31.1.2020

מבחן במבוא לתורת הקבוצות סמסטר א' מועד א'

צוות הקורס: תום בן־אמו, פלג בר־לב, יבגני לבנזוב   מספר קורס: 0366110501

שאלה 1

1. לכל $g : A \to B$ פונקציה, נגדיר את הפונקציה $F_g : {}^BC \to {}^AC$ ע"י $F(f) = f \circ g$. הוכיחו כי אם g על אז F_g חח"ע.

פתרון: לפי ההנחה ומשפט שראינו בכיתה, מכיוון ו־g על, קיימת פונקציה הופכית ימנית $h : B \to A$ כך ש־ $g \circ h = Id_B$. נוכיח כי F_g חח"ע, יהיו $f_1, f_2 : B \to C$, נניח כי $F_g(f_1) = F_g(f_2)$ אזי $f_1 \circ g = f_2 \circ g$, ולכן $(f_1 \circ g) \circ h = (f_2 \circ g) \circ h$. לפי אסוצייטיביות ההרכבה, $f_1 \circ (g \circ h) = f_2 \circ (g \circ h)$, ולכן $f_1 = f_1 \circ Id_B = f_2 \circ Id_B = f_2$.

2. תהא $F = \{\langle g, F_g\rangle \mid g \in {}^AB\}$ הציגו תחום וטווח של F (אין צורך להוכיח) והוכיחו כי אם $|C| \geq 2$ אז F חח"ע.

פתרון: התחום הוא ${}^AB$, טווח אפשרי הוא ${}^{({}^BC)}({}^AC)$. נוכיח כי F חח"ע, יהיו $g_1, g_2 : A \to B$, נניח כי $g_1 \neq g_2$ ונוכיח כי $F(g_1) \neq F(g_2)$, כלומר לפי הגדרת F, נוכיח כי $F_{g_1} \neq F_{g_2}$. לפי ההנחה ולפי משפט על שיווין פונקציות, יש $a \in A$ כך ש־ $g_1(a) \neq g_2(a)$. נתון כי $|C| \geq 2$ לכן יהיו $c_1, c_2 \in C$ שונים. נגדיר $f : B \to C$ באופן הבא:

$$f(b) = \begin{cases} c_1 & b = g_1(a) \\ c_2 & else \end{cases}$$

מתקיים כי

$$F_{g_1}(f)(a) = f(g_1(a)) = c_1 \neq c_2 = f(g_2(a)) = F_{g_2}(f)(a)$$

ולכן $F_{g_1}(f) \neq F_{g_2}(f)$ אזי $F_{g_1} \neq F_{g_2}$ כדרוש.

שאלה 2

במישור הממשי, נקודה $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ נקראת נקודה רציונלית אם $x, y \in \mathbb{Q}$.
מעגל מסביב לראשית ברדיוס $r > 0$, זו הקבוצה:

$$C_r = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

קו ישר העובר בראשית עם שיפוע m זו הקבוצה:

$$L_m = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$$

<u>א</u>. הוכיחו/הפריכו: בכל מעגל C_r קיימת נקודה שאינה רציונלית.

פתרון: אחרת, קיים מעגל שכל הנקודות בו הן רציונלים, כלומר $C_r \subseteq \mathbb{Q}^2$. מתקיים כי $f : [0, r] \to C_r$ המוגדרת ע"י $f(x) = \langle x, \sqrt{r^2 - x^2}\rangle$ היא פונקציה מוגדרת היטב וחח"ע:
היא מוגדרת היטב שכן לכל $x \in [0, r]$ מתקיים כי $x \leq r$ ולכן $r^2 - x^2 \geq 0$, אז קיים $\sqrt{r^2 - x^2}$. בנוסף, $x^2 + (\sqrt{r^2 - x^2})^2 = r^2$ ולפי הגדרת C_r, $f(x) \in C_r$.
הפונקציה f היא חח"ע, שכן אם $\langle x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2}\rangle = \langle x_2, \sqrt{r^2 - x_2^2}\rangle$ אז בודאי $x_1 = x_2$. ראינו בכיתה משפט כי $|[0, r]| = 2^{\aleph_0}$ וכי $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$. בנוסף, לפי משפט קנטור $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. אבל כפי שמעידה הפונקציה f, נובע כי $|[0, r]| \leq |C_r| \leq |\mathbb{Q}^2|$, סתירה.

