שיעור 18-מכפלה פנימית

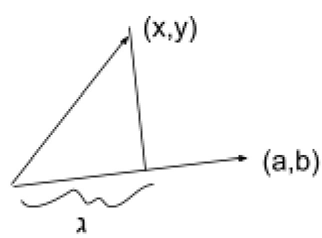
הגדרה: מכפלה סקלרית סטנדרטית מעל R^2 ו-R^3.

תכונות: לינאריות לפי שני הרכיבים, סימטריה, חיוביות, אפיון 0.

זו פעולה אלגברית שבאמצעותה אפשר להגדיר אובייקטים גיאומטריים:

- אורך של וקטור- לפי משפט פתגורס, אורך של וקטור מתואר ע״י $||v|| = \sqrt{< v, v >_{st}}$.
- ניצבות- שני וקטורים ניצבים אמ״ם המכפלה הסקלרית הסטנדרטית שלהם היא 0. הוכחה: לפי משפט פתגורס, שני וקטורים מאונכים אמ״ם $||v - u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2$ אם נפתח זאת, נקבל כי $< v, u>_{st} = 0$.
- קוסינוס של זווית- לפי משפט הקוסינוסים $||v - u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2 - 2||v||\,||u||\,cos(\theta_{v,u})$.
  מצד שני, פיתוח ישיר של הביטוי $||v - u||^2$ לפי התכונות מגלה כי
  $||v - u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2 - 2 < v, u >$.
  לכן, $< v, u >= ||v|| \cdot ||u|| \cdot cos(\theta_{v,u})$.

זה גם נותן אינטואיציה יותר טובה לגבי מהי מכפלה פנימית: נניח נתונים שני וקטורים, $(x, y), (a, b)$ כדי להבין מהי המכפלה הפנימית $< (a, b), (x, y) >$ נחשוב תחילה כי $||(a, b)|| = 1$. ואז הביטוי הקודם אומר כי $< (a, b), (x, y) >= ||(x, y)||cos(\theta)$. גיאומטרית, זהו ההיטל של (x, y) בכיוון (a, b) כלומר, סקלר λ כך ש-



עבור (a, b) כללי, המכפלה הפנימית היא אורך ההיטל, כפול אורך הוקטור (a, b).

מה לגבי C?

הגדרה: (מכפלה הרמיטית סטנדרטית) $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$.

הגדרה: מכפלה פנימית (מעל R ומעל C).

הגדרה: ממ״פ

דוגמאות:

1. סטנדרטית ב-R וב-C
2. לא סטנדרטית ב-R וב-C.
3. פולינומים (עם ביטוי של המקדמים)
4. הגדרת מכפלה סטנדרטית של מטריצות באמצעות tr .
5. פונקציות רציפות ואינטגרל.
6. תרגום של מכפלה באמצעות איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

<u>הגדרה:</u> פעולת * של וקטור.

<u>מסקנה:</u> הצגה של מכפלה סטנדרטית ככפל שורה בעמודה.

<u>הגדרה:</u> עבור מטריצה $A \in M_n(C)$ נגדיר $<x, y>_A = x^* \cdot A \cdot y$. (פנימית יש רק שחלוף)

מתי $<,>_A$ היא מכפלה הרמיטית/פנימית?

<u>הגדרה:</u> מטריצה A נקראת מוגדרת חיובית אם לכל $x \in C^n$ לא 0, מתקיים $x^* Ax > 0$.

<u>הגדרה:</u> מטריצה A נקראת הרמיטית אם $A = A^*$.

<u>תרגיל:</u> המכפלה $<x, y>_A$ היא מ״פ אמ״ם A הרמיטית ומוגדרת חיובית.

<u>טענה בסיסית:</u>
1. כפל ב-0 זה 0.
2. איך מוציאים צירוף לינארי מימין.
3. ביטוי כללי למכפלה פנימית של צירוף לינארי.

