Distance sous-riemannienne et sous-analycité

Sébastien Jacquet

Table des matières

Introduction.

Une structure de variété sous-riemannienne sur une variété connexe M de dimension n est donnée par une distribution de m-plans Δ munie d'une métrique g. La géométrie sous-riemannienne est une généralisation de la géométrie riemannienne qui est le cas particulier où Δ est le fibré tangent.

Un chemin horizontal est un chemin $\gamma : [0,1] \longmapsto M$ dont la dérivée est presque tangente à Δ c'est-à-dire

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}.$$

La métrique sur Δ nous permet de définir la longueur et l'énergie d'un tel chemin par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}}\, dt \text{ et } E(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\, dt.$$

Même si la variété est connexe, deux points ne sont pas forcément reliés par un chemin horizontal. Par exemple si la distribution est intégrable, il existe un feuilletage dont les plans tangents aux feuilles sont Δ, et deux points sont reliés par un chemin horizontal si ils appartiennent à une même feuille. Nous nous intéressons en géométrie sous-riemannienne au cas non intégrable, c'est-à-dire, lorsque l'algèbre de Lie engendrée par la distribution décrit tout le fibré tangent, c'est la condition de Hörmander. Le théorème de Chow ([7, 20, 23]) affirme que sous cette hypothèse, il existe toujours un chemin horizontal entre deux points quelconques de la variété.

Sous l'hypothèse de Hörmander nous pouvons définir une structure d'espace métrique sur la variété, en définissant la distance entre deux points comme étant l'infimum des longueurs des chemins horizontaux joignant ces deux points :

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma)\, /(x,y) = (\gamma(0), \gamma(1))\}.$$

Cette distance d est appelée distance sous-riemannienne, ou distance de Carnot-Carathéodory.

Les propriétés métriques de cette structure sont étudiés dans les articles [10, 5, 15, 29]. Comme pour les variétés riemanniennes, la topologie définie par la distance sous-riemannienne redonne la topologie initiale de la variété, en particulier, d est continue. Par contre, si g est la restriction à Δ d'une métrique riemannienne, et si δ représente la distance riemannienne induite par cette métrique, les deux distances d et δ ne sont pas équivalentes, mais d est höldérienne par rapport à δ.

L'objet de cette thèse est d'étudier la sous-analycité de la distance sous-riemannienne. Nous adoptons le point de vue suivant : l'espace des chemins horizontaux de classe H^1 est une variété hilbertienne et E est une fonction sur $\mathcal{H}$. Soit e l'application extrémité qui à un chemin γ lui associe $(\gamma(0), \gamma(1))$ dans $M \times M$. Alors d est définie par

$$d^2(y,z) = f(x) = \inf\{E(\gamma) \setminus e(\gamma) = x = (y,z)\}.$$

Au premier chapitre, nous faisons quelques rappels concernant les résultats de base de la géométrie sous-riemannienne. En particulier, nous redonnons une étude de la structure de variété Hilbertienne de l'espace des chemins horizontaux, ainsi que des courbes hamiltoniennes et anormales.

Nous étudions au chapitre 2 la sous-analycité d'une fonction f définie de cette manière par un diagramme du type :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{E}"'] & N \arrow[dl, "f"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Des résultats sur la sous-analycité sont donnés par M. Tamm [27], mais en imposant à l'application e d'être une submersion en tout point γ de $\mathcal{H}$ qui réalise le minimum. Cette condition est trop restrictive pour notre problème. En effet, en géométrie sous-riemannienne, l'application extrémité possède toujours des singularités, ce sont les courbes anormales. En particulier un chemin constant est toujours minimisant et toujours anormal. Si la distribution satisfait la condition H^2-forte (définition 1.7), l'application extrémité est une submersion en tout point sauf au chemin constant. Dans [8], Z. Ge applique les méthodes de M. Tamm après avoir réalisé un éclatement du chemin constant, mais ceci n'est possible que dans le cas H^2-fort.

Nous réalisons une étude précise des points minimisants, c'est-à-dire des points qui réalisent le minimum de E sur des fibres $e^{-1}(x)$. Un point de $\mathcal{H}$ est minimisant s'il appartient au bord de l'image de $\mathcal{H}$ par l'application $\theta = e \times E$ et donc c'est une singularité de θ, c'est-à-dire que θ n'est pas une submersion en un point minimisant.

Une condition nécessaire plus fine s'obtient en étudiant la dérivée seconde de θ en une singularité. Le théorème 2.25 donne une borne sur l'indice de θ en un minimum local:

Théorème 2.25. A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1].

Soit π une application d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans une variété M de dimension n et E une fonction sur $\mathcal{H}$.

i) Si l'indice de $\pi''(\gamma)$ est plus grand que la codimension de $ImD\pi(\gamma)$ dans T_xM alors l'image d'un voisinage de γ par π est un voisinage de x.

ii) Si γ est minimisant et si l'indice de $\pi''(\gamma)$ est strictement plus grand que la codimension de $ImD\pi(\gamma)$ dans T_xM alors γ est un point critique de E.

Soit $\theta = (\pi, E)$:

iii) Si γ est minimisant, alors l'indice de θ est strictement plus petit que la codimension de $ImD\theta(\gamma)$ dans T_yN.

Nous terminons ce chapitre avec le théorème 2.26 qui est une généralisation du théorème de Tamm :

Théorème 2.26. Supposons que

H1) la restriction de π à l'ensemble des points minimisants soit surjective et propre.

H2) Pour tout γ minimisant et λ non nul dans T_z^*N vérifiant $\lambda \cdot \theta'(\gamma) = 0$ et tel que l'indice de $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ soit plus petit que la codimension de $Im\theta'(\gamma)$ dans T_zN, l'opérateur associé à la forme $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ est un opérateur de Fredholm diagonalisable.

Alors f est une fonction sous-analytique sur M.

Nous appliquons ensuite, au troisième chapitre, ces résultats à la géométrie sous-riemannienne dans le cas local.

Les singularités de θ sont de deux sortes, soit ce sont des point critiques de l'énergie au sens où la différentielle de l'énergie s'annule sur le noyau de la différentielle de l'application extrémité, soit ce sont des singularités de l'application extrémités.

Une courbe minimisante qui n'est pas un point critique de l'énergie (appelée courbe strictement anormale) possède un relèvement anormal contenu dans l'orthogonal de Δ^2 :

Corollaire 3.16.A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1].

Si une courbe minimisante γ est strictement anormale alors il existe un relèvement anormal de γ dans $(\Delta^2)^{\perp}$.

Si Δ est de degré 2 où si Δ^2 est une distribution régulière qui satisfait la condition H^2-forte alors toutes les courbes minimisantes sont hamiltoniennes.

Nous terminons ce chapitre par un calcul d'indice en terme de points conjugués (théorème 3.26), ce qui représente une contribution à l'étude du lieu conjugué en géométrie sous-riemannienne.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la sous-analycité de la distance sous-riemannienne. Dans la première section, nous limitons notre étude aux distributions de degré 2.

Il existe sur le fibré cotangent de M un flot hamiltonien dont les projections sur M (appelées courbes hamiltoniennes) sont des courbes localement minimisantes. Il permet de définir une application exponentielle qui envoie les droites passant par l'origine du plan cotangent sur des courbes localement minimisantes. Contrairement au cas riemannien cette application n'est pas un difféomorphisme au voisinage de la section nulle du fibré cotangent et n'est pas propre.

