k) ולכן עשינו $l - k - 1$ החלפות.

אזי $|A_{lj}| = (-1)^{l-k-1}|A_{kj}|$

ולפי נוסחה רקורסיבית:

$$(-1)^{l+j}(A)_{lj}|A_{lj}| + (-1)^{k+j}(A)_{kj}|A_{kj}| = (-1)^{2l-k-1}.... = (-1)^{k+1}... = 0$$

<u>מסקנה:</u> פיתוח דטרמיננטה לפי כל עמודה.

<u>מסקנה:</u>

1. אם במטריצה יש שורת 0 אז הדטרמיננטה שלה 0
2. אם במטריצה יש שתי שורות זהות אז הדטרמיננטה שלה 0.

<u>מסקנה:</u> איך דטרמיננטה מושפעת מדירוג.

<u>דוגמא:</u> חישוב דטרמיננטה ע"י דירוג.

<u>דוגמא:</u> מקרה שנוח לפתח לפי שורה אחרת.

<u>טענה:</u> דטרמיננטה של משולשית תחתונה או עליונה היא מכפלת איברי האלכסון.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה לפי השורה האחרונה.

<u>משפט:</u> מטריצה הפיכה אמ"ם יש לה דטרמיננטה שונה מ-0.

<u>משפט:</u> דטרמיננטה היא כפלית

<u>משפט:</u> (det(A)=det(A)^t

<u>מסקנה:</u> אפשר לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה (והנוסחא)

<u>תרגיל:</u> אם A מטריצה אנטי סימטרית מסדר אי זוגי והמציין אינו 2 אז A איננה הפיכה.

<u>הגדרה:</u> המטריצה המוצמדת.

הגדרה 5.28: תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$. **המטריצה המצורפת ל-A** $\mathrm{adj}\, A \in \mathrm{M}_n(F)$ מוגדרת על ידי

$((\mathrm{adj}\, A)^t)_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ כלומר $(\mathrm{adj}\, A)_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$. ∎

דוגמה 5.29: אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז $\mathrm{adj}\, A = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

אם $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ אז $(\mathrm{adj}\, A)^t = \begin{pmatrix} ei-fh & fg-di & dh-eg \\ hc-bi & ai-cg & bg-ah \\ bf-ec & dc-af & ae-bd \end{pmatrix}$.

לכן $\mathrm{adj}\, A = \begin{pmatrix} ei-fh & hc-bi & bf-ec \\ fg-di & ai-cg & dc-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$.

תרגיל 5.30: $\mathrm{adj}\, A^t = (\mathrm{adj}\, A)^t$.

הוכחה: $((\mathrm{adj}\, A)^t)_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = (-1)^{i+j}|(A_{ij})^t| = (-1)^{i+j}|A^t{}_{ji}| = (\mathrm{adj}\, A^t)_{ij}$. ∎

משפט 5.31: *תהי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

(א) $A\ \mathrm{adj}\ A = |A| I_n = \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A| \end{pmatrix}$

(ב) $\mathrm{adj}\ A\ A = |A| I_n$.

הוכחה: (א) יהיו $1 \le i, j \le n$. צריך להוכיח: $(A\ \mathrm{adj}\ A)_{ij} = \begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$.

$$(A\ \mathrm{adj}\ A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (\mathrm{adj}\ A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} (A)_{ik} |A_{jk}|.$$

אם $i = j$, הביטוי באגף ימין הוא בדיוק הפיתוח של $|A|$ לפי השורה ה־j, לכן שווה ל־$|A|$.

אם $j \ne i$, תהי A' המטריצה המתקבלת מ־A, אם רושמים את השורה ה־i של A במקום השורה ה־j של A. אז ב־A' שתי שורות זהות, לכן $|A'| = 0$. כמו כן, לכל k,

$$(A')_{jk} = (A)_{ik}, \qquad A'_{jk} = A_{jk}.$$

אם נציב זאת בחישוב לעיל, נקבל (פיתוח של A' לפי השורה ה־j)

$$(A\ \mathrm{adj}\ A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} (A')_{jk} |A'_{jk}| = |A'| = 0$$

(ב) לפי תרגיל 5.30 ולפי (א) מיושם על A^t,

$$(\mathrm{adj}\ A\ A)^t = A^t (\mathrm{adj}\ A)^t = A^t (\mathrm{adj}\ A^t) = |A^t| I_n = |A| I_n = (|A| I_n)^t.$$

ומכאן הטענה. ∎

תוצאה 5.32: אם $|A| \ne 0$ אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \mathrm{adj}\ A$.