<u>הגדרה:</u> יהי V ממ״פ ויהיו וקטורים $v_1, ..., v_n \in V$. נגדיר את מטריצת גראם $G = G(v_1, ..., v_n)$ להיות $(G)_{ij} = <v_i, v_j>$.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו כי $G = G^*$.

ב. הוכיחו כי אם $x = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ $y = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ אז $<x, y> = a^* Gb$.

ג. G מוגדרת חיובית.

<u>תרגיל:</u> לכל $<*, *>$ מ״פ מעל C^n, הוכיחו כי $<*, *> = <*, *>_G$. באשר $G = G(e_1, ... e_n)$ הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה של גיאומטריה באופן אלגברי

הגדרה: נורמה.

תכונות של נורמה: חיוביות ו- אמ״ם 0 ו- הוצאת סקלר בערך מוחלט.

מסקנה(משפט פיתגורס): $<v,u>=0$ אמ״ם $||v-u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2$

הגדרה: אורתוגונליות. שימו לב כי תלוי במכפלה הפנימית. (ואז משפט פיתגורס מקבל את המשמעות הרגילה שלו)

משפט הקוסינוסים: $||v-u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2 - 2<v,u>$.

הגדרה: נגדיר את קוסינוס הזווית בין v ל-u ע״י $cos(\theta_{v,u}) = \frac{<v,u>}{||v||\,||u||}$ (ואז משפט הקוסינוסים מקבל את הצורה הרגילה שלו)

אי שיוויון קושי שוורץ: לכל מכפלה הרמיטית מעל V ולכל v,u ב-V מתקיים $|<v,u>| \le ||v|| \cdot ||u||$ ומתקיים שיוויון אמ"ם v,u פרופורציונלים (כלומר כפולה בסקלר אחד של השניה).

הוכחה: מסמנים $\lambda = \frac{<v,u>}{<v,v>}$ (אם v=0 הטענה טריוויואלית) כעת מסתכלים על $<u-\lambda v, u-\lambda v>$.

מסקנה: לכל v,u $|cos(\theta_{v,u})| \le 1$. יתר על כן $|cos(\theta_{v,u})| = 1$ אמ״ם v,u פרופורציונים (כלומר הזווית בינהם היא 0 או π).

מסקנה: v,u בת״ל אמ״ם $|cos(\theta_{v,u})| < 1$.

מסקנה (אי שיוויון המשולש): $||v+u|| \le ||v|| + ||u||$ ומתקיים שיוויון אמ״ם $||v+u|| = ||v|| + ||u||$.

הוכחה:

$$||v+u||^2 = <v+u, v+u> = ||v||^2 + ||u||^2 + <v,u> + <u,v> = ||v||^2 + ||u||^2 + 2Re(<v,u>) \le ||v||^2$$

ומאי שיוויון קושי שוורץ סיימנו.

סדרות וקטורים בממ״פ

הגדרה: קבוצה אורתוגונלית (תתכן עם 0).

תרגיל: סדרת וקטורים היא אורתוגונלית אמ״ם מטריצת גראם שלה היא אלכסונית.

משפט: קבוצה אורתוגונלית ללא 0 היא בת״ל.

הגדרה: וקטור יחידה ותהליך הנרמול.

הגדרה: קבוצה אורתונורמלית.

הגדרה: בסיס אורתוגונלי/אורתונורמלי.

