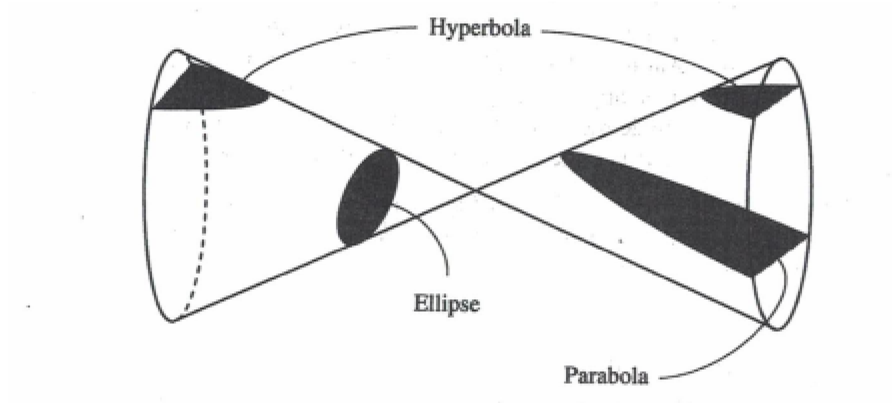
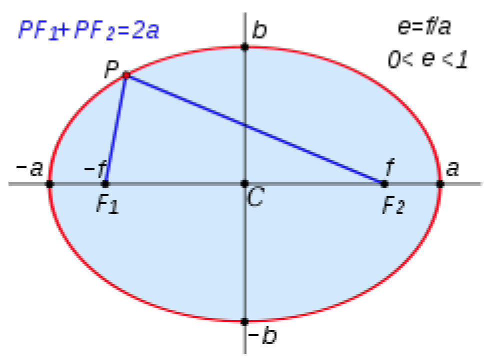
שיעור 17-ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים

הגדרה: חתך קוני הינו החיתוך של מישור עם קונוס.



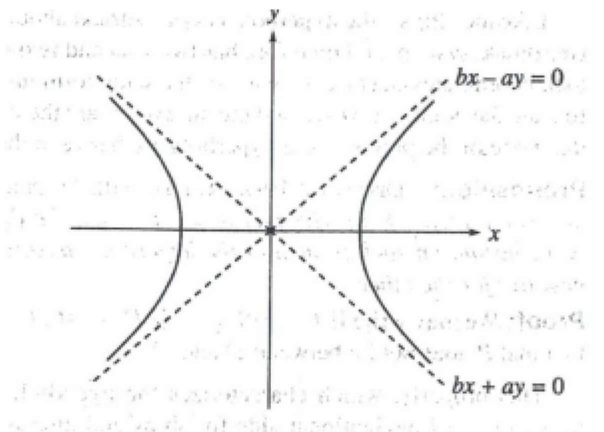
משוואת אליפסה: מסביב לראשית

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



משוואת ההיפרבולה: עם מוקד בראשית

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



<u>הגדרה:</u> חתך קוני כללי זו משוואה מהצורה:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

אם A,B,C אפסים אז מקבלים משוואה לינארית ולכן קבוצת הפתרונות ידוע לנו מאלגברה לינארית.
אם D,E=0 החתך הקוני נראה <u>מרכזי</u>.
<u>הערה:</u> הצגה מטריציונית למשוואה קונית מרכזית:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

<u>הגדרה:</u> מערכת קואורדינטות הן פונקציות חח"ע $u(x, y) = x', \quad v(x, y) = y'$. לדוגמא: מערכת קרטזית $u(x, y) = x \quad v(x, y) = y$. מערכת פולרית $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta(x, y) = arctan^*(\frac{y}{x})$

$$\theta = \operatorname{atan1}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{if } x > 0 \text{ and } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases}$$

<u>הגדרה:</u> מערכת קואורדינטות לינארית היא מהצורה $A(x, y)$. באשר A מטריצה הפיכה מסדר 2 על 2.
כלומר A היא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי של R^2 לבסיס אחר.