דוגמה 5.33: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

משפט 5.34 (Cramer): *תהי* $AX = b$ *מערכת של* n *משוואות ליניאריות ב־*n *נעלמים מעל שדה* F. *נניח* $|A| \ne 0$. *אז למערכת פתרון יחיד* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ *הנתון על ידי הנוסחה* $c_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ *כאשר* $A_i \in \mathrm{M}_n(F)$ *מתקבלת מ־*A *על ידי החלפת העמודה ה־*i *של* A *בעמודה* b.

הוכחה: אם $|A| \ne 0$ אז A הפיכה ולכן למערכת יש פתרון יחיד c. אז $Ac = b$ ולכן $c = A^{-1} b$, לפי תוצאה 5.32, $c = \frac{1}{|A|} (\mathrm{adj}\ A) b$. נניח $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t \in F^n$ ונסמן $B = A_i$. לפי כלל הכפל של מטריצות

$$c_i = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{adj}\ A)_{ik} b_k = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} |A_{ki}| b_k = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} |B_{ki}| (B)_{ki} = \frac{1}{|A|} |B|$$

השוויון האחרון נובע מפיתוח של $|B|$ לפי העמודה ה־i. ∎

דוגמה 5.35: למערכת

$$2X+3Y=4$$

$$5X+6Y=1$$

פתרון יחיד $(c_1,c_2)^t$, באשר

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}4&3\\1&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot 6-3\cdot 1}{2\cdot 6-3\cdot 5}=-7,\qquad c_2=\frac{\begin{vmatrix}2&4\\5&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}}=\frac{2\cdot 1-4\cdot 5}{2\cdot 6-3\cdot 5}=6$$

<u>דטרמיננטה לפי תמורות</u>

הגדרה 5.19: יהי n מספר טבעי ונסמן $J_n := \{1,2,\dots,n\}$. **תמורה על** J_n היא העתקה $\sigma\colon J_n \to J_n$ שהינה חד חד ערכית ועל. במילים אחרות, $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$ היא סדרת כל האיברים של J_n, אבל לא בהכרח באותו סדר. קבוצת כל התמורות על J_n תסומן S_n. אם $\sigma,\tau \in S_n$ אז גם $\sigma\tau := \sigma\circ\tau \in S_n$. יש $n!$ תמורות ב־S_n.
∎

סימון 5.20: *רישום של תמורה.* דוגמה עבור $n = 8$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ (מתחת כל $i \in J_n$ עומד $\sigma(i)$). הסימון $(k\ l)$ מסמן את התמורה שמחליפה בין k ו־l ומשאירה את שאר אברי J_n במקומם. ∎

הגדרה 5.21: יהי F שדה ותהי $\sigma \in S_n$.

(א) **המטריצה של תמורה** σ היא $P(\sigma) := (e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(F)$.

(ב) **הסימן** $\mathrm{Sign}(\sigma)$ של $\sigma \in S_n$ הוא $\det(P(\sigma))$ (אפשר להראות שהוא אינו תלוי ב־F.) ∎

הערה 5.22: (א) אם $A \in \mathrm{M}_n(F)$ **מטריצת תמורה**, כלומר, $A = P(\sigma)$ עבור איזה $\sigma \in S_n$, אז

(*) בכל עמודה של A יש רק רכיב אחד שונה מאפס, הוא 1, והוא במיקום אחר בכל עמודה.

להיפך, אם A מקיימת את (*) אז $A = P(\sigma)$ עבור איזה $\sigma \in S_n$.

(ב) אם A מטריצת תמורה אז מינור של רכיב 1 בה הוא גם מטריצת תמורה. זה נובע מאפיון (*).

(ג) אם A מטריצת תמורה אז $|A| = \pm 1$. זה נובע מ־(ב) באינדוקציה על n.

(ד) $\mathrm{Sign}(\sigma) = \pm 1$ לכל $\sigma \in S_n$. אומרים ש־σ **זוגית** אם $\mathrm{Sign}(\sigma) = 1$ **ואי זוגית** אם $\mathrm{Sign}(\sigma) = -1$.

(ה) אם $\sigma = 1$ אז $\mathrm{Sign}(\sigma) = 1$. אכן, $P(\sigma) = I_n$, לכן $|P(\sigma)| = 1$.

