3 פונקציות[1]

פונקציה זה רעיון שאתם כנראה מכירים מבית הספר. באופן אינטואיטיבי, אפשר לחשוב על פונקציה כמו פעולה על איברים בקבוצה מסוימת עם תוצאה בקבוצה אחרת, מה שמהותי בפונקציה, הוא שאם מפעילים את הפונקציה על איבר בקבוצה יש תוצאה אחת ויחידה. על כן, לפעמים קוראים לפונקציה "מפה" או "העתקה".

פונקציה כיחס

הגדרה 1 יהי $R \subseteq A \times B$ יחס על הקבוצות A, B. נאמר כי :

1. R יחס חד־ערכי (נקרא גם פונקציה חלקית על קבוצה A) אם מתקיים:

$$\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B(\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in R \rightarrow b_1 = b_2)$$

2. R יחס מלא אם:

$$\forall a \in A \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R)$$

3. R פונקציה מ־A ל־B אם R חד ערכי ומלא, באופן שקול, אם מתקיים

$\forall a \in A \exists! b \in B(\langle a, b\rangle \in R)$.

4. ${}^{A}B = \{f \in P(A \times B) \mid f \text{ is a function from } A \text{ to } B\}$

סימונים:

- אם f פונקציה מ־A ל־B, נסמן זאת $f : A \rightarrow B$. שימו לב כי אם $f : A \rightarrow B$ ו־$B \subseteq C$ אז $f : A \rightarrow C$.
- אם $f \subseteq A \times B$ היא פונקציה חלקית (כלומר יחס חד ערכי לא בהכרח מלא), נגדיר

$$f(a) = b \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in f$$

אם f היא פונקציה, אז לכל $a \in A$ יש $b \in B$ כך ש־ $\langle a, b\rangle \in f$ ולכן $f(a) = b$ מוגדר. b נקרא התמונה של a תחת f ו־a נקרא מקור של b. ה' הידיעה מרמזת על כך של־a יש בדיוק תמונה אחת אבל ל־b יתכנו הרבה מקורות.

- כאשר אומרים כי f היא פונקציה, מבלי לציין מהם A, B אז A נקבעת ביחדות מ־f אבל B לא נקבע ביחידות.

דוגמאות:

- יחס הזהות זו פ ונקציה. $id_A : A \rightarrow A$ ומתקיים $id_A(a) = a$.
- $f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 2, a\rangle\}$. כדי להוכיח כי f זו פונקציה עוברים על כל איבר ב־$\{1, 2, 3\}$ ומראים כי קיים בדיוק איבר אחד ב־$\{a, b\}$ שעומד איתו ביחס f. כעת אפשר לרשום כי $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$. מתקיים $f(1) = a,\ \ f(2) = a,\ \ f(3) = b$.
- איך מתרגמים פונקציה במובן שאנחנו מכירים מבית הספר? נתבונן ב־$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(r) = r^2$. אז

$$f = \{\langle a, a^2\rangle \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- $S = \{\langle X, x\rangle \in P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid x \in X\}$ איננה פונקציה כי לדוגמא $\langle\{1, 2, 3\}, 1\rangle, \langle\{1, 2, 3\}, 2\rangle \in S$ ולכן היחס אינו חד ערכי.
- יהיו A, B שתי קבוצות. לכל איבר $b \in B$ מוגדרת פונקציה $f_b : A \rightarrow B$

$$f_b = \{\langle x, b\rangle \mid x \in A\} = A \times \{b\}$$

נקראת פונקציה קבועה עם ערך b או פונקציה שווה זהותית b. מתקיים $\forall a \in A f_b(a) = b$. לעיתים מסמנים זאת $f_b \equiv b$.

- $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ $\pi_1 = \{\langle\langle a, b\rangle, c\rangle \in (A \times B) \times A \mid a = c\}$ זו פונקציה שנקראת ההטלה על הקואורדינטה השמאלית. באופן דומה יש $\pi_2 : (A \times B) \rightarrow B$. מתקיים $\pi_1(\langle a, b\rangle) = a$,$\pi_2(\langle a, b\rangle) = b$.
- פעולת החיבור על מספרים ממשיים (או טבעיים, שלמים רציונלים) היא למעשה פונקציה $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- כמה פונקציות יש מהקבוצה $\{1,...,n\}$ ל־$\{1,....m\}$? כל פונקציה נקבעת על פי התמונה של כל איבר אז ל־1 יש m אפשרויות לבחירת התמונה שלו ל־2 יש m אפשרויות וכן הלאה, סכ"ה יש $m\cdot m\cdot ...\cdot m=m^n$ פונקציות שונות.

- $f:P(A)\times P(B)\to P(A)$ ע"י $\{\langle\langle X,Y\rangle,Z\rangle\in(P(A)\times P(B))\times P(A)\mid Z=X\cap Y\}$ כלומר מתקיים $f(X,Y)=X\cap Y$

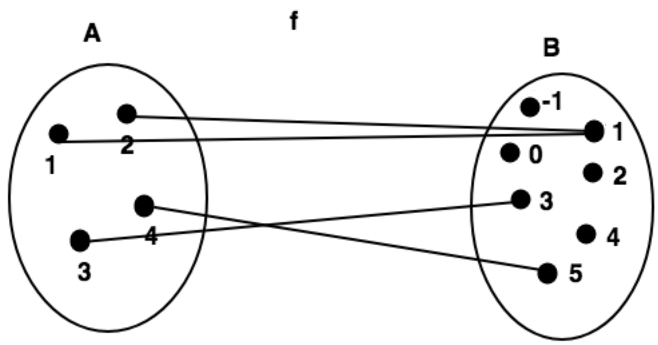
- $F:{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $F=\{\langle f,r\rangle\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid\langle 2,r\rangle\in f\}$ נראה כי זו פונקציה: זה יחס מלא שכן לכל $f\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ יש r כך ש־$\langle 2,r\rangle\in f$ שכן f זו פונקציה ופרט יחס מלא. לכן $\langle f,r\rangle\in F$. נוכיח כי F יחס חד ערכי, יהי $\langle f,r_1\rangle,\langle f,r_2\rangle\in F$ אזי $\langle 2,r_1\rangle,\langle 2,r_2\rangle\in f$ ומכיוון ו־f פונקציה נובע כי $r_1=r_2$. לכן F פונקציה ומתקיים כי $F(f)=f(2)$.

