שיעור 4:(פתרון של מערכת משוואות לינארית וצורת מדרגות)

הדיון באלגברה הוא כללי יותר מבגיאומטריה, כי הוא מדבר על שדות כלליים ועל n כללי.

תחילה נגדיר פעולות על קבוצת F^n.

סימונים: $\bar{v}$, $\bar{0}$, $\bar{v}_i$ ו- e_i.

הגדרה: חיבור n-יות וכפל בסקלר- הבחנה בין וקטור עמודה לוקטור שורה וסימון הטרנספוז-t.
טענה:

1. $t \cdot \bar{v} = \bar{0}$ אמ״ם $t = 0$ או $\bar{v} = \bar{0}$.
2. אסוציאטיביות
3. חוק הפילוג גם בסקלר וגם בוקטור.

תרגיל: F^n עם פעולת החיבור היא חבורה. (מי הוא האיבר הניטרלי? מה לגבי כפל איבר איבר?)

הערה: המבנה של שיש פעולת כפל בסקלר מתוך שדה, עם תכונות נוספות נקרא מרחב וקטורי מעל F, נדבר על כך בהמשך.

דיון: דקארט שם לב לקשר בין האלגברה לגיאומטריה,
משמעות גיאומטרית של פעולות בין n-יות: מתיחת הוקטור וכלל המקבילית.

הגדרה: מערכת משוואות לינארית הומגנית.

משפט: מערכת משוואות לינארית היא הומוגנית אמ״ם $\bar{0}$ הוא פתרון שלה (ולכן $\bar{0}$ נקרא ״הפתרון הטריוויאלי״).

דיון: בהסתכלות גיאומטרית זה אומר שקבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית הומוגנית היא הוא יחידון 0 או ישר שעובר בראשית או מישור שעובר בראשית או כל המרחב. ולהיפך כל קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית שעוברת בראשית הוא פתרון של מערכת הומוגנית.

משפט: קבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית היא תת חבורה ביחס לחיבור n-יות ובנוסף סגורה לכפל בסקלר. ו-0 שייך (בעלת תכונות אלגבריות).

דיון: בהסתכלות גיאומטרית זה אומר שלדוגמא המישור עובר בראשית ואם מחברים וכופלים בסקלר לא יוצאים מהמישור.

הערה: לקבוצת הפתרונות של מערכת לא לינארית אין תכונות אלגבריות (תוכיחו בשיעורי הבית).

הגדרה: מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה למערכת משוואות לינארית. סימון L_0.

הקשר בין קבוצת הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית למערכת ההומוגנית.

הגדרה: נניח כי * פעולה על G , $x \in G$ ו-$A \subseteq G$. הזזה של A ב-x מוגדרת $x * A := \{x * y \,|y \in A\}$.

גרסה גיאומטרית- קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית ב-2 או שלושה נעלמים מעל R, היא ״הזזה״ של מרחב הפתרונות ההומוגני המתאים בפתרון מסוים (פרטי) למערכת הלא הומוגנית.

״הוכחה״ גיאומטרית

דוגמא עם מישור: נתבונן במשוואה $x + y = 1$. המשוואה ההומוגנית היא $x + y = 0$ פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית הוא לדוגמא $(0, 1)$, אז הזזה של כל הפתרונות של ההומוגנית ב-(0,1) נותנת את קבוצת הפתרונות של הלא הומוגנית.

גרסה אלגברית-

טענה:

1. כל שני פתרונות למערכת הלא הומוגנית נבדלים בפתרון של ההומוגנית המתאימה
2. כל פתרון של ההומוגנית ופתרון ועוד פתרון של הלא הומוגנית הוא פתרון של הלא הומוגנית.

