6 אקסיומת הבחירה[1]

לעיתים תכופות אנחנו מבצעים את המעבר הבא:

בהנתן כי A קבוצה לא ריקה יהי $a \in A$

מעבר זה נקרא "בחירה". אין שום בעיה עם המעבר הזה והוא כשלעצמו לא מצריך את אקסיומת הבחירה, הבעיה היא כשאנו עושים אותו אינסוף פעמים. אקסיומת הבחירה אומרת למעשה שמותר לנו לעשות את המעבר הזה, עוד מעט ננסח את זה באופן פורמלי.

אם יש לנו כלל איך לבחור מכל קבוצה אז אנחנו לא משתמשים באקסיומת הבחירה. המשל הבא של ראסל (מפרדוקס ראסל) מדגים זאת היטב:

> נתונים אינסוף זוגות נעליים ואתם רוצים לבחור נעל אחת מכל זוג" תוכלו לתת את הכלל הבא: "תמיד נבחר בנעל השמאלית". זה כלל מפורש שמייחד את אחת הנעליים מהאחרת. נניח כעת שאנו רוצים לבחור מתוך אינסוף זוגות גרביים גרב מכל זוג. אין כלל ברור של איך עושים את הבחירה הזו, שכן אין הבדל בין שתי הגרביים ולכן במקרה הזה אנחנו זקוקים לאקסיומת הבחירה.

<u>הערה חשובה</u>: מותר לבצע מספר סופי של בחירות!

איך יודעים אם השתמשנו באקסיומת הבחירה?
כפי שאמרנו בפסקה הקודמת, כאשר יש לנו קבוצה או קבוצות לא ריקות ואנחנו בוחרים אינסוף איברים. לדוגמא:

1. בהוכחה שאם קיימת $f : B \to A$ על אז קיימת $g : A \to B$ חח"ע, הגדרנו את g באופן הבא: לכל $a \in A$ אמרנו כי $f^{-1}[\{a\}] \neq \emptyset$ מכיוון שהפונקציה f על. בשלב זה בחרנו בלי לציין כלל מפורש איבר מתוך $b_a \in f^{-1}[\{a\}]$ והגדרנו $g(a) = b_a$. זה היה שימוש באקסיומת הבחירה אם A הייתה אינסופית.

2. כאשר הוכחנו שלכל קבוצה A אינסופית $\aleph_0 \leq |A|$ השתמשנו באקסיומת הבחירה, כשבנינו באינדוקציה אינסוף איברים $a_n \in A$, נזכר בהנחת האינדוקציה, נניח בנינו $\{a_0, ..., a_n\} \in A$ שונים ונבנה את a_{n+1}, בשלב הזה הסקנו כי $A \setminus \{a_0, ..., a_n\} \neq \emptyset$ מכיוון ו־A אינסופית ובדיוק כאן בחרנו ללא כלל מפורש $a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, ..., a_n\}$.

3. כאשר הוכחנו כי איחוד לכל היותר בנמנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בנמנייה היו לנו קבוצות $|A_n| \leq \aleph_0$. התחלנו את ההוכחה בשימוש באקסיומת הבחירה כשבחרנו אינסוף פעמים, לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ חח"ע. כלומר במקרה הזה הבחירה הייתה מתוך קבוצת הפונקציות החח"ע מ־A_n ל־$\mathbb{N}$ שלפי הנתון על העוצמה של A_n זו קבוצה הפונקציות הללו אינה ריקה. מכיוון שלא נתנו כלל מפורש איך לבחור את הפונקציות, השתמשנו באקסיומת הבחירה.

איך להמנע מאקסיומת הבחירה? כפי שציינו, לעיתים אפשר להמנע בשימוש באקסיומת הבחירה ע"י כלל מפורש לבנייה. כלל מפורש לבנייה ניתן לתת בדרך כלל לקבוצה קונקרטית ולא לקבוצה כללית. ואכן, הרבה טענות לגבי קבוצות כלליות שלא ניתן להוכיח ללא אקסיומת הבחירה, אפשר להוכיח עבור קבוצות ספציפיות. נביא דוגמא לסיטואציה הזו:

1. אם קיימת $f : \mathbb{N} \to A$ על אז קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to \mathbb{N}$. בונים את g באותו אופן כמו בהוכחה הרגילה ע"י בחירת $n_b \in f^{-1}[\{b\}]$. במקרה זה, יש לנו כלל מפורש לבחירת איבר זה והיא לבחור את $n_b = \min(f^{-1}[\{b\}])$ (שימו לב כי $f^{-1}[\{b\}]$ היא קבוצת מספרים טבעיים לא ריקה ולכן קיים לה איבר מינימלי) כאן לא השתמשנו באקסיומת הבחירה.