Nous montrons le résultat suivant pour les distributions de degré 2 :

Théorème 4.1. *Soit Δ est une distribution de degré 2 sur une variété M et g un métrique sur Δ. Pour tout x dans M, il existe un voisinage V de x et une constante K tels que toute courbe γ minimisante ayant ses extrémités dans V s'écrit $\gamma(t) = exp_{\gamma(0)}(tq_0)$ avec q_0 dans $T^*_{\gamma(0)}M$ et $|q_0| < K$.*

Nous déduisons de ce résultat la sous-analycité de la distance sous-riemannienne pour les distribution de degré 2 (théorème 4.2).

Le Théorème 4.1 permet de montrer la sous-analycité de la distance sous-riemannienne directement à partir de l'application exponentielle, mais il est fausse en général. Nous montrerons néanmoins que si Δ^2 est une distribution régulière qui satisfait la condition Hörmander forte à l'ordre 2, alors :

Théorème 4.14. *Supposons que Δ^2 satisfait la condition H^2-forte, alors l'application*

$$x \longmapsto d(0, x)$$

est sous-analytique sur U.

Nous obtenons ce résultat en faisant un éclatement du chemin constant et en utilisant les résultats du deuxième chapitre.

Dans [2], il est montré que dans le cas Martinet plat, les sphères sous-riemanniennes ne sont pas sous-analytiques. Nous ne pouvons donc pas espérer de résultat général concernant la sous-analycité de la distance sous-riemannienne.

Chapitre 1

Géométrie sous-riemannienne.

Notations : dans tout cette thèse, si x est dans un espace vectoriel V et λ est dans V^*, nous noterons $\langle \lambda, x \rangle$ la valeur de la forme λ appliquée à x. Si f est une application d'un espace W dans V, alors $\lambda \cdot f$ est la fonction sur W définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \langle \lambda, f(y) \rangle$ pour tout y dans W.

Dans tout le chapitre, l est égal à $+\infty$ ou ω. Tous les objets considérés sont de classe C^l.

1.1 Définitions et exemples.

Soit M une variété de dimension n.

Définition 1.1 *Une structure sous-riemannienne sur M est la donnée de :*
i) une distribution Δ, c'est-à-dire un sous-fibré du fibré tangent TM,
ii) une métrique g sur Δ.

Cette définition est équivalente à la définition suivante [22, 19] :

Définition 1.2 *Une structure sous-riemannienne sur M est la donnée d'une application*

$$\begin{array}{rcl} G : T^*M & \longrightarrow & TM \\ (x, \xi) & \longmapsto & (x, G_x\xi) \end{array}$$

où, pour tout x dans M, l'application $\xi \mapsto G_x\xi$ est une application linéaire de T_x^*M dans T_xM telle que :
i) $\langle \lambda, G_x\xi \rangle = \langle \xi, G_x\lambda \rangle$ pour tout λ et ξ dans T_x^*M,
ii) $\langle \xi, G_x\xi \rangle \geq 0$ pour tout ξ dans T_x^*M,
iii) l'image de G, ImG, est un sous-fibré du fibré tangent.

Exemple 1.3 *: le cas local.*

Nous supposons dans cet exemple que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que Δ est engendrée par m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$, la métrique g étant telle que ces m champs de vecteurs soient orthonormés. Soit x dans M et ξ dans T_x^*M, alors

$$G_x\xi = \sum_{i=1}^{m} g_x(G_x\xi, X_i(x))X_i(x) = \sum_{i=1}^{m}\langle \xi, X_i(x)\rangle X_i(x).$$

Fin de l'exemple.

Notons $\Delta^\perp$ l'annulateur de Δ :

$$\Delta_x^\perp = \{\lambda \in T_x^*M \;/\; \langle \lambda, X\rangle = 0 \;\forall X \in \Delta_x\}.$$

Alors

$$\lambda \in \Delta_x^\perp \Longleftrightarrow g_x(G_x\lambda, X) = 0 \;\; \forall X \in \Delta_x \Longleftrightarrow G_x\lambda = 0$$

et donc $\Delta^\perp = \ker G$.

Considérons maintenant la suite de sous-espaces de TM

$$\Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots \subset \Delta^r \subset \cdots \subset TM$$

définis par récurrence de la manière suivante :

- $\Delta^1 = \Delta$
- Δ_x^{r+1} est l'espace engendré par les vecteurs de la forme $[X, Y]_x$, où X et Y sont des germes en x de champs de vecteurs, X à valeurs dans Δ et Y à valeurs dans Δ^r.

Définition 1.4 *Le degré de nonholonomie en x, noté $r(x)$ est le plus petit entier, s'il existe, tel que $\Delta_x^{r(x)}$ soit égal à T_xM. Nous poserons $r(x) = +\infty$ si $\Delta_x^r \neq T_xM$ pour tout entier r.*

La distribution Δ satisfait la condition de Hörmander si pour tout x dans M, $r(x)$ est fini.

La distribution Δ est dite de degré r si $r(x)$ est égal à r pour tout x dans M.

La distribution Δ est dite régulière (ou équi-régulière) si, pour tout entier r, $\dim \Delta_x^r$ ne dépend pas de x. Elle sera dite singulière dans le cas contraire.

Exemple 1.5 *: le groupe de Heisenberg.*

Posons $M = \mathbb{R}^3$ et Δ est la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs $X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$ et $X_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Alors, pour tout x dans M, $[X_1, X_2]_x = \frac{\partial}{\partial x_3}$ et donc $r(x) = 2$. Ainsi, Δ est une distribution de degré 2, en particulier elle est régulière et satisfait la condition de Hörmander.

Exemple 1.6 *: le cas Martinet plat (voir [2]).*

Posons $M = \mathbb{R}^3$ et Δ est la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs $X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $X_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1^2\frac{\partial}{\partial x_3}$. Alors, pour tout x dans M, $[X_1, X_2]_x = x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$ et $[X_1, [X_1, X_2]]_x = \frac{\partial}{\partial x_3}$. Ainsi Δ_x^2, l'espace engendré par

$X_1(x)$, $X_2(x)$ et $[X_1, X_2]_x$, est égal à T_xM si et seulement si x_1 est non nul et pour tout x, $X_1(x)$, $X_2(x)$, $[X_1, X_2]_x$ et $[X_1, [X_1, X_2]]_x$ engendrent T_xM. Ainsi $r(x)$ est égal à 2 si $x_1 \neq 0$ et à 3 si $x_1 = 0$. La distribution satisfait donc la condition de Hörmander mais elle est singulière.

Définition 1.7 *La distribution Δ satisfait la condition de Hörmander forte à l'ordre 2 (H^2-forte) si pour tout x dans M, tout X dans Δ_x et tout Z dans T_xM il existe des germes en x de champs de vecteurs $\tilde{X}$ et Y à valeurs dans Δ ainsi que W dans Δ_x tels que $\tilde{X}(x)$ soit égal à X et $W + [\tilde{X}, Y]_x = Z$.*

Remarque : dans l'exemple du groupe de Heisenberg, Δ satisfait la condition de Hörmander forte à l'ordre 2.

1.2 Distributions (-1)-homogènes.

Nous notons $x = (x_1, \cdots, x_n)$ les éléments de $\mathbb{R}^n$ et pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-indice dans $\mathbb{N}^n$:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Nous nous donnons un système de poids sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une suite croissante d'entiers strictement positifs $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$, et pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ nous posons :

$$\omega(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j.$$

Définissons maintenant la notion de degré par rapport au système de poids.

