4 עוצמות[1]

כפי שאמרנו בפרק הקודם, פונקציות הפיכות משמשות להשוואת גדלים של קבוצות־ על כן נקרא לפונקציות כאלה פונקציות שקילות. ניקח לדוגמא את הקבוצות $\{1,2,3\}$, $\{10,15,18\}$. ברור לנו שלשתי הקבוצות אותו מספר איברים. נוודא זאת באמצעות השיטה של מציאת פונקציה מתאימה. נגדיר את הפונקציה $f:\{1,2,3\}\to\{10,15,18\}$

$$f(x)=\begin{cases}10 & x=1\\ 15 & x=2\\ 18 & x=3\end{cases}$$

בבירור קיבלנו פונקצית שקילות ולכן כמות האיברים בשתי הקבוצות זהה. כעת נראה איך משווים בין גדלים של קבוצות אינסופיות, נניח ברצוננו להשוואת בין הגודל של $\mathbb{N}$ ו־$\mathbb{N}_{even}$. נחפש פונקציות חח"ע שמשוות בין הגדלים הללו. קחו מספר דקות לנסות ולמצוא התאמה שמעמידה כל מספר טבעי מול מספר זוגי באופן חח"ע, נסו למצוא זוג ל־0 ואז ל־1 ל־2 ... הצלחתם?! נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_{even}$ ע"י $f(n)=2n$. זו פונקציה חח"ע ועל ולכן שקילות. לפי הרעיון האינטואיטיבי שלנו, זה אומר כי לשתי הקבוצות אותה כמות איברים! בתורת הקבוצות אומרים כי לקבוצות יש את אותה העוצמה. לפני שמתחילים להגדיר דברים באופן פורמלי נזהיר מפני הטעות הכי נפוצה של סטודנטים.

הזהרו! כל הנאמר בפתיחת הפרק הינו רק בגדר מוטיבציה ואינטואיציה לרעיון העוצמות. חשוב לעקוב בהדיקות אחר ההגדרות.

הגדרה 1 יהיו A,B קבוצות. נאמר כי:

א. $|A|=|B|$ "העוצמה של A שווה לעוצמה של B" אם קיימת $f:A\to B$ הפיכה.

ב. $|A|\leq|B|$ "העוצמה של A קטנה או שווה לעוצמה של B" אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע.

ג. $|A|\neq|B|$ אם $\neg(|A|=|B|)$ כלומר לא קיימת פונקציה הפיכה $f:A\to B$.

ד. $|A|<|B|$ אם $|A|\leq|B|$ וגם $|A|\neq|B|$.

דוגמאות:

1. בפתיחה ראינו כי $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_{even}|$ שכן מצאנו פונקציה חח"ע ועל ולכן הפיכה בינהם.
2. $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}|$ כי הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ המוגדרת $f(n)=n+3$ היא פונקציה חח"ע ועל (בדקו!).
3. לכל קבוצה X מתקיים כי $|X|\leq|P(X)|$ כי $f:X\to P(X)$ המוגדרת $f(x)=\{x\}$ היא חח"ע.
4. $|\mathbb{N}|\leq|^{\mathbb{N}}\{0,1\}|$ שכן $f:\mathbb{N}\to{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ המוגדרת ע"י $f(n)\in{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ באשר

$$f(n)(x)=\begin{cases}1 & x=n\\ 0 & else\end{cases}$$

היא פונקציה חח"ע, נוכיח זאת, נניח כי $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $n_1\neq n_2$ אזי $f(n_1)(n_1)=1$ וגם $f(n_2)(n_1)=0$ ולכן הפונקציות שונות כלומר $f(n_1)\neq f(n_2)$.

5. $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ כפי שמעידה הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $f(n)=n$.

הערות:

- שימו לב כי עד כה לא מצאו שתי קבוצות עם עוצמה שונה, זו אכן משימה יותר קשה להוכיח כי לא קיימת פונקציה.
- אנחנו אומרים כי $f:A\to B$ מעידה על שיוויון או אי שיוויון של עוצמות שכן ההגדרה היא טענת קיים ובכדי להוכיחה עלינו להביא דוגמא/עדות לכך.
- ברור מההגדרה כי אם $|A|=|B|$ אז $|A|\leq|B|$.
- תרגיל קל: אם $f:A\to B$ חח"ע אז $|A|=|Im(f)|$.

טענה 2 לכל שתי קבוצות A,B:

א. $A\subseteq B\to|A|\leq|B|$.

ב. $|A|=|A|$.

3. $|A| = |B| \rightarrow |B| = |A|$.

4. $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \rightarrow |A| = |C|$.

5. $|A| \leq |B| \leq |C| \rightarrow |A| \leq |C|$.

6. $|A| = |B| < |C| \rightarrow |A| < |C|$.

7. $|A| < |B| = |C| \rightarrow |A| < |C|$

<u>הוכחת 1</u>: id היא פונקציה חח"ע ומכוון ו־$Im(id_A) = A \subseteq B$, הקבוצה B היא טווח עבור הפונקציה

$$id_A : A \rightarrow B$$

מעידה על כך ש־ $|A| \leq |B|$.
<u>הוכחת 2</u>: $id_A : A \rightarrow A$ היא פונקציה חח"ע ועל נמעידה על $|A| = |A|$.
<u>הוכחת 3</u>: נניח כי $|A| = |B|$ אזי יש $f : A \rightarrow B$ הפיכה. אם כן $f^{-1} : B \rightarrow A$ היא פונקציה הפיכה המעידה על $|B| = |A|$.
<u>הוכחת 4</u>: נניח כי $|A| = |B| \wedge |B| = |C|$ תהי

$$f : A \rightarrow B,\ \ g : B \rightarrow C$$

הפיכות המעידות על כך, אם כך $g \circ f : A \rightarrow C$ היא פונקציה הפיכה המעידה על $|A| = |C|$.
<u>הוכחת 5</u>: נניח כי $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|$ תהי

$$f : A \rightarrow B,\ \ g : B \rightarrow C$$

חח"ע המעידות על כך, אם כך $g \circ f : A \rightarrow C$ היא חח"ע (כהרכבה של פונקציות חח"ע) המעידה על $|A| \leq |C|$.
<u>הוכחת 6</u>: נניח כי $|A| = |B| < |C|$ כלומר

$$|A| = |B| \wedge \neg(|B| = |C|) \wedge |B| \leq |C|$$

מ־5 , נובע כי $|A| \leq |C|$ נניח בשלילה כי $|A| = |C|$ אז $|A| = |B|$ סתירה. לכן $|A| < |C|$.
<u>הוכחת 7</u>: נניח כי $|A| < |B| = |C|$ כלומר

$$|A| \leq |B| \wedge \neg(|A| = |B|) \wedge |B| = |C|$$

מ־5 , נובע כי $|A| \leq |C|$ נניח בשלילה כי $|A| = |C|$ אז $|A| = |B|$ סתירה. לכן $|A| < |C|$.

$\square$

טענה 3 (AC) $|A| \leq |B|$ אמ"ס קיימת פונקציה $f : B \rightarrow A$ על.
הוכחה: נניח כי $|A| \leq |B|$ ותהא $f : A \rightarrow B$ חח"ע המעידה על כך, לפי משפט 16 בפרק 3, קיימת $g : B \rightarrow A$ כך ש־ $g \circ f = id_A$ מאותו המשפט, נובע כי g על. בכיוון השני, נניח כי $g : B \rightarrow A$ שוב לפי משפט 16 בפרק 3 קיימת $f : A \rightarrow B$ כך ש־ $g \circ f = id_A$, f חח"ע, מה שמעיד על כך ש־ $|A| \leq |B|$

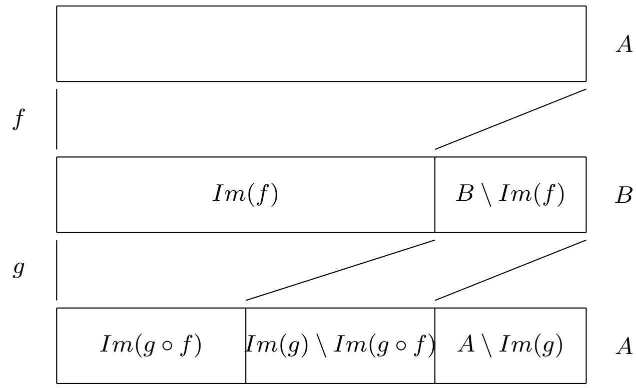
$\square$

הערה: אי אפשר לאמר כי שיוויון עוצמות הוא יחס שקילות כי איננו יחס מעל שום קבוצה. אם מסתכלים על תתי קבוצות של קבוצה מסוימת אז הוא כן יחס שקילות. לפי טענה 2, $2 - 4$.