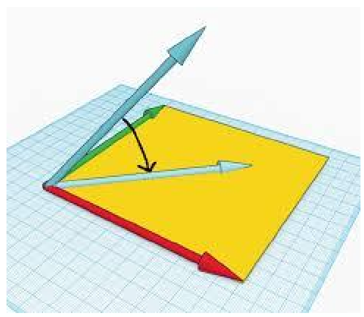
טענה:

1. נניח כי $v_1,...,v_n$ קבוצה אורתוגונלית ללא 0, ו- $u_1, u_2 \in sp(v_1,..., v_n)$. אזי $< u_1, u_2 >= \sum_{i=1}^{n} \overline{([u_1]_V)_i}([u_2]_V)_i \, ||v_i||^2$ (ובפרט עבור אורתונורמליים).
2. נני כי בסיס אורתוגונלי/אורתונורמלי, אז יש ביטוי יפה לקואורדינטות בבסיס אורתוגונלי/אורתונורמלי.
3. מכפלה פנימית כללית מוצגת באמצעות מכפלה סטנדרטית של הקואורדינטות לפי בסיס אורתוגונלי/אורתונורמלי.
4. שיוויון פרסבל- $||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} | < v_i, v > |^2 \cdot ||v_i||^2$

הוכחה: 1 נובע ישירות מכך שמטריצת גראם היא אלכסונית ומתרגיל שכבר ראינו.
2. פיתוח.
3. ישיר מ-1.
4. ישיר מ-1 ונוסחת הצמוד.

<u>הטלה אורתוגונלית</u>

<u>אינטואיציה:</u>



נתונות שתי שלשות יחידה ניצבות w_1, w_2 ונתונה שלשה a. אנו מעוניינים למצוא שלשה a' במישור של w_1, w_2 כך ש- $a - a'$ מינימלי. זה קורה אם $a - a'$ ניצב למישור (או באופן שקול ל-w_1, w_2).

הוקטור a' צריך להיות צירוף לינארי של w_1, w_2 ולכן צריך למצוא x, y כך ש- $a' = xw_1 + yw_2$.

$a - (xw_1 + yw_2) \perp w_1$ שקול לכך ש- $x =< w_1, a >$ ואותו דבר $y =< w_2, a >$.

כלומר $a' =< w_1, a > w_1 +< w_2, a > w_2$.

<u>באופן אבסטקרטי</u>

<u>הגדרה:</u> וקטור ניצב לקבוצה.

<u>טענה:</u> $v \perp vi \leftrightarrow v \perp sp(v_1,.., v_n)$.

<u>הגדרה:</u> יהי $e_1,..., e_k$ בסיס אורתונורמלי (אורתוגונלי) של U. נגדיר את ההיטל אורתוגונלי $P_U: V \to U$ באמצעות נוסחה $P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} < e_i, v > e_i$.

<u>טענה:</u>

1. P_U לינארית.
2. $v - P_U(v) \perp U$

3. $.P_U{}^2 = P_U$
4. $.ker(P_U) = \{v \,|v \perp U\}$-ו Im(p)=U

<u>הוכחה:</u>

1. ישיר
2. $< v - P_U(v), e_i >=< v, e_i >-< P_U(v), e_i >= 0$
3. עבור וקטור u ב-U ראינו כי $u = P_U(u)$ וכמו כן, $P_U(v) \in U$ ולכן $.P_U(P_U(v)) = P_U(v)$
4. עבור Im, הכלה בכיוון ברורה, הכלה ביוון השני נובעת מההבחנה בבעיף הקודם. עבור ker, אם $v \perp U$, אז בפרט $v \perp P_U(v)$ ולכן

$$< P_U(v), P_U(v) >=< v - (v - P_U(v)), P_U(v) >=< v, P_U(v) >-< v - P_U(v), P_U(v) = 0 - 0 = 0$$

לכן $P_U(v) = 0$. אם $P_U(v) = 0$ אז לפי 2 $.v = v - P_U(v) \perp U$

<u>הגדרה:</u> לכל מרחב U, נגדיר $\{v \,|\, v \perp U\} = U^\perp$. המשלים האורתוגונלי.

<u>טענה:</u> לכל מרחב U, מתקיים $.U \oplus U^\perp$

<u>טענה:</u> אם $e_1,..., e_k$ בסיס אורתונורמלי (אורתוגונלי) של U אז $V = U \oplus U^\perp$ והפירוק היחיד של כל v הוא $.v = P_U(v) + (v - P_U(v))$

<u>הוכחה:</u> מהטענה הקודמת $v - P_U(v) \in U^\perp$ ולכן זה פירוק נכון.