Définition 1.8

Le degré d'un monôme x^α est par définition égal à $\omega(\alpha)$.

Un polynôme est dit (quasi) homogène de degré k s'il est combinaison linéaire de monômes de degré k :

$$P(x) = \sum_{\omega(\alpha)=k} a_\alpha x^\alpha.$$

Par convention, un polynôme de degré négatif est le polynôme nul.

Un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^n$ est dit (quasi) homogène de degré k, k appartenant à $\mathbb{Z}$, s'il est de la forme

$$X(x) = \sum_{j=1}^{n} X^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les X_j sont des polynômes homogènes de degré k_j avec $k = k_j - \omega_j$.

Remarque :

- un polynôme de degré k ne fait intervenir que les variables x_j telles que ω_j soit au plus k.

- si P est un polynôme homogène de degré k, alors $\dfrac{\partial P}{\partial x_j}$ est un polynôme homogène de degré $k-\omega_j$,

- $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est homogène de degré $-\omega_j$ et si P est un polynôme homogène de degré k, $P\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est un champ de vecteurs homogène de degré $k-\omega_j$,

- un champ de vecteurs de degré $-\omega_n - 1$ est nul.

Définition 1.9 *Pour t dans $\mathbb{R}$, nous notons δ_t l'application de $\mathbb{R}^n$ dans lui même appelé dilatation par t et définie par*

$$\delta_t x = (t^{\omega_1} x_1, \cdots, t^{\omega_n} x_n).$$

Pour $x \in R^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ nous appelons pseudo-norme de x :

$$||x|| = (\sum_{j=1}^{n} (x_j^{\frac{2\tau}{\omega_j}}))^{\frac{1}{2\tau}} \quad \textit{où } \tau = \prod_{j=1}^{n} \omega_j.$$

Remarque :

- pour tout réel t et x dans M :

$$||\delta_t x|| = t||x||,$$

- si P est un polynôme homogène de degré k :

$$P(\delta_t x) = t^k P(x),$$

- si X est un champ de vecteurs homogène de degré k :

$$\delta_t * X = t^k X,$$

- si X_i, $i = 1, 2$, sont des champs de vecteurs homogènes de degré k_i, alors leur crochet de Lie

$$[X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial X_2^k}{\partial x_j} X_1^j - \frac{\partial X_1^k}{\partial x_j} X_2^j) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

est homogène de degré $k_1 + k_2$.

Définition 1.10 *Une distribution (-1)-homogène sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à un système de poids $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ est une distribution Δ satisfaisant la condition de Hörmander et engendrée par m champs de vecteurs, $\{X_1, \cdots, X_m\}$, homogènes de degré -1 par rapport au système de poids $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$. La métrique g sur Δ est la métrique rendant ces champs de vecteurs orthonormés. Le degré de nonholonomie en 0, $r(0)$, est alors égal à ω_n.*

Remarque : les distributions (-1)-homogènes sur $\mathbb{R}^n$ sont les structures sous-riemanniennes qui apparaissent dans l'étude du cône tangent [10, 15, 5]. Elles nous serons utiles au dernier chapitre. Dans le cas du groupe de Heisenberg (exemple 1.5) Δ est une distribution (-1)-homogène pour le système de poids $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$. Dans le cas Martinet plat (exemple 1.6), Δ est une distribution (-1)-homogène pour le système de poids $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$.

Exemple 1.11
Nous considérons sur $\mathbb{R}^7$ la 3−distribution engendrée par les champs de vecteur

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3\frac{\partial}{\partial x_5} + x_4\frac{\partial}{\partial x_7} \\ X_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_3\frac{\partial}{\partial x_6} + x_5\frac{\partial}{\partial x_7} \\ X_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_5} - x_2\frac{\partial}{\partial x_6} - x_6\frac{\partial}{\partial x_7} \end{aligned}$$

Alors pour le système de poids $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$, $\omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 2$, $\omega_7 = 3$, Δ est une distribution (-1)-homogène. Son degré denonholonomie est égal à 3. Posons

$$\begin{aligned} X_4(x) = [X_1, X_2](x) &= 2\frac{\partial}{\partial x_4} - (x_1 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_7} \\ X_5(x) = [X_1, X_3](x) &= 2\frac{\partial}{\partial x_5} \\ X_6(x) = [X_2, X_3](x) &= -2\frac{\partial}{\partial x_6} - (x_3 + x_1)\frac{\partial}{\partial x_7}. \end{aligned}$$

La distribution Δ^2 est engendrée par $X_1, \cdots, X_6$. Vérifions qu'elle satisfait la condition de Hörmander forte à l'ordre 2. Grace aux dilatations, il suffit de le vérifier au voisinage de l'origine. Il suffit de vérifier que pour tout x au voisinage de l'origine, pour toute combinaison linéaire X des $X_1, \cdots, X_6$, il existe une combinaison linéaire Y des $X_1, \cdots, X_6$ telle que $\langle dx_7, [X, Y](x)\rangle$ soit non nul et donc que X n'est pas dans le noyau de la forme quadratique $(X, Y) \mapsto \langle dx_7, [X, Y](x)\rangle$. Ceci revient à montrer que la matrice $(\langle dx_7, [X_i, X_k](x)\rangle)$ n'a pas de noyau non trivial. Il suffit donc de montrer que le déterminant de la matrice $(\langle dx_7, [X_i, X_k](0)\rangle)$ est non nul.

Exemple 1.12 *Distribution (-1)-homogène de degré 2.*
Nous considérons sur $\mathbb{R}^n$ le système de poids $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ où $\omega_j = 1$ pour j allant de 1 à m et $\omega_j = 2$ sinon. Une distribution (-1)-homogène de degré 2 est alors engendrée par des champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ de la forme :

$$X_i(x) = \sum_{\omega_j = 1} a_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\omega_j = 2}\sum_{\omega_k = 1} b_{ik}^j x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où a_i^j et b_{ik}^j sont réels et quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, nous pouvons supposer que $a_i^j = \delta_{ij}$.

Montrons que toute distribution (-1)-homogène de degré 2 peut être vue comme une distribution invariante à gauche sur un groupe de Lie nilpotent de rang 2.

Soit $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} x_j & \text{si} \quad \omega_j = 1 \\ x_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}^j x_i x_k & \text{si} \quad \omega_j = 2. \end{cases}$$

Soit y dans $\mathbb{R}^n$ et $x = \varphi^{-1}(y)$, calculons

$$Y_i(y) := \varphi_* X_i(y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) X_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Un simple calcul permet de vérifier que :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) X_i^k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k = i \\ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} b_{il}^j x_l & \text{si} \quad \omega_j = 2 \text{ et } k = j \\ -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} (b_{li}^j + b_{il}^j) x_l & \text{si} \quad \omega_j = 2 \text{ et } k = i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et finalement

$$Y_i(y) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{\omega_j = 2} \sum_{k=1}^{m} (b_{ik}^j - b_{ki}^j) y_k \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En notant B^j la matrice antisymétrique $(b_{ki}^j - b_{ik}^j)_{1 \leq i,j \leq m}$ nous obtenons

$$Y_i(y) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{\omega_j = 2} \langle y, B^j e_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Montrons que les matrices B^j forment une famille libre de l'espace des matrices antisymétriques de $\mathbb{R}^m$. En effet, supposons que cette famille ne soit pas libre. Il existe alors $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j$ non nul de $(\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\lambda_j = 0$ pour $\omega_j = 1$ et $\sum_{\omega_i = 2} \lambda_j B^j$ soit nulle. Alors $\langle \lambda, Y_i(0) \rangle = 0$ et

$$\langle \lambda, [Y_i, Y_k](0) \rangle = \langle e_i, (\sum_{\omega_i = 2} \lambda_j B^j) e_k \rangle = 0.$$

pour tout $i, k = 1, \cdots m$. Ceci contredit le fait que la distribution soit de degré 2.