- עבור $A=\emptyset$, הפונקציה היחידה כך ש־$dom(f)=\emptyset$ היא $f=\emptyset$, שכן הקבוצה הריקה היא יחס חד ערכי ומלא באופן ריק. שימו לב כי אם $B=\emptyset$ ו־$A\neq\emptyset$ אז לא קיימת פונקציה $f:A\to B$ שכן אם $f\subseteq A\times\emptyset$ אז בהכרח $f=\emptyset$ ומכיוון ו־$A\neq\emptyset$, f אינו יחס מלא.

- סדרה של איברים בקבוצה A זו פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$. סדרה סופית של איברים ב־A זו פונקציה $f:\{1,...n\}\to A$ באשר $n\in\mathbb{N}$. נהוג לסמן סדרה של איברים בקבוצה A ע"י $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $a_n=f(n)$.

- בהנתן יחס, ראינו כי אפשר לחשוב עליו כמו אוסף של חיצים בין קבוצה A וקבוצה B. מתי יחס כזה הוא פונקציה $f:A\to B$? אם לכל נקודה בקבוצה A יש היא קצה של בדיוק חץ אחד. לדוגמא, הפונקציה

$$f:\{1,2,3,4\}\to\{-1,0,1,2,3,4,5\}\ \ f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\langle 4,5\rangle\}$$



- תהיינה $A=\{a_1...,a_n\},B=\{b_1,...,b_m\}$ קבוצות סופיות. הקבוצה ${}^BA$ היא קבוצה סופית ומספר האיברים בה הוא n^m. אכן, כדי לתאר את כל הפונקציות, נעבור איבר איבר בקבוצה B ונקבע מה התמונה שלו־ יש n אפשרויות לבחירת תמונתו. אם כך בסכ"ה יש $\underbrace{n\cdot n...\cdot n}_{m\ times}=n^m$ פונקציות.

- פונקצית השמה. יהי p פסוק בתחשיב הפסוקים מעל הפסוקים היסודיים $A_1,...,A_n$ נגדיר $f_p:\{T,F\}^n\to\{T,F\}$ המוגדרת $f_p(x_1,...,x_n)=T$ אמ"ם ערך האמת של p הוא T, בהנתן ש־$TV(A_i)=x_i$. לדוגמא, נניח כי p זה הפסוק $A\wedge(B\vee C)$ אז $f_p(T,F,F)=F,\ \ f_p(F,T,T)=F,\ \ f_p(T,T,F)=T$. נשים לב כי p טאוטולוגיה אמ"ם f_p היא זהותית T וכי $f_{\neg p}(x)=T\leftrightarrow f_p(x)=F$.

איך מגדירים פונקציה מבלי לרשום במפורש את הזוגות הסדורים?

- רוב ההגדרות של פונקציות יהיו מהצורה

$f:A\to B$ ו־$f(x)=$ ביטוי של x.

כשמגדירים האופן הזה, אנחנו למעשה מניחים שלושה דברים מובלעים: הדבר הראשון הוא שלביטוי של איקס מוגדר לכל $x\in A$ (כדי שהיחס יהיה מלא). הדבר השני זה שהביטוי של x מוגדר ביחידות (כדי שהיחס יהיה חד־ערכי) והדבר השלישי הוא שלכל איבר $x\in A$ מתקיים כי $f(x)\in B$ (שכן $f:A\to B$). כאשר מגדירים פונקציה, חייבים לוודא כי שלושת הדברים הללו מתקיימים, אם הם לא טריוויאלים להוכיח זאת.
בדיקה כי פונקציה מוגדרת היטב: היא בדיקת שלושת הדברים הללו.

- מותר לנו להגדיר פונקציה באמצעות פונקציה קיימת, בלי לאמר באופן מפורש מה תמונת כל איבר, כל עוד אנו מקיימים את הנאמר בהערה הקודמת. לדוגמא אם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ נתונה ולא ידועה, אפשר להגדיר לדוגמא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ע"י $g(n)=f(n)+1$, כלומר בהסתמך על כך שאנו יודעים לחשב את הערכים של f נוכל לחשב את הערכים של g. נתייחס להערה הקודמת, נשים לב כי g מוגדרת לכל $n\in\mathbb{N}$ שכן לכל מספר ממשי אפשר להוסיף 1 ולקבל מספר ממשי יחיד!
- דרך מאוד נפוצה ושימושית להגדיר פונקציה היא מה שנקרא פונקציה "מפוצלת" או "מוטלאת". הרעיון הוא שאנו ממפים חלק מהתחום ע"י כלל אחד וחלק אחר של התחום ע"י כלל אחר. הוכיחו כי זה באמת חוקי:

תרגיל : תהיינה $f:A_1\to B, g:A_2\to B$ שתי פונקציות, כך ש־ A_1,A_2 קבוצות זרות. אזי $f\cup g:A_1\uplus A_2\to B$ זו פונקציה שמקיימת $(f\cup g)(a_1)=f(a_1), a_1\in A_1$ וגם $(f\cup g)(a_2)=g(a_2), a_2\in A_2$.