2. $|\biguplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k| = \aleph_0$. כדי להמנע מבחירת הפונקציות $f_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, נבחר פונקציה $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (מותר לבחור פעם אחת!) נגדיר באינדוקציה באופן מפורש

$$g_{n+1}(a_1, ..., a_{n+1}) = \pi(g_n(a_1, ..., a_n), a_{n+1})$$

, זה הדרך לקבל את הדרוש.

3. באופן כללי יותר, אפשר להמנע מבחירה אם יש לנו סדר על קבוצה A שמכל קבוצה לא ריקה אפשר לקחת מנימלי (אם הסדר הוא סדר טוב) אז אפשר לייחד איזשהו איבר והוא המינימום. לדוגמא, נניח אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הבאה:

משפט אם $F = \{J_i \mid i \in I\}$ זו קבוצה של אינטרבלים לא ריקים ב־$\mathbb{R}$ כך שלכל $i \neq i'$ מתקיים כי $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ אזי $|F| \leq \aleph_0$.

הוכחה: לכל $i \in I$, בוחרים $q_i \in J_i \cap \mathbb{Q}$ שקיים מצפיפות הרציונלים. זה מגדיר פונקציה חח"ע מ־ $f : F \to \mathbb{Q}$ (מדוע היא חח"ע) $f(J_i) = q_i$. מבלי לאמר שום דבר נוסף בבירור השתמשנו באקסיומת הבחירה. איך נמנע פה משימוש? אי אפשר לקחת $\min(J_i \cap \mathbb{Q}) = q_i$ כי ייתכן ולא קיים המינימום. אז מה עושים? קובעים $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ חח"ע ועל. נסמן ב־ $q_n = g(n)$. כעת מהקטע $\mathbb{Q} \cap J_i$ נגדיר

$$n_i = \min(n \in \mathbb{N} \mid q_n \in J_i \cap \mathbb{Q})$$

האינדקס המינימלי של רציונלי בקטע, קיים כזה כי בסדר הרגיל העל הטבעיים לכל קבוצה לא ריקה יש מינימום. נגדיר $f(J_i) = q_{n_i}$ וכך נמנענו מבחירה.

הבא ננסח את אקסיומת הבחירה:

הגדרה 1 אקסיומת הבחירה זו הטענה הבאה: לכל A קבוצה של קבוצות כך ש $\forall x\in A.x\neq\emptyset$ קיימת פונקציה $F:A\to\bigcup\limits_{x\in A}x$ כך שלכל $x\in A$, $F(x)\in x$.

הערה: הפונקציה F נקראת פונקציית בחירה עבור הקבוצה A. נראה איך משתמשים פורמלית באקסיומת הבחירה על הדוגמאות הקודמות.

1. בבנייה של $g:A\to B$ מתבוננים בקבוצה $T=\{f^{-1}[\{a\}]\mid a\in A\}$, מכיוון ו־$f$ על, T זה אוסף של קבוצות לא ריקות ולכן קיימת פונקציית בחירה $g:A\to B$ המקיימת $g(a)\in f^{-1}[\{a\}]$.
2. בהוכחה הזו נגדיר את הקבוצה $T=\{A\setminus X\mid |X|<\aleph_0\}$. מכיוון ו־$A$ אינסופית,T היא משפחה של קבוצות לא ריקות. אז קיימת פונקציית בחירה $f:T\to A$ כך ש־ $f(A\setminus X)\in A\setminus X$. אם כך בבנייה האינדוקטיבית מגדירים $a_{n+1}=f(A\setminus\{a_0,...,a_n\})$.
3. נגדיר $T=\Big\{\{g\in A_n\to\mathbb{N}|\ g\ is\ 1-1\}\mid n\in\mathbb{N}\Big\}$. מהנתון כי כל A_n לכל היותר בת מנייה מסיקים כי T אוסף של קבוצות לא ריקות ולכן יש פונקציית בחירה $f:T\to\bigcup T$ כך ש־ $f(n)=g_n$.