מסקנה: אם L מערכת משוואות לינארית ו- p פתרון כלשהו של L אז $Sols(L_0) + p = Sols(L)$

הוכחה: יהיו $\overline{a}, \overline{b} \in Sols(L)$ פתרונות למערכת הלא הומוגנית ונניח כי $\overline{h}$ פתרון להומוגנית אז

$$c_{11}a_1 +... c_{1n}a_n = d_1$$
$$c_{21}a_1 +... c_{2n}a_n = d_2$$
$$...$$
$$c_{m1}a_1 +... c_{mn}a_n = d_m$$

וגם מתקיים

$$c_{11}b_1 +... c_{1n}b_b = d_1$$
$$c_{21}b_1 +... c_{2n}b_n = d_2$$
$$...$$
$$c_{m1}b_1 +... c_{mn}b_n = d_m$$

נחסיר את המערכות ונקבל

$$c_{11}(a_1 - b_1) +... c_{1n}(a_n - b_n) = 0$$
$$c_{21}(a_1 - b_1) +... c_{2n}(a_n - b_n) = 0$$
$$...$$
$$c_{m1}(a_1 - b_1) +... c_{mn}(a_n - b_n) = 0$$

כלומר $\overline{a} - \overline{b}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

יתר על כן מתקיים כי

$$c_{11}h_1 +... c_{1n}h_n = 0$$
$$c_{21}h_1 +... c_{2n}h_n = 0$$
$$...$$
$$c_{m1}h_1 +... c_{mn}h_n = 0$$

ולכן

$$c_{11}(h_1 + a_1) \ +\dots c_{1n}(h_n + a_n) = (c_{11}a_1 +\dots c_{1n}a_n) + (c_{11}\, h_1 +\dots c_{1n}h_n) = 0 + d_1 = d_1$$

$$c_{21}(h_1 + a_1) +\dots c_{2n}(h_n + a_n) = (c_{11}a_1 +\dots c_{1n}a_n) + (c_{11}\, h_1 +\dots c_{1n}h_n) = 0 + d_2 = d_2$$

$$\dots$$

$$c_{m1}(h_1 + a_1) +\dots c_{mn}(h_n + a_n) = (c_{11}a_1 +\dots c_{1n}a_n d_m) + (c_{11}\, h_1 +\dots c_{1n}h_n) = 0 + d_m = d_m$$

ולכן $\bar{h} + \bar{a}$ פתרון למערכת הלא הומוגנית.

<u>הצגה אלגברית(עקרון ההפרדה) מול הצגה פרמטרית(עקרון ההחלפה)</u>

הצגה אלגברית של קבוצת הפתרונות- קל לוודא שפתרון אכן פתרון. אבל קשה לייצר פתרונות.

הצגה פרמטרית של קבוצת הפתרונות- קל לייצר פתרונות אבל קשה לוודא שפתרון אכן פתרון.

<u>הגדרה:</u> ״לפתור״ משוואה זה למצוא הצגה פרמטרית של קבוצת הפתרונות.

דוגמא לפתרון של מערכת לינארית ומציאת הצגה פרמטרית מאלגברית.

<u>שאלה:</u> מה לגבי הכיוון השני? כלומר האם בהנתן הצגה פרמטרית ניתן למצוא מערכת משוואות? נראה בהמשך שכן.

<u>הגדרה:</u> פתרון כללי ופתרון פרטי של מערכת משוואות. (הפתרון הכללי זה הפונקציה בהצגה הפרמטרית והפתרון הפרטי זה הצבה קונקרטית)

ניסוח חדש לגרסה האלגברית של פתרונות למערכת לא הומוגנית:

פתרון כללי של הלא הומוגנית=פתרון פרטי של ההומוגנית+פתרון פרטי של הלא הומוגנית.

<u>פתרון של מערכת משוואות לינארית:</u>

<u>שיטת ההצבה:</u>
מבטאים נעלם מסוים באמצעות האחרים ומציבים במשוואות האחרות עד שמגיעים לאחרון, ואז כל נעלם שנשאר הוא ״חופשי״ ונעלם שמובע באמצעות האחרים נקרא ״קשור״.