Soit V un espace euclidien de dimension m. Nous identifions $\wedge^2 V^*$ l'espace des 2-formes antisymétriques sur V avec l'espace des endomorphismes antisymétriques de V par la relation :

$$\nu_A(X, Y) = \langle X, A_\nu Y \rangle$$

où $\langle \, , \, \rangle$ est le produit scalaire sur V.

Notations : un élément A de $\wedge^2 V^*$ représentera aussi bien une matrice antisymétrique qu'une 2-forme antisymétrique. Nous noterons indifféremment $A(X, Y)$ ou $\langle X, AY \rangle$.

Si $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est une base orthonormée de V, pour A et B dans $\wedge^2 V^*$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_i, Be_i \rangle$$

est indépendant du choix de cette base et munit $\wedge^2 V^*$ d'un produit scalaire. Ceci nous donne un produit scalaire sur $M = V \times \wedge^2 V^*$:

$$\langle (\alpha, \mu), (\beta, \nu) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \mu, \nu \rangle.$$

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées nous pouvons supposer que les B^j forment une famille orthonormée de $\wedge^2 V^*$ avec $V = \mathbb{R}^m$. Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\wedge^2 V^*$ engendré par ces matrices. L'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $V \times \wedge^2 V^*$ qui à e_j associe $(e_j, 0)$ pour $\omega_i = 1$ et $(0, B^j)$ si $\omega_j = 2$ permet d'identifier $\mathbb{R}^n$ avec $V \times \mathcal{D}$.

Montrons que la distribution engendrée par $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ peut être vue comme un distribution invariante à gauche pour une structure de groupe de Lie nilpotent gradué sur $V \times \mathcal{D}$.

Structure de groupe de Lie sur $M = V \times \mathcal{D}$: Soit X et Y deux éléments de $V \times \wedge^2 V^*$, posons

$$[X, Y] = 0$$

si X ou Y est dans $\{0\} \times \mathcal{D}$. Pour X et Y dans $V \times \{0\}$, $[X, Y]$ est l'élément de $\mathcal{D}$ défini par la relation :

$$\langle [X, Y], \nu \rangle = \nu(X, Y)$$

pour toute 2-forme antisymétrique ν dans $\mathcal{D}$.

Ceci munit $V \times \mathcal{D}$ d'une structure d'algèbre de Lie nilpotente de rang 2 telle que $\mathcal{D}$ soit le centre. Sur une base orthonormée $\{\nu_j \,;\, j = 1, \cdots, q\}$ de $\mathcal{D}$ le crochet de Lie de deux éléments X et Y de V s'écrit :

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{p} \nu_j(X, Y) \nu_j \ .$$

Nous pouvons alors munir $M = V \times \mathcal{D}$ d'une structure de groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est celle décrite précédemment. La multiplication sur M est donnée par :

$$(a, \alpha) * (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta + \frac{1}{2}[a, b])$$

avec (a, α) et (b, β) dans $V \times \mathcal{D}$.

Structure sous-riemannienne sur $V \times \mathcal{D}$: Considérons la distribution Δ invariante à gauche telle que $\Delta_0 = V$, munie de la métrique g invariante à gauche telle que $g_0(\, , \,) = \langle \, , \, \rangle$. Une base orthonormée de Δ est alors donnée par

$$X_i(x, \beta) = (e_i, \frac{1}{2}[x, e_i]) = (e_i, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{q} \nu_j(x, e_i) \nu_j)$$

ce qui nous redonne bien notre distribution initiale en prenant $\nu_j = B_j$.

Nous illustrerons la majorité de nos résultats avec les distributions (-1)-homogènes de degré 2. Pour plus de détails sur les distributions (-1)-homogènes voir [5, 21, 28, 29]

1.3 L'espace $H^1(M)$.

Fixons nous $I = [a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Nous notons $\langle .,. \rangle_n$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $|.|_n$ la norme associée. Soit $L_n^2(I)$ l'espace des applications mesurables u de I dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\int_a^b |u(t)|_n dt < +\infty$. Muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_a^b \langle u(t), v(t)\rangle_n dt$, $L_n^2(I)$ est un espace de Hilbert séparable. Lorsque $I = [0,1]$, nous écrirons L_n^2 au lieu de $L_n^2(I)$. Nous considérons maintenant $H_n^1(I)$ (H_n^1 si $I = [0,1]$) l'espace des applications continues γ de I dans $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe ν dans $L_n^2(I)$ vérifiant

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_a^t \nu(s)ds \quad \forall t \in I.$$

Un élément γ de $H_n^1(I)$ est dérivable presque partout et sa dérivée $\dot\gamma$ est presque partout égale à ν.

Pour γ et φ dans $H_n^1(I)$ nous posons :

$$\langle \gamma, \varphi\rangle_1 = \langle \gamma(0), \varphi(0)\rangle_n + \langle \dot\gamma, \dot\varphi\rangle_{L^2}.$$

Muni de ce produit scalaire, $H_n^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable qui s'identifie isométriquement à $\mathbb{R}^n \times \mathrm{L}_n^2(\mathrm{I})$.

Notation : pour v dans L_n^2 nous notons $\int v$ l'élément de H_n^1 défini par :

$$(\int v)(t) = \int_0^t v(s)\, ds.$$

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $H^1(I,U)$, ($H_n^1(U)$ si $I = [0,1]$), l'espace des chemins H^1 de U, sous-espace de $H_n^1(I)$ formé des chemins tracés dans U, est un ouvert de $H_n^1(I)$.

Lemme 1.13 *[18] Soit f une application de classe C^l de U dans $\mathbb{R}^q$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} F \ : & H_n^1(U) & \longrightarrow & H_q^1 \\ & \gamma & \longmapsto & F(\gamma) \end{array}$$

telle que $F(\gamma)(t) = f(\gamma(t))$ est de classe C^l et pour $1 \le k \le l$

$$D^k F(\gamma)(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)(t) = D^k f(\gamma(t))(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)).$$

Définition 1.14 *Soit γ un chemin continu de M et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ une subdivision de $[0,1]$ telle que pour tout i, $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ soit tracé dans une carte (U_i, φ_i). Nous dirons que γ est un chemin H^1 si $\gamma^i = \varphi_i \circ \gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ appartient à $H^1([t_{i-1}, t_i], \varphi_i(U_i))$. Un tel chemin est dérivable presque partout et sa dérivée est donnée sur $[t_{i-1}, t_i]$ par :*

$$\dot{\gamma}(t) = D\varphi_i(\gamma(t))^{-1} \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \gamma_{|[t_{i-1},t_i]})(t).$$

Il est facile de vérifier que cette définition de dépend ni du choix de la subdivision, ni du choix des cartes. L'espace des chemins H^1 de M est noté $H^1(M)$. Pour tout $\sigma = \{t_1, \cdots, t_N, (U_1, \varphi_1), \cdots (U_N, \varphi_N)\}$ où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et pour tout i, (u_i, φ_i) est une carte de M, nous notons H^1_σ l'ensemble des γ de $H^1(M)$ tels que pour tout i, l'image de $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ soit contenu dans U_i.