מתקיים דיון ארוך שנים האם לקבל או לא לקבל את אקסיומת הבחירה. מצד אחד, אם מקבלים אותה אז מקבלים גם דברים מוזרים כמו
משפטים מוזרים שנובעים מאקסיומת הבחירה:

- פרדוקס טרסקי בנך.
- סדר טוב על $\mathbb{R}$.
- קיימת קבוצה לא מדידה לבג.

מנגד אם לא מקבלים את אקסיומת הבחירה צריך לוותר על משפטים יסודיים בתחומים רבים במתמטיקה
משפטים פונדמנטלים שאי אפשר להוכיח ללא אקסיומת הבחירה:

- איחוד בנמנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בנמנייה
- לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $|A|=|B|\vee|A|\leq|B|\vee|B|\leq|A|$.
- משפט האן בנך
- לכל מרחב וקטורי יש בסיס
- לכל חוג יש אידאל מקסימלי
- כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.
- משפט טיכונוב על קומפקטיות מרחב המכפלה.

בפרק על סדרים הגדרנו מהו סדר טוב על קבוצה. ראינו קבוצות שיש עליהן סדר טוב: $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ וכל הסודרים יש עליהם סדר טוב. האם מישהו יכול להעלות על דעתו סדר טוב על $\mathbb{R}$? אין טעם לנסות כי הוכח שללא אקסיומת הבחירה, אי אפשר להוכיח קיום של סדר טוב על $\mathbb{R}$.

משפט 2 (משפט הסדר הטוב) כל קבוצה ניתנת לסידור טוב.

עוד טענה שנובעת מאקסיומת הבחירה היא הלמה של צורן, למה שימושית במיוחד שחשוב לדעת לעבוד איתה.

הגדרה 3 תהא $\langle A,R\rangle$ קבוצה סדורה חלקית בסדר חלש

א. $\emptyset\neq X\subseteq A$ נקראת שרשרת אם לכל $b,b'\in X$ מתקיים $b=b'\vee bRb'\vee b'Rb$

ב. (תזכורת) נניח כי $X\subseteq A$ שרשרת, אם קיים $x^*\in A$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים xRx^* נאמר כי ל־X יש חסם עליון.

משפט 4 (הלמה של צורן) כל סדר חלקי חלש $\langle\Sigma,\preceq\rangle$, $\Sigma\neq\emptyset$ שמקיים את התכונה כי לכל שרשרת יש חסם עליון ב־Σ. אז יש איבר מירבי ב־Σ.

משפט 5 המשפטים הבאים שקולים:

1. אקסיומת הבחירה
2. הלמה של צורן
3. משפט הסדר הטוב

הערה היסטורית, השקילות בין אקסיומת הבחירה ובין משפט הסדר הטוב נקראת משפט צרמלו או משפט הסדר הטוב.
הוכחה:
$\underline{AC \to Well\ ordering}$: תהא A קבוצה, נגדיר ברקורסיה טרנספיניטית $x_\alpha \in A$ באופן חח"ע. נבחר $x_0 \in A$ שרירותי, אם $A=\emptyset$ אז $\emptyset$ הוא יחס סדר טוב על A. נניח הגדרנו

$$X=\{x_\beta \mid \beta<\alpha\}\subseteq A$$

אם $X=A$ נעצור את הרקורסיה ונסמן $\theta=\alpha$, אחרת $A\setminus X\neq\emptyset$, נבחר $x_\alpha\in A\setminus X$. מכיוון וההגדרה $\alpha\mapsto x_\alpha$ היא חח"ע , לפי משפט בפרק על סודרים התהליך חייב להעצר באיזשהו שלב θ. אם כך $A=\{x_\alpha \mid \alpha<\theta\}$ ואפשר להגדיר על A את יחס הסדר