ניקח לדוגמא, נניח אנחנו רוצים פונקציה שממפה את הזוגיים ל־0 ואת האי זוגיים ל־1 , נוכל להגדיר זאת באופן הבא:

$$f(n)=\begin{cases}0 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$$

למעשה איחדנו שתי פונקציות, הפונקציה זהותית 1 על האי זוגיים והפונקציה זהותית 0 על הזוגיים. לפי התרגיל, מכיוון והתחומים זרים מובטח שנקבל פונקציה. שוב נזהיר כי התחומים חייבים להיות זרים. לעיתים כשנגדיר פונקציה מפוצלת , נאמר מה קורה על חלק מהתחום ומה קורה על המשלים. במקום לכתוב את המשלים באופן מפורשת, נכתוב $else$.

- אם ברצוננו להגדיר $f:\mathbb{N}\to A$, כלומר סדרה בקבוצה A, נוכל לעשות באופן רקורסיבי. רקורסיה זה תהליך שהמבנה שלו דומה מאוד לאינדוקציה אך התכלית שונה לגמרי. בעוד אינדוקציה היא טכניקת הוכחה, רקורסיה זו דרך להגדיר סדרה. הדרך להגדיר סדרה רקורסיבית $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא:

1. **תנאי התחלה** נגדיר את $a_0,a_1,...,a_{k-1}$.
2. **כלל הרקורסיה** עבור $n\geq k$ נגדיר a_n באמצעות $a_0,a_1,...,a_{n-1}$.

בהרבה הגדרות רקורסיביות לא צריך את כל האינפורמציה לגבי $a_0,...,a_{n-1}$. ניתן כמה דוגמאות: סידרת פיבונאצ'י מוגדרת באופן הבא, תנאי ההתחלה הוא $a_0=1,a_1=1$, כלל הרקורסיה הוא $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. כעת נוכל לחשב את

$$a_2=1+1=2,\ \ a_3=2+1=3,\ \ a_4=3+2=5,\ \ a_5=5+3=8$$

וכן הלאה. נוסחה סגורה לסדרה היא הגדרה מופרשת לסדרה a_n, כלומר הגדרה ישירה באמצעות n שלו משתמשת ב־$a_0,...,a_{n-1}$. יש לסדרת פיבונצ'י נוסחה סגורה והיא

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

בדרך כלל, זו איננה משימה פשוטה למצוא נוסחה מפורשת לסדרה רקורסיבית.

- **אי תלות בבחירת הנציג**: בהנתן יחס שקילות R על קבוצה A, לעיתים נרצה להגדיר פונקציה על קבוצת המנה. לדוגמא, ביחס $3\cdot\mathbb{Z}$ ננסה להגדיר חיבור של שתי מחלקות, כלומר פונקציה $+:\mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z}$. טבעי להגדיר באופן הבא:

$$[n]_{3\mathbb{Z}}+[m]_{3\mathbb{Z}}=[n+m]_{3\mathbb{Z}}$$

כלומר סכום השאריות היא שארית החלוקה של הסכום. למה שזו תיהיה פונקציה לגיטימית? ייתכן שאם נבחר n,n',m,m' כך ש־$[n]=[n']\wedge[m]=[m']$ אבל $[n+m]\neq[n'+m']$ (עוד רגע נוכיח כי זה לא המצב במקרה שלנו אבל באופן תיאורטי זה ייתכן) כלומר ההגדרה איננה חד ערכית. במקרה שלנו זה לא המצב שכן אם $n-n'=3k,\ \ m-m'=3k'$ אז

$$(n+m)-(n'+m')=(n-n')+(m-m')=3(k+k')$$

אזי $[n+m]=[n'+m']$. התהליך הזה של לקחת שני נציגים מהמחלקה ולהוכיח כי ההגדרה באמצעות כל אחד מהנציגים נותנת מחלקות שקילות שוות נקראת הוכחת "אי תלות בבחירת הנציגים". כלומר שאנחנו אומרים כי ההגדרה איננה תלויה בבחירת הנציגים אנחנו מתכוונים שהגדרנו משהו באמצעות נציגים ספציפיים אבל התוצאה תיהיה זהה לכל בחירה של נציגים מאותה מחלקת שקילות. דוגמא לפעולה שתלויה בבחירת הנציגים: נתבונן ביחס השקילות על $P(\mathbb{N})$:

$$X\sim Y\Leftrightarrow\mathbb{N}even\cap X=\mathbb{N}_{even}\cap Y$$

נגדיר $f([X])=min(X)$. האם פעולה זו תלויה בנציגים? כן! לדוגמא אם $X=\{1\},\ Y=\{3\}$ אז

$$\mathbb{N}even\cap X=\emptyset=\mathbb{N}_{even}\cap Y$$

לכן $[X]=[Y]$ אבל $f([X])=min(X)=1\neq 3=f([Y])$. למי שלמד אלגברה לינארית, נזכר במושג של שקילות שורה, עבור מטריצות $A,B\in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ נגדיר

$A\sim B$ אם יש סדרה סופית של פעולות אלמנטריות מ־A ל־B.

אז $Sols([A])=\{x\in\mathbb{R}^m\mid A\cdot x=0\}$ זו הגדרה שאינה תלויה בבחירת הנציגים שכן לפי משפט, שתי מטריצות הן שקולות שורה אמ"ם למערכת המשוואות המתאימה להן יש אותה קבוצת פתרונות.

הגדרה 2 תהא $f:A\to B$. נגדיר

א. $A=dom(f)$ נקרא התחום של f.

ב. $Im(f)=\{f(x)\mid x\in A\}=\{y\in B\mid \exists x\in A(y=f(x))\}$ נקרא התמונה של A.

ג. B נקרא הטווח של הפונקציה f ומסומן $range(f)=B$.