<u>ב</u>. הביאו דוגמא לישר שעובר בראשית, L_m ללא נקודות רציונליות מלבד $\langle 0, 0\rangle$.

פתרון: נתבונן בישר $L_{\sqrt{2}}$. נניח בשלילה כי קיימת נקודה רציונית $\langle q_1, q_2\rangle \in \mathbb{Q}^2 \cap L_{\sqrt{2}}$, אז לפי הגדרת $L_{\sqrt{2}}$, $q_2 = \sqrt{2}q_1$ ולכן $\sqrt{2} = q_2/q_1 \in \mathbb{Q}$ סתירה.

<u>ג</u>. הוכיחו כי קיים מעגל C_r ללא נקודות רציונליות.

פתרון: נניח בשלילה כי בכל מעגל קיימת נקודה רציונלית. אז לכל $r > 0$, נבחר רציונלי(בעקרון אנחנו משתמשים כאן באקסיומת הבחירה אבל ניתן לעקוף זאת ע"י מניית הקבוצה $\mathbb{Q}^2$ ולקיחת הנקודה הרציונלית בעלת האינדקס הנמוך ביותר במנייה השייכת למעגל).

$$\langle q_r, p_r\rangle \in \mathbb{Q}^2 \cap C_r$$

. הפונקציה $f : (0, \infty) \to \mathbb{Q}^2$ המוגדרת ע"י $f(r) = \langle q_r, p_r\rangle$ היא פונקציה חח"ע, שכן אם $f(r_1) = f(r_2) = \langle q^*, p^*\rangle$ ואז $q^*, p^* \in C_{r_1} \cap C_{r_2}$, ולכן $r_1^2 = p^{*2} + q^{*2} = r_2^2$ ומכיוון ו־$r_1, r_2 > 0$ נובע כי $r_1 = r_2$.

שאלה 3

נסמן ב־ X את קבוצת כל הסדרות של ממשיים שמתאפסות החל ממקום מסוים, כלומר

$$X = \{f \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \mid \ \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n > N.\ f(n) = 0\}$$

בנוסף, נסמן $deg(f) = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{-1\} \mid \forall n > N. f(n) = 0\}$.

1. ב־ X נגדיר יחס שקילות $\sim$ (אין צורך להוכיח): $f \sim g$ אם ורק אם $deg(f) = deg(g)$.

האם הפונקציה $F : \left((X/\sim) \times (X/\sim)\right) \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ המוגדרת ע"י $F([f]_\sim, [g]_\sim) = deg(f+g)$ תלויה בבחירת הנציגים f, g?

פתרון: הפונקציה תלויה בבחירת הנציגים, לדוגמא $f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & else \end{cases}$, $g(n) = \begin{cases} -1 & n = 1 \\ 0 & else \end{cases}$ אז $deg(f) = 1 = deg(g)$ ולכן $[f]_\sim = [g]_\sim$ ומתקיים $F([f]_\sim, [f]_\sim) = deg(f+f) = 1$ שכן $f(1) + f(1) = 2$ ואילו $f(n) + f(n) = 0$ לכל $n \neq 1$ ומצד שני $F([f]_\sim, [g]_\sim) = deg(f+g) = -1$ שכן לכל n, $f(n) + g(n) = 0$, אזי הפונקציה תלויה בבחירת הנציגים.

נגדיר שני יחסי סדר חזקים (אין צורך להוכיח) על X. עבור $f, g \in X$ <u>שונים</u>:

(א) fRg אם ורק אם $deg(f) < deg(g) \vee \left(deg(f) = deg(g) \wedge f(A_{f,g}) < g(A_{f,g})\right)$ באשר $A_{f,g} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$.