כאשר מדובר במספרים, הטענה כי $n \leq m \wedge m \leq n \rightarrow n = m$ היא טענה נכונה. האם היא גם נכונה לעוצמות? כלומר, אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$? נשים לב כי זה לא מיידי, $|A| \leq |B|$ אומר כי יש פונקציה חח"ע $f : A \rightarrow B$, $|B| \leq |A|$ אומר כי יש $g : B \rightarrow A$ חח"ע, למה משתי הפונקציות הללו אפשר להסיק כי קיימת פונקציה חח"ע ועל בין A ו־$|B|$? זה מה שהמשפט הבא אומר:

משפט 4 (קנטור־ברנשטיין שרדר) יהיו A, B קבוצות ונניח כי $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$ אזי $|A| = |B|$.

הוכחה: נקבע $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ חח"ע־יות.



הפונקציה $g\circ f$ היא פונקציה חח"ע שתכונה A. לכן $g\circ f : A\to Im(g\circ f)$ היא פונקציית שקילות. נסמן

$$k=g\circ f,\ \ B_0=Im(g),\ \ A_0=A$$

מתקיים $B_0\subseteq A_0$, $|B|=|B_0|$ ולכן ומספיק להוכיח כי $|A_0|=|B_0|$. לשם כך, נסמן $D_0=A_0\setminus B_0$ ונגדיר באופן רקורסיבי

$$D_{n+1}=k[D_n]$$

נגדיר $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. ונעזר ב־$D$ על מנת להגדיר פונקציית שקילות $h: A_0\to B_0$.

$$h(x)=\begin{cases} x & x\notin D \\ k(x) & x\in D\end{cases}$$

תחילה נשים לב כי h מוגדרת היטב שכן לכל $x\in D$ מתקיים $h(x)=k(x)\in C_0\subseteq B_0$ ואם $x\notin D$ אז $x\notin D_0=A_0\setminus B_0$ ולכן $h(x)=x\in B_0$. נשים לב כי מתקיים

$$x\in D\leftrightarrow h(x)\in D$$

אכן אם $x\in D_n$ אז

$$h(x)=k(x)\in k[D_n]=D_{n+1}$$

ואם $x\notin D$ אז $h(x)=x\notin D$. כעת נוכיח כי h חח"ע ועל.
<u>h חח"ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in A_0$ ונניח כי $h(x_1)=h(x_2)$. נחלק לשני מקרים, מקרה ראשון $h(x_1)=h(x_2)\in D$ ולפי מה שאמרנו קודם $x_1,x_2\in D$. לפי הגדרת h,

$$h(x_1)=k(x_1),\ \ h(x_2)=k(x_2)$$

ולכן $k(x_1)=k(x_2)$ ומחח"ע k נובע כי $x_1=x_2$. במקרה השני $h(x_2)=h(x_2)\notin D$ ולכן $x_1,x_2\notin D$ ומתקיים $x_1=h(x_1)=h(x_2)=x_2$ כדרוש.
<u>h על</u>: יהי $y\in B_0$, אם $y\notin D$ אז $h(y)=y$ ובמקרה זה סיימנו. אם $y\in D$ אז קיים n כך ש־ $y\in D_n$. לפי הגדרה, $D_0=A_0\setminus B_0$ ומכיוון ו־ $y\in B_0$ בהכרח $y\notin D_0$, כלומר $n>0$. אם כך,

$$y\in D_n=k[D_{n-1}]$$

ולכן קיים $x\in D_{n-1}$ כך ש־ $k(x)=y$. מכיוון ו־ $x\in D$ מתקיים כי $h(x)=k(x)=y$ ולכן h על.

□

דוגמא לשימוש ב־CBS
נוכיח כי

$$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$$

$|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ כפי שמעידה הפונקציה $f(n)=\langle n,n\rangle$. $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$, נגדיר

$$f(\langle n,m\rangle)=2^n\cdot 3^m$$

זו העתקה חח"ע: נניח כי $2^{n_1}\cdot 3^{m_1}=2^{n_2}\cdot 3^{m_2}$. נוכיח כי $n_1=n_2$ ו־ $m_1=m_2$. אם $n_1\neq n_2$ בה"כ $n_1<n_2$ אז מתקיים

$$3^{m_1}=2^{n_2-n_1}\cdot 3^{m_2}$$

באגף שמאל רשום מספר אי זוגי ובאגף ימין רשום מספר זוגי־ זו סתירה לכן $n_1=n_2$ וניתן לצמצם את 2^{n_1} משני האגפים, ומקבלים את השוויון $3^{m_1}=3^{m_2}$. שוב, אם $m_1<m_2$ אז $1=3^{m_2-m_1}\ge 3$ סתירה. לכן $m_1=m_2$. אם כך, $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$ לכן לפי משפט CBS נקבל כי $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$. במקרה זה אנחנו יכולים להצביע באופן מפורש על פונקציית שקילות בין הקבוצות

$$f(n,m)=2^n\cdot(2m+1)-1$$

שימו לב כי משפט CBD אומר כי קיימת פונקציית שקילות אבל אין לנו אותנו באופן מפורש.

מסקנה 5 אם $|A| < |B| \le |C|$ או $|A| \le |B| < |C|$ אז $|A| < |C|$.

הוכחה: נוכיח את המקרה הראשון והשני נשאיר כתרגיל, נניח כי

$$|A| < |B| \wedge |B| \le |C|$$

אזי $|A| \le |C|$ לפי טענה 2 (5), נניח בשלילה כי $|A| = |C|$ אז $|B| \le |A|$ ומההנחה גם $|A| \le |B|$ מ־CBS מקבלים $|A| = |B|$, סתירה.

$\square$

עוד כמה חוקים כללים לחישוב עוצמות

טענה 6 נניח כי $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ אזי

1. $|A \times B| = |A' \times B'|$.
2. $|{}^{B}A| = |{}^{B'}A'|$.
3. $|P(A)| = |P(A')|$.
4. A, B זרות וגם A', B' זרות אזי $|A \uplus B| = |A' \uplus B'|$.

הוכחה: נתון כי $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ תהיינה

$$f : A \to A',\ \ g : B \to B'$$

פונקציות הפיכות המעידות על כך.
הוכחת 1: הפונקציה $f : A \times B \to A' \times B'$ המוגדרת ע"י $f(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle$ היא חח"ע ועל.
הוכחת 2: נגדיר $\phi : {}^{B}A \to {}^{B'}A'$ ע"י $\phi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$. טווח הפונקציה מוגדר היטב שכן $\phi(h) : B' \to A'$. נוכיח כי ϕ הפיכה ע"י מציאת פונקציה הופכית, נגדיר $\theta : {}^{B'}A' \to {}^{B}A$ ע"י $\theta(h) = f^{-1} \circ h \circ g$. נוכיח כי ההרכבה בשני הכיוונים היא הזהות: תהא $h \in {}^{B}A$ אז

$$\theta(\phi(h)) = \theta(f \circ h \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g^{-1}) \circ g = id_A \circ h \circ id_B = h$$

בכיוון השני ההכוחה זהה.
הוכחת 3: עבור 3, נאמר מהי הפונקציה. נתון כי $|A| = |A'|$, תהי $f : A \to A'$ פונקציית שקילות המעידה על כך. נגדיר $F : P(A) \to P(A')$ ע"י $F(X) = f[X]$. הפונקציה ההופכית לה תיהיה $G : P(A') \to P(A)$ המוגדרת $G(Y) = f^{-1}[Y]$. נוכיח לדוגמא כי ההרכבה $G \circ F = Id_{P(A)}$. יהי $X \in P(A)$ צ"ל כי $G(F(X)) = X$ כלומר $f^{-1}[f[X]] = X$. זו טענה של שיוויון קבוצות. ההכלה $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$, יהי $x \in X$ אזי $f(x) \in f[X]$ ולכן לפי הגדרת קבוצת המקורות, $x \in f^{-1}[f[X]]$. בכיוון השני, נניח כי $x \in f^{-1}[f[X]]$ אזי $f(x) \in f[X]$ ולכן (!) קיים $y \in X$ כך ש־ $f(y) = f(x)$. ממח"ע נובע כי $x = y \in X$ ההרכבה בכיוון השני נובעת מכך ש־ f על ולכן $G = g^{-1}$.
הוכחת 4: נגדיר פונקציה $h : A \uplus B \to A' \uplus B'$ ע"י

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

h מוגדרת היטב שכן A, B זרות. והיא חח"ע ועל מכך ש־f, g חח"ע ועל.