<u>מסקנה:</u> אם V נוצר סופית אז $dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V)$ ו-$.(U^\perp)^\perp = U$

<u>הוכחה:</u> $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ קל לראות. כעת משיוויון מימדים נסיים.

<u>משפט הקירוב הטוב ביותר:</u> יהי U תמ״ו של V עם בסיס אורתונורמלי $.e_1,..., e_n$ ויהי $.v \in V$ אזי

$$min_{u\in U}||v - u|| = ||v - P_U(v)||$$

<u>הוכחה:</u>

$$||v - u||^2 = ||v - P_U(v) + P_U(v) - u||^2 = ||v - P_U(v)||^2 + ||P_U(v) - u||^2 \geq ||v - P_U(v)||^2$$

<u>דוגמא:</u> ניקח מטריצה $A = (1\ 1\ 2)\ (1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ 1)$ ונגדיר $.b = (1\ 1\ 1)$ למערכת $Ax = b$ אין פתרון.
לפעמים אנחנו רוצים פתרון בכח, אז מה שעושים זה מוצאים את b' הכי טוב שעבורו למערכת $Ax = b'$ יש פתרון. מהם כל ה-b' הללו? $.C(A)$ עמודות A הם בסיס של $C(A)$, נמצא בסיס אורתונורמלי של $C(A)$ ואז ההטלה $P_{C(A)}(b)$ הוא b' הדרוש.

<u>תהליך גראם שמידט:</u>

יהיו $v_1,..., v_n \in V$. תהליך גרם שמידט, מייצר באופן רקורסיבי סדרה $.u_1,..., u_k$ כך ש-:

1. $u_1,..., u_k$ סדרה אורתונורמלית.

2. $sp(v_1,..., v_n) = sp(u_1,..., u_k)$.

תנאי התחלה: אם $v_1 = 0$ נעבור לוקטור הבא. אחרת, $u_1 = e_{v_1}$ (הנרמול של v_1). נשים לב כי $sp(u_1) = sp(v_1)$.

נניח הגדרנו $u_1,..., u_k$ הסדרה שהתהליך מייצר ל- $v_1,..., v_n$ (ובפרט $sp(v_1,..., v_n) = sp(u_1,..., u_k)$).

יהי v_{n+1} וקטור נוסף, נגדיר $u_{k+1}' = v_{n+1} - P_{sp(u_1,...,u_k)}(v_{n+1})$. אם $v_{n+1} \in sp(v_1,..., v_n)$ אז $u_{k+1}' = 0$
אז הסדרה שהתהליך מייצר ל- $v_1,..., v_{n+1}$ תיהיה $u_1,..., u_k$.

אחרת, נגדיר $u_{k+1} = e_{u'_{k+1}}$ ומתקיים $u_{k+1} \perp sp(u_1,..., u_k)$. לפי הגדרת u_{k+1}, מתקיים כי $u_{k+1} \in sp(v_1,..., v_{n+1})$ ולכן לפי ההנחה כי $sp(v_1,..., v_n) = sp(u_1,..., u_k)$, נסיק כי $sp(u_1,..., u_{k+1}) \subseteq sp(v_1,..., v_{n+1})$. בכיוון השני, $v_{n+1} = P_{sp(u_1,...,u_k)}(v_{n+1}) + u'_{k+1}$ ולכן $v_{n+1} \in sp(u_1,..., u_{k+1})$ וסכ״ה נסיק שיוויון.

<u>**מסקנה:**</u> אם $v_1,... v_n$ בת״ל אז $k = n$ ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $sp(u_1,..., u_i) = sp(v_1,..., v_i)$.

<u>**מסקנה:**</u> לכל מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית יש בסיס אורתונורמלי.