(ב) fSg אם ורק אם $deg(f) < deg(g) \vee \left(deg(f) = deg(g) \wedge f(B_{f,g}) < g(B_{f,g})\right)$ באשר $B_{f,g} = \max\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$.

2. נסמן ב־ $X_1 = \{f \in X \mid deg(f) = 1\}$. הביאו דוגמא לקבוצות $A, B \subseteq X_1$ כך ש־ A חסומה מלעיל ביחס R ולא קיים $\sup_R(A)$ ו־ B חסומה מלעיל ביחס S ולא קיים $\sup_S(B)$. אין צורך להוכיח.

פתרון: $A = B = \{f_a \mid a < 0\}$ באשר

$$f_a(n) = \begin{cases} a & n = 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

לכל $a, b < 0$, מתקיים כי $deg(f_a) = deg(f_b) = 1$, בודאי שהקבוצות חסומות מלעיל, לדוגמא ע"י f_2. שכן בכל מקרה $A_{f_a,f_2} = B_{f_a,f_2} = 1$

3. הוכיחו/הפריכו: $\langle X_1, R\rangle \simeq \langle X_1, S\rangle$

<u>הנחיות לסעיף ג':</u>

1. מותר להסתמך על תכונת השלמות של $\mathbb{R}$ כי לכל קבוצת ממשיים חסומה ולא ריקה קיים אינפמום וסופרמום.
2. אין צורך להוכיח טענות מהצורה: "לקבוצה $Y \subseteq \mathbb{R}_1[X]$ קיים/לא קיים איבר גדול/קטן ביותר, חסם עליון/תחתון, אינפמום/סופרמום."
3. עבור איזומורפיזם של סדרים f, אין צורך להוכיח טענות מהצורה: "אם x איבר גדול/קטן ביותר, חסם עליון/תחתון, אינפמום/סופרמום של קבוצה X אז $f(x)$ איבר גדול/קטן ביותר, חסם עליון/תחתון, אינפמום/סופרמום של הקבוצה $f[X]$

<u>הערה:</u> מקומות בהוכחה בהם מופיע (!) הם מקומות בהם הנימוק לא הוכנס בעקבוצת ההנחייה לפתרון השאלה.

פתרון:

הסדרים אינם איזומורפים, נניח בשלילה כי $H : X_1 \to X_1$ איזומופריזם של הסדרים R ו־S. אזי $\forall f, g \in X_1. fRg \leftrightarrow H(f)SH(g)$, נתבונן בפונקציות

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & else \end{cases}, \quad g = \begin{cases} -1 & n = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$f, g \in X_1$ שכן $deg(f) = deg(g) = 1$ וכמו כן $f(1) = 1 > -1 = g(1)$ ולכן gRf, אזי $H(f)SH(g)$. נסמן $H(f) = f_0$ ו־ $H(g) = g_0$.
מכיוון ו־ $f_0, g_0 \in X_1$ אז $deg(f_0) = deg(g_0) = 1$ ולכן $f_0(1), g_0(1) \neq 0$. נחלק למקרים:
אם $x_0 := f_0(1) = g_0(1)$, נתבונן בקבוצות $Z = \{h \in X_1 \mid h(0) = 0 \wedge h(1) \in (-1, 0)\}$, ולקבוצה זו אין סופרמום ביחס R והיא חסומה מלרע ע"י g ומלעיל ע"י f ומכיוון ו־H איזומורפיזם, אז $H[Z] \subseteq \{t \in X_1 \mid t(1) = x_0 \wedge f_0(0) < t(0) < g_0(0)\}$ ואין סופרמום ביחס S(!). מצד שני, יהי $r = \sup\{t(0) \mid t \in H[Z]\}$, r קיים לפי תכונת השלמות של הממשיים עם הסדר הרגיל(!). אבל אז הפונקציה

$$h_0(n) = \begin{cases} x_0 & n = 1 \\ r & n = 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