$\square$

תרגיל 7 נניח כי $|A| \le |A'|$ אזי לכל B מתקיים כי:

1. $|A \times B| \le |A' \times B|$.
2. $|P(A)| \le |P(A')|$.
3. $|{}^{B}A| \le |{}^{B}A'|$.
4. $|{}^{A}B| \le |{}^{A'}B|$.
5. A, B זרות וגם A', B זרות אזי $|A \uplus B| \le |A' \uplus B|$.

4.1 עוצמות סופיות־ העשרה

המטרה המרכזית של החלקר הזה היא להוכיח כי באופן שהגדרנו עוצמה, האינטואיציה שלנו לגבי "מספר האיברים בקבוצה סופית" מתיישבת עם ההגדרות הפורמליות.תחילה נגדיר מהי קבוצה סופית ומהי קבוצה אינסופית.

עבור $n \in \mathbb{N}_+$ נסמן $[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} = \{0, ..., n-1\}$. ובנוסף נסמן $[0] = \emptyset$.

הגדרה 8 קבוצה A תקרא סופית אם $A = \emptyset$ או קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $|A| = |[n]|$. A תקרא אינסופית אם היא איננה סופית.

משום שאנחנו מסמנים את הסדר של הטבעיים והשוואת עוצמות באותם הסימנים $<, \leq, =$, כדי להבדיל בינהם נסמן את הסדר של הטבעיים ב־ $\leq_{\mathbb{N}}, <_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}$

תרגיל: תהא A קבוצב סופית ונניח כי $|A| = |[n]|$ הוכיחו כי:

1. אם $b \notin A$ אז $|A \cup \{b\}| = |[n+1]|$.
2. אם $a \in A$ אז $|A \setminus \{a\}| = |[n-1]|$.

טענה 9 1. יהיו $n, m \in \mathbb{N}$, נניח כי $m <_{\mathbb{N}} n$ אז $|[m]| < |[n]|$.

2. אם X קבוצה סופית ו־$Y \subseteq X$ אז Y סופית.

3. אם X קבוצה סופית ו־$Y \subsetneq X$ אז $|Y| < |X|$.

הוכחה: מהכלה ברור כי $|[m]| \leq |[n]|$, Bותר להוכיח כי $|[m]| \neq |[n]|$. נעשה באינדוקציה על n, נוכיח כי לא קיים $m <_{\mathbb{N}} n$ כך ש־ $|[n]| = |[m]|$. עבור $n = 0$ הטענה מתקיימת באופן ריק. נניח נכונות ל־n ונוכיח עבור $n+1$. נניח בשלילה כי $m <_{\mathbb{N}} n+1$ מקיים כי $|[n+1]| = |[m]|$ ותהא $f : [n+1] \to [m]$ המעידה על כך. נסמן $f(n) = i$ ו־$j = f^{-1}(m-1)$. נגדיר $f' : [n+1] \to [m]$ ע"י

$$f'(k) = \begin{cases} m-1 & k = n \\ i & k = j \\ f(k) & else \end{cases}$$

נשאיר כתרגיל את הבדיקה כי f' הינה גם פונקציה חח"ע ועל. כעת $f' \restriction [n] : [n] \to [m-1]$ היא פונקציה חח"ע ועל. מההנחה כי $m <_{\mathbb{N}} n+1$ נובע כי $m - 1_{\mathbb{N}} < n$ אבל $|[n]| = |[m-1]|$ בסתירה להנחת האינדוקציה.

עבור (2), נניח כי X קבוצה סופית ו־$Y \subseteq X$, נוכיח כי Y סופית. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $|[n]| = |X|$, נקבע פונקציה חח"ע ועל $f : X \to [n]$. מכיוון ו־$|f[Y]| = |Y|$ מספיק להוכיח כי $f[Y]$ סופית ואז מהגדרת קבוצה סופית ייגבע כי גם Y סופית. אם כך נניח כי $Y \subseteq [n]$, ונוכיח באינדוקציה על n כי Y סופית. עבור $n = 0$ $[0] = \emptyset$ ולכן $Y = \emptyset$ ולכן Y סופית. נניח כי טענה נוכנה ל־n ונוכיח ל־$n+1$.. נחלק למקרים, אם $n \notin Y$ אז $Y \subseteq [n]$, ונשתמש בהנחת האינדוקציה. אחרת $n \in Y$, נסמן ב־ $Y' = Y \setminus \{n\}$ אז ניתן להתשתמש בהנחת האינדוקציה עבור Y' ולהסיק כי Y' סופית. אבל $Y = Y' \cup \{n\}$ ולפי החלק הראשון של התרגיל הקודם נובע כי Y סופית.

עבור (3) תחילה נשים לב כי $|Y| \leq |X|$ מהכלה. מהסעיף הקודם, קיימים n, m כך ש־ $|X| = |[n]|$ וגם $|Y| = |[m]|$. נקבע חח"ע ועל $f : X \to [n]$ אזי מחח"ע, נובע כי $f[X] \subsetneq [n]$. מכיוון ו־$|f[Y]| = |Y|$ מספיק להוכיח $|f[Y]| \neq |[n]|$ שכן אז ייגבע כי $|X| = |[n]| \neq |f[Y]| = |Y|$. אם כך נניח כי $Y \subsetneq [n]$ אז $|Y| < |[n]|$ באינדוקציה על n. עבור $n = 0$, $[0] = \emptyset$ ולכן לא קיימת כזו Y אז הטענה מתקיימת באופן ריק. נניח כי טענה נכונה ל־n ונוכיח ל־$n+1$. נחלק למקרים, אם $n \notin Y$ אז $Y \subseteq [n]$. ואז $|Y| \leq |[n]| < |[n+1]|$ לפי סעיף א'. אחרת $n \in Y$, נסמן ב־ $Y' = Y \setminus \{n\}$. מכיוון ו־$Y \subsetneq [n+1]$ אז $Y' \subsetneq [n]$(מדוע?) אז ניתן להתשתמש בהנחת האינדוקציה עבור Y' ולהסיק כי $|[m]| = |Y'| < |[n]|$. לכן $m <_{\mathbb{N}} n$ אחרת, $n \leq_{\mathbb{N}} m$, ולכן $|[n]| \leq |[m]|$ (מהכלה) ואז לפי קש"ב $|[m]| = |[n]|$ סתירה. וגם $m+1 <_{\mathbb{N}} n+1$. כעת, $Y = Y' \cup \{n\}$ ולפי התרגיל הקודם $|Y| = |[m+1]|$ ומסעיף (1), נובע כי

$$|Y| = |[m+1]| < |[n+1]|$$

$\square$

המשפטים הבאים מצדיקים את האינטואיציה שלנו שהעוצמות של קבוצות סופיות הן המספרים הטבעיים והם פשוט מספר האיברים בקבוצה.

מסקנה 10 1. לכל קבוצה סופית A קיים ויחיד $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $|A| = |[n]|$.

2. אם $X \subsetneq \{0, ..., n-1\}$ אז $|X| < |[n]|$.

3. אם X, Y קבוצות סופיות ו־ $|X| = |Y|$ אז כל פונקציה $f : X \to Y$ היא חח"ע אמ"ס היא על.

הוכחה: עבור (1), תהא A קבוצה סופית, מהגדרת קבוצה סופית נובע כי קיים n כך ש־ $|A|=|[n]|$. כעת מהטענה הקודמת n יחיד.
(2) נובע ישירות מ־(3) של הסעיף הקודם.
עבור (3), יהיו X,Y קבוצות סופיות כך ש־ $|X|=|Y|=|[n]|$. תהא $f:X\to Y$, אם f חח"ע אז $|X|=|Im(f)|=|Y|$. מכיוון ו־ $Im(f)\subseteq Y$, לפי הסעיף הקודם חייב להיות כי $Im(f)=Y$ ולכן f על. בכיוון השני, אם f על, אז קיימת $g:Y\to X$ חח"ע כך ש־ $f\circ g=Id_Y$. באותו הנימוק בסעיף הקודם, g גם חייבת להיות על ולכן f חח"ע(מדוע?).
$\square$

הגדרה 11 תהא A קבוצה סופית, נסמן $|A|=n$ עבור ה־n היחידי כך ש־ $|A|=|[n]|$. נסמן $|A|\le n$ $(|A|<n)$ אם $|A|\le|[n]|$ $(|A|<|[n]|)$.

מסקנה 12 נניח כי $|A|=n$ $|B|=m$. אזי:

1. $|A|\le|B|\leftrightarrow n\le_{\mathbb{N}}m$.
2. $|A|=|B|\leftrightarrow n=_{\mathbb{N}}m$.
3. $|A|<|B|\leftrightarrow n<_{\mathbb{N}}m$.