דוגמא:

<u>דירוג (אלימינציית גאוס)</u>

כל ההוכחות ינבעו מההוכחות עבור מטריצות.

<u>הגדרה:</u> שלושת הפעולות האלמנטריות על מערכת משוואות:

$$f_{E_i\to\alpha E_i},\ f_{E_i\to E_i+\alpha E_j}, f_{E_i\leftrightarrow E_j}: LE_{n,m}(F)\to LE_{n,m}(F)$$

$$(f_{E_i\leftrightarrow E_j}(L))_k=\begin{cases}L_i & k=j\\ L_j & k=i\\ L_k & else\end{cases}$$

$$(f_{E_i\to\alpha\cdot E_i}(L))_k=\begin{cases}\alpha\cdot L_i & k=i\\ L_k & else\end{cases}$$

$$(f_{E_i\to E_i+\alpha\cdot E_j}(L))_k=\begin{cases}L_i+\alpha\cdot L_j & k=i\\ L_k & else\end{cases}$$

משפט: כל פעולה אלמנטרית היא פונקציה הפיכה והפונקציה ההופכית לה גם היא אלמנטרית.

הוכחה: קל לבדוק כי $(f_{E_i\leftrightarrow E_j})^{-1}=f_{E_i\leftrightarrow E_j}$, $(f_{E_i\to E_i+\alpha E_j})^{-1}=f_{E_i\to E_i-\alpha E_j}$, $(f_{E_i\to\alpha E_i})^{-1}=f_{E_i\to\frac{1}{\alpha}E_i}$.

משפט: פעולות אלמנטריות מעבירות מערכות למערכות שקולות.

הוכחה: עבור חילוף, $Sols(f_{E_i\leftrightarrow E_j}(L))=\bigcap_{k=1}^{n}Sols(f_{E_i\leftrightarrow E_j}(L)_k)=\bigcap_{k=1}^{n}L_k=Sols(L)$

עבור כפל בסקלר שונה מ-0, נשים לב כי לכל משוואה E, וסקלר, $Sols(E)\subseteq Sols(\alpha\cdot E)$

אם הסקלר שונה מ-0 אז גם עבור המשוואה αE מתקיים $Sols(\alpha E)\subseteq Sols(\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha E))=Sols(E)$ לכן $Sols(E)=Sols(\alpha E)$.

אם כך,

$$Sols(f_{E_i\to\alpha E_i}(L))=\bigcap_{k=1}^{n}Sols(f_{E_i\to\alpha E_i}(L)_k)=\bigcap_{k=1,k\neq i}^{n}Sols(L_k)\cap Sols(\alpha\cdot L_i)=\bigcap_{k=1,k\neq i}^{n}Sols(L_k)\cap Sols(L_i)$$
$$=\bigcap_{k=1}^{n}Sols(L_k)=Sols(L)$$

לבסוף לכל שתי משוואות מתקיים $Sols(E+\alpha F)\supseteq Sols(\alpha E)\cap Sols(F)\supseteq Sols(E)\cap Sols(F)$

ולכן $Sols(f_{E_i\to E_i+\alpha E_j}(L))=\bigcap_{k=1}^{n}Sols(f_{E_i\to E_i+\alpha E_j}(L)_k)=\bigcap_{k=1,k\neq i}^{n}Sols(L_k)\cap Sols(L_i+\alpha L_j)\supseteq$
$\bigcap_{k=1,k\neq i}^{n}Sols(L_k)\cap Sols(L_i)\cap Sols(L_j)=Sols(L)$

מכיוון וזה נכון לכל מערכת L ולכל פונקציה אלמנטרית אז:
$Sols(f_{E_i\to E_i+\alpha E_j}(L))\supseteq Sols(f_{E_i\to E_i-\alpha E_j}(f_{E_i\to E_i+\alpha E_j}(L)))=Sols(L)$ ולכן יש שיוויון.

הגדרה: משתנה פותח של משוואה i, שורת סתירה, צורת מדרגות של מערכת משוואות, צורת מדרגות קנונית.