היא סופרמום של הקבוצה $H[Z]$(!), סתירה.
אם $f_0(1) \neq g_0(1)$, מכיוון ו־ g_0Sf_0, אז $g_0(1) < f_0(1)$ ולכן קיים $r \in (g_0(1), f_0(1)) \setminus \{0\}$. נתבונן בקבוצה $Y = \{t \in X_1 \mid t(1) = r\}$, הקבוצה Y חסומה מעיל ע"י f_0 ומלרע ע"י g_0(!), בנוסף אין לה סופרמום ואינפמום ביחס S(!). מכיוון ו־H^{-1} איזומורפיזם, הקבוצה $H^{-1}[Y]$ חסומה מלעיל ע"י f ומלרע ע"י g ואין סופרמום ואינפמום(!). אם כך

$$H^{-1}[Y] \subseteq \{z \in X_1 \mid z(0) = 0 \wedge z(1) \in (-1, 1)\}$$

נסמן ב־ $r_m = \inf\{Z(1) \mid Z \in H^{-1}[Y]\} \in [-1,1)$ וב־ $r_M = \sup\{Z(1) \mid Z \in H^{-1}[Y]\} \in (-1,1]$ שקיימים מתכונת השלמות של $\mathbb{R}$ עם הסדר הרגיל (!). וכמו כן, מכיוון ו־Y מכילה לפחות שני איברים אז גם $H^{-1}[Y]$ מכילה לפחות שני איברי, כלומר $r_m < r_M$. נובע מכאן כי לפחות אחד מבין r_m, r_M בהכרח שונה מ־0. בלי הגבלת הכלליות $r_m \neq 0$. נגדיר

$$p(n) = \begin{cases} r_m & n = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

אז p אינפימום של הקבוצה $H^{-1}[Y]$(!), סתירה.

שאלה 4

<u>א.</u> נתונה קבוצה A ויחס שקילות R על A, כך שלכל $x \in A$, מתקיים כי $|[x]_R| = b$ באשר b עוצמה קבועה כלשהי.
הוכיחו כי $|A| = |A/R| \cdot b$.

<u>ב.</u> על $\mathbb{R}$, נגדיר את יחס השקילות $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$ (אין צורך להוכיח כי זה יחס שקילות).
נניח כי לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a \cdot a = a$, חשבו את $|\mathbb{R}/R|$.

שאלה 5

תהא B קבוצה. פונקציה $f : B \to B$ נקראת העתקת זיג־זג, אם, לכל $x \in B$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$, $f^n(x) \neq x$. הוכיחו באמצעות הלמה של צורן כי לכל קבוצה A קיימת העתקת זיג־זג חח"ע $f : B \to B$ כך ש־ $B \subseteq A$ ומתקיים $|A \setminus B| < \aleph_0$.