הוכחה: עבור (1), אם $n\le_{\mathbb{N}}m$ אז $[n]\subseteq[m]$ לכן $|A|\le|B|$. בכיוון השני, אם $m<_{\mathbb{N}}n$ אז $|B|=|[m]|<|[n]|=|A|$ לפי טענה 9 ולכן $\neg(|A|\le|B|)$. עבור (2), אם $n=_{\mathbb{N}}m$ אז $[n]=[m]$ ולכן $|A|=|[n]|=|[m]|=|B|$. אם $n\ne m$, בה"כ $n<_{\mathbb{N}}m$ אז שוב $|A|<|B|$ ובפרט $|A|\ne|B|$. (3) נובע ישירות מ־$(1),(2)$ ומהגדרת $<,<_{\mathbb{N}}$. $\square$

4.2 משפטים יסודיים ו־$\aleph_0$

השאלות הבאות מתעוררות באופן טבעי:

- האם קיימות שתי עוצמות אינסופיות שונות?
- האם יש עוצמה קטנה ביותר?
- האם יש עוצמה גדולה ביותר?

ננסה לענות על שאלות אלה,

משפט 13
1. תהי A סופית אזי $|A|<|\mathbb{N}|$.
2. (AC) תהי A אינסופית אז $|\mathbb{N}|\le|A|$.
3. (AC) A אינסופית אמ"ס קיימת $B\subsetneq A$ כך ש־ $|A|=|B|$.

הוכחה:
<u>הוכחת 1</u>: $|\mathbb{N}|\le|[n]|=|A|$, מהכלה, זה נכון לכל n והצירוף מסקנה 12 $|\mathbb{N}|\ge n+1>|A|$. לבסוף, ממסקנה 5 $|\mathbb{N}|>|A|$.
<u>הוכחת 2</u>: נגדיר סדרה $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע , נבחר איבר כלשהו $a_0\in A$, קיים כזה כי $A\ne\emptyset$. נניח הגדרנו $a_0,...,a_n$ שונים ב־A ונגדיר a_{n+1}, לא ייתכן כי $A=\{a_0,...,a_n\}$ שכן אז מצאנו פונקציית שקילות בין A ובין $\{0,...,n\}$ בסתירה לכך ש־A אינסופית. לכן יש $a_{n+1}\in A\setminus\{a_0,...,a_n\}$. הפונקציה $f(n)=a_n$ היא פונקציה חח"ע מ־$\mathbb{N}$ ל־A, כי אם $n<m$ אז בשלב ה־m באינדוקציה, a_n כבר הוגדר ו־a_m נבחר כך ש־ $a_m\notin\{a_0,...,a_{m-1}\}$ ובפרט $a_m\ne a_n$. לכן $|\mathbb{N}|\le|A|$
<u>הוכחת 3</u>: נניח כי A אינסופית, אז לפי 2 קיימת $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע . נגדיר $B=A\setminus\{f(0)\}\subsetneq A$. כעת נוכיח כי $|A|=|B|$, נגדיר $g:B\to A$ חח"ע ועל.

$$g(x)=\begin{cases}f(n-1) & \exists n\in\mathbb{N}_+ f(n)=x\\ x & else\end{cases}$$

נוכיח כי g שקילות, מכיוון ו־f חח"ע אז לכל $n\in\mathbb{N}_+$ מתקיים כי $f(n)\in B$ ולכן $f(n-1)\in im(g)$ כלומר $im(f)\subseteq im(g)$. לכל $x\notin im(f)$, $g(x)=x$ ולכן g על. נניח כי $g(x_1)=g(x_2)$, אם $g(x_1)=g(x_2)=f(n)$ אז בהכרח $x_1=x_2=n+1$. אחרת, $g(x_1)=x_1$ ו־$g(x_2)=x_2$ כלומר $x_1=x_2$. בכיוון השני, אם קיימת $B\subsetneq A$ כך ש־ $|A|=|B|$ אז לא ייתכן כי $|A|=|\{0,...,n-1\}|$ אחרת נגיע לסתירה למסקנה 10 $\square$

מסקנה 14 (AC) קיימת עוצמה אינסופית מינימלית והיא $|\mathbb{N}|$.

ראוי שלעוצמה הזו יהיה שם

הגדרה 15 נאמר כי $|A|=\aleph_0$ "A בת מנייה" אם $|A|=|\mathbb{N}|$.

הערה: יש גם $\aleph_1, \aleph_2, ...$ ניגע בזה בהמשך הקורס(אולי). כרגע אין להם משמעות.

אם כך, בכדי לענות על השאלה האם קיימות שתי עוצמות אינסופיות שונות צריך לענות על השאלה האם קיימת קבוצה אינסופית בעוצמה גדולה ממש מ־$\aleph_0$? הטענה הבאה אומרת איפה לא נצליח למצוא כאלה קבוצות.

משפט 16 העוצמה של הקבוצות הבאות היא $\aleph_0$:

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. $\mathbb{N}^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$
3. $\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Q}$
5. (AC) איחוד לכל היותר בנמנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בנמנייה. כלומר אם $\{A_i \mid i \in I\}$ משפחה של קבוצות כך ש־ $|I| \le \aleph_0$, ולכל $i \in I$ $|A_i| \le \aleph_0$ אז $|\bigcup_{i \in I} A_i| \le \aleph_0$.

הוכחה: את 3,1 כבר ראינו.
הוכחת 2: נקבע $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל. באינדוקציה על n נוכיח את הטענה. עבור $n = 1, 2$ זה ידוע. נניח כי הטענה נכונה ל־n כללי ונוכיח ל־$n + 1$, כלומר, אנו יודעים כי $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$ תהי $g_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל. נגדיר $g_{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ע"י

$$g_{n+1}(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = \pi(g_n(a_1, ..., a_n), a_{n+1})$$

נשאיר כתרגיל לקורה לבדוק כי מדובר בפונקציה חח"ע ועל.
הוכחת 4: ברור כי $\aleph_0 \le |\mathbb{Q}|$. בכיוון השני נוכל ליצור העתקה על $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ באופן הבא,

$$f(\langle n, m \rangle) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{m}{n} & else \end{cases}$$

זו בודאי פונקציה על וממש לא חח"ע. לכן $|\mathbb{Q}| \le \aleph_0$ וממשפט CBS, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
הוכחת 5: ניתן להניח כי $I = \mathbb{N}$ שכן $|I| = |\mathbb{N}|$ ואם $f : \mathbb{N} \to I$ היא פונקציה המעידה על כך אז $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{f(n)} = \bigcup_{i \in I} A_i$, אז נוכל לסמן $A'_n = A_{f(n)}$ ולהוכיח עבור A'_n. ומכיוון ו־

$$|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \le |\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \{n\}|$$

ניתן להניח כי הקבוצות A_n זרות בזוגות. שכן, אם הוכחנו את המשפט עבור קבוצות זרות אז נוכל להסיק כי $|\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \{n\}| \le \aleph_0$ ואז לפי טענה 2 (5), נוכל להסיק כי $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \le \aleph_0$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ חח"ע ונגדיר

$$f : \biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

ע"י , $f(x) = \langle f_m(x), m \rangle$ עבור ה־m היחיד כך ש־ $x \in A_m$. נוכיח כי f חח"ע ועל, יהיו $x_1, x_2 \in dom(f)$, ונניח כי $f(x_1) = f(x_2)$ נסמן $f(x_i) = \langle f_{m_i}(x_i), m_i \rangle,\ i = 1, 2$. אזי $m_1 = m_2$ וכמו כן

$$f_{m_1}(x_1) = f_{m_2}(x_2) = f_{m_1}(x_2)$$

מחח"ע של f_{m_1} מקבלים כי $x_1 = x_2$ ולכן $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \le \aleph_0$.

□

הערה: להלן משפט לא נכון: איחוד בנמנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא בנמנייה. שימו לב כי מספיק שאחת הקבוצות המשתתפות האיחוד היא בת מנייה והאיחוד כולו יוצא בנמנייה.

מסקנה 17 יהיו $A_1, ..., A_n$ קבוצות לכל היותר בנות מנייה אז $|\bigcup_{i \in \{1,...,n\}} A_i| \le \aleph_0$.

תרגיל 18 הקבוצות הבאות גם כן בנות מנייה־ $\{X \in P(\mathbb{N}) \mid |X| < \aleph_0\}$, סדרות סופיות של רציונלים.

אולי כל קבוצה היא בת מנייה?