הערה:

1. כל קבוצה $C\supseteq Im(f)$ יכולה להוות טווח עבור הפונקציה f וצריך להדגיש מהו הטווח של הפונקציה f.
2. שימו לב כי ההגדרה של תחום ותמונה של יחס ותחום ותמונה של פונקציה מזדהים עבור כל פונקציה.

דוגמאות:

- נגדיר $\pm_{\sqrt{}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2\mid y^2=x\}$. אז $\pm_{\sqrt{}}$ איננה פונקציה שכן $\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle\in\pm_{\sqrt{}}$ ולכן אינה חד ערכית. אבל אם נצמצם את התחום ל־ $\mathbb{R}_+$ אז נקבל את הקבוצה $\sqrt{}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}_+^2\mid y^2=x\}$ היא פונקציה שמקיימת $dom(\sqrt{})=\mathbb{R}_+$.

- נגדיר $f:{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x(1)$ אז

$$dom(f)={}^{\mathbb{N}}\mathbb{R},\ range(f)=\mathbb{R}$$

נוכיח כי $Im(f)=\mathbb{R}$: $Im(f)\subseteq range(f)=\mathbb{R}$, ברור. כדי להוכיח את ההכלה בכיוון השני יהי $r\in\mathbb{R}$, צריך להוכיח כי $r\in Im(f)$, כלומר כי קיים $x\in dom(f)={}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ כך ש־ $f(x)=r$, לפי הגדרת f, צריך למצוא x כך ש־ $x(1)=r$. נגדיר $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ להיות הפונקציה הקבועה עם הערך r, אזי $f(x)=x(1)=r$ כדרוש.

- דרך נוחה לחשוב על סדרה היא כמו רשימה אינסופית: $\langle a_0,a_1,,...,a_n,...\rangle$. לדוגמא, $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת $f(n)=\{1,n,n+1\}$ מתורגמת ל־$\langle\{0,1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...,\{1,n,n+1\},..\rangle$. זו הסתכלות לגיטימית שכן לפי שמשפט 3 שנראה בהמשך פונקציה נקבעת על פי הערכים שלה.

- $g=\{\langle X,x\rangle\in P(\mathbb{N})\times\mathbb{N}\mid x\in X\wedge\forall y\in X(x\leq y)\}$. נשאיר כתרגיל להוכיח כי זו פונקציה חלקית מ־ $P(\mathbb{N})$, נראה כי

$$dom(g)=P(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$$

לכל קבוצה $X\in P(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$ קיים איבר מינימלי שאותו נסמן ב־ x. אם כך, $x\in X$ וגם $\forall y\in X$ מתקיים $x\leq y$ ולכן $\langle X,x\rangle\in g$ אז $X\in dom(g)$. זה מוכיח כי $P(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}\subseteq dom(g)$. כדי להוכיח את ההכלה בכיוון השני נותר להוכיח כי $\emptyset\notin dom(g)$. לכל $x\in\mathbb{N}$, מתקיים $x\notin\emptyset$ ולכן $\langle\emptyset,x\rangle\notin g$. זה מסיים את הוכחת השיוויון. שימו לב כי $range(g)=\mathbb{N}$ ולמעשה

$$g:P(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}\to\mathbb{N},\ g(X)=min(X)$$

בנוסף, $im(g)=\mathbb{N}$ שכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $g(\{n\})=n$.

- יהיו A,B,C קבוצות, נגדיר את פונקציית $curry_{A,B,C}$. לרוב משמיטים את A,B,C ומגדירים

$$curry:{}^{A\times B}C\to{}^{A}({}^{B}C)$$

באופן הבא: עבור $f:(A\times B)\to C$ הפעלת $curry$ על f היא בעצמה פונקציה

$$curry(f):A\to{}^{B}C$$

$$(curry(f))(a):B\to C$$

$$((curry(f))(a))(b)=f(a,b)$$

לדוגמא עבור $A=B=C=\mathbb{N}$ נתבונן בפונקציה $f(a,b)=b^a$, אם $f\in{}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\mathbb{N}=dom(curry_{\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}})$ ומתקיים $curry(f)(1)=id_{\mathbb{N}}$.

משפט 3 יהיו f,g פונקציות. אזי $f=g$ אמ"ס $dom(f)=dom(g)\wedge\forall x\in dom(f)\ \ f(x)=g(x)$.

הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי $f=g$, אזי $dom(f)=dom(g)$. יתר על כן, לכל $x\in dom(f)$ מתקיים $\langle x,f(x)\rangle\in f=g$ ולכן $\langle x,f(x)\rangle\in g$ ומחד ערכיות, $g(x)=f(x)$.
$\Rightarrow$: נניח כי

$$dom(f)=dom(g)\wedge\forall x\in dom(f)\ \ (f(x)=g(x))$$

ונוכיח כי $f=g$ ע"י הכלה דו־כיוונית. מסימטריה, מספיק להוכיח הכלה בכיוון אחד לדוגמא $f\subseteq g$. יהי $\langle a,b\rangle\in f$ אזי $b=f(a)$ ו־$a\in dom(f)$, לכן $a\in dom(g)$. מכיוון ו־$g(a)=f(a)$ מתקיים כי $\langle a,b\rangle=\langle a,g(a)\rangle\in g$. ההכלה בכיוון השני סימטרית.

□

מסקנה 4 $f\neq g$ אמ"ס $dom(f)\neq dom(g)\vee\exists x\in dom(f)(f(x)\neq g(x))$.

הגדרה 5 תהי $f:A\to B$ פונקציה. נסמן:

1. עבור $X\subseteq A$ $f[X]=\{f(a)\mid a\in X\}$ נקראת תמונה איבר איבר של X. לעיתים מסמנים זאת גם ב־$f''X$.
2. עבור $Y\subseteq B$ $f^{-1}[Y]=\{x\in A\mid f(x)\in Y\}$ נקראת קבוצת המקורות של Y.