<u>**מסקנה:**</u> כל קבוצה אורתונורמלית ניתן להשלים לבסיס אורתונורמלי (מה קורה לוקטורים אורתונורמליים בתהליך גראם שמידט)

<u>**מסקנה:**</u> אם $B = (b_1,..., b_n)$ בסיס של V, אז לכל $I \subseteq [n]$ $sp(b_i \,|\, i \in I)^{\perp} = sp(b_i \,|\, i \in [n]\backslash I)$.

<u>**מסקנה:**</u> אם V מ״ו נוצר סופית אז לכל מרחב U מתקיים $V = U \oplus U^{\perp}$ ואפשר להגדיר את ההיטל האורתוגונלי P_U.

<u>דרך נוספת לחישוב המשלים האורתוגונלי:</u> לוקחים בסיס של U משלימים לבסיס של V ומבצעים גראם שמידט, הוקטורים שנוספו הם בסיס של $U^{\perp}$.

<u>**פירוק QR**</u>

תהא A מטריצה, עם עמודות $x_1,..., x_k$. ונניח כי A מדרגה מלאה, כלומר, העמודות בת״ל.
נבצע תהליך גראם שמידט על $x_1,..., x_k$ ונקבל $q_1,..., q_k$. אז לכל i מתקיים $x_i \in sp(q_1,..., q_i)$
אז לפי המשפט שראינו $x_i = \sum_{j=1}^{i} < q_j, x_i > q_j$.

נשלים את $q_1,...,q_k$ לבסיס אורתונורמלי של C^n ע״י וקטורים $q_{k+1},...,q_n$. אזי

$$[x_i]_{(q_1,...,q_n)} = (< q_1, x_i >,..., < q_i, x_i > \ 0, 0,.... 0)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ 0_{(n-k)\times k} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{R}}}$$

אז ל- Q יש את התכונה כי $Q^* \cdot Q = I$ ולכן $Q^* = Q^{-1}$.

<u>הגדרה:</u> מטריצה Q הפיכה המקיימת $Q^{-1} = Q^*$ נקראת מטריצה אוניטרית ואם Q ממשית אז היא נקראת אורתוגונלית.

<u>משפט:</u> לכל מטריצה $A \in M_{n\times k}(C)$ קיים פירוק $A = QR$ כאשר $Q \in M_n(C)$ מטריצה אוניטרית ו- $R \in M_{n\times k}(C)$ מטריצה משולשית שמסתיימת ב- $(n - k)$ שורות אפסים.

פירוק נוסף הוא $A = Q'R'$ כאשר Q' היא k העמודות הראשונות של Q ו-R' k השורות הראשונות של R.

מתקיים R' משולשית עליונה ו- $Q'^*Q' = I$ (היא לא ריבועית ולכן לא אוניטרית).

טענה 4.3 התנאים הבאים שקולים:

1. $\mathbf{Q}$ אורתוגונלית
2. השורות של $\mathbf{Q}$ הם בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^n$.
3. העמודות של $\mathbf{Q}$ הם בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^n$.

4. לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\langle \mathbf{Qx}, \mathbf{Qy} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

הוכחה: נשאיר את השקילות של 1,2,3 כתרגיל ונראה רק את 4. נשים לב

$$\langle \mathbf{Qx}, \mathbf{Qy} \rangle = (\mathbf{Qx})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Qy}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})\mathbf{y}$$

ולכן אם $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (=Q מטריצה אורתוגונלית) אז ברור ש-$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})\mathbf{y}$. מצד שני אם $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})\mathbf{y}$ לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ אז בעזרת וקטורי יחידה נוכל להראות ש-$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. ∎

מסקנה 4.4 מטריצה אורתוגונלית שומרת על מרחקים ($\|\mathbf{Ax}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$) ועל זוויות ($\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \angle(\mathbf{Qx}, \mathbf{Qy})$).