משפט 19 (משפט האלכסון של קנטור) $|\mathbb{N}| < |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}|$

הוכחה: ראינו בדוגמאות הקודמות כי $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| \geq \aleph_0$. לכן מספיק להוכיח כי $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| \neq \aleph_0$, נניח בשלילה כי $f:\mathbb{N}\to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ פונקציית שקילות. רעיון הלכסון הוא למעשה בנייה של איבר בטווח, דהיינו ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ שאינו בתמונה, כלומר שונה מ־ $f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. כדי למצוא כזו פונקציה, נבנה באופן לא פורמלי מטריצה ששורותיה הן רשימת כל הערכים של הפונקציה בתמונה, כלומר

$$\begin{cases}
f(0)= & \underline{f(0)(0)} & f(0)(1) & f(0)(2) & f(0)(3) & \dots & & \\
f(1)= & \overline{f(1)(0)} & \underline{f(1)(1)} & f(1)(2) & f(1)(3) & \dots & & \\
f(2)= & f(2)(0) & \overline{f(2)(1)} & \underline{f(2)(2)} & f(2)(3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \\
f(n)= & f(n)(0) & f(n)(1) & f(n)(2) & f(n)(3) & \dots & \underline{f(n)(n)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & &
\end{cases}$$

אנחנו מעוניינים להגדיר $g:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $g\neq f(n)$. כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ צריך להצביע על $m\in\mathbb{N}$ כך ש־

$$g(m)\neq f(n)(m)$$

אם כך, נגדיר את $g(0)$ שתיהיה שונה מ $f(0)$ במקום ה־0, את $g(1)$ שתיהיה שונה מ־$f(1)$ במקום ה־1, ובאופן כללי $g(n)$ תיהיה שונה מ־$f(n)$ במקום ה־n. אלא בדיוק המספרים המסומנים במטריצה, לכן שם הטכניקה היא האלכסון של קנטור או בקיצור ליכסון. באופן פורמלי נגדיר $g(n)=1-f(n)(n)$ זו בסך הכל דרך מקוצרת לרשום שאם $f(n)(n)=0$ אז $g(n)=1$ ואם $f(n)(n)=1$ אז $g(n)(n)=0$. אם כך, $g\in{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$. נראה כי $g\notin im(f)$, יהי $n\in\mathbb{N}$, מתקיים כי

$$g(n)=1-f(n)(n)\neq f(n)(n)$$

ולכן $g\neq f(n)$, כדרוש. הגענו לסתירה להנחה כי f על ולכן $\aleph_0 < |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}|$. $\square$

הערות:

- במקור קנטור הוכיח זאת עבור מספרים ממשיים עם ייצוג בינארי.
- בהוכחת הלכסון, כדי שהפונקציה g תיהיה שונה מהפונקציה $f(n)$ הגדרנו את g במקום ה־n להיות שונה מ־$f(n)$ במקום ה־n, היה ניתן לעשות זאת במקום אחר, לדוגמא ש־$g(2n)$ תיהיה שונה מ־$f(n)(2n)$.

הגדרה 20 נסמן $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}|=2^{\aleph_0}$. ובאופן כללי $|{}^{A}\{0,1\}|=2^{|A|}$

אנחנו עדיין לא יודעים מהי עוצמת קבוצת החזקה של קבוצה.

משפט 21 לכל קבוצה A מתקיים $|P(A)|=2^{|A|}$.

הוכחה: נגדיר פונקציית שקילות בין הקבוצות $f:P(A)\to{}^{A}\{0,1\}$, לכל קבוצה $X\subseteq A$ נגדיר את פונקציית האינדיקטור $\chi_X^A:A\to\{0,1\}$ ע"י

$$\chi_X^A(a)=\begin{cases}1 & a\in X\\ 0 & else\end{cases}$$

כעת נגדיר $f(X)=\chi_X^A$. נוכיח כי f הפיכה ע"י מציאת פונקציה הופכית, נגדיר $g:{}^{A}\{0,1\}\to P(A)$ ע"י $g(h)=h^{-1}[\{1\}]$. נראה תחילה כי $f\circ g=id_{{}^{A}\{0,1\}}$, תהא $h\in{}^{A}\{0,1\}$. אזי

$$(f\circ g)(h)=f(g(h))=f(h^{-1}(\{1\}))=\chi^A_{h^{-1}[\{1\}]}$$

נוכיח כי $h=\chi^A_{h^{-1}[\{1\}]}$. יהי $a\in A$ אזי

$$h(a)=1\leftrightarrow a\in h^{-1}[\{1\}]\leftrightarrow \chi^A_{h^{-1}[\{1\}]}(a)=1$$

מכיוון ויש רק שני ערכים אפשריים, נובע כי $h(a)=0\leftrightarrow\chi^A_{h^{-1}[\{1\}]}(a)=0$ ולכן $h=\chi^A_{h^{-1}[\{1\}]}$. ההרכבה השנייה, תהא $X\in P(A)$ לפי הגדרת הפונקציות מתקיים

$$g(f(X))=g(\chi_X^A)=(\chi_X^A)^{-1}[\{1\}]$$

נוכיח כי $X=(\chi_X^A)^{-1}[\{1\}]$. יהי $a\in A$ אזי

$$a\in(\chi_X^A)^{-1}[\{1\}]\leftrightarrow\chi_X^A(a)=1\leftrightarrow a\in X$$

□

הערה: פונקציית האינדיקטור היא פונקציה מאוד שימושית ועוד תתקלו בה הרבה בקורסים אחרים במתמטיקה.

המשפט הבא הוא הכללה של רעיון הלכסון.

משפט 22 (משפט קנטור) $|A|<|P(A)|$

הוכחה: $|A|\le|P(A)|$ כפי שמעידה הפונקציה $f:A\to P(A)$ המוגדרת ע"י $f(a)=\{a\}$. נניח בשלילה כי $f:A\to P(A)$ היא פונקציה על. נמצא איבר בטווח, דהיינו $P(A)$, שאינו נמצא בתמונה. נגדיר

$$D=\{a\in A\mid a\notin f(a)\}$$

בטח ש־ $D\in P(A)$ ומההנחה כי f על, קיים $a\in A$ כך ש־ $f(a)=D$. אם $a\in f(a)=D$ אז מהגדרת D נקבל כי $a\notin f(a)$, סתירה. אם $a\notin f(a)=D$ אז שוב מהגדרת D נקבל כי $a\in f(a)=D$ שוב סתירה. בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן אין כזו פונקציה על.

□

מסקנה 23 $|A|<2^{|A|}$.

מסקנה 24 לא קיימת עוצמה גדולה ביותר.

4.3 עוצמת הרצף

מה העוצמה של המספרים הממשיים? מסמנים $\mathfrak{c}=|\mathbb{R}|$ וקוראים לעוצמה זו עוצמת הרצף באנגלית *cardinality of the continuum*. יש גם כאלה שמסמנים $|\mathbb{R}|=\aleph$ אך סימון זה פחות מקובל.

על אף שלא הגדרנו פורמלית עדיין את המספרים הממשיים, ההיכרות האינטואיטיבית שלנו איתם תספיק כדי להבין את נכונות משפט 25. נניח כרגע כי המספרים הממשיים מוגדרים ומקיימים את שתי התכונות הבאות־ שיוכחו בפרק על מספרים ממשיים:

1. בין כל שני מספרים ממשיים יש רציונלי (צפיפות הרציונלים בממשיים).
2. מכל סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ באשר $a_n\in\{0,...,9\}$ אפשר ליצור מספר ממשי

$$0.a_0a_1a_2....$$

יתר על כן, לכל $n\in\mathbb{N}$, אם $n<9$ אז

$$0.a_1a_2...a_n....\le 0.a_1a_2...(a_n+1)$$

שימו לב כי ייתכן שיוויון, לדוגמא $0.1=0.0999999.....$.

משפט 25 $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$

הוכחה: תחילה נוכיח כי $\mathfrak{c}\le|P(\mathbb{Q})|$. מכיוון ו־ $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$, נקבל כי $\mathfrak{c}\le 2^{\aleph_0}$ לפי טענה 6 (3). נגדיר

$$f:\mathbb{R}\to P(\mathbb{Q}),\ \ f(r)=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\le r\}$$

ניקח $r_1<r_2$ מצפיפות הרציונליים בממשיים (תכונה 1), יש $q\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $r_1<q<r_2$ אזי $q\notin f(r_1)$ אבל $q\in f(r_2)$ ולכן $f(r_1)\ne f(r_2)$ כלומר f חח"ע. בכיוון השני, נגדיר

$$g:{}^{\mathbb{N}}\{0,2\}\to\mathbb{R},\ \ g(\{a_n\}_{n=0}^{\infty})=0.a_0a_1...$$

לפי תכונה 2, הטווח $\mathbb{R}$ עבור הפונקציה g לגיטימי. נוכיח כי g חח"ע, יהיו $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ פונקציות שונות, אז קיים n קטן ביותר כך ש־ $a_n\ne b_n$ בה"כ $a_n=0,b_n=2$ אם כך

$$g(\{a_n\}_{n=0}^{\infty})=0.a_0a_1...a_{n-1}0a_{n+1}...\ \le\ 0.a_0...a_{n-1}1\ <\ 0.a_0...a_{n-1}2\le 0.b_0...b_{n-1}b_nb_{n+1}...=g(\{b_n\}_{n=0}^{\infty})$$

אם כך $g(h_1)\ne g(h_2)$ כדרוש. לבסוף, $|\mathbb{R}|\le|{}^{\mathbb{N}}\{0,2\}|=2^{\aleph_0}$. מ־$CSB$ $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$.