(ו) אם $\sigma = (k\ l)$ אז $\mathrm{Sign}(\sigma) = -1$. אכן, $P(\sigma) = E_{kl}$, לכן לפי משפט 5.5, $|P(\sigma)| = -1$. ∎

משפט 5.23: *תהיינה* $\sigma,\tau \in S_n$. אז $P(\sigma)P(\tau) = P(\sigma\tau)$ ולכן $\mathrm{Sign}(\sigma)\,\mathrm{Sign}(\tau) = \mathrm{Sign}(\sigma\tau)$.

הוכחה: נסמן $A = P(\sigma)$. אז $Ae_j = e_{\sigma(j)}$ לכל $j \in J_n$. לכן

$$P(\sigma)P(\tau) = A(e_{\tau(1)},\dots,e_{\tau(n)}) = (Ae_{\tau(1)},\dots,Ae_{\tau(n)}) = (e_{\sigma(\tau(1))},\dots,e_{\sigma(\tau(n))}) =$$
$$= (e_{(\sigma\tau)(1)},\dots,e_{(\sigma\tau)(n)}) = P(\sigma\tau).$$

כעת נפעיל את משפט המכפלה על שוויון זה: $|P(\sigma\tau)| = |P(\sigma)|\cdot|P(\tau)|$. ∎

משפט 5.24: *תהי* $\sigma \in S_n$. אז $P(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$, באשר $N(\sigma) = \#\{(i,j) |\ i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

הוכחה: לכל $1 \le i \le n$ תהי $P_i \in \mathrm{M}_i(F)$ המטריצה שמורכבת מהעמודות $1,\dots,i$ והשורות $\sigma(1),\dots,\sigma(i)$ של $P(\sigma)$ (כלומר, P_i מתקבלת מ־$P(\sigma)$ על ידי מחיקת יתר השורות והעמודות).

אז $P_1 = (1)$, $P_n = P(\sigma)$, ופיתוח לפי העמודה האחרונה נותן $|P_{i-1}| = (-1)^{i+\sigma(i)-Z(i)}|P_i|$, באשר $Z(i)$ הוא מספר השורות לפני השורה $\sigma(i)$ שנמחקו כדי לקבל את P_i מתוך $P(\sigma)$, כלומר,

$Z(i)=\#\{j>i|\ \sigma(j)<\sigma(i)\}$. לכן

$$\mathrm{Sign}(\sigma)=|P(\sigma)|=(-1)^{n+\sigma(n)}(-1)^{n-1+\sigma(n-1)-Z(n-1)}\cdots(-1)^{2+\sigma(2)-Z(2)}\cdot 1.$$

נשים לב ש־$Z(n)=0$ ו־ $Z(1)=\sigma(1)-1$ (=מספר השורות שלפני השורה $\sigma(1)$), לכן את המשוואה לעיל אפשר לכתוב כך:

$$\mathrm{Sign}(\sigma)=(-1)^{n+\sigma(n)-Z(n)}(-1)^{n-1+\sigma(n-1)-Z(n-1)}\cdots(-1)^{2+\sigma(2)-Z(2)}(-1)^{1+\sigma(1)-Z(1)}.$$
$$=(-1)^{(1+\cdots+n)+(\sigma(1)+\cdots+\sigma(n))-(Z(1)+\cdots+Z(N))}=(-1)^{Z(1)+\cdots+Z(N)}=(-1)^{N(\sigma)} \quad ∎$$

הערה 5.25: חישוב מהיר של הסימן. נרשום $\sigma\in S_n$ כמו בהערה 5.20 ונחבר כל $k\in J_n$ בשורה העליונה עם k בשורה התחתונה בקו כמעט ישר, כך שאין שלושה קווים שנחתכים בנקודה אחת (וכל שני קווים נחתכים לכל היותר בנקודה אחת). אז $N(\sigma)$ הוא מספר נקודות החיתוך של הקווים.

אכן, לכל $1\le i\le n$, מהאיבר בשורה התחתונה שנמצא במקום ה־i (זהו $\sigma(i)$) יוצא קו - נסמנו - L_i לאיבר שנמצא במקום ה־$\sigma(i)$ בשורה העליונה. לכן אם $i<j$ אז L_i,L_j נחתכים אם ורק אם $\sigma(i)>\sigma(j)$. לכן $N(\sigma)$ הוא מספר החיתוכים של הקווים. ∎

משפט 5.26: תהי $A\in \mathrm{M}_n(F)$. אז $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)}(A)_{2\,\sigma(2)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}$.