<u>הגדרה:</u> מטריצת סיבוב היא מטריצת המעבר הבאה:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} :$$

שלמעשה מסובבת כל וקטור ב-θ מעלות. בדקו כי עבור מטריצת סיבוב, ההופכית היא השחלוף.

<u>משפט:</u> תהא

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

חתך קוני מרכזי, אזי יש מטריצת סיבוב R_θ כך ש בקואורדינטות $R_\theta(x', y') = (x, y)$
החתך מתואר ע״י המשוואה:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F = 0$$

כלומר:

$$(x', y')\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x', y')(R_\theta^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} R_\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

הוכחה:
נחשב את המטריצה הימנית

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{-\theta}\mathrm{M}\mathrm{R}_{\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\cos^2\theta + C\sin^2\theta + B\sin 2\theta & \frac{1}{2}(C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta \\ \frac{1}{2}(C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta & A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - B\sin 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

למעשה אנו רוצי למצוא זווית בה המטריצה הזו אלכסונית שכן אז אין את הרכיב xy.

$$1/2(C - A)sin2a + Bcos2a = 0 \qquad tan(2a) = \frac{sin2a}{cos2a} = \frac{2B}{A-C}$$

כך נבחר את a להיות arc tan של הביטוי הזה. ואם A=C אז נבחר פשוט $a = \pi/4$.
ביטוי קונקרטי ל-

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + C\sin^2\theta + B\sin 2\theta \\ C' &= A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - B\sin 2\theta. \end{aligned}$$

מסקנה:
אם $A', C' > 0$ ו-$F < 0$ אז המשוואה היא אליפסה.
אם $A' > 0, C' < 0, F' < 0$ אז המשוואה היא היפרבולה.
המקרים $A', C', F' > 0$ או $A', C', F' < 0$ נותנים אין פתרון.

איך אפשר להגיע לA', C' באופן ישיר?
למעשה מה שעשינו הוא הדבר הבא: יש לנו את המטריצה $ABBC$ ואנחנו מחפשים לשנות את הבסיס של ההעתקה הזו כך שהמטריצה המייצגת היא אלכסונית:

$$T_E(x) = Ex$$

$$[T_E]_{st} = E$$

$$B^{-1}EB = [T_E]_B = Diag(a, b)$$

נראה מה הדרישה:

$$Eb_1 = T_E(b_1) = ab_1, \quad Eb_2 = T_E(b_2) = bb_2$$

שקול למשוואה

$$(E - Ia)b_1 = 0 \qquad (E - Ib)b_2 = 0$$

הגדרה: λ נקרא ערך עצמי של E אם קיים וקטור v לא אפס כך ש- $Av = \lambda v$.
ו-v נקרא וקטור עצמי לערך עצמי λ.

מסקנה:

λעע של E אמ״ם למשוואה $(E - \lambda I)x = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי אמ״ם $det(E - \lambda I) = 0$

הגדרה: $det(E - \lambda I) = P_E(\lambda)$ נקרא הפולינום האופייני של המטריצה E. וממתקיים

טענה: λ עע של E אמ״ם $P_E(\lambda) = 0$.

<u>תרגיל:</u> אם A,B דומות אזי $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

מסקנה: אם נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה הם יהיו A',C' של המשוואה. ומתקיים

$$det(ABBC - \lambda I) = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2)$$

ו- $A + C = tr(ABBC) = tr(A'C') = A' + C'$ ו- $AC - B^2 = A'C'$.