□

על המסקנה הבאה קנטור אמר: "אני רואה זאת אך אינני מאמין"

מסקנה 26 א. $|\mathbb{R}^2| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

ב. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה:

<u>הוכחת 1</u>: צריך להוכיח כי $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. מכיוון ו־$|{}^{\mathbb{N}}2| = |\mathbb{R}|$, מספיק להוכיח כי $|{}^{\mathbb{N}}2| = |{}^{\mathbb{N}}2 \times {}^{\mathbb{N}}2|$. נגדיר

$$\phi : {}^{\mathbb{N}}2 \to {}^{\mathbb{N}}2 \times {}^{\mathbb{N}}2,\ \ \phi(h) = \langle f_h, g_h \rangle$$
$$f_h(n) = h(2n),\ \ g_h(n) = h(2n+1)$$

נוכיח כי ϕ חח"ע ועל, ניח כי $h \neq h'$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $h(n) \neq h'(n)$, אם $n \in \mathbb{N}_{even}$ אז

$$f_h(\frac{n}{2}) = h(n) \neq h'(n) = f_{h'}(\frac{n}{2})$$

ולכן $f_h \neq f_{h'}$. אם $n \in \mathbb{N}_{odd}$, אז

$$g_h(\frac{n-1}{2}) = h(n) \neq h'(n) = g_{h'}(\frac{n-1}{2})$$

ולכן $g_h \neq g_{h'}$. בכל אופן,

$$\phi(h) = \langle f_h, g_h \rangle \neq \langle f_{h'}, g_{h'} \rangle = \phi(h')$$

לכן ϕ חח"ע. נוכיח כי ϕ על, יהיו $\langle f, g \rangle \in {}^{\mathbb{N}}2 \times {}^{\mathbb{N}}2$, נגדיר $h : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ע"י

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & n \in \mathbb{N}_{even} \\ g(\frac{n-1}{2}) & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$

מתקיים כי

$$f_h(n) = h(2n) = h(\frac{2n}{2}) = f(n),\ \ g_h(n) = h(2n+1) = g(\frac{(2n+1)-1}{2}) = g(n)$$

ולכן $\phi(h) = \langle f_h, g_h \rangle = \langle f, g \rangle$, כלומר ϕ על.

<u>הוכחת 2</u>: באינדוקציה על n, עבור $n=1$ זה טריוויאלי. נקבע מהסעיף הקודם $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שקילות ונניח כי הטענה נכונה ל־n, נוכיח עבור $n+1$, לפי הנחת האינדוקציה יש $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, נגדיר

$$f_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ \ f_{n+1}(\langle r_1, ..., r_{n+1} \rangle) = \phi(\langle f_n(\langle r_1, ..., r_n \rangle), r_{n+1} \rangle)$$

□

האם קיימת עוצמה בין $\aleph_0$ ל־$2^{\aleph_0}$? טבעי לנסות לחפש תת קבוצה של הממשיים בעוצמה זו. קנטור ניסה לעשות זאת, והוכיח המון משפטים חשובים אבל לא הגיע לתשובה האם יש כזו עוצמה או אין כזו עוצמה.

משפט 27 לכל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a < b \Rightarrow |(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = 2^{\aleph_0}$$

הוכחה: אנו נוכיח כי

$$|(a,b)| \leq^{(1)} |(a,b]| =^{(2)} |[a,b)| \leq^{(3)} |[a,b]| \leq^{(4)} |\mathbb{R}| \leq^{(5)} |(a,b)|$$

ואז מקש"ב כל העוצמות הללו שוות ולפי 25 נקבל את המשפט.

המעברים $(1),(3),(4)$ נובעים מהכלה. (2) ישאר כתרגיל לקורא והחלק היחידי שיש לעבוד בשבילו הוא (5), תחילה נוכיח כי $|(a,b)| = |(-1,1)|$, נגדיר $f : (-1,1) \to (a,b)$ ע"י $f(t) = a + (t+1) \cdot \frac{b-a}{2}$. בדקו כי זו העתקה חח"ע ועל. אם כך, מספיק להוכיח כי $|\mathbb{R}| \geq |(-1,1)|$. נגדיר את הפונקציה $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - 1 & 1 > x > 0 \\ \frac{1}{x} + 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

נוכיח כי g על, יהי $x \in \mathbb{R}$, אם $x > 0$ אז $1 < \frac{1}{x+1} < 0$ ומתקיים $g(\frac{1}{x+1}) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} - 1 = x$. באותו אופן אם $x < 0$ אז $-1 < \frac{1}{x-1} < 0$ כמו כן, $g(\frac{1}{x-1}) = x$. לבסוף עבור $x = 0$, $g(0) = x$ כדרוש.

□

השערת הצרף:

"לא קיימת קבוצה X כך ש־ $\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$. כלומר העוצמה הראשונה שגדולה מ־$\aleph_0$ היא $2^{\aleph_0}$"

השערת הרצף הייתה שאלה פתוחה כמה מאות שנים. לימים התברר (ע"י קורט גדל ופול כהן) כי התשובה לשאלה זו לא ניתנת להכרעה. מה זה אומר בדיוק? זה אומר שיש הוכחה לכך שאי אפשר להוכיח את השערת הרצף ואי אפשר להוכיח את שלילתה במסגרת האקסיומות של תורת הקבוצות. ההוכחה הזו מתבססת על משפט השלמות של גדל, לומדים על כך בקורס לוגיקה. השערת הרצף הייתה הדוגמא הראשונה לטענה שלא ניתנת להכרעה, זו הייתה תגלית מרעישה, שכן, מלבד טענות נכונות ולא נכונות, יש גם טענות שלא ניתן להכריע את נכונותן.

הערה: אין אנו מניחים את נכונות או אי נכונות השערת הרצף.

4.4 חשבון עוצמות

אם נחזור לרגע לדרך הראשונה שבא אנחנו משווים בין גדלים של קבוצות, אז יש לנו את המספרים הטבעיים שמייצגים את כל הגדלים הסופיים האפשריים של קבוצות ואנחנו פשוט יכולים להשוואות בין המספרים הללו מבלי לבנות פונקציות בין הקבוצות עצמן. גם במקרה האינסופי, אם העוצמות של הקבוצות שלנו הם עוצמות שמוכרות לנו כמו $\aleph_0, 2_0^{\aleph}, ...$ נוכל לערוך השוואות בין הגדרלים האינסופיים המתאימים להם במקום לנסות לייצר פונקציות באופן מפורש. לדוגמא, אם נראה לומר כי $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|<|(0,0.0000009)|$ נוכל להעזר במשפטים שכן בהוכחו, שכן

$$|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}| =^{(1)} |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| =^{(2)} \aleph_0 <^{(3)} 2^{\aleph_0} =^{(4)} |(0,0.0000009)|$$

ובכך להסיק את הרצוי.
(1)־טענה 6(1)
(2)־משפט 16(1)
(3)־מסקנה 23
(2)־משפט 27

חשבון עוצמות הוא אוסף של כללים שמאפשרים לחשב עוצמות של קבוצות שמורכבת מקבוצות שתלויות רק בעוצמות של הקבוצות ולא בקבוצות עצמן. מכיוון שעוצמה זה לא אובייקט מוגדר, אנחנו נבין טענות לגבי עוצמות כטענות לגבי עוצמות של קבוצות ספציפיות.

הזהרו: בכל מעבר של חשבון עוצמות חייבים להתבסס על אחד המשפטים שנלמדו כאן. צריך לנקוט משנה זהירות כאשר עושים שימוש בחשבון עוצמות, שכן עוצמות לא מתנהגות כמספרים רגילים.