הזהרו! $f[X],f^{-1}[Y]$ מוגדרת עבור תת־קבוצות ולא עבור איבר של A,B.
דוגמאות:

- $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ $f(n)=\{m\in\mathbb{N}\mid m>1\ \ m|n\}$ אז

$$f[PRIME]=\{\{p\}\mid p\in PRIME\},\ \ f^{-1}[\{\{2\}\}]=\{2\}$$

- $f:{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}\to{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י

$$(f(g))(n)=2n+g(n)$$

מתקיים כי $f^{-1}[\{id_{\mathbb{N}}\}]=\emptyset$, ולכל

$$h\in f\left[\{g\in{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}\mid g(10)=1\}\right]$$

מתקיים $h(10)=21$.

תרגיל 6
1. הראו כי אם $f:A\to B$ אז $g=\{\langle X,f[X]\rangle\mid X\in P(A)\}$ היא פונקציה $g:P(A)\to P(B)$ ומקיימת $g(X)=f[X]$.
2. $im(f)=f[dom(f)]$
3. תהי $f:A\to B$ פונקציה, אם $X,Y\subseteq B$ קבוצות זרות אז $f^{-1}[X],f^{-1}[Y]$ זרות.
4. תהי $f:A\to B$ פונקציה אז $f^{-1}[\{b\}]$ $A=\biguplus_{b\in im(f)}$
5. לכל פונקציה $f:A\to B$, נגדיר $R_f=\{\langle a,a'\rangle\in A^2\mid f(a)=f(a')\}$ הוכיח כי R_f יחס שקילות, תארו את החלוקה המושרת על A במונחים של f.
6. הוכיחו כי לכל יחס שקילות R על קבוצה A קיימת קבוצה B ופונקציה $f:A\to B$ כך ש־ $R=R_f$.
7. $f^{-1}[f''X]\supseteq X$ האם יש שיוויון?
8. $f''f^{-1}[X]\subseteq X$ האם יש שיוויון?

הגדרה 7 תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהא $X\subseteq A$, נגדיר $f\restriction X=\{\langle a,b\rangle\in f\mid a\in X\}=f\cap(X\times B)$, נקראת הצמצום של f על X.

טענה 8 אם $f:A\to B$ פונקציה אז לכל $X\subseteq A$ מתקיים כי $f\restriction X:X\to B$ היא פונקציה המקיימת

$$\forall x\in X.(f\restriction X)(x)=f(x)$$

הוכחה:
$f \restriction X$ הינו יחס מלא כי אם $x \in X$ אז $x \in A$ ולכן יש $b \in B$ כך ש־ $\langle x,b\rangle \in f$ ועל פי הגדרה $\langle x,b\rangle \in f \cap (X \times B) = f \restriction X$. זה יחס חד ערכי שכן $f \restriction X \subseteq f$ וזה תרגיל פשוט לבדוק כי תת קבוצה של יחס חד ערכי היא בעצמה יחס חד ערכי.

$\square$

תרגיל 9 תהי A קבוצה כלשהי ו־ X קבוצה כך שלכל $f \in X$, f היא פונקציה חלקית ל־A כלומר f היא יחס חד ערכי ו־$dom(f) \subseteq A$. נניח כי X שרשרת ביחס ההכלה, כלומר כי לכל $f,g \in X$ מתקיים $f \subseteq g \vee g \subseteq f$. נגדיר $h = \cup X = \bigcup\limits_{g \in X} g$

הוכיחו כי:

1. h היא פונקציה חלקית ל־A
2. $dom(h) = \bigcup\limits_{g \in X} dom(g)$.
3. לכל $g \in X$ מתקיים $h \restriction dom(g) = g$.

הפיכות של פונקציות

התפקיד המרכזי השני של פונקציות הוא בהשוואת גדלים. אם ברצונכם להשוות בין כמות האיברים בין שתי קבוצות נתונות A, B, תוכלו לספור כמה איברים יש ב־A וכמה איברים יש ב־B, ולברר איזה מספר יותר גדול. שיטה זו לא עובדת לקבוצות אינסופיות שכן אי אפשר לספור כמה איברים של בקבוצה אינסופית, לכן דרושה דרך נוספת לערוך השוואת גדלים של קבוצות. הדרך שקנטור הציע הייתה לזווג איברים בקבוצה A עם איברים בקבוצה B. לדוגמא, אם נרצה להראות כי בקבוצה $\{1,2,3\}$ יש יותר איברים מקבוצה $\{4,5\}$ נמצא זיווג נזווג $1-4$ ו־ $2-5$. מכיוון ומיצינו את כל איברי הקבוצה $\{4,5\}$ נוכל להסיק כי בקבוצה זו פחות איברים מאשר בקבוצה $\{1,2,3\}$. אם כך, הרעיון של קנטור הוא לזווג איברים מתוך שתי קבוצות עד שכילינו את כל האיברים באחת הקבוצות. אם עוד נותרו איברים בקבוצה השניה נקבל אי שיוון ואם כנגד כל איברי שצי הקבוצות אזלו הרי שהגדלים שווים. והנקודה המהותית שכדי לזווג אנחנו פשוט צריכים לתת כלל התאמה בין שתי הקבוצות־ דבר שאפשר לעשות גם עם קבוצות אינסופיות! ולכן ההשוואה של קנטור עובדת גם עבור קבוצות אינסופיות. איך ממששים את רעיון הזיווג של איברים מ־A עם איברים מ־ B? פונקציות. בפרק הבא נדבר על השוואת גדלים באריכות וניתן את כל ההגדרות הרלוונטיות באופן פורמלי.