Proposition 1.15 *[3] L'espace $H^1(M)$ est munit d'une structure de variété hilbertienne. Un atlas est donné par les cartes $(H^1_\sigma, \Phi_\sigma)$ avec :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\sigma \ : \ H^1_\sigma & \longrightarrow & H^1(U_1) \times L^2([t_1, t_2]) \times \cdots \times L^2([t_{s-1}, t_s]) \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma^1, \dot{\gamma}^2, \cdots, \dot{\gamma}^s). \end{array}$$

pour tout $\sigma = \{t_1, \cdots, t_N, (U_1, \varphi_1), \cdots (U_N, \varphi_N)\}$ décrit précédemment.

1.4 Courbes horizontales.

Définition 1.16 *Un chemin γ de classe H^1 est dit horizontal si sa dérivée $\dot{\gamma}(t)$ appartient à $\Delta_{\gamma(t)}$ presque partout. L'espace des chemins H^1 horizontaux sera noté $\mathcal{H}$.*

Soit x et y deux éléments de M. Nous notons $\mathcal{H}_x$ l'ensemble des chemins horizontaux d'origine x et $\mathcal{H}_{xy}$ l'ensemble des chemins horizontaux d'origine x et d'extrémité y.

Le première question qui se pose en géométrie sous-riemannienne est : pour tout couple de points de M, existe-t-il un chemin horizontal joignant ces deux points? une réponse complète est donnée par H. Sussmann dans [24]. Dans le cas analytique la réponse est oui si et seulement si Δ satisfait la condition de Hörmander. Dans le cas C^∞ cette condition n'est pas nécessaire mais suffisante. Historiquement, un résultat de ce type à été obtenu pas Chow [7] et Raschevsky [20] :

Théorème 1.17 Théorème de Chow.

Si Δ satisfait la condition de Hörmander et si M est connexe, alors deux points de M sont toujours reliés par un chemin horizontal.

L'espace $\mathcal{H}$ des chemins horizontaux est une sous-variété hilbertienne de $H^1(M)$. L'étude de cet espace est réalisée dans [6, 11, 3].

Nous nous limiterons dans ce chapitre au cas local, c'est à dire :
- M est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$,
- Δ est engendrée par m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ de classe C^l,

- la métrique g est telle que ces m champs de vecteurs soient orthonormés.

Il existe alors une base de n champs de 1-formes de classe C^l sur M, $\zeta^1, \cdots, \zeta^n$, telle que pour tout x dans M et X dans Δ_x :

$$\zeta_x^i(X) = \begin{cases} g_x(X, X_i) & \text{si} \quad i = 1, \cdots, m \\ 0 & \text{si} \quad i = m+1, \cdots, n. \end{cases}$$

Si γ est un chemin horizontal, sa vitesse $\dot{\gamma}$ se décompose sur la base $\{X_1, \cdots, X_m\}$ c'est-à dire, pour presque tout t dans $[0,1]$, il existe $u(t) = (u_1(t), \cdots, u_m(t))$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(\gamma(t)).$$

Pour presque tout t dans $[0,1]$, $u_i(t)$ est égal à $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), X_i(\gamma(t)))$, ce qui permet d'affirmer que l'application $t \mapsto u(t)$ est un élément de L_m^2.

Définition 1.18 *L'élément u ainsi déterminé est appelé le contrôle de γ.*

Pour x dans M, nous notons $\zeta(x)$ la matrice définie par $\zeta(x)Y = (\zeta_x^1(Y), \cdots, \zeta_x^n(Y))$ pour tout Y dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\zeta(x)$ est inversible et si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $X_i(x) = \zeta(x)^{-1} e_i$ pour $i = 1, \cdots, m$. De plus, $\tilde{g}$ définie par $\tilde{g}_x(X, Y) = \langle \zeta(x)X, \zeta(x)Y \rangle_n$ est une métrique sur M qui prolonge g et les vecteurs $\{X_j(x) = \zeta(x)^{-1} e_j\}_{j=1,\cdots,n}$ forment une base orthonormée de $T_x M$ pour cette métrique. Nous notons également $\Omega(x, Y)$ la matrice définie par $\Omega(x, Y)Z = (D\zeta(x)Z)Y$ pour tout Z dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.19 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : H^1(M) & \longrightarrow & M \times L_n^2 \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma(0), \zeta(\gamma)\dot{\gamma}) \end{array}$$

est un difféomorphisme local de classe C^l.

Preuve : le fait que $\mathcal{F}$ soit de classe C^l découle du lemme 1.13. Sa différentielle s'écrit :

$$D\mathcal{F}(\gamma)\Phi = (\Phi(0), (D\zeta(\gamma)\Phi)\dot{\gamma} + \zeta(\gamma)\dot{\Phi}).$$

Montrons que $D\mathcal{F}(\gamma)$ est un isomorphisme entre H_n^1 et $\mathbb{R}^n \times \mathrm{L}_n^2$. Soit (X, V) dans $\mathbb{R}^n \times \mathrm{L}_n^2$, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} V & = & (D\zeta(\gamma)\Phi)\dot{\gamma} + \zeta(\gamma)\dot{\Phi} \\ \Phi(0) & = & X. \end{cases}$$

La matrice $\zeta(\gamma(t))$ étant inversible pour tout t dans $[0,1]$, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{\Phi} & = & -\zeta(\gamma)^{-1}(D\zeta(\gamma)\Phi)\dot{\gamma} + \zeta(\gamma)^{-1} V \\ \Phi(0) & = & X \end{cases}$$

qui est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) & = & A(t)\Phi(t) - B(t) \\ \Phi(0) & = & X. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution d'un tel système montre que $D\mathcal{F}(\gamma)$ est un isomorphisme entre H^1_n et $\mathrm{IR}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{n}}$ et donc le lemme grâce au théorème d'inversion locale. □

Théorème 1.20 *L'espace des chemins horizontaux $\mathcal{H}$ est une sous-variété plongée de $H^1(M)$, qui s'identifie à un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathrm{IR}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{m}}$ par l'application $\mathcal{C} : \gamma \mapsto (\gamma(0), u_\gamma)$, où u_γ est le contrôle de γ.*

Le sous-espace $\mathcal{H}_x$ de $\mathcal{H}$ est une sous-variété plongée qui s'identifie à un ouvert $\mathcal{V}_x$ de L^2_m par l'application $\mathcal{C}_x : \gamma \mapsto u_\gamma$.

