שיעור 2:(פולינומים ומרוכבים)

דוגמא חשובה: חוג הפולינומים מעל חוג R

הגדרת פולינום: סדרה $p: N \to R$ נקראת פולינום פורמלי במשתנה X,
אם קיים N כך שלכל $n \geq N$, $p(n) = 0_R$.

מסמנים $p(k) = p_k$ ו- $p = p_0X^0 + p_1X^1 + p_2X^2.... + p_{N_p}X^{N_p}$ כאשר

$N_p = min(N|\ \forall n \geq N. p_n = 0)$(נקרא המעלה של p).

חיבור פולינומים: $(p + q)(n) = p(n) + q(n)$ מתאים לחיבור סוגריים:

$$(p_0X^0 + p_1X^1 + p_2X^2.... + p_{N_p}X^{N_p}) + (q_0X^0 + p_1X^1 + p_2X^2.... + p_{N_q}X^{N_q})$$

כפל פולינומים: מתאים לכפל סוגריים (קונבולוציה)

$$(p_0X^0 + p_1X^1 + p_2X^2.... + p_{N_p}X^{N_p}) \cdot (q_0X^0 + p_1X^1 + p_2X^2.... + p_{N_q}X^{N_q})$$

$$(p + q)(n) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

איבר ניטרלי לחיבור- סדרת האפסים, האיבר הניטרלי לכפל $p = 1$.
נרחיב בהמשך על חוג הפולינומים אבל יש לבדוק עצמאית כי מדובר **בחוג חילופי עם יחידה מסומן** $R[X]$.

(תזכורת מקורס A) הגדרה: מקדם מוביל, משתנה חופשי, מעלת פולינום.

נוסחת המעלות:

1. $deg(f + g) \leq max(deg(f), deg(g))$ ויש איש שיוויון אם ורק אם המקדמים המובילים מבטלים זה את זה.
2. $deg(fg) \leq deg(f) + deg(g)$ ויש אי שיוויון אמ״ם המקדמים המובילים הם מחלקי 0.
3. המקדם של $X^{deg(f)+deg(g)}$ב- fg הוא $a_n b_m$.
4. אם ב-R יש יחידה, ו- a_n או b_m הפיכים אז ב-2 יש שיוויון.
5. אם R תחום שלמות (או שדה) אז ב-2 יש שיוויון.
6. אם R תחום שלמות (או שדה) אז גם $R[X]$ תחום שלמות.

<u>הגדרה:</u> הפונקציה הפולינומיאלית המתאימה לפולינום $p \in R[X]$ היא הפונקציה $p: R \to R$ המוגדרת $p(a) = p = p_0 + p_1a + p_2a^2.... + p_{N_p}a^{N_p}$ (שימו לב כי זה מוגדר בחוג).

<u>הגדרה:</u> מספר אלגברי ומספר טרנצנדנטי

<u>דוגמא:</u> שורש 2 אלגברי.

<u>משפט:</u> יש מספרים ממשיים שהם טרנצדנטיים מעל Q.
<u>הוכחה:</u> שיקולי עוצמות.

משפט קשה: e ו-pi טרנסנדנטיים.

חילוק עם שאריות בחוג הפולינומים:(תזכורת מקורס A)

משפט: יהי F שדה, $p, q \in F[X]$ כך ש- $q \neq 0$, אז קיימים ויחידים פולינומים $q', r \in F[X]$ כך ש-

$$p = q \cdot q' + r \qquad deg(r) < deg(q)$$

הוכחה: נשים לב כי אם $deg(q) > deg(p)$ אז ניתן לקחת $q' = 0$ ו-$r = p$. לכן המקרה המעניין הוא ש-$deg(q) \leq deg(p)$. מקרה זה נוכיח באינדוקציה על המעלה של p. עבור $deg(p) = 0$ כלומר p קבוע, אז גם $deg(q) = 0$. ומכיוון ו- F שדה אז קיים q' וניקח r=0.

נניח כי הטענה נכונה ל-$deg(p) = n$. ונניח כי $deg(p) = n + 1$, נתבונן במקדם המוביל של p, a_{n+1},

ויהי q פולינום ממעלה $m = deg(q) \leq n + 1$ עם מקדם מוביל b_m. אזי המעלה של הפולינום

$$p - a_{n+1} \cdot b_m^{-1} x^{n+1-m} q$$

הוא פולינום ממעלה לכל היותר n, אז לפי הנחת האינדוקציה, קיימים q', r יחידים כך ש-

$$p - a_{n+1} \cdot b_m^{-1} x^{n+1-m} q = q \cdot q' + r$$

ולכן

$$p = (a_{n+1} \cdot b_m^{-1} x^{n+1-m} + q') \cdot q + r$$

עבור היחידות, נניח כי $qq' + r' = qq'' + r''$ אז $q(q' - q'') = r'' - r'$ אם $q' - q'' \neq 0$ אז המעלות הפולינום לא מסתדרת, שכן הפולינום באגף ימין ממעלה קטנה מ-q והפולינום באגף שמאל ממעלה $deg(q) + x$.
לכן q'=q'' וכל r'=r''.