אלגוריתם: איך למצוא את הצורה הפרמטרית בהנתן הצורה הקנונית?

אלגוריתם: מציאת **כמות פתרונות** מצורת מדרגות.

דיון: אין בחירה יחידה של משתנים חופשיים וקשורים.

משפט: כל מערכת משוואות שקולה למערכת משוואות בצורה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

מטריצות

הגדרה: מלבן של מספרים. במחשב: n-יה של m-יות. כאשר כל m-יה מייצגת לדוגמא עמודה.

סימון: מימדי המטריצה/ גודל המטריצה, מקדמי המטריצה/רכיבי המטריצה, סימון קבוצת המטריצות עם רכיבים בקבוצה A.

טענה: שיוויון מטריצות והגדרה באמצעות רכיב כללי.

דיון: קשר למימוש במחשב ושימושים: עיבוד תמונה, נראה שימושים רבים באינטרנט.

השימוש הראשון של מטריצה אצלנו יהיה מטריצה של מערכת משוואות.

הגדרה: ה-n-יה השוכבת שמתאימה למשוואה, המטריצה המתאימה למערכת משוואות. L היא המטריצה A_L.

ברור כי $f: LE_{n,m}(F) \rightarrow M_{n,m}(F)$ המוגדרת $f(L) = A_L$ היא פונקציה הפיכה.

סימון: $(A|B),\ (A|b)$

תרגום השמות:

1. משוואה- שורה, משתנה- עמודה. העמודה b-עמודת המקדמים החופשיים.
2. מטריצת המקדמים המצוצמצת.
3. המטריצה של המערכת ההומונית- מסמנים ללא קו 0.
4. קבוצת הפתרונות $Sols((A|b)),\ Sols(A)$.
5. משתנה פותח- איבר פותח,שורת סתירה- שורת 0 ואז לא 0, צורת מדרגות/ צורת מדרגות, קנונית/קנונית.
6. פעולות אלמנטריות הן פונקציות מקבוצת המטריצות לקבוצת המטריצות.

טענות טריוויאליות:

בכל מטריצה:

1. בכל שורה יש לכל היותר איבר פותח אחד.
2. מספר האיברים הפותחים<=מספר השורות .
3. מספר השורות= מספר האיברים הפותחים+מספר שורות 0.

בצורת מדרגות:
1. בכל עמודה יש לכל היותר איבר פותח אחד
2. מספר האיברים הפותחים>=מספר העמודות.
3. מספר העמודות= מספר האיברים הפותחים+ מספר העמודות שלא נפתחה בהן מדרגה.
4. אם יש k איברים פותחים אז בדיוק השורות n,...,k+1 הן שורות 0.

<u>מסקנה:</u> בצורת מדרגות, מספר העמודות עם איבר פותח שווה למספר השורות שאינן 0.

בדומה למערכת משוואות בצורה קנונית, ממטריצה קנונית קל לקרוא את הפתרונות.

<u>משפט:</u> (אלגוריתם לכתיבת קבוצת הפתרונות).
נניח כי תהא A מטריצה $m \times (n+1)$. ו-A' הצורה המדורגת קנונית של A.
1. אם ב-A' יש שורת סתירה אז ל-A אין פתרון.
2. אם ב-A' אין שורת סתירה ובעמודות $i_1,...,i_k$ לא נפתחה בהן מדרגה, אז קבוצת הפתרונות היא

$$sols(A) = \{f(x_{i_1},...,x_{i_k}) \mid x_{i_1},...,x_{i_k} \in \mathbb{F}\}$$

באשר $f:\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ המוגדרת ע״י

$$f(x_{i_1},...,x_{i_k})_j = \begin{cases} x_{i_r} & \exists r.j = i_r \\ (A')_{j,n+1} - \Sigma_{r=1}^{k}(A')_{j,i_r}x_{i_r} & else \end{cases}$$

