<u>שיעור 13</u>

<u>משפט מימד השני:</u> תהא $T: V \to U$ ט"ל. נניח כי V נ"ס אז:

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$$

<u>מקרה פרטי:</u> משפט הדרגה והאפסות.

<u>מסקנה ממשפט המימד:</u>

1. אם מימד התחום גדול ממימד הטווח אזי לא חח"ע
2. אם מימד הטווח גדול ממימד התחום אזי לא על

<u>הגדרה:</u>

העתקה לינארית חח"ע נקראת מונומורפיזם.

העתקה לינארית על נקראת אפימורפיזם.

העתקה לינארית חח"ע ועל נקראת איזומורפיזם.

<u>משפט 2 מתוך 3 להעתקות לינאריות</u>

תהא $T: V \to U$ העתקה לינארית כך ש- V, U נוצרים סופית. כל 2 מבין השלושה הבאים שקולים לכך ש-T איזומורפיזם:

1. T חח"ע.
2. T על.
3. $dim(V) = dim(U)$.

<u>טענה:</u> ההופכית של העתקה לינארית היא העתקה לינארית.

<u>הגדרה:</u> מרחבים איזומורפיים- יחס שקילות, משמעות של "אותו דבר עד כדי שם".

<u>משפט:</u> שני מרחבים על אותו שדה ממימד סופי הם איזומורפיים אמ"ם יש להם את אותו המימד.(הוכחה- דרך מרחב ה-n-יות והעתקת הקואורדינטות. דגש כי יש הרבה איזומורפיזמים ע"י בחירת בסיסים שונים).

<u>דוגמא:</u> בניית איזומורפיזם בין שני מרחבים וקטוריים באמצעות הרכבה. (פולינומים ומטריצות)

<u>משפט:</u> שתי העתקות לינאריות מזדהות אמ"ם מזדהות על בסיס (מספיק קבוצה פורשת)-הוכחה תיהיה בשיעורי הבית.

<u>פתרון מקוצר שאלה 5 מועד ב' סמסטר ב 2018:</u>

נסמן ב- $e_\theta = (cos(\theta), sin(\theta))$. נוכיח כי ההעתקות $T \circ S$ מזדהות על וקטורי בסיס $(e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}, e_{\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}})$:

השיקוף סביב $l_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$ שולח את $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$ ל-$e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$(כי הוא על הישר) ואת $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}$ל-$e_{\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}}$(כי הוא על הישר הניצב).

S מסובבת את $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$ ב- α מעבלות ל- $e_{\beta+\frac{\alpha}{2}}$ ואז השיקוף סביב l_{β} מעביר אותו ל- $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$. כלומר $T(S(e_{\beta-\frac{\alpha}{2}})) = e_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$.

S מסובבת את $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}$ ל- $e_{\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}$ והשיקוף סביב β מעביר אותו ל- $e_{\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}}$. לכן $T(S(e_{\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}})) = e_{\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}}$
כלומר ההעתקות מזדהות על בסיס ולכן זהות.

<u>משפט:</u> יהיו V, U מרחבים וקטורים ונניח כי $(v_1, ..., v_n) \in V$ ו-$(u_1, ..., u_n) \in U$.
אם $(v_1, ..., v_n)$ בסיס אז קיימת ויחידה העתקה לינארית $T: V \to U$ כך ש- $T(v_i) = u_i$ ו-T נתונה ע״י הנוסחא:
$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ באשר $[x]_{(v_1, ..., v_n)} = (a_1, ..., a_n)$.

<u>דוגמא לבניית העתקה על בסיס:</u>

<u>הגדרת מרחב ההעתקות הלינאריות:</u> $Hom_F(V, U) = \{T \in U^V \mid T \text{ לינארית}\}$ תת מרחב של U^V.

<u>משפט:</u> $dim(Hom(U, V)) = dim(U) \cdot dim(V)$.