הגדרה 10 תהי $f : A \to B$ פונקציה. נאמר כי:

1. f חד־חד ערכית (ומקצרים ב־חח"ע) אם מתקיים:

$$\forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$$

2. f נקראת על B אם מתקיים:

$$\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b)$$

הערה:

- אפשר גם לנסח חח"ע באופן הבא: $\forall a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq a_2)$ כלומר שני איברים שונים מועברים לתמונות שונות.
- הוכחת חח"ע תמיד מתחילה ב־ "יהיו a, b בתחום של הפונקציה" ואז או שמניחים כי $f(a) = f(b)$ ומוכיחים $a = b$ או שמניחים כי $a \neq b$ ומוכיחים כי $f(a) \neq f(b)$. כדי להוכיח כי פונקציה אינה חח"ע צריך להביא דוגמא לשני איברים שונים בעלי אותה תמונה.
- בדיון על השוואת גדלים, רצינו להציב מול כל איבר של A איבר יחיד של B, כלומר למצוא פונקציה חח"ע מ־A ל־B.
- איטואיטיבית, אם הגדרתם פונקציה איך תדעו שהיא חח"ע? תשאלו את השאלה הבאה:

"האם בהנתן תמונה של x נוכל לשחזר מיהו x?"

פונקציה חח"ע מקודדת את הקבוצה A באמצעות איברי הקבוצה B וקידוד אמור להיות כזה שניתן לדעת בדיוק את מה הוא מקודד.

- פונקציה היא על אמ"ם מתקיים $im(f) = range(f)$.
- הוכחת על גם היא טענה כוללנית ולכן תתחיל ב־"יהי y בטווח, נמצא ל־y מקור" כלומר נמצא $x \in dom(f)$ כך ש־ $f(x) = y$. כדי להוכיח כי פונקציה איננה על צריך להביא דוגמא של איבר בטווח שאין לו מקור.

דוגמאות:

- $f:P(\mathbb{Z})\to P(\mathbb{N})$ $f(X)=X\cap\mathbb{N}$ זו פונקציה על ולא חח"ע , נוכיח זאת: היא איננה חח"ע כי לדוגמא

$$f(\{1\})=\{1\}\cap\mathbb{N}=\{1\}=\{1,-1\}\cap\mathbb{N}=f(\{-1,1\}).$$

אם כך מצאנו שני איברים שונים $\{1\},\{-1,1\}$ אם אותה תמונה אזי f איננה חח"ע. נוכיח כי f על, יהי $X\in P(\mathbb{N})$ בפרט $X\in P(\mathbb{Z})$ ומתקיים $f(X)=X\cap\mathbb{N}=X$, אם כך לכל איבר בטווח מצאנו מקור ולכן f על.

- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n)=\langle n,n\rangle$ היא חח"ע ולא על, נוכיח זאת: היא איננה על שכן

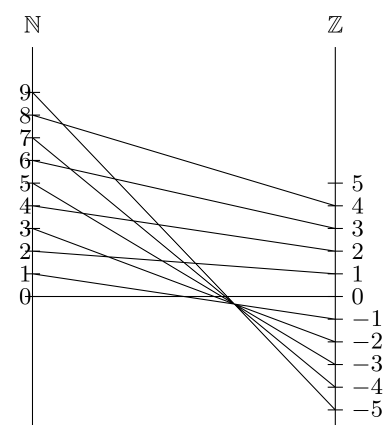
$$im(f)=\{\langle n,n\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$$

ולדוגמא $\langle 1,2\rangle\notin im(f)$. נוכיח חח"ע, יהיו $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ ונניח כי $f(n_1)=f(n_2)$ נוכיח כי $n_1=n_2$, מהגדרת f מתקיים $\langle n_1,n_1\rangle=\langle n_2,n_2\rangle$ זה שיוויון של זוגות סדורים ולכן $n_1=n_2$, כדרוש.

- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ -\frac{n+1}{2} & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$$

נשאיר כתרגיל את ההוכחה הפורמלית שאכן מדובר בפונקציה חח"ע ועל ונראה תיאור גרפי של הפונקציה



תרגיל 11 1. הראו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C, $curry:{}^{A\times B}C\to{}^{A}({}^{B}C)$ חח"ע ועל.

2. הראו כי אם $f:A\to B$ פונקציה כך ש־ A,B קבוצות סופיות אם אותו מספר איברים. אזי f חח"ע אמ"ס f על.

3. נניח כי $f:A\to B$ חח"ע. הראו כי אם $X,Y\subseteq A$ קבוצות זרות אזי $f''X,f''Y$ זרות.

נזכר כי בהנתן יחס R מסמנים ב־ R^{-1} את היחס ההופכי.

טענה 12 תהי $f:A\to B$ פונקציה, אזי:

1. f חח"ע אמ"ס f^{-1} יחס חד ערכי, יותר על כן, $f^{-1}(b)$ מוגדרת לכל $b\in Im(f)$ ומקיים $f(a)=b\leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.
2. f על אמ"ס f^{-1} יחס מלא ב־B.
3. f חח"ע ועל אמ"ס f^{-1} פונקציה.

הוכחה:

1. מתקיים f^{-1} חד ערכית $\leftrightarrow$
$\leftrightarrow \forall a_1,a_2,b(\langle a_1,b\rangle,\langle a_2,b\rangle\in f\to a_1=a_2)$
$\leftrightarrow \forall b,a_1,a_2(\langle b,a_1\rangle,\langle b,a_2\rangle\in f^{-1}\to a_1=a_2)$
$\leftrightarrow f$ חח"ע
לפי טענה מפרק 2, $Im(f)=dom(f^{-1})$ ולכן $f^{-1}(b)$ מוגדר לכל $b\in Im(f)$. מתקיים

$$f(a)=b\leftrightarrow\langle a,b\rangle\in f\leftrightarrow\langle b,a\rangle\in f^{-1}\leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

2. f על $\leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A(\langle a,b\rangle \in f) \leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A(\langle b,a\rangle \in f^{-1}) \leftrightarrow f^{-1}$ יחס מלא.
3. נובע מ־2,1.