כעת נראה איך מוצאים קואורדינטות פשוטות למשוואה קונית כללית:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

נתחיל בהורדת C ע״י שינוי קואורדינטות $R_\theta(x', y') = (x, y)$. נקבל

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

נעשה מה שנקרא ״השלמה לריבוע״ : אם A' לא 0

$$A'x'^2 + D'x' = A'(x' + \frac{D'}{2A'})^2 - \frac{D'^2}{4A'^2}$$

נשנה את הקואורדינטות ע״י הזזה:

$$x'' = x' + \frac{D'}{2A'}$$

ואותו דבר ל-y': אם C' לא 0

$$y'' = y' + \frac{E'}{2C'}$$

לכן אם גם A' וגם C' לא אפס ולקבל את המשוואה הקונית המרכזית:

$$A'x''^2 + B'y''^2 + F'' = 0$$

$$F'' = F - \frac{D'^2}{4A'} - \frac{E'^2}{4C'}.$$

Theorem: *A general conic*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(where not all of A, B, and C are zero) represents one of the following eight types of loci: an ellipse, a hyperbola, a parabola, a pair of intersecting straight lines, a pair of parallel straight lines, a single straight line 'counted twice' (like a double root of an equation), a single point, or the empty set.

Moreover the cases that can occur are governed by the sign of $AC - B^2$, as follows:

- *If $AC - B^2 > 0$, the possibilities are an ellipse, a single point, or the empty set.*
- *If $AC - B^2 = 0$, the possibilities are a parabola, two parallel straight lines, a single straight line, or the empty set.*
- *If $AC - B^2 < 0$, the possibilities are a hyperbola or two intersecting straight lines.*

Remark: The first three cases (ellipse, parabola, or hyperbola) are referred to as *nondegenerate* conics; the others are *degenerate*.

אם $AC - B^2$ לא 0, אז A'C' לא 0ולכ ניתן להעביר למשוואה

$$A'x''^2 + B'y''^2 + F'' = 0$$

רק ע״י סיבוב והזזה של קואורדינטות. אם F''=0 אז יש פתרון יחיד והוא ראשית הצירים.

וכך בודקים את כל המקרים.

דוגמא:

Example: Suppose we are faced with the following problem: *Reduce the conic*

$$31x^2 - 24xy + 21y^2 + 4x + 6y = 25$$

To solve the problem, the first step is to write the equation as $\mathbf{x}^t\mathsf{M}\mathbf{x} + \mathsf{N}\mathbf{x} + F = 0$, where

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{N} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad F = -25.$$

We need first to find a rotation matrix R_θ such that $\mathsf{R}_{-\theta}\mathsf{M}\mathsf{R}_\theta$ is diagonal. By the calculations in theorem 7.3.3, we must take

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta = \frac{-24}{31-21} = -\frac{12}{5}.$$

This gives a quadratic equation for $\tan\theta$,

$$6\tan^2\theta - 5\tan\theta - 6 = 0$$

that is

$$(2\tan\theta - 3)(3\tan\theta + 2) = 0$$

so $\tan\theta = 3/2$ or $\tan\theta = -2/3$. We may choose either value (the two corresponding values of θ will differ by a right angle, so the only difference it makes is to which axis gets called the x' axis and which gets called the y' axis). We take $\tan\theta = -2/3$; then

$$\sin\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}, \quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \mathsf{R}_\theta = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

We may calculate

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_{-\theta}\mathsf{M}\mathsf{R}_\theta &= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 39 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\mathsf{N}\mathsf{R}_\theta = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

So in new coordinates x' and y' related to the old by R_θ, the equation becomes

$$39x'^2 + 13y'^2 + \frac{26}{\sqrt{13}}y' - 25 = 0.$$

We may complete the square to get

$$39x'^2 + 13\left(y' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - 26 = 0$$

or

$$\frac{x''^2}{2/3} + \frac{y''^2}{2} = 1$$

where $x' = x''$ and $y' = y'' - 1/\sqrt{13}$. We find therefore that the equation is that of an ellipse of eccentricity

$$\sqrt{1 - \frac{2/3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

and that the coordinates in which it takes its simplest form are x'', y'' related to x, y by

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3x'' + 2y'') - \frac{2}{13} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2x' + 3y') &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2x'' + 3y'') - \frac{3}{13}. \end{aligned}$$

<u>מסודר:</u>

<u>הגדרה:</u>

1) מטריצה A נקראת לכסינה אם קיימת מטריצה אלכסונית D כך ש- A,D דומות.
2) העתקה $T: V \to V$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

<u>מסקנה:</u> העתקה $T: V \to V$ לכסינה אמ"ם כל מטריצה מייצגת שלה $[T]_B$ לכסינה.