הוכחה:
ראינו כי $Sols(A) = Sols(A')$ ולכן מספיק להוכיח זאת עבור A שהיא כבר מדורגת קנונית.
נסדר בסדר עולה את העמודות שנפתח בהן מדרגה $l_1 < l_2 <... < l_{n-k}$

מכיוון שאנו בצורה הקנונית, המשוואה ה-j היא מהצורה $1\cdot x_{l_j} + \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}x_{i_r} = (A')_{j,n+1}$

נניח כי $\bar{c} \in sols(A)$, מתקיימות כל המשוואות

$$1\cdot c_{l_j} + \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}c_{i_r} = (A')_{j,n+1}$$

ואם מעבירים אגפים רואים כי $\bar{c} = f(c_{i_1},..., c_{i_k})$

ולכן $\bar{c}$ שייך לאגף ימין.

כל איבר $\bar{c}$ באגף ימין הוא פתרון שכן

$$c_{l_j} = (A')_{j,n+1} - \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}c_{i_r}$$

ולכן בהצבה במשוואה ה-j נקבל

$$1\cdot c_{l_j} + \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}c_{i_r} = (A')_{j,n+1} - \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}c_{i_r} + \sum_{r=1}^{k}(A)_{j,i_r}c_{i_r} = (A')_{j,n+1}$$

<u>אלימינציית גאוס:</u>
אלגוריתם למחשב איך לבצע סדרת פעולות אלמנטריות שמביאה לצורה קנונית.
נגדיר $counter = 1$
נרוץ על העמודות $1 \leq i \leq n$ כאשר n כמות העמודות.
עבור העמודה ה-i, נחלק למקרים:
1: או שלכל $j \geq counter$, $(A)_{ij} = 0$,במקרה זה לא נשנה את counter ונמשיך לעמודה הבאה.
2: נאתר את האינדקס $j_0 \geq counter$ הקטן ביותר כך ש- $(A)_{ij_0} \neq 0$,ננרמל, $R_{j_o} \to \frac{1}{(A)_{i,j_0}} R_{j_0}$ נאפס את כל אברי העמודה ע״י הפעולות $R_k \to R_k - (A)_{ik} R_{j_0}$ לכל $j \neq j_0$. ולבסוף $R_{counter} \leftrightarrow R_{j_0}$.
נמשיך לעמודה הבאה עם המטריצה
$f_{R_{counter} \leftrightarrow R_{j_0}}(f_{R_n \to R_n - (A)_{in} R_{j_0}}(\dots(f_{R_1 \to R_1 - (A)_{i1} R_{j_0}}(f_{R_{j_o} \to \frac{1}{(A)_{i,j_0}} R_{j_0}}(A))\dots))$ ונעדכן $counter \mathrel{+}= 1$.

<u>משפט:</u> הצורה מטריצה המתקבלת מאלימינציית גאוס היא מטריצה קנונית.
<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על מספר העמודות כי האלגוריתם מחזיר מטריצה קנונים עם counter-1=שורות שאינם 0 (או באופן שקול counter=עמודות שנפתחה מהן מדרגה). נניח נכון ל-j קטן מ-i נוכיח ל-i.
לפי הנחת האינדוקציה המטריצה שמתקבל ב-A ע״י מחיקת העמודה האחרונה תיהיה קנונית לאחר פעולת הדירוג (כלומר לאחר מעבר האיטרציה על העמודות $1,\dots, i-1$).
נחלק למקרים לפי האלגוריתם, אם המקרה הוא מקרה 1, אז בעמודה האחרונה לא נפתחה מדרגה ולכן המטריצה קנונית.
אם אנו במקרה השני,
נשים לב כי מהגדרת מטריצה קנונית, ומהנחת האינדוקציה, לכל $j \geq counter$ ולכל $1 \leq k \leq i-1$ מתקיים כי $A_{jk} = 0$.
הפעולה הראשונה הפכה את האיבר במקום i, j_o ל-1 נסמן ב- $A^{(1)} = f_{R_{j_o} \to \frac{1}{(A)_{i,j_0}} R_{j_0}}(A)$ אז $R_{j_0}(A^{(1)}) = (0, 0, 0,\dots, 0, 1)$ ולכל $j \neq j_o$, $R_j(A^{(1)}) = R_j(A)$.