□

הערה: אם f חח"ע ועל אז f^{-1} פונקציה ומתקיים $(f^{-1})^{-1} = f$ ואם נפעיל את החלק (3) של המשפט הקודם על f^{-1} נקבל כי f^{-1} גם חח"ע ועל.

טענה 13 יהיו $f : A \to B, g : B \to C$ שתי פונקציות. אזי

א. $g \circ f$ היא פונקציה כך ש־ $dom(g \circ f) = dom(f)$, ו־$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

ב. אם f, g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.

ג. אם f, g על אז $g \circ f$ על.

הוכחה:
<u>הוכחת 1</u>: נוכיח חד ערכיות, נניח כי $\langle a,c_1\rangle, \langle a,c_2\rangle \in g \circ f$ אזי קיימים b_1, b_2 כך ש־

$$\langle a,b_1\rangle, \langle a,b_2\rangle \in f \wedge \langle b_1,c_1\rangle, \langle b_2,c_2\rangle \in g$$

מחד ערכיות f נובע כי $b_1 = b_2$ ומחד ערכיות g נובע כי $c_1 = c_2$, כדרוש. כעת נוכיח כי ההרכבה הינה יחס מלא, יהי $a \in A$ אז קיים $b \in B$ כך ש־ $\langle a,b\rangle \in f$, שכן f יחס מלא. עבור b זה, קיים $c \in C$ כך ש־ $\langle b,c\rangle \in g$ כי g יחס מלא, ולפי הגדרה, $\langle a,c\rangle \in g \circ f$. נסמן ב־$y = (g \circ f)(x)$ אזי $\langle x,y\rangle \in g \circ f$ ולכן קיים z כך ש־ $\langle x,z\rangle \in f$ וגם $\langle z,y\rangle \in g$ ולכן $f(x) = z$ ו־ $g(z) = y$ ובסך הכל $g(f(x)) = y = (g \circ f)(x)$. מכיוון ו־$g \circ f$ יחס מלא על A מתקיים $dom(g \circ f) = A = dom(f)$
<u>הוכחת 2</u>: יהיו $a_1, a_2 \in dom(g \circ f) = dom(f)$. נניח כי $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ כלומר $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. מחח"ע g נובע כי $f(a_1) = f(a_2)$ ומחח"ע f נובע כי $a_1 = a_2$.
<u>הוכחת 3</u>: נוכיח כי $g \circ f$ על. יהי $c \in C$ אז קיים $b \in B$ כך ש־ $g(b) = c$ שכן g על. אם כך, קיים $a \in A$ כך ש־ $f(a) = b$ שכן f על. ולכן $g(f(a)) = g(b) = c$, כדרוש.

□

טענה 14 א. אם f היא פונקציה חח"ע אזי $f^{-1} \circ f = id_{dom(f)}$(הרכבת היחסים).

ב. לכל פונקציה f מתקיים $f \circ f^{-1} = id_{Im(f)}$.
הוכחה: עבור (1), נוכיח הכל הדו כיוונית. יהי $\langle a,a\rangle \in Id_{dom(f)}$ אז $a \in dom(f)$ ולכן קיים b כך ש־ $\langle a,b\rangle \in f$ ומהגדרת f^{-1} מתקיים $\langle b,a\rangle \in f^{-1}$ ולפי הגדרת הרכבה $\langle a,a\rangle \in f^{-1} \circ f$. ולכן

$$id_{dom(f)} \subseteq f^{-1} \circ f$$

שימו לב כי בכיוון הזה לא השתמשנו כלל בעובדה שזו פונקציה, כלומר ההכלה הזו נכונה לכל יחס. בכיוון השני, יהי $\langle a,b\rangle \in f^{-1} \circ f$ אז לפי הגדרת הרכבה קיים c כך ש־ $\langle a,c\rangle \in f \wedge \langle c,b\rangle \in f^{-1}$. לפי הגדרת תחום של פונקציה נובע כי $a \in dom(f)$ ולפי הגדרת יחס ההופכי $\langle b,c\rangle \in f$. מחח"ע הפונקציה f נובע כי $a = b$. נסיק כי $\langle a,b\rangle = \langle a,a\rangle \in id_{dom(f)}$.
עבור (2), נשתמש הכלה שהוכחנו עבור כל יחס בחלק הראשון,

$$id_{im(f)} = id_{dom(f^{-1})} \subseteq (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$$

בכיוון השני, יהי $\langle a,b\rangle \in f \circ f^{-1}$ אזי קיים c כך ש־ $\langle a,c\rangle \in f^{-1}$ וגם $\langle c,b\rangle \in f$ ובפרט $b \in im(f)$, לפי הגדרת יחס הופכי, $\langle c,a\rangle \in f$ ומכיוון ו־ f יחס חד ערכי נובע כי $a = b$. נסיק כי $\langle a,b\rangle = \langle b,b\rangle \in id_{im(f)}$.

דוגמא: נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x + 1$ ובפונקציה $g : \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $(g(x))(n) = n + x$. נתבונן בהרכבת הפונקציות $g \circ f : \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. לפי התרגיל הקודם, מתקיים $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1)$ ולכן $(g \circ f)(x)(n) = (g(x+1))(n) = n + (x+1)$.