הוכחה: נסמן את אגף ימין של המשוואה לעיל ב־$\mathcal{N}(A)$ ונראה ש־$\mathcal{N}$ פונקצית נפח.

(א') יהי $1\le k\le n$. תהיינה $A,B,C\in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של C היא סכום השורות ה־k של A,B. צריך להוכיח: $\mathcal{N}(C)=\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)$ ואכן,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(C)&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(C)_{1\,\sigma(1)}\cdots\big((A)_{k\,\sigma(k)}+(B)_{k\,\sigma(k)}\big)\cdots(C)_{n\,\sigma(n)}=\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{k\,\sigma(k)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}+\\&+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(B)_{1\,\sigma(1)}\cdots(B)_{k\,\sigma(k)}\cdots(B)_{n\,\sigma(n)}=\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)\end{aligned}$$

(א") יהי $1\le k\le n$ ויהי $a\in F$. תהיינה $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של B היא הכפולה ב־a של השורה ה־k של A. צריך להוכיח: $\mathcal{N}(B)=a\mathcal{N}(A)$ ואכן

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(B)&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots\big(a(A)_{k\,\sigma(k)}\big)\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}=\\&=a\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{k\,\sigma(k)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}=a\mathcal{N}(A)\end{aligned}$$

(ב) תהי $A\in \mathrm{M}_n(F)$ שיש לה שתי שורות זהות: השורה ה־k והשורה ה־l, באשר $k<l$ צריך להוכיח: $\mathcal{N}(A)=0$ תהי $\tau=(k\ l)\in S_n$ אז $\mathrm{Sign}(\tau)=-1$ ו־$\tau^2=1$. אם $\sigma\in S_n$ זוגית, אז $\rho=\sigma\tau$ אי

זוגית, לפי משפט 5.23. כל תמורה אי זוגית ρ היא מהצורה הזאת, כי $\rho=(\rho\tau)\tau$ ו־$\rho\tau$ זוגית, והיא מהצורה הזאת עבור σ יחידה, כי אם $\sigma_1\tau=\sigma_2\tau$ אז $\sigma_1=\sigma_1\tau\tau=\sigma_2\tau\tau=\sigma_2$. לכן $\mathcal{N}(A)=\Sigma_1+\Sigma_2$, באשר $\Sigma_1=\sum_{\sigma\ \text{זוגית}}(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}$ ו־

$$\Sigma_2=\sum_{\sigma\ \text{זוגית}}(-1)(A)_{1\,\sigma\tau(1)}\cdots(A)_{k\,\sigma\tau(k)}\cdots(A)_{l\,\sigma\tau(l)}\cdots(A)_{n\,\sigma\tau(n)}=$$
$$\sum_{\sigma\ \text{זוגית}}(-1)(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{k\,\sigma(l)}\cdots(A)_{l\,\sigma(k)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}=$$
$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{l\,\sigma(l)}\cdots(A)_{k\,\sigma(k)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}=-\Sigma_1$$

לכן $\mathcal{N}(A)=\Sigma_1+\Sigma_2=0$

(ג) אם $A=I_n$ אז $(A)_{i\,\sigma(i)}\neq 0$ רק אם $\sigma(i)=i$. לכן $(A)_{1\,\sigma(1)}\cdots(A)_{n\,\sigma(n)}\neq 0$ רק אם $\sigma=1$. מכאן $\mathcal{N}(A)=\mathrm{Sign}(1)(A)_{1\,1}\cdots(A)_{n\,n}=1\cdot 1=1$

לכן $\mathcal{N}$ פונקצית נפח. בגלל יחידותה, $\mathcal{N}$ היא הדטרמיננטה. ∎

מסקנה 5.27: *יהי F שדה ויהי R תת חוג שלו (תת הקבוצה של F שמכילה את $0,1$ וסגורה תחת החיבור, החיסור והכפל ב־F). אם $A\in \mathrm{M}_n(F)$ וכל רכיבי A הם ב־R אז $\det(A)\in R$.*

הוכחה: לפי משפט 5.26, $\det(A)$ הוא סכום של מכפלות של רכיבי A ונגדיים של מכפלות כאלה. ∎