מהי עוצמה? היחס $A\sim B\leftrightarrow |A|=|B|$ מקיים את שלושת התכונות של יחס שקילות, אך הוא אינו יחס שקילות שכן אין קבוצה שמעליה היחס מוגדר(להזכירכם, לא קיימת קבוצת כל הקבוצות). ובכל זאת, אם היינו רוצים לנסות לדמיין מהי בדיוק עוצמה, אז אפשר לחשוב באופן אינטואיטיבי שעוצמה היא למעשה מחלקת שקילות ביחס זה. לדוגמא

$$\aleph_0=[\mathbb{N}]_\sim,\ \ 2^{\aleph_0}=[\mathbb{R}]_\sim=[P(\mathbb{N})]_\sim$$

וכו'. באופן פורמלי, אין לנו מושג של עוצמה אלא יש לנו קבוצות שמייצגות עוצמות ספציפיות, וכך צריך לחשוב על זה בקורס שלנו. כלומר, כשנומר ש־a עוצמה, המשמעות היא שיש איזושהי קבוצה A ואנחנו חושבים על $|A|=a$.

הגדרה 28 יהיו A,B קבוצות, נגדיר :

1. $|A|+|B|=|A\times\{0\}\uplus B\times\{1\}|$
2. $|A|\cdot|B|=|A\times B|$
3. $|A|^{|B|}=|{}^{B}A|$

שאלה מרכזית כאן היא מה קורה אם בוחרים קבוצות אחרות לייצג עוצמה מסוימת? למה שהתוצאה תשאר זהה? ראינו בטענה 6 כי הפעולות הללו "לא תלויות בבחירת הנציג", כלומר, תוצאת הפעולה לא תשתנה אם נחליף את הקבוצות בקבוצות שוות עוצמה. לדוגמא $|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|=|\mathbb{Q}\times{}^{N}\{0,1\}|=\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}$. השיוויון הראשון נובע מהטענה, והשיוויון השני הוא לפי הגדרה.
הערות:

- חיסור וחילוק של עוצמות לא מוגדר. כמו כן, אי אפשר להוסיף או לכפול עוצמה במספרים לא טבעיים.
- בהגדרת החיבור הוספנו את הכפל ב$\{0\},\{1\}$ כדי שהקבוצות A,B תהיינה זרות. כפי שאמרנו, הפעולות לא תלויות בבחירת הנציג ולכן אפשר תמיד לבחור את A,B להיות זרות ולוותר על המכפלה ביחידונים.

משפט 29 (חוקים בסיסיים) לכל שלוש עוצמות a,b,c מתקיים

1. $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$ (חילופיות)
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$(אסוציאטיביות)

3. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

4. $a+0=a \ \ a \cdot 0 = 0, \ \ a \cdot 1 = a, \ \ a^1 = a$.

5. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ ולכל עוצמה a מתקיים $\underbrace{a+a+a+a+...+a}_{n \ times} = n \cdot a$, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \ times} = a^n$.

<u>הוכחת 1</u>: נוכיח לדוגמא את $a \cdot b = b \cdot a$. יהיו A, B קבוצות כך ש־ $|A| = a$ ו־$|B| = b$, אם כך הטענה אומרת כי $|A \times B| = |B \times A|$. נגדיר פונקציית שקילות $f : A \times B \to B \times A$ ע"י $f(\langle x, y\rangle) = \langle y, x\rangle$. מתקיים כי

$$(f \circ f)(\langle x, y\rangle) = f(\langle y, x\rangle) = \langle x, y\rangle$$

לכן $f \circ f = id_{A \times B}$ אזי f הפיכה ולכן $|A \times B| = |B \times A|$ כדרוש.
<u>הוכחת 2</u>: נוכיח לדוגמא כי $(a+b)+c = a+(b+c)$, יהיו A, B, C קבוצות כך ש־ $|A| = a, |B| = b, |C| = c$, לפי ההערה הקודמת ניתן להניח בה"כ כי A, B, C זרות . לפי הגדרת חיבור עוצמות,

$$(a+b)+c = |(A \uplus B) \uplus C|$$

, $a+(b+c) = |A \uplus (B \uplus C)|$,A$\uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$ ובפרט $|(A \uplus B) \uplus C| = |A \uplus (B \uplus C)|$.
<u>הוכחת 3</u>: נובע משיוויון הקבוצות $A \times (B \uplus C) = A \times B \uplus A \times C$.
<u>הוכחת 4</u>: $|A \times \{1\}| = |A|$, $A \times \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, ברור. נוכיח כי $|{}^{\{1\}}A| = |A|$. נשים לב כי כל פונקציה שתחומה $\{1\}$ שולחת את 1 לאיזשהו איבר ב־A ונקבעת ביחידות לפי איבר זה. לכן הפונקציה $F : {}^{\{1\}}A \to A$ המוגדרת ע"י $F(f) = f(1)$ היא חח"ע ועל.
<u>הוכחת 5</u>: נוכיח כי $a \cdot a ... \cdot a = a^n$ בראינדוקציה על $n \in \mathbb{N}_+$. תחילה ניקח A כך ש־ $|A| = a$, עבור $n = 1$ מתקיים $|A| = |{}^{\{0\}}A|$ ע"י ההעתקה $f : A \to {}^{\{0\}}A$, $f(a) = \{\langle 0, a\rangle\}$. קל לראות כי $f(a)$ היא פונקציה ו־ f פונקציה חח"ע ועל. ננחי כי הטענה נכונה ל־n, נוכיח ל־$n+1$. מהנחת האינדוקציה, תהא

$$f_n : {}^{\{0,...,n-1\}}A \to A \times A \times ... \times A, \ \ f_n(h) = \langle h(0), h(1), ..., h(n-1)\rangle$$

פונקציה חח"ע ועל, נעזר בה כדי להגדיר

$$f_{n+1} : {}^{\{0,...,n\}}A \to A \times A \times ... \times A, \ \ f_{n+1}(h) = \langle f_n(h \restriction \{0, ..., n-1\}), h(n)\rangle)$$

אם $f_{n+1}(h_1) = f_{n+1}(h_2)$ אזי $h_1(n) = h_2(n)$ וגם $f_n(h_1 \restriction \{0, ..., n-1\}) = f_n(h_2 \restriction \{0, ..., n-1\}$ מחח"ע f_n שנתונה מהנחת האינדוקציה, $h_1 \restriction \{0, ...n-1\} = h_2 \restriction \{0, .., n-1\}$, לפי משפט על שיוויון של פונקציות $h_1 = h_2$ ולכן f_{n+1} חח"ע. נשאיר את ההוכחה כי f_{n+1} על כתרגיל. $\square$

הערה: בדקו כי לכל עוצמה a מתקיים $a^0 = 1$, $1^a = 1$. יתר על כן, עבור $a > 0$ מתקיים $0^a = 0$.

משפט 30 (מונוטוניות) יהיו a, b, c, d עוצמות ונניח כי $a \le b, \ \ c \le d$ אזי

1. $a + c \le b + d$.
2. $a \cdot c \le b \cdot d$.
3. $a^c \le b^c$
4. $a^c \le a^d$.

הוכחה:
נניח כי $f : A \to B, \ \ g : C \to D$ פונקציות חח"ע המעידות על ההנחה לגבי a, b, c, d. נניח בלי הגבלת הכלליות כי A, C זרות וכי B, D זרות.
<u>הוכחת 1</u>: נגדיר $F : A \uplus C \to B \uplus D$ ע"י

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in C \end{cases}$$

בדקו כי F חח"ע.
<u>הוכחת 2</u>: נגדיר $G : A \times C \to B \times D$ ע"י

$$G(\langle a, c\rangle) = \langle f(x), g(x)\rangle$$

בדקו כי G חח"ע.
<u>הוכחת 3</u>: נגדיר $H : {}^{C}A \to {}^{C}B$ ע"י

$$H(h) = f \circ h$$

H מוגדרת היטב שכן לפי הגדרת ההרכבה, לכל $h : C \to A$ מתקיים כי $f \circ h : C \to B$.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "H(h)"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

כעת נוכיח כי H חח"ע, יהיו $h_1 \neq h_2$ ב־${}^{C}A$, אזי קיים $c \in C$ כך ש־ $h_1(c) \neq h_2(c)$. מחח"ע f נובע כי $f(h_1(c)) \neq f(h_2(c))$ ולכן

$$H(h_1) = f \circ h_1 \neq f \circ h_2 = H(h_2)$$

<u>הוכחת 4</u>: נגדיר $J : {}^{C}A \to {}^{D}A$. מכיוון ו־g חח"ע קיימת $z : D \to C$ כך ש־ $z \circ g = id_C$. נעזר בפונקציה z על מנת להגדיר את J. עבור $h : C \to A$ נגדיר

$$J(h) = h \circ z$$

אכן $h \circ z : D \to A$. נוכיח כי J חח"ע. נניח כי $J(h_1) = J(h_2)$ אז $h_1 \circ z = h_2 \circ z$ נרכיב משמאל את g ונקבל כי $(h_1 \circ z) \circ g = (h_2 \circ z) \circ g$ מאסוצייטיביות ההרכבה נובע כי $h_1 \circ (z \circ g) = h_2 \circ (z \circ g)$ ולכן $h_1 \circ id_C = h_2 \circ id_C$ אזי $h_1 = h_2$. $\square$

הערה: שימו לב כי הטענות במשפט הקודם עבור אי שיוויון חזק <u>אינן נכונות</u>.