Preuve : d'après le lemme 1.19, l'image de $\mathcal{F}$ est un ouvert $\mathcal{W}$ de $M \times L^2_n$. Soit (x, u) dans $\mathcal{W}$, alors $\mathcal{F}(\gamma) = (x, u)$ si et seulement si γ est une solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} & = & \zeta(\gamma)^{-1} u \\ \gamma(0) & = & x \end{cases}$$

L'unicité des solutions d'un tel système assure que $\mathcal{F}$ est injective et donc un difféomorphisme de $H^1(M)$ dans $\mathcal{W}$ d'après le lemme 1.19. Nous écrivons $L^2_n = L^2_m \times L^2_{n-m}$ et donc $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{-1}(M \times L^2_m \times \{0\})$ est une sous-variété de $H^1(U)$ qui s'identifie à $(M \times L^2_m \times \{0\}) \cap \mathcal{W}$ et $\mathcal{H}_x$ s'identifie à $(\{x\} \times L^2_m \times \{0\}) \cap \mathcal{W}$. □

Définition 1.21 *Si γ est une courbe horizontale et u est son contrôle, nous noterons M_γ,la résolvante de l'equation linéarisée, et N_γ les champs H^1 de matrices $n \times n$ solutions des systèmes :*

$$\begin{cases} \dot{M}_\gamma & = & \sum_{i=1}^{m} u_i DX_i(\gamma) M_\gamma \\ M_\gamma(0) & = & I \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{N}_\gamma & = & -\sum_{i=1}^{m} u_i\, {}^t DX_i(\gamma) N_\gamma \\ N_\gamma(0) & = & I \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces matrices sont inversibles et sont reliées par les égalités

$$M_\gamma^{-1} = {}^t N_\gamma \ \ et \ \ N_\gamma^{-1} = {}^t M_\gamma.$$

le champ de matrices N_γ sera utilisé au paragraphe suivant, M_γ nous permet d'exprimer la différentielle de $\mathcal{C}^{-1}$:

Lemme 1.22 *Soit γ un chemin horizontal. La différentielle de $\mathcal{C}^{-1}$ en $(\gamma(0), u)$ est l'application qui à (μ_0, V) dans $\mathrm{IR}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{m}}$ associe $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(\gamma(0), u)(\mu_0, V)$, la solution du système*

$$T\Delta(\gamma, \mu_0, V) \begin{cases} \dot{\mu}(t) & = & \sum_{i=1}^{m} u_i(t) DX_i(\gamma(t))\mu(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i(t) X_i(\gamma(t)) \\ \mu(0) & = & \mu_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\mu(t) = M_\gamma(t)\mu_0 + M_\gamma(t)\int_0^t \sum_{i=1}^m V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\, ds.$$

Preuve : nous avons vu dans la démonstration de lemme 1.19 que μ est la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{\mu} & = & -\zeta(\gamma)^{-1}(D\zeta(\gamma)\mu)\dot{\gamma} + \zeta(\gamma)^{-1}(V,0) \\ \mu(0) & = & \mu_0 \end{cases}$$

où $(V,0)$ est dans $L^2_m \times L^2_{n-m}$. Il suffit donc de montrer que pour tout x dans M, $P = \sum_{i=1}^m P^i X_i(x)$ dans Δ_x, Y dans IR^{n} et $Z = (Z^1, \cdots Z^m, 0, \cdots, 0)$ dans IR^{n}

$$-\zeta(x)^{-1}(D\zeta(x)Y)P = \sum_{i=1}^m P^i DX_i(x)Y$$

et

$$\zeta(x)^{-1}Z = \sum_{i=1}^m Z^i X_i(x).$$

La deuxième égalité est évidente par définition de $\zeta(x)$, montrons la première : soit $\tilde{P} = \sum_{i=1}^m P^i X_i$, alors en différentiant l'égalité :

$$\zeta(y)\tilde{P}(y) = (P^1, \cdots, P^m, 0 \cdots, 0)$$

nous obtenons

$$(D\zeta(x)Y)P + \zeta(x)D\tilde{P}(x)Y = 0$$

c'est-à-dire

$$(D\zeta(x)Y)P + \zeta(x)\sum_{i=1}^m P^i DX_i(x)(x)Y = 0,$$

ce qui démontre la première égalité et donc le lemme. □

Définition 1.23 *Nous appellerons champ de vecteurs tangents le long de γ toute solution μ du système $T\Delta(\gamma, \mu_0, V)$ pour (μ_0, V) dans $\mathrm{IR}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{m}}$, V désignant le contrôle de μ et μ_0 son origine.*

Remarque : l'espace des champs de vecteur horizontaux le long de γ est le plan tangent à $\mathcal{H}$ en γ lorsque $\mathcal{H}$ est considérée comme une sous-variété de $H^1(M)$.

Notations : nous utiliserons systématiquement l'identification entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ établie au théorème 1.20. Si γ est un chemin horizontal, $x = \gamma(0)$ et u est son contrôle nous écrirons $\gamma = (x, u)$ au lieu de $\mathcal{C}(\gamma) = (x, u)$. L'espace des chemins horizontaux sera vu comme un ouvert de l'espace de Hilbert $H = \mathrm{IR}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{m}}$. Le produit scalaire sur H est noté $\langle\, ,\, \rangle_H$ et est égal à $\langle\, ,\, \rangle_n + \langle\, ,\, \rangle_{L^2}$.

Remarque : Définissons les champs de vecteurs $Y_1, \cdots, Y_{2m}$ sur $TM = M \times \mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{array}{ll} Y_i(x,X) = (X_i(x), DX_i(x)X) & i = 1, \cdots, m \\ Y_i(x,X) = (\ 0\ , X_{i-m}(x)) & i = m+1, \cdots, 2m, \end{array}$$

et notons $T\Delta$ la distribution engendrée par $Y_1, \cdots, Y_{2m}$. Alors, le fibré tangent de $\mathcal{H}$ est l'espace des courbes dans TM horizontales pour la distribution $T\Delta$.

Soit $\gamma = (x,u)$ dans $\mathcal{H}$ et (X,V) dans $\mathbb{R}^n \times L^2_m$. Posons $W_i = u_i$ pour i allant de 1 à m et $W_i = V_{i-m}$ pour i allant de $m+1$ à $2m$. Si (γ, μ) est la solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\dot\gamma, \dot\mu)(t) & = & \sum_{i=1}^{2m} W_i(t) Y_i(\gamma(t), \mu(t)) \\ (\gamma(0), \mu(0)) & = & (x, X) \end{array} \right.$$

alors $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(x,u)(X,V)$.

Fin de la remarque.

1.5 L'application extrémité.

Définition 1.24 *L'application extrémité est :*

$$\begin{array}{rcl} e\ :\ \mathcal{H} & \longrightarrow & M \times M \\ \gamma = (x,u) & \longmapsto & (\gamma(0), \gamma(1)). \end{array}$$

Nous noterons $\gamma(1) = \pi(x,u) = \pi_x(u)$.

Notations : pour $\lambda = (\alpha, \beta)$ dans $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ nous notons $\nabla_\lambda e(\gamma)$ l'élément de $\mathbb{R}^n \times L^2_m$ définit par :

$$\langle \nabla_\lambda e(\gamma), (X,V) \rangle_H = \langle \lambda, De(\gamma)(X,V) \rangle$$

pour tout (X,V) dans $\mathbb{R}^n \times L^2_m$. De même, $\nabla_\beta \pi_x(\gamma)$ est déterminé par

$$\langle \nabla_\beta \pi_x(\gamma), V \rangle_{L^2} = \langle \beta, D\pi_x(\gamma) V \rangle$$

pour tout V dans L^2_m.

Exprimons maintenant la différentielle de l'application extrémité.