$$x_\alpha \prec x_\beta \leftrightarrow \alpha<\beta$$

קל לראות כי זה יחס סדר טוב על A.
$\underline{Well\ ordering \to Zorn's\ lemma}$: נניח כי $\Sigma,\preceq$ יחס סדר המקיים את תנאי הלמה של צורן. נקבע על Σ סדר טוב כלשהו $<^*$ שמובטח ממשפט הסדר הטוב. נבנה סדרת איברים $x_\alpha\in\Sigma$ עולה ממש ביחס $\preceq$. נתחיל עם $x_0\in\Sigma$ שרירותי. אם x_0 איבר מקסימלי, סיימנו. אחרת קיים x_1 $x_0\prec x_1$. נניח כי הגדרנו x_β עבור $\beta<\alpha$ כך ש- $\beta<\beta'<\alpha\to x_\beta\prec x'_\beta$ ונגדיר את x_α (אנחנו לא מחלקים למקרים גבולי ועוקב). אם כך $X=\{x_\beta\mid\beta<\alpha\}$ היא שרשרת ב-Σ אז לפי ההנחה יש חסם עליון $x^*\in\Sigma$. נגדיר

$$Y=\{x\in\Sigma\setminus X \mid \forall\beta<\alpha(x_\beta\prec x)\}$$

כלומר, Y היא קבוצת כל החסמים העליונים ל-X שלא שייכים ל-X. כעת נחלק לשני מקרים, אם $Y\neq\emptyset$ במקרה זה נבחר $x_\alpha=\min_{<^*}(Y)$. ובמקרה השני $Y=\emptyset$, אז לפי ההנחה כי קיים חסם עליון ל-X ומכיוון ו-$Y=\emptyset$ בהכרח $x^*\in X$ חסם עליון ל-X כלומר $x^*=max(X)$. במקרה זה נעצור את הרקורסיה ונסמן $\alpha=\theta$ ו-$x_\alpha=max(X)$. שימו לב שמכיוון וההתאמה $\alpha\mapsto x_\alpha$ חח"ע ולכן לפי משפט בפרק על סודרים הרקורסיה חייבת להתייצב באיזשהו סודר θ, משמע, בשלב θ ברקורסיה $Y=\emptyset$ ובחרנו $x_\theta\in X$ חסם עליון. נטען כי x_θ איבר מירבי ב-Σ, אחרת קיים $y\in\Sigma$ כך ש-

$$x_\theta \prec y \wedge y\neq x_\theta$$

אבל אז מטרזיטיביות יחס הסדר וכך ש- x_θ חסם עליון ל-X נובע כי לכל $\alpha<\theta$ גם $x_\alpha\prec y$ ובנוסף לא ייתכן כי $y\in X$, אחרת

$$y\preceq \max(X)=x_\theta$$

בסתירה. כלומר בשלב θ ברקורסיה יש $y\in Y$ אבל אז $Y\neq\emptyset$, סתירה. אם כך מצאנו איבר מירבי.
$\underline{Zorn's\ lemma\to AC}$: תהא A קבוצה של קבוצות לא ריקות, נגדיר פונקציית בחירה עבור A. נגדיר יחס סדר

$$\Sigma=\{f\mid f\ is\ a\ partial\ function \wedge dom(f)\subseteq A\wedge \forall a\in dom(f)(f(a)\in a)\}$$

עם יחס הסדר

$$f\preceq g\leftrightarrow f\subseteq g$$

הקבוצה Σ היא למעשה קירובים של פונקציית בחירה שתחומה הוא כל A. נשים לב כי $\Sigma\neq\emptyset$ שכן $\emptyset\in\Sigma$, וכי לכל שרשרת $X\subseteq\Sigma$ יש חסם עליון, נוכיח זאת, נגדיר $f=\cup X=\bigcup_{g\in X} g$ אז בודאי שלכל $g\in X$ מתקיים $g\subseteq f$. מתרגיל 9 מפרק 3, f היא פונקציה חלקית וכי

$$dom(f)=\bigcup_{g\in X}dom(g)$$

ולכל $a\in dom(g)(f(a)=g(a))$. נוכיח כי $f\in\Sigma$: אכן, f היא פונקציה חלקית ו-