<u>הערה:</u>

1) כדי ש-T תיהיה לכסינה צריך להתקיים $[T(b_i)]_B = \lambda_i e_i$ ולכן $T(b_i) = \lambda_i b_i$. וקטורים כאלה נקראים וקטורים עצמיים של העתקה T וערכים עצמים של העתקה T.
2) $A = PDP^{-1}$ באשר P הפיכה, שקול לכך ש- $AP = PD$ ומכיוון ו-D אלכסונית, זה שקול לכך ש- $Av_i = \lambda_i v_i$ לכל עמודה של P. עמודות P ייקראו וקטורים עצמיים של המטריצה A.

<u>הגדרה:</u>

1) ערך עצמי של העתקה $T: V \to V$ זה סקלר λ כך שלמשוואה $T(x) = \lambda x$ יש פתרון לא טריוויאלי ב-V.
2) עבור ערך עצמי λ של T, נומר כי $v \in V$ הוא וקטור עצמי לערך עצמי λ אם $T(v) = \lambda v$.
3) ערך עצמי של מטריצה A זה סקלר λ כך שלמשוואה $Ax = \lambda x$ יש פתרון לא טריוויאלי ב-F^n.
4) עבור ערך עצמי λ של A, נומר כי $x \in F^n$ הוא וקטור עצמי לערך עצמי λ אם $Ax = \lambda x$.

כל ההגדרות יינתנו למטריצה על אף שאפשר לתרגם הכל להעתקה.

<u>משפט:</u> A מטריצה לכסינה (T העתקה לכסינה) אמ"ם יש בסיס של וקטורים עצמיים של A.
<u>הוכחה:</u> אם A לכסינה ראינו בהערה כי עמודות P הם וקטורים עצמיים, ומכיוון ו-P הפיכה, אז הוקטורים הללו הם בסיס. בכיוון השני, אם יש בסיס, מרכיבים את המטריצה P ואז מקבלים מוריצה אלכסונית.

הגדרה: אם A מטריצה לכסינה, מטריצה P המורכבת מבסיס של וקטורים עצמיים של A נקראת המטריצה מלכסנת, הבסיס נקרא בסיס מלכסן, PAP^{-1} נקראת הצורה האלכסונית של A, וכפי שכבר אמרנו, A נקראת לכסינה.

טענה: אם A דומה למטריצה אלכסונית D אז $D = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ באשר $\lambda_1,...,\lambda_n$ הם ע״ע של A(בהמשך נראה שזה גם כולם)
הוכחה: נשים לב כי $AP = PD$ ולכן כל עמודה מתאימה ב- P מעידה על קיום וקטור עצמי לא טריוויאלי ל-λ_i.

אם כך, כדי ללכסן מטריצה, משימתנו היא להרכיב בסיס של וקטורים עצמיים.

הגדרה: תהא A מטריצה, $V_\lambda = \{x \in F^n \mid Ax = \lambda x\}$ נקרא המרחב העצמי לע״ע λ.
טענה: $V_\lambda = Sols(A - \lambda I)$ ולכן הוא תת מרחב וקטורי של F^n

מסקנה: λ ע״ע של A אמ״ם $|A - \lambda I| = 0$.
הגדרה: נגדיר $P_A(x) = |A - xI|$ להיות הפולינום האופייני של המטריצה A.

מסקנה: λ ע״ע של A אמ״ם λ שורש של $P_A(\lambda)$.
ולכן כדי למצוא את כל הערכים עצמיים של מטריצה A אפשר למצוא שורשים של פולינום. ואז כדי למצוא את הוקטורים העצמיים לכל ע״ע מחשבים את V_λ (פתרון מערכת משוואות פשוטה).
דוגמא:
1) חישוב
2) מצב שקשה לחשב שורשים של פולינום אופייני אבל בדיקה ישירה כי משהו הוא ערך עצמי.