Lemme 1.25 *Soit $\gamma = (x,u)$ un chemin horizontal et (X,V) un élément de $\mathbb{R}^n \times L^2_m$, alors :*

- $De(\gamma)(X,V) = (X, M_\gamma(1)X + M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\, ds)$,
- $D\pi_x(\gamma)V = M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\, ds.$

Soit $\lambda = (\alpha, \beta)$ *appartenant à* $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ *:*

$$\nabla_\lambda e(\gamma) = (\alpha + {}^t M_\gamma(1)\beta \, , \, \nabla_\beta \pi_x(\gamma))$$

avec $\nabla_\beta \pi_x(\gamma) = (\nabla^1_\beta \pi_x(\gamma), \cdots, \nabla^m_\beta \pi_x(\gamma))$ *et pour* $i = 1, \cdots, m$

$$\nabla^i_\beta \pi_x(\gamma)(s) = \langle \beta, M_\gamma(1) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s)) \rangle.$$

Preuve : l'application extrémité est la composition de $\mathcal{C}^{-1}$ avec l'application linéaire continue de H^1_n dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui à φ associe $(\varphi(0), \varphi(1))$. Posons $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(\gamma)(X, V)$ alors

$$De(\gamma)(X, V) = (\mu(0), \mu(1))$$

et d'après le lemme 1.22 $\mu(1)$ est égal à

$$M_\gamma(1)X + M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s)) \, ds.$$

Calculons maintenant le gradient de l'application extrémité. Pour $\lambda = (\alpha, \beta)$ appartenant à $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ nous avons

$$\langle \lambda, De(\gamma)(X, V) \rangle =$$

$$\langle \alpha, X \rangle + \langle \beta, M_\gamma(1)X \rangle + \langle \beta, M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s)) \, ds \rangle,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\langle \alpha +^t M_\gamma(1)\beta, X \rangle + \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(s) \langle \beta, M_\gamma(1) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s)) \rangle \, ds$$

et donne le résultat voulu. $\square$

Définition 1.26 *Une courbe horizontale* γ *est dite anormale ou singulière si c'est une singularité de l'application extrémité (i.e. e n'est pas une submersion en* γ*).*

Remarque : l'application extrémité n'est pas une submersion en γ si et seulement il existe λ non nul dans $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\langle \lambda, De(\gamma)(X, V) \rangle = 0$$

pour tout (X, V) dans $\mathbb{R}^n \times \mathrm{L}^2_m$, et donc si et seulement il existe λ non nul dans $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\nabla_\lambda e(\gamma) = 0.$$

Remarque : si Δ satisfait la condition de Hörmander forte à l'ordre 2, les seules courbes anormales sont les chemins constant ([22]).

Définition 1.27 *Un champ de covecteurs q au-dessus d'une courbe horizontale γ est appelé un relèvement de γ s'il est solution de l'équation :*

$$(T^*\Delta(\gamma)) \qquad \dot{q}(t) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, {}^t DX_i(\gamma(t))q(t).$$

Un relèvement q de γ s'écrit :

$$q(t) = N_\gamma(t)q_0$$

où q_0 est dans $\mathbb{R}^n$ et $N_\gamma(t)$ est la matrice définie en 1.21. L'espace des relèvements de γ est un espace vectoriel de dimension n qui s'identifie à $\mathbb{R}^n$ par l'application

$$q \longmapsto q(0).$$

Proposition 1.28 *Soit q un relèvement d'une courbe horizontale γ et soit $\lambda = (-q(0), q(1))$ dans $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$ alors, pour tout (X, V) dans $R^n \times L^2_m$,*

$$\lambda \cdot De(\gamma)(X, V) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i(s)\langle q(s), X_i(\gamma(s))\rangle\, ds$$

et donc

$$\nabla_\lambda e(\gamma) = (\, 0, (\langle q(s), X_1(\gamma(s))\rangle, \cdots, \langle q(s), X_m(\gamma(s))\rangle)\,)$$

La courbe γ est anormale si et seulement elle possède un relèvement non nul dans l'annulateur de Δ, c'est-à-dire :

$$q(s) \in \Delta^\perp_{\gamma(s)}$$

Démonstration : d'après le lemme 1.25, $\lambda \cdot De(\gamma)(X, V)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
& -\langle q(0), X\rangle + \langle q(1), M_\gamma(1)X\rangle \\
+ \quad & \langle q(1), M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\, ds)\rangle \\
= \quad & \langle {}^t M_\gamma(1)q(1) - q(0), X\rangle + \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \langle N_\gamma(t)\, {}^t M_\gamma(1)q(1), X_i(\gamma(s))\rangle\, ds \\
= \quad & \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \langle q(t), X_i(\gamma(s))\rangle\, ds
\end{aligned}$$

et donc par définition

$$\nabla_\lambda e(\gamma) = (\, 0, (\langle q(s), X_1(\gamma(s))\rangle, \cdots, \langle q(s), X_m(\gamma(s))\rangle)\,).$$

La courbe γ est anormale si et seulement il existe $\lambda = (\alpha, \beta)$ tel que

$$\langle \alpha, X\rangle + \langle \beta, M_\gamma(1)X\rangle + \langle \beta, M_\gamma(1) \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i(s) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\, ds)\rangle = 0$$

pour tout (X, V) dans $\mathbb{R}^n \times L^2_m$. En particulier

$$\langle \alpha, X\rangle + \langle \beta, M_\gamma(1)X\rangle = \langle {}^t M_\gamma(1)\beta + \alpha, X\rangle = 0$$

pour tout X dans $\mathbb{R}^n$ et donc $\beta = -N_\gamma(1)\alpha$.

Soit q le relèvement de γ tel que $q(0) = -\alpha$, alors $q(1) = \beta$ et donc $(\alpha, \beta) = (-q(0), q(1))$. En appliquant le calcul précédent, on voit que $\lambda \cdot De(\gamma)(X, V)$ est nul si et seulement si pour tout $i = 1, \cdots, m$ $\langle q(s), X_i(\gamma(s))\rangle = 0$. □

Exemple 1.29 *Distributions (-1)-homogènes.*

Nous considérons sur $\mathbb{R}^n$ une distribution Δ de dimension m , (-1)-homogène pour un système de poids $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ donné (voir paragraphe 1.2), $\omega_1 = \cdots = \omega_m = 1$, engendrée par une base orthonormée $\{X_1, \cdots, X_m\}$ avec

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} X_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où X_i^j est homogène de degré $\omega_j - 1$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, nous pouvons supposer que pour $\omega_j = 1$, $X_i^j = \delta_{ij}$, c'est-à-dire $X_i^j(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Les dilatations agissent sur l'espace des chemins horizontaux de la manière suivante : soit γ une courbe horizontale d'origine nulle et soit u son contrôle, alors la j^{eme} composante de γ satisfait

$$\dot{\gamma}_j = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i^j(\gamma)$$

et en multipliant par a^{ω_j} où a est réel,

$$a^{\omega_j} \dot{\gamma}_j = \sum_{i=1}^{m} a u_i a^{\omega_j - 1} X_i^j(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} a u_i X_i^j(\delta_a \gamma).$$

Ceci montre que $\delta_a \gamma$ est horizontale et que son contrôle est au. Nous avons alors

$$\pi_0(au) = \delta_a \pi_0(u).$$

Une particularité d'une telle distribution est la forme triangulaire du système

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(\gamma).$$

Pour u dans L^2_m, $\gamma = (0, u)$ et $\omega_j = 1$, la j^{eme} composante est $\gamma_j(t) = \displaystyle\int_0^t u_j(s)\, ds$.

Soit $k \leq \omega_n$ et supposons que pour $\omega_j < k$, γ_j soit connu. Alors, pour $\omega_l = k$, X_i^l ne fait intervenir que les variables x_j telles que $\omega_j < k$. Nous pouvons alors déterminer γ_l par la formule

$$\gamma_l(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^m X_i^l(\gamma(s))\, ds.$$

Ceci nous permet d'exprimer un chemin horizontal en fonction de son contrôle avec des opérations algébrique et des intégrations.