$$dom(f)=\bigcup_{g\in X}dom(g)\subseteq A$$

בנוסף, לכל $a\in dom(f)$ קיים $g\in X$ כך ש- $a\in dom(g)$ ולכן $f(a)=g(a)\in a$ אם כך $f\in\Sigma$ ולכן ל- $\Sigma,\preceq$ זה יחס סדר חלש לא ריק כך שלכל שרשרת יש חסם עליון. לפי הלמה של צורן יש $f^*\in\Sigma$ איבר מירבי, נוכיח כי $dom(f^*)=A$ ומזה יינבע כי f פונקציית בחירה עבור A. נניח בשלילה כי $dom(f^*)\neq A$ אז יש $a\in A$ כך ש- $a\notin dom(f^*)$. מכיוון ו-$a\in A$ ו-$a\neq\emptyset$ נבחר $b\in a$ (בחירה אחת!) ונגדיר $f'=f^*\cup\{\langle a,b\rangle\}$, קל לראות כי $f'\in\Sigma$ וכי $f^*\prec f'$, סתירה לכך ש-f^* איבר מירבי. לכן f^* פונקציית בחירה עבור A.

□

משפט 6 (AC) כל שתי עוצמות ניתנות להשוואה
הוכחה: נשתמש בלמה של צורן, יהיו שתי קבוצות A, B לא ריקות. אם אחת מהן ריקה אז הטענה ברורה. נגדיר

$$\Sigma = \{f \subseteq A \times B \mid \ is\ a\ partial\ 1-1\ function\}$$

נגדיר על Σ יחס הכלה $\subseteq$. תחילה נשים לב כי $\Sigma \neq \emptyset$ שכן ניקח $a \in A$ ו־ $b \in B$ אז $f = \{\langle a, b\rangle\} \in \Sigma$. נוכיח כי לכל שרשרת יש חסם עליון ב־Σ. תהא $X \subseteq \Sigma$ שרשרת, נגדיר

$$F = \bigcup_{f \in X} f$$

ברור כי F חסם עליון ל־X שכן מדובר ביחס הכלה. נוכיח כי $F \in \Sigma$, לפי תרגיל 9 מפרק 3, F היא פונקציה חלקית אשר מקיימת כי לכל $f \in X$, $F \restriction dom(f) = f$. מוכיח כי F חח"ע, יהיו $x, y \in dom(F)$ שונים. מאותו התרגיל נובע כי קיימים $f_1, f_2 \in X$ כך ש־ $x \in dom(f_1)$ ו־ $y \in dom(f_2)$. מכיוון ו־X שרשרת, או ש־ $f_1 \subseteq f_2$ או $f_2 \subseteq f_1$, בלי הגבלת הכלליות $f_1 \subseteq f_2$ אזי $x, y \in dom(f_2)$ מכיוון ו־ f_2 חח"ע מתקיים כי

$$F(x) = f_2(x) \neq f_2(y) = F(y)$$

לכן F חח"ע. כעת ניתן להשתמש בלמה של צורן יהא G איבר מירבי ב־Σ. לא ייתכן כי $dom(G) \subsetneq A \wedge Im(G) \subsetneq B$ אחרת, ניקח $a \in A \setminus dom(G)$ ו־$b \in B \setminus Im(G)$. נגדיר $G' = G \cup \{\langle a, b\rangle\}$, מכיוון ו־ $a \notin dom(G)$ נקבל כי G' יחס חד ערכי. ומכיוון ו־ $b \notin Im(G)$ ייתקיים כי $G'(a) = b \neq G(a')$ לכל $a \neq a'$. ולכן G' חד חד ערכית ושייכית ל־ Σ. זו סתירה למירביות של G. אם $dom(G) = A$ אז $G : A \to B$ חח"ע ואז $|A| \leq |B|$. אם $Im(G) = B$ אז $G^{-1} : B \to A$ פונקציה חח"ע ואז $|B| \leq |A|$ כדרוש.
■

משפט 7 (AC) לכל עוצמה a מתקיים $a + a = a \cdot a = a$.

מסקנה 8 (AC) לכל שתי עוצמות a, b אינסופיות מתקיים $a + b = a \cdot b = max(a, b)$

הוכחה: בה"כ $a \leq b$ אזי $b \leq a + b \leq b + b = b$ מCBS מקבלים $a + b = b$. באופן דומה מקבלים $a \cdot b = b$.