דוגמא לחילוק עם שארית של פולינומים ב-Z_5:

$$X^2 + \bar{3}X - \bar{1} : \bar{4}X + \bar{2}$$

מה הופכי של $\bar{4}$? $\bar{4}$ (כי $\bar{1} =- \bar{4}$). לכן נכפיל ב- $\bar{4}X$.

$X^2 - \bar{3}X - \bar{1} - (X^2 + \bar{3}X) =- X - \bar{1}$.

ניתן לרשום כי $\bar{4} + \bar{4}X$. נכפיל ב- $\bar{1}$ ואז $\bar{4}x + \bar{4} - (\bar{4}X + \bar{2}) = \bar{2}$ לכן $\bar{2}$ זו השארית ומתקיים:

$X^2 + 3X - 1 = (4X + 2)(4X + 1) + 2$.

משפט:(ראינו בעבר) a הוא שורש של p אמ"ם קיים q כך ש-$p = (x - a)q$ (ואז המעלה של q קטנה יותר)

הוכחה: כיוון אחד טריוויאלי. כיוון שני, נחלק את p ב-(x-a) עם שארית r

אז $p = (x - a)q \ + r$ מכיוון והמעלה של r קטנה מהמעלה של $(x - a)$ אז r קבוע ומתקיים $r = p(a) = 0$

לכן

$p = (x - a)q$.

מסקנה:(ראינו בעבר) לכל פולינום יש לכל היותר n שורשים כולל ריבויים.

הגדרה: שדה סגור אלגברית אם לכל פולינום יש שורש.

מסקנה: כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים מעל שדה סגור אלגברית.

היסטורית C התחיל כמשחק: אין פתרון לפולינום $x^2 + 1 = 0$ כי מספר כזה צריך להיות שורש של מספר שלילי ואז סימנו $i = \sqrt{-1}$ ועשו אלגברה רגיל. ראו שדברים עדיין מסתדרים אלגברית.

הגדרת C: באופן מלאכותי $a + ib$ עם הכללה של כפל רגיל. מחזוריות i.

(פורמלית אפשר להגדיר כזוגות סדורים) $a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.
בדקו כי C עם הפעולות שהגדרנו הוא תחום שלמות.(בהמשך נוכיח כי הוא שדה)

הגדרה: חלק ממשי חלק מדומה.

הגדרה: זיהוי המספרים הממשיים בתוך המספרים המרוכבים

הגדרה: המספר הצמוד

תרגיל: מספר הוא ממשי אמ״ם שווה לצמוד שלו.

גיאומטריה של מרוכבים- מישור גאוס.

הגדרה: נורמה של מספר מרוכב, וזווית.

תרגיל: $z = 0$ אמ״ם $||z|| = 0$.

טענה: זהות של צמוד $||z||^2 = z \cdot \bar{z}$(ממשי)

טענה לכל z המספר $\frac{1}{||z||^2}\bar{z}$ הופכי ל-z.
הוכחה: ישיר מהזהות הקודמת.

מסקנה: C שדה.

מסקנה: חילוק של מרוכבים

דוגמא: $\frac{1+i}{2-2i} = \frac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{-1+4i}{8}$

זהות אוילר (הוכחה עם טור טיילור)
$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$

הצגה פולרית של מספר מרוכב
כל מספר עם נורמה 1, נמצא על מעגל היחידה ולכן ניתן לרשום אותו כ- $e^{i\theta}$.

כל מספר מרוכב z, ניתן לרשום $z = ||z|| \cdot \frac{z}{||z||} = r \cdot e^{i\theta}$

דוגמא: $1 + i$, הנורמה היא $\sqrt{2}$ והזווית היא $\pi/4$ ולכן $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
בכיוון השני, אם $3e^{\pi i} = 3(cos(\pi) + isin(\pi)) = 3((-1) + i0) = -3$

משמעות גיאומטריה של פעולות.

<u>משפט(ללא הוכחה):</u> C שדה סגור אלגברית.

מציאת שורשים מרוכבים היא משימה מורכבת.

דוגמא: פתרו את המשוואה $z^4 = -2 + \sqrt{12}i$

פתרון: נשווה נורמות:
$|z|^4 = |-2 + \sqrt{12}i| = \sqrt{4 + 12} = 4$. לכן $|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. זה ידענו כבר כי $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ולכן $|-2 + 2\sqrt{3}i| = 2 \cdot |-1 + \sqrt{3}i| = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$.
$arg(-2 + \sqrt{12}i) = arg(-1 + \sqrt{3}i)$ - זה מספר שנמצא ברביע השני (ציור על הלוח)
$arctan(\frac{\sqrt{12}}{2}) = arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ לכן $arg(-2 + \sqrt{12}i) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
אז $z^4 = 4(cos(120^o) + isin(120^o)) = 4e^{i2\pi/3}$. בפורלית $(re^{i\theta})^4 = 4e^{i2\pi/3}$. לכן
$$4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$
אזי $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = 4\pi/6$ $\theta_3 = 7\pi/6$ $\theta_4 = 10\pi/6$. (לצייר את השורשים על הלוח ולהדגים את ההעלאה בחזקת 4).

דיון על נוסחת שורשים.