טענה:
1. אם A מסדר n אז $deg(P_A(\lambda)) = n$.
2. $P_A(\lambda)$ הוא פולינום מתוקן.
3. אם A,B דומות אז $P_A(x) = P_B(x)$ ולכן אפשר להגדיר את הפולינום האופייני של העתקה.
4. אם $P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} +....+ a_1x + a_0$ אז $a_0 = det(A)$ ו- $a_{n-1} =- tr(A)$.

הוכחה:
1. נוכיח משהו חזק יותר, כי אם $B \in M_n(F_1[X])$(הסבר) אז $det(B) \in F_n[X]$.

הוכחה באינדוציה על הסדר של B. מפתחים לפי איזושהי שורה ואז ברור בהנחת האינדוקציה של פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n זה פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-n.
כעת נוכיח כי הדרגה של הפולינום האופייני היא בדיוק n:
בסיס n=2 ברור. נניח כי הטענה נכונה ל-n ונוכיח ל-n+1

$$det(A - xI) = (a_{11} - x)|A_{11}| + \sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{1+i}a_{1i}|A_{1i}|$$

המחובר הראשון הוא הפולינומים האופייני של A_{11} ולכן מעלתו מהנחת האינדוקציה היא n וכשנכפיל אותו ב-$(a_{11} - x)$ נקבל פולינום ממעלה n+1. כל שאר המחוברים הם דטרמיננטות של מטריצות ב-$M_n(F_1[X])$ ולכן מעלתם היא לכל היותר n מטענת העזר. אם כך, זה פולינום ממעלה n+1.

2. באינדוקציה, המחובר המוביל...

3. נניח כי $A = PBP^{-1}$ אזי $A - xI = PBP^{-1} - xPP^{-1} = P(B - xI)P^{-1}$ ולכן המטריצות $A - xI, B - xI$ דומות ובפרט יש להם אותו דטרמיננטה.

4. $a_0 = P_A(0) = |A - 0I| = |A|$. בתרגיל מודרך בשיעורי הבית.

לאחר שמצאנו את הע״ע $\lambda_1,...,\lambda_n$, מנסים להרכיב בסיס של וקטורים עצמיים. מ-V_{λ_1} לוקחים מספר מקסימלי של וקטורים עצמיים בת״ל אפשריים מספר זה הוא כמובן $det(V_{\lambda_1})$. ואז מ-V_{λ_2} לוקחים מספר מקסימלי של וקטורים עצמיים $det(V_{\lambda_2})$.

<u>הגדרה:</u> הריבוי הגיאומטרי של ע״ע λ הוא $det(V_\lambda)$.

מדוע אם נרכיב סדרות ממרחבים שונים נקבל בסיס? זה מזכיר את העניין עם סכום ישר.

<u>טענה:</u> אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ שני ע״ע שונים של A אז $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

<u>הוכחה:</u> יהי $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ אזי $Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ ולכן $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ אבל $(\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ אז v=0.

<u>מסקנה:</u> וקטורים עצמיים לע״ע שונים הם בת״ל. כלומר אם

$(v^1_1,...., v^1_{n_1})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_1

$(v^2_1,...., v^2_{n_2})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_2

...

$(v^k_1,...., v^k_{n_k})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_k

אז $\{v^j_i \mid j \leq k \quad i \leq n_k\}$ בת״ל.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על k. עבור k=1 זה טריוויאלי. עבור k=2 זה משפט האיפיון של סכום ישר.

נניח כי הטענה נכונה ל-k ונוכיח ל-k+1.

הרעיון הוא להשתמש בהנחת האינדוקציה כדי לטעון כי

$(v^1_1,...., v^1_{n_1})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_1

$(v^2_1,...., v^2_{n_2})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_2

...

$(v^k_1,...., v^k_{n_k})$ ו״ע בת״ל ל-ע״ע λ_k

בת״ל , לטעון כי $(V_1 +...+ V_k) \cap V_{k+1} = \{0\}$ ואז להשתמש במשפט האיפיון שוב.