הגדרה 15 פונקציה $f : A \to B$ תקרא הפיכה אם קיימת $g : B \to A$ כך ש־ $f \circ g = id_B \wedge g \circ f = id_A$.

<u>**הזהרו!**</u>: אם קיימת g כך ש $f \circ g = id_B$ לא הכרחי ש־f בפונקציה הפיכה. כנ"ל לגבי הרכבה בכיוון השני. **דוגמא**:

1. נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in \mathbb{N}_{even} \\ x-1 & x \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$

אזי f פונקציה הפיכה שכן $f \circ f = id_{\mathbb{N}}$, נוכיח זאת, זה שיוויון של פונקציות בעלות תחום $\mathbb{N}$. יהי $a \in \mathbb{N}$ אם $a \in \mathbb{N}_{even}$ אזי $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(a+1) = (a+1) - 1 = a$ ואם $a \in \mathbb{N}_{odd}$ אזי $f(f(a)) = f(a-1) = (a-1) + 1 = a$ ובכל מקרה $f \circ f(a) = a = id_A(a)$.

2. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$ איננה הפיכה. שימו לב כי הפונקציה $g(x)=\sqrt{x}$ איננה הפונקציה ההופכית של f שכן g לא מוגדרת על כל $\mathbb{R}$. כיד להוכיח כי f איינה הפיכה נוכל להשתמש במשפט הבא.

משפט 16 נניח כי A,B שתי קבוצות לא ריקות ותהי $f:A\to B$ פונקציה אזי:

1. קיימת $g:B\to A$ כך ש־ $g\circ f=id_A$ אמ"ס f חח"ע
2. (AC) קיימת $g:B\to A$ כך ש־ $f\circ g=id_B$ אמ"ס f על.
3. f הפיכה אמ"ס f חח"ע ועל.

הוכחה:
<u>הוכחת 1</u>: נניח כי f חח"ע, לפי טענה 12 סעיף (1) לכל $b\in im(f)$ מוגדר $f^{-1}(b)$. מכיוון ש־A אינה ריקה, אפשר לקבוע איבר $a^*\in A$. נגדיר את הפונקציה $g:B\to A$

$$g(b)=\begin{cases}f^{-1}(b) & b\in im(f)\\ a^* & else\end{cases}$$

נראה כי ההרכבה היא הזהות,

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=f^{-1}(f(a))=a$$

בכיוון השני, נניח כי $g\circ f=id_A$ ונראה כי f חח"ע. יהיו $a_1,a_2\in A$ ונניח כי $f(a_1)=f(a_2)$. נפעיל את g על שיוויון זה ונקבל $g(f(a_1))=g(f(a_2))$, מכיוון שההרכבה שווה לזהות מתקיים כי $a_1=a_2$.
<u>הוכחת 2</u>: נניח כי f על ונגדיר את g,

$$\forall b\in B\ \ f^{-1}[\{b\}]\neq\emptyset$$

אז נבחר $a_b\in f^{-1}[\{b\}]$ (למי שיודע מה זה אקסיומת הבחירה, שימו לב כי אנחנו משתמשים בה כאן! זו שאלה פתוחה האם הטענה שאנחנו מוכיחים נכונה ללא אקסיומת הבחירה) נגדיר $g:B\to A$ ע"י $g(b)=a_b$, ומתקיים

$$f(g(b))=f(a_b)=b$$

כדרוש. בכיוון השני, אם $f\circ g=id_B$ נוכיח כי f על, יהי $b\in B$ נגדיר $a=g(b)$ אז מתקיים $f(a)=f(g(b))=b$ ולכן f על.
<u>הוכחת 3</u>: אם f הפיכה אז נובע מסעיפים 2,1 כי f חח"ע ועל. בכיוון השני נניח כי f חח"ע ועל, לפי טענה 12, f^{-1} זו פונקציה ולפי טענה 14 מקיימת

$$f^{-1}\circ f=id_{dom(f)}=id_A\wedge f\circ f^{-1}=id_{im(f)}=id_B$$

אם כך f הפיכה.

□

משפט 17 אם $f:A\to B$ הפיכה אז הפונקציה ההופכית היחידה של f היא היחס f^{-1}.
הוכחה: ראינו במשפט הקודם כי f^{-1} הינה פונקציה הופכית ל־f. נניח g זו הופכית נוספת ל־f, בדומה להוכחה הקודמת,

$$g=^{(1)}g\circ id_B=g\circ(f\circ f^{-1})=^{(2)}(g\circ f)\circ f^{-1}=id_A\circ f^{-1}=^{(3)}f^{-1}$$

$(1),(2),(3)$ נובעים מטענה 6 בפרק 2, (4), $(3),(1),(4)$ בהתאמה.

□

הזהרו! לא להתבלבל בין קבוצת המקורות $f^{-1}[Y]$ שמוגדרת לכל פונקציה־ גם כזו שלא הפיכה, ו־$f^{-1}(y)$ שמוגדרת רק כאשר הפונקציה f הפיכה! תמיד מוגדר היחס f^{-1} שאינו בהכרח פונקציה.

הערה: עבור f נתונה ייתכנו הרבה פונקציות g כך ש־ $g\circ f=id_A$ לדוגמא לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(n)=n+1$ קיימות כמה הפוכיות שמאליות. לדוגמא

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \ g(0)=0,\ g(n)=n-1,\ \ n>0$$
$$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \ h(0)=1,\ h(n)=n-1,\ \ n>0$$

הן פונקציות שונות המקיימות $g\circ f=id_A,\ \ h\circ f=id_A$.

תרגיל 18 הראו כי אם $f:A\to B$ חח"ע אז קיימת ויחידה פונקציה חלקית g מ־B ל־A כך ש־ $f\circ g=id_{dom(g)}$ ו־$g\circ f=id_A$.