פתרון: נגדיר Σ להיות קבוצה כל הפונקציות $f : B \to B$ שהן העתקות זיג־זג חח"ע כך ש־ $B \subseteq A$. על Σ נגדיר את יחס ההכלה שראינו בכיתה כי הוא יחס סדר חלש. נוכיח כי תנאי הלמה של צורן מתקיימים:
תחילה $\emptyset \in \Sigma$ שכן, $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ היא פונקציה חח"ע באופן ריק וגם העתקת זיג־זג באופן ריק שכן $\forall x \in \emptyset. f^n(x) \neq x$. לכן $\emptyset \in \Sigma$ מה שמוכיח כי $\Sigma \neq \emptyset$.
נוכיח כעת כי לכל שרשרת יש חסם עליון. תהא $C \subseteq \Sigma$ שרשרת, נגדיר $f = \cup C = \cup_{h \in C} h$. ברור כי f חסם עליון ביחס ההכלה, נוכיח כי $f \in \Sigma$. לפי טענה שראינו בכיתה, איחוד של שרשרת של פונקציות חלקיות ל־A היא פונקציה חלקית ל־A ולכן נסמן ב־$B = dom(f)$ אז $f : B \to B$ היא פונקציה חלקית ל־A. מאותה הטענה, מתקיים כי $B = \cup_{h \in C} dom(h)$ ולכל $h \in C$, $f \restriction dom(h) = h$. נוכיח כי f חח"ע, יהיו $b_1, b_2 \in B$ ונניח כי $b_1 \neq b_2$. אז קיימים $h_1, h_2 \in C$ כך ש־ $b_1 \in dom(h_1) \wedge b_2 \in dom(h_2)$. כיוון ו־$C$ שרשרת, $h_1 \subseteq h_2 \vee h_2 \subseteq h_1$, בה"כ $h_1 \subseteq h_2$ ולכן $dom(h_1) \subseteq dom(h_2)$ ולכן $b_1, b_2 \in dom(h_2)$. מכיוון ו־$C \subseteq \Sigma$, $h_2 \in \Sigma$ ולכן h_2 חח"ע. מכאן נובע כי $f(b_1) = h_2(b_1) \neq h_2(b_2) = f(b_2)$ אזי f חח"ע. נוכיח כי h זיגזג, יהי $x \in B$ אז קיים $h \in C$ כך ש־ $x \in dom(h)$. נוכיח באינדוקציה על n כי $f^n(x) = h^n(x)$ ומכיוון ו־h זיגזג ייבנע כי $x \neq h^n(x)$. עבור $n = 1$, $f^1(x) = f(x) = h(x)$. נניח נכונות ל־n, ונוכיח ל־$n+1$, $f^n(x) = h^n(x)$ ומכיוון־ $h : dom(h) \to dom(h)$, נקבל כי $h^n(x) \in dom(h)$ ולכן $f^n(x) \in dom(h)$. לכן $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = h(f^n(x)) = h(h^n(x)) = h^{n+1}(x)$ כדרוש. לפי הלמה של צורן יש $f \in \Sigma$ איבר מירבי. נוכיח כי $|A \setminus dom(f)| < \aleph_0$. אחרת, $|A \setminus dom(f)| \geq \aleph_0$ ויש פונקציה חח"ע $g : \mathbb{N} \to A \setminus dom(f)$. נסמן ב־ $a_n = g(n)$ ו־ $C = dom(f) \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר $h : C \to C$ באופן הבא:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in dom(f) \\ a_{n+1} & \exists n. x = a_n \end{cases}$$

נוכיח כי h חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in C$, אם ונניח כי $x_1 \neq x_2$, אם $x_1, x_2 \in dom(f)$ אז $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$ שכן f חח"ע. אם $x_1 = a_n, x_2 = a_m$ אז בהכרח $n \neq m$ שכן g חח"ע ולכן $n + 1 \neq m + 1$ ושוב מכך ש־g חח"ע, $h(x_1) = a_{n+1} \neq a_{m+1} = h(x_2)$. אם $x_1 \in dom(f), x_2 \in Im(g)$, אז $h(x_1) = f(x_1) \in dom(f)$ לפי הגדרת Σ וגם $h(x_2) \in Im(g)$ לפי הגדרת h ומכיוון ו־ $Im(g) \cap dom(f) = \emptyset$, נקבל כי $h(x_1) \neq h(x_2)$. המקרה ש־$x_1 \in Im(g), x_2 \in dom(f)$ סימטרי. נוכיח כי h זיגזג, יהי $x \in C$, אם $x \in dom(f)$ אז לכל $n \in \mathbb{N}_+$, $h^n(x) = f^n(x) \neq x$ ואם $x = a_n$, אז $h^m(x) = a_{n+m} \neq a_n = x$ ולכן h זיגזג. כיוון ו־ $h \restriction dom(f) = f$ אז $f \subseteq h$ וזו סתירה למירביות f.

בהצלחה!