אז $v \in (V_1 + ... + V_k) \cap V_{k+1}$ ומתקיים $v = \sum a_i v_i$ מצד שני $Av = \lambda_{k+1} v = \lambda_{k+1} \sum a_i v_i$

ולכן $Av = A \sum a_i v_i = \sum a_i A v_i = \sum a_i \lambda_i v_i$ אז $\sum a_i (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_i = 0$ בת״ל מהנחת האינדוקציה $v_1, ..., v_k$.

ולכן $a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0$ ולכן $a_i = 0$ אז v=0.

<u>מסקנות:</u>

1. אם $dim(V_{\lambda_1}) + ... dim(V_{\lambda_k}) = n$ אז A לכסינה.
2. אם $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים **<u>שונים</u>** אז A לכסינה.

<u>טענה:</u> אם A לכסינה ודומה למטריצה אלכסונית $D = diag(\lambda_1 I_{n_1}, ... \lambda_k I_{n_k})$ אז $dim(V_{\lambda_i}) = n_i$ ואין עוד ע״ע מלבדם.

<u>הוכחה:</u> שוב, יש P כך ש- $AP = PD$ ולכן $v_1, .., v_{n_1} \in V_{\lambda_1}$ ו- $v_{n_1+1}, ..., v_{n_1+n_2} \in V_{\lambda_2}$ וכן הלאה...

אז $n_i \le dim(V_{\lambda_i})$ ולכן $n = n_1 + n_2 + ... + n_k \le dim(V_{\lambda_1}) + ... + dim(V_{\lambda_k})$ אבל מדובר בסכום ישר ולכן יש שיוויון. ולכן $dim(V_{\lambda_i}) = n_i$. נניח בשלילה כי λ ו״ע נוסף, אז היינו יוכים להאריך את הסדרה בת״ל מעבר למימד, סתירה.

<u>דוגמא ללכסון:</u>

מה קורה כאשר הפולינום האופייני לא מתפרק לגורמים לינאריים שונים? עוד קשר מעניין מאוד בין הפולינום האופייני לבין הוקטורים העצמיים

<u>הגדרה:</u> הריבוי האלגברי של ע״ע הוא המעלה של הגורם הלינארי המתאים לו בפולינום האופייני.

<u>הערה:</u> אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים (לאו דווקא שונים) אז סכום הריבויים האלגבריים בהכרח שווה ל-n (כי מעלת הפולינום היא n). וגם אם הוא לא מתפרק לגורמים לינאריים אז הסכום של הגורמים הלינאריים הוא קטן או שווה ל-n

<u>משפט:</u> הריבוי הגיאומטרי≤ ריבוי אלגברי.

<u>הוכחה:</u> בהמשך הקורס (לא קשה בכלל!) יהי k הריבוי האלגברי, נרכיב בסיס $v_1, ..., v_k$ של V_λ

ונשלים אותו לבסיס של V ע״י $v_{k+1}, ..., v_n$ נסמן ב-P את המטריצה שעמודותיה הם $v_1, ..., v_n$ אזי $P^{-1}AP = B$

ולכמו קודם $B = (\lambda I_k, C, 0, D)$

<u>טענת עזר:</u> אם A מטריצת בלוקים משולשית עם מטריצות $A_1, ..., A_n$ על האלכסון מסדרים $k_1, ..., k_n$ אז $det(A) = det(A_1) det(A_2) ... det(A_n)$.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על n, עבור n=1 אין מה להוכיח, נניח כי הטענה נכונה ל-n-1 ונוכיח ל-n. המקרה n נוכיח באינדוקציה על k_1. (אפשר פשוט באינדוקציה על הגודל של A זה גם עובד).

פיתוח לפי עמודה ראשונה $det(A) = \sum_{i=1}^{k_1}(-1)^{i+1}(A_1)_{i,1}det(A_{i1})$ לשים לב כי A_{i1} היא מטריצת בלוקים שהבלוק הראשון הוא המינור ה-i1 של A1 ואז להשתמש בהנחת האינדוקציה ולהוציא גורם משותף את $det(A_2)... det(A_n)$.