לאחר ביצוע הפעולות של השורה ה-j_0 על שאר השורות לא נשנה את השורות מתחת ל$counter$ בעמודות $1,\dots,1-i$ שכן $A^{(1)}_{j_0 k} = 0$ לכל $1 \leq k \leq i-1$. נסמן $A^{(2)} = f_{R_n \to R_n - (A)_{in} R_{j_0}}(\dots(f_{R_1 \to R_1 - (A)_{i1} R_{j_0}}(A^{(1)})..)$ אז $A^{(2)}_{jk} = A_{jk}$ אם $k \leq i-1$ ו- $A^{(2)}_{jk} = 0$ אם $j \neq j_0$ ו- $A^{(2)}_{j_o i} = 1$ הפעולה האחרונה היא החלפת שורה ולכן לא משפיע על השורות הקטנות מcounter. ובכך העברנו את האיבר המוביל לשורה counter.
אם כך,
<u>תכונה מרכזית של הדירוג:</u> הפעולות שעשינו בשלב ה-i באינטרציה לא שינו את העמודות 1,..,i-1.

הדבר היחידי שהשתנה זו העמודה האחרונה כך שבשורה $counter$ כרגע נפתחה מדרגה ושאר האיברים בעמודה זו הם 0, אז המטריצה מדורגת קנונית.

<u>דוגמא:</u> כללי אצבע לדירוג בני אדם. דוגמא לדירוג

משפט: כל מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

הוכחה: קיום נובע בהוכחה של אלגוריתם גאוס ויחידות נוכיח בהמשך הקורס.

ניתוח מספר פעולות- n^3- רצים על כל עמודה ואז על כל שורה ומבצעים n פעולות חיסור (לסייברים)

הגדרה: מטריצות שקולות שורה.

טענה: שקילות שורה היא יחס שקילות על קבוצת המטריצות מסדר קבוע.

טענה: שתי מטריצות הן שקולות שורה אז למערכות המתאימות יש אותה קבוצת פתרונות.

דיון: מה לגבי הכיוון השני? נראה בהמשך כי זה נכון.

מסקנה: מערכת נציגים ליחס שקילות שורה היא המדורגות קנונית.

הוכחה: אם שקולות שורה אז נובע ממשפט שראינו לגבי מערכות. אם שקולות שורה, אז ניתן לדרג את A

טענה: אם A' מדורגת אז יש צורה מדורגת קנונית ששקולה ל-A', A'',כך שב-A' וב-A" באותן עמודות נפתחה מדרגה.

הוכחה:
נפעיל אלגוריתם גאוס על A' . נשים לב כי לפי הגדרת האלגוריתם, אם אנו בשלב באיטרציה בעמודה j, והרכיבים $k,..., n$ בעמודה זו הם 0, אז אנו לא משנים את השורות $k,..., n$ בשלב זה.

נוכיח באינדוקציה כי אותן מדרגות נפתחו. נניח נכון עד 1,...,i-1, אז בשלבים אלו מכיוון והמטריצה מדורגת, השורות counter,counter+1,...n הם 0 ולכן לא ביצענו פעולות על שורות אלה.

אם הוכחנו עבור $1,..., i - 1$ שאותן עמודות נפתחו, אז בשלב ה-i באינטרציה לא משנים את העמודות 1,..,i-1. לגבי העמודה ה-i, אם לא נפתחה מדרגה ב-i ב-A אז מכיוון והאלגוריתם לא משנה את השורות מעל counter הם עדיין יישארו 0, והאלגוריתם לא יאתר j_0 וגם בצורה הקנונית לא תפתח בעמודה זו מדרגה, ואם נפתחה מדרגה, אז היא בהכרח נפתחה בשורה $counter$, ושוב, האלגוריתם על העמודות הקודמות לא שינו את זה ולפי האלגוריתם אנחנו מאפסים את שאר האיברים בעמודה הזו ונפתחה שם מדרגה.

