שיעור 12- העתקות מטריציוניות ולינאריות

הגדרה: סימון T_A. סימון $[T_A] = A$. העתקה $T: F^n \to F^k$ נקראת מטריציונית אם קיימת מטריצה כך ש- $T = T_A$.

קשר למערכת משוואות $T_A(x) = b$ ("קו גובה")

תרגום מושגים: מרחב פתרונות- $Sols(A) = [\{0\}]^{-1}_{A} ker(T_A) := T$, מרחב העמודות- $C(A) = Im(T_A)$

הפונקציה T_A היא על- עמודות A פורשות. הפונקציה T_A חח״ע- עמודות A בת״ל. הפונקציה T_A הפיכה - עמודות A בסיס.

טענת עזר שימושית (בתרגיל בית):

אם A, B מטריצות מאותו סדר כך שלכל x מתקיים $Ax = Bx$ אז A=B.

מסקנה: אם $T_A = T_B$ אז $A = B$.

הגדרה: סכום של העתקות מטריציונית, כפולה בסקלר והרכבה.

טענה: סכום כפל בסקלר והרכבה של העתקות מטריציוניות היא העתקה מטריציוניתץ המטריצות של הסכום (להוכיח), כפל בסקלר(בתרגיל בית) והרכבה שלהן המטריצה היא מכפלת מטריצות.

הוכחה של הרכבה: יהי x אז $(T_A \circ T_B)(x) = T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = T_{A\cdot B}(x)$ ולכן $T_{AB} = T_A \circ T_B$.

מתי פונקציה מטריציונית היא הפיכה (הוכחה בתרגיל בית)

מה לגבי מרחב שורות? נחזור לזה בהמשך...

הגדרה: יהיו V, U מ״ו ועל אותו שדה. העתקה $T: V \to U$ נקראת לינארית אם T חיבורית והומוגנית.

דוגמאות: סתם העתקה, העתקת האפס, העתקת הזהות, גזירה, אינטגרל, העתקות מטריציוניות, העתקת קואורדינטות, הטלה (הגדרת הטלה על פירוק של תת מרחב).

טענות בסיסיות אם $T: V \to U$ העתקה לינארית אז:

1. 0 עובר ל-0
2. $T(-v) = -T(v)$.
3. $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$

תרגיל: הרכבה של העתקות לינארית היא לינארית.

תרגיל:

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{K}$ותהי $T : V \to V$ כך שלכל $v \in V$ קיים $\lambda \in \mathbb{K}$ כך ש $Tv = \lambda v$. הראו כי יש $\lambda \in \mathbb{K}$ כך ש $Tv = \lambda v$ לכל $v \in V$.

<u>משפט:</u> כל העתקה לינארית ממרחב n-יות למרחב k-יות היא מטריציונית ויתר על כן, $R_i([T]) = T(e_i)$.

<u>דוגמא:</u> העתקת שיקוף סביב הישר l_β, זו העתקה לינארית. הוכחה:

כל וקטור v ניתר לרשום כצירוף לינארי $v = ae_\beta + be_{e_{\beta+\frac{\pi}{2}}}$ אז $T(v) = ae_\beta + be_{\beta-\frac{\pi}{2}}$. אפשר לבדוק ישירות כי הפונקציה הנ"ל היא למעשה $T = Q_B^{-1} \circ S \circ Q_B$ כאשר S היא השיקוף סביב ציר ה-x שברור כי זו העתקה לינארית. לפי המשפט העתקה זו היא מטריציונית ואפשר לחשב את המטריצה שלה. נראה זאת בהמשך.

<u>הגדרה:</u> הגרעין ותמונה של העתקה לינארית

<u>טענה:</u> גרעין ותמונה של העתקה לינארית הם תת-מרחבים.

<u>דוגמא:</u> הטלה על תתי מרחבים, מה הגרעין ומה התמונה?

תרגיל:

יהי V מרחב וקטורי ממימד $n < \infty$ מעל שדה $\mathbb{K}$, ותהי $T : V \to V$ לינארית כך ש: $T^n = 0, T^{n-1} \neq 0$. הראו שיש וקטור $v \in V$ כך ש $\{v, Tv, T^2v, ..., T^{n-1}v\}$בסיס ל-$V$.

<u>טענה:</u> (הוכחה בתרגיל בית)

עבור העתקה לינארית $T: V \to U$ ו-סדרת וקטורים $(v_1,..., v_n) \in V^n$מתקיים:

1. אם סדרת התמונות $(TV_1,..., Tv_n)$ בת"ל אז הסדרה $(v_1,..., v_n)$ בת"ל.
2. אם $(v_1,..., v_n)$ פורשת אז $sp(Tv_1,..., Tv_n) = Im(T)$.

<u>למה:</u>

1. אם T על אז תמונה של קבוצה פורשת היא קבוצה פורשת.
2. אם T חח״ע אז תמונה של של קבוצה בת״ל היא בת״ל.
3. אם T חח״ע ועל אז תמונה של בסיס היא בסיס.

<u>טענה:</u>

1. חח״ע אמ״ם גרעין טריוויאלי.
2. על אמ״ם מימד התמונה שווה למימד הטווח