המשך ההוכחה: לכן $det(B - xI) = (\lambda - x)^k g(x)$, ייתכן ש- λ עדיין שורש של $g(x)$ ולכן הריבוי ב-$P_B(x)$ הוא לפחות k. אבל $P_B(x) = P_A(x)$ כי המטריצות דומות.

<u>מסקנה:</u> אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים שונים ולכל ע״ע, הריבוי האלגברי=ריבוי גיאומטרי אז A לכסינה.

<u>משפט מרכזי:</u>

תהא A מטריצה מסדר n אז הבאים שקולים:

1. A לכסינה.
2. א. הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים)
   ב. לכל ע״ע הריבוי הגיאומטרי=ריבוי אלגברי.

<u>הוכחה:</u> מ-2 ל-1 ראינו. מ-1 ל-2, נניח כי A לכסינה. אז $k_i \leq n_i$ ו-$n = \sum_{i=1}^{m} k_i \leq \sum_{i=1}^{m} n_i \leq n$ ולכן בהכרח $k_i = n_i$ (אחרת, מגיעים לסתירה). בנוסף, הפולינום חייב להתפרק לגורמים לינארים, עי אם היה גורם אי פריק אז מעלת הפולינום הייתה גודלה מ-n.

תרגילים:

$$A=\begin{pmatrix}4&0&-3\\-3&1&3\\6&0&-5\end{pmatrix}$$

ב) $$B=\begin{pmatrix}4&0&-3\\1&1&1\\6&0&-5\end{pmatrix}$$

א) נחשב את הפולינום האופייני :

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&0&-3\\-3&1-\lambda&3\\6&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)\cdot\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&-3\\6&-5-\lambda\end{pmatrix}\right|=$$

$$(1-\lambda)\cdot[(4-\lambda)(-5-\lambda)+18]=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=(-1)(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

לכן הע"ע יהיו $\lambda_1=1$ עם ריבוי אלגברי $m_1=2$, ו- $\lambda_2=-2$ עם ריבוי אלגברי $m_2=1$.

נמצא את המ"ע :

$$V_1=N(A-1\cdot I)=N\begin{pmatrix}3&0&-3\\-3&0&3\\6&0&-6\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$, ולכן

הריבוי הגיאומטרי הינו $g_1=2$.

$V_{-2}=N(A+2\cdot I)=N\begin{pmatrix}6&0&-3\\-3&3&3\\6&0&-3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$, ולכן הריבוי הגיאומטרי הינו $g_2=1$.

מצאנו כי לכל ע"ע הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים, ולכן המטריצה לכסינה.

ניקח $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ ו- $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

ב) נחשב את הפולינום האופייני :

$$P_B(\lambda)=|B-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&0&-3\\1&1-\lambda&1\\6&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)\cdot\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&-3\\6&-5-\lambda\end{pmatrix}\right|=$$

$$(1-\lambda)\cdot[(4-\lambda)(-5-\lambda)+18]=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=(-1)(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

לכן הע"ע יהיו $\lambda_1=1$ עם ריבוי אלגברי $m_1=2$, ו- $\lambda_2=-2$ עם ריבוי אלגברי $m_2=1$.

נמצא את המ"ע :

$V_1=N(B-1\cdot I)=N\begin{pmatrix}3&0&-3\\1&0&1\\6&0&-6\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, ולכן הריבוי הגיאומטרי הינו $g_1=1$.

$V_{-2}=N(B+2\cdot I)=N\begin{pmatrix}6&0&-3\\1&3&1\\6&0&-3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$, ולכן הריבוי הגיאומטרי הינו $g_2=1$.

כאן לע"ע $\lambda_1=1$ הריבוי הגיאומטרי קטן מהריבוי האלגברי ולכן המטריצה אינה לכסינה.

תרגיל: נתונה מטירצה A כך ש- Rank(A)=2 ו- $P_A(x)=x^{n-1}(x-2)$ הוכיחו כי A איננה לכסינה.