על קבוצות ספציפיות נוכל להוכיח דברים שלא ידועים לנו על קבוצות כלליות

משפט 31 1. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

2. $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

3. $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

הוכחה:
<u>הוכחת 1</u>: ראינו בפרקים הקודמים את האי שיוונות הבאים:

$$|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N} \times \{0\} \uplus \mathbb{N} \times \{1\}| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

ולכן $\aleph_0 = \aleph_0 \le \aleph_0 + \aleph_0 \le \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. לפי CSB מתקיים $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$
<u>הוכחת 2</u>: ראינו במסקנה 26 כי

$$|\mathbb{R}| \le |\mathbb{R} \times \{0\} \uplus \mathbb{R} \times \{1\}| \le |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

לכן $2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2 \le 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
<u>הוכחת 3</u>: $2^{\aleph}_0 \le \aleph_0 + 2^{\aleph_0} \le 2 \cdot a^{\aleph_0} \le \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ $\square$

הערה חשובה: מהמשפט הקודם עלולים לחשוב כי לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + a = a \cdot a = a$. ללא אקסיומת הבחירה זו איננה נכונה בהכרח. על כן, לא נקבל אותה כמשפט בשלב הזה.

נעבור לכלי הכי שימושי בחשבון עוצמות־ חוקי חזקות.

משפט 32 לכל שלוש עוצמות a, b, c מתקיים

1. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.

2. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

3. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

הוכחה: יהיו A, B, C קבוצות זרות כך ש־ $|A| = a, |B| = b, |C| = c$.
<u>הוכחת 1</u>: צריך להוכיח את שיוויון העוצמות $|{}^{C\times B}A| = |{}^{C}({}^{B}A)|$, הפונקציה שמעידה על כך נקראת פונקציית $curry$ ומוגדרת באופן ה

$$curry : {}^{C \times B}A \to {}^{C}({}^{B}A)$$

עבור $f : (C \times B) \to A$ תוצאת הפעלת $curry$ על f היא בעצמה פונקציה

$$curry(f) : C \to {}^{B}A, \;\; (curry(f))(c) : B \to A$$

לבסוף הפונקציה $(curry(f))(c)$ מוגדרת

$$((curry(f))(c))(b) = f(c, b)$$

לדוגמא עבור $A=B=C=\mathbb{N}$ נתבונן בפונקציה

$$f\in {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\mathbb{N}=dom(curry_{\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}}),\ \ f(a,b)=b^a$$

מתקיים $curry(f)(1)=id_{\mathbb{N}}$.
נמצא ל $curry$ פונקציה הופכית,

$$curry^{-1}:{}^C({}^BA)\to{}^{C\times B}A,\ \ (curry^{-1}(f))(\langle c,b\rangle)=(f(c))(b)$$

נוכיח כי ההרכבות שוות לזהות, תהא $f\in{}^C({}^BA)$ נוכיח כי $curry(curry^{-1}(f))=f$ יהי $c\in C$ ונוכיח כי $curry(curry^{-1}(f))(c)=f(c)$ זה שיוויון של פונקציות שוב ולכן יהי $b\in B$

$$(curry(curry^{-1}(f))(c))(b)=(curry^{-1}(f))(\langle c,b\rangle)=f(c)(b)$$

בכיוון השני, תהא $f:C\times B\to A$ נוכיח כי $curry^{-1}(curry(f))=f$ יהי $\langle c,b\rangle\in C\times B$, אזי

$$curry^{-1}(cuury(f))(\langle c,b\rangle)=(curry(f))(c)(b)=f(\langle c,b\rangle)$$

ולכן $curry^{-1}(curry(f))=f$.
<u>הוכחת 2</u>: צריך להוכיח את שיוויון העוצמות $|{}^CA\times{}^CB|=|{}^C(A\times B)|$. נגדיר

$$\phi:{}^CA\times{}^CB\to{}^CA\times B,\ \ \phi(\langle f,g\rangle):C\to A\times B$$
$$\phi(\langle f,g\rangle)(c)=\langle f(c),g(c)\rangle.$$

כעת נגדיר באמצעות ההטלות π_1,π_2 את הפונקציה ההופכית

$$\psi:{}^CA\times B\to{}^CA\times{}^CB,\ \ \psi(h)=\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle$$

נוכיח כי $\phi\circ\psi=id_{{}^CA\times B}$. תהא $h:C\to A\times B$, נוכיח כי מתקיים $\phi(\psi(h))=h$. יהי $c\in C$, אז

$$\phi(\psi(h))(c)=\phi(\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle)(c)=\langle(\pi_1\circ h)(c),(\pi_2\circ h)(c)\rangle=\langle\pi_1(h(c)),\pi_2(h(c))\rangle=h(c)$$

נוכיח כי $\psi\circ\phi=id_{{}^CA\times{}^CB}$ יהי $\langle f,g\rangle\in{}^CA\times{}^CB$

$$\psi(\phi(\langle f,g\rangle)=\langle\pi_1\circ\phi(\langle f,g\rangle),\pi_2\circ\phi(\langle f,g\rangle)\rangle$$

יהי $c\in C$ אזי

$$\pi_1(\phi(\langle f,g\rangle)(c))=\pi_1(\langle f(c),g(c)\rangle)=f(c)$$

$$\pi_2(\phi(\langle f,g\rangle)(c))=g(c)$$

ולכן

$$\psi(\phi(\langle f,g\rangle)=\langle\pi_1\circ\phi(\langle f,g\rangle),\pi_2\circ\phi(\langle f,g\rangle)\rangle=\langle f,g\rangle$$

<u>הוכחת 3</u>: נגדיר $\phi:{}^{B\cup C}A\to{}^BA\times{}^CA$

$$\phi(g)=\langle g\restriction B,g\restriction C\rangle$$

ונוכיח כי היא חח"ע ועל. עבור חח"ע, נניח כי $g_1\neq g_2$. אז מאי שיוויון של פונקציות, קיים $x\in B\cup C$ כך ש־$g_1(x)\neq g_2(x)$. נחלק למקרים, אם $x\in B$ אז $g_1\restriction B\neq g_2\restriction B$ ואם $x\in C$ אז $g_1\restriction C\neq g_2\restriction C$. בכל מקרה,

$$\phi(g_1)=\langle g_1\restriction B,g_1\restriction C\rangle\neq\langle g_2\restriction B,g_2\restriction C\rangle=\phi(g_2)$$

עבור על, יהי $\langle f,g\rangle\in{}^BA\times{}^CA$ נגדיר $h:B\cup C\to A$ ע"י:

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in B\\ g(x) & x\in C\end{cases}$$

מכיוון ו־B,C זרות, h היא פונקציה. יתר על כן,

$$\phi(h)=\langle h\restriction B,h\restriction C\rangle=\langle f,g\rangle$$

ולכן ϕ על.

$\square$

דוגמא לשימוש בחוקי חזקות:

- נחשב את $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}|$, לפי הגדרה $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0}$, מתקיים $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. ממשפט CBS נקבל $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
- נחשב את $|{}^{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q})|$,

$$|{}^{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q})| = (\aleph_0^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = (\aleph_0)^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = (\aleph_0)^{2^{\aleph_0}}$$

ולכן

$$2^{(2^{\aleph_0})} \leq (\aleph_0)^{2^{\aleph_0}} \leq (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{(\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0})} = 2^{(2^{\aleph_0})}$$

מ־CBS מקבלים $(\aleph_0)^{2^{\aleph_0}} = 2^{(2^{\aleph_0})}$. **וסכ"ה** $|{}^{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q})| = (\aleph_0)^{2^{\aleph_0}} = 2^{(2^{\aleph_0})}$.

תרגיל 33 1. לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + \aleph_0 = a$

2. לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + n = a$ לכל $n \in \mathbb{N}$

מסקנה 34 עוצמת קבוצת המספרים האי רציונליים $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ היא $2^{\aleph_0}$.

הוכחה: לפי תרגיל 33 מתקיים כי $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + \aleph_0 = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + |\mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \uplus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$.

$\square$