מסקנה: (אלגוריתם למציאת כמות הפתרונות)
תהא A מטריצה mx(n+1). ו-A' מטריצה מדורגת אשר שקולת שורות ל-A.
1. אם ב-A' יש שורת סתירה אז למערכת של A אין פתרון.
2. אם ב-A' אין שורת סתירה, אז $|Sols(A)| = |F|^k$ כאשר k הוא מספר העמודות ללא איבר פותח ב-A'.

הוכחה:

אם ב-A' יש שורת סתירה אז בודאי ל-A אין פתרון. אחרת, ל-A' אין שורת סתירה, לפי טענה קודמת, בדיוק באותן עמודות של A′ והצורה המדורגת קנונית של A' (ומיחידות זו גם זו של A) נפתחת מדרגה ולכן
לפי המשפט הקודם העוצמה נכונה.

__מסקנה:__ אם ב-A יש יותר עמודות משורות, שלמערכת של A אין פתרון או שיש לפחות $|F|$ פתרונות.
__הוכחה:__ מספר האיברים הפותחים קטן או שווה למספר השורות שקטן ממספר העמודות. ולכן קיימת עמודה ללא איבר פותח.

__הגדרה:__ מטריצת היחידה.

__משפט:__ למערכת הומוגנית ריבועית יש פתרון יחיד אמ״ם הצורה המדורגת קנונית היא מטריצת היחידה.
__הוכחה:__ אם הצורה הקנונית היא מטריצת היחידה אז לפי האלגוריתם בכל עמודה נפתחה מדרגה ולכן יש פתרון יחיד. אם יש פתרון יחיד אז בכל עמודה נפתחה מדרגה, ומכיוון ומספר העמודות שווה למספר האיברים הפותחים שווה למספר השורות, אז בכל שורה נפתחה מדרגה ולכן הכרח קיבלנו את מטריצת היחידה.

תכנון לינארי- העשרה
נניח כי לחקלאי יש שטח של L (ק״מ)^2. בשטח הזה הוא יכול לשתול או חיטה או קולורבי. בנוסף נניח כי לחקלאי יש כמות מוגבלת של דשן- D וכמות מוגבלת של חומר הדברה- E. כל קילומטר חיטה דורש F_1 דשן ו-E_1 הדברה ואותו דבר עבור קולורבי עם F_2,E_2. נסמן ב- S_1 את המחיר שמניב ק״מ רבוע של חיטה וב-S_2 את המחיר של ק״מ רבוע קולורבי. איך כדאי לחקלאי לשתול את החיטה וקולורבי כך שהרווח יהיה מקסימלי:

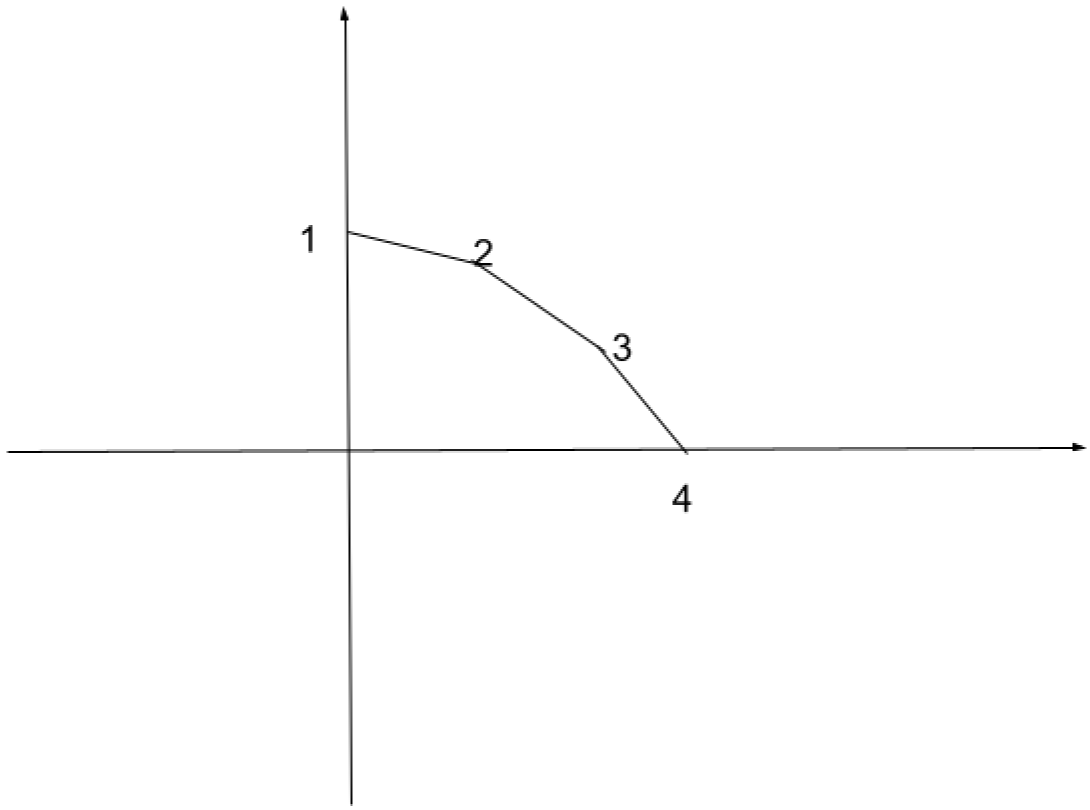
בעיה כזו נקראת תכנון לינארי וכפי שנראה עוד רגע די קל לפתור אותה.
נסמן ב-x_1 את השטח חיטה וב-x_2 את שטח הקולורבי, אנחנו מחפשים למקסם את הביטוי:
$$S = S_1x_1 + S_2x_2$$
כאשר יש לנו את האילוצים הבאים:
$$F_1x_1 + F_2x_2 \leq F(1)$$
$$E_1x_1 + E_2x_2 \leq E\ (2)$$
$$x_1 + x_2 \leq L\ (3)$$
$$x_1 \geq 0(4)$$
$$x_2 \geq 0(5)$$

זה בעצם חיתוכים של שטחים שיכולים ליצור שלושה סוגים של שטחים:
1. קבוצה ריקה- אומר שאי אפשר לשתול כך שהתנאים ייקוימו
2. קבוצה עם שטח לא מוגבל
3. מצולע במרחב.

נתן ערכים לדוגמא:
$S_1 = 3, S_2 = 4\ F_1 = 2,\ F_2 = 1,\ E_1 = 1, E_2 = 2,\ F = 11\ , E = 9,\ L = 6$

https://www.desmos.com/calculator(ליצור משוואות שם)

אנחנו מחפשים פתרון בשטח המשותף



והפתרון הוא הקו הישר 3x_1+4x_2=S.

טענה: כאשר מגדילים את S, הקו הישר מתקדם ימינה. וה-S המקסימלי מתקבל בקודקוד השלישי שזה החיתוך של הישרים.

הטענה הזו תמיד מתקיימת, והמקסימום או המינימום מתקבל באחד הקודקודים. אפשר לבדוק את הערך בכל הקודקודים ולבדוק את המחיר הגבוהה ביותר:

בקודקוד 1=(0,4.5): $S = 18$

בקודקוד 2=(3,3): $9 + 12 = 21$

בקודקוד 3=(5,1): $15 + 4 = 19$

בקודקוד 4=(5.5,0): 16.5

לכן הכי משתלם זה $x_1 = 3, x_2 = 3$.