Exemple 1.30 *Distributions (-1)-homogènes de degré 2 (suite de l'exemple 1.12).*

D'après l'exemple 1.12 une distribution (-1)-homogène de degré 2 peut être vue comme la distribution Δ invariante à gauche telle que $\Delta_0 = V$ sur $V \times \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\wedge^2 V^*$. Une base orthonormée de cette distribution est donnée par les m champs de vecteurs :

$$X_i(a, \alpha) = (e_i, \frac{1}{2}[a, e_i]).$$

Pour $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i$ dans $L^2(V)$ la solution γ du système :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} & = & \sum_{i=1}^m u_i X_i(\gamma) \\ \gamma(0) & = & \gamma_0 \end{cases}$$

est donnée par : $\gamma = \gamma_0 * (\varphi, \int \frac{1}{2}[\varphi, u])$, où $\varphi = \int u$ et $*$ est la multiplication du groupe. L'application π_0 s'écrit alors :

$$\begin{array}{rcl} \pi_0 \; : \; L^2(V) & \longrightarrow & M \\ u & \longmapsto & (\int_0^1 u(t)\, dt, \int_0^1 \frac{1}{2}[\int_0^t u(s)\, ds, u(t)])\, dt \end{array}$$

et

$$\gamma(1) = \gamma(0) * \pi_0(u).$$

Ceci qui permet de se limiter à l'étude des courbes horizontales d'origine 0.

Soit $\xi = (\alpha, \nu)$ dans $V \times \mathcal{D}$, alors

$$\langle \xi, \pi_0(u) \rangle = \int_0^1 \langle \alpha, u(t) \rangle\, dt + \int_0^1 \frac{1}{2} \nu(\int_0^t u(s)\, ds, u(t))\, dt$$

et donc

$$\langle \xi, D\pi(u)V \rangle \;=\; \int_0^1 \langle \alpha, V(t) \rangle\, dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \nu(\int_0^t V(s)\, ds, u(t))$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \nu(\int_0^t u(s)\,ds, V(t))\,dt \\
&= \quad \int_0^1 \langle \alpha, V(t)\rangle\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \nu(2\varphi(t)-\varphi(1), V(t))\,dt \\
&= \quad \int_0^1 \langle \alpha, V(t)\rangle\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle V(t), A_\nu(\varphi(1)-2\varphi(t))\rangle\,dt
\end{aligned}
$$

et finalement

$$\nabla_\xi \pi_0(u) = (\alpha, A_\nu(\frac{1}{2}\varphi(1)-\varphi)),$$

où $\varphi = \int u$.

Nous avons vu que $\gamma = (0,u)$ est anormale si et seulement si il existe $\xi = (\alpha, A)$ non nul dans $V \times \mathcal{D}$ tel que $\nabla_\xi \pi_0(u) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$ et $A(\frac{1}{2}\varphi(1) - \varphi)$ identiquement nulle. En dérivant, nous obtenons que $u(t)$ est dans le noyau de A pour presque tout t et donc φ est tracé dans le noyau de A. L'espace des courbes anormales est donc la réunion des espaces $L^2(\ker A)$, où A parcourt les éléments non nuls de $\mathcal{D}$.

1.6 Distance sous-riemannienne.

Si γ est un chemin horizontal, nous définissons sa longueur par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 (g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)))^{\frac{1}{2}}\,dt\ ,$$

ainsi que son énergie :

$$E(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt\ .$$

Remarque : si Δ est une distribution engendrée par m champs de vecteurs orthonormés, l'énergie d'une courbe horizontale γ est le carré de la norme L^2 de son contrôle. Pour presque tout t dans $[0,1]$, $\dot\gamma(t)$ appartient à $\Delta_{\gamma(t)}$ et donc il existe un élément $\xi(t)$ dans $T^*_{\gamma(t)}M$ tel que $G_\gamma(t)\xi(t) = \dot\gamma(t)$. Les égalités précédentes s'écrivent alors :

$$L(\gamma) = \int_0^1 (\xi(t) G_{\gamma(t)} \xi(t))^{\frac{1}{2}}\,dt$$

et

$$E(\gamma) = \int_0^1 \xi(t) G_{\gamma(t)} \xi(t) dt\ .$$

Par l'inégalité Cauchy-Schwarz nous obtenons $L(\gamma) \le E(\gamma)^{\frac{1}{2}}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si γ est paramétrée à vitesse constante, c'est-à-dire $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$ est constant pour presque tout $t \in [0,1]$. Comme en géométrie riemannienne, on a :

Lemme 1.31 *Les courbes qui réalisent le minimum de l'énergie sur* $\mathcal{H}_{xy}$ *sont les courbes paramétrées à vitesse constante qui réalisent le minimum de la longueur.*

Définition 1.32 *Une courbe horizontale* γ *sera dite minimisante si elle réalise le minimum de l'énergie sur* $\mathcal{H}_{xy}$ *avec* $x = \gamma(0)$ *et* $y = \gamma(1)$.

Définition 1.33 *La distance sous-riemannienne est la fonction à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *définie sur* $M \times M$ *par :*

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) \,/\, \gamma \in \mathcal{H}_{xy}\}.$$

Cette fonction est également appellée distance de Carnot-Carathéodory.

D'après le lemme 1.31, nous avons pour x et y dans M :

$$d(x, y) = \inf\{E^{\frac{1}{2}}(\gamma) \,/\, \gamma \in \mathcal{H}_{xy}\}.$$

Remarque : En général, deux points de M ne sont pas toujours reliés par un chemin horizontal et donc d n'est pas toujours finie. Si par contre Δ satisfait la condition de Hörmander et M est connexe, le théorème de Chow assure que pour tout couple (x, y) dans $M \times M$, $\mathcal{H}_{xy}$ est non vide et donc, pour γ dans $\mathcal{H}_{xy}$,

$$d(x, y) \leq L(\gamma) < +\infty.$$

La distance sous-riemannienne est donc finie, c'est alors une distance.

Nous énonçons maintenant quelques résultats concernant la distance sous-riemannienne et l'approximation nilpotente dans le cas où **Δ satisfait la condition de Hörmander**. Pour les démonstrations et plus de précisions, nous renvoyons le lecteur aux articles [5, 10, 15, 28, 29].

Proposition 1.34 *La topologie donnée sur* M *par la distance sous-riemannienne est la même que la topologie initiale de la variété. En particulier la distance sous-riemannienne est continue.*

Lemme 1.35 *Soit* (Δ, g) *une structure sous-riemannienne sur une variété connexe* M. *Pour tout* x_0 *dans* M, *il existe un système de coordonnées en* x_0 *(appelé système privilégié) tel que* x_0 *soit l'origine de* $\mathbb{R}^n$ *et la distribution* Δ *est engendrée par* m *champs de vecteurs orthonormés* $X_1, \cdots, X_m$ *qui se décomposent sous la forme:*

$$X_i = \hat{X}_i + R_i$$

où $\hat{X}_i$ *est homogène de degré* -1 *et* R_i *est de degré au moins* 0, *pour un système de poids* $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$.

Nous nous fixons x_0 dans M et nous nous plaçons dans un système privilégié de coordonnées au voisinage de x_0.

Remarque : Le cône tangent [15, 5, 10] de l'espace métrique (M, d) au point x_0 est alors R^n munit de la distance sous-riemannienne définie par la distribution $\hat{\Delta}$ engendrée par $\{\hat{X}_1, \cdots, \hat{X}_m\}$ et $\hat{g}$ la métrique sur $\hat{\Delta}$ rendant cette base orthonormée. La distance sous riemannienne associée à cette structure sera notée $\hat{d}$.

Les approximations suivantes se trouvent dans [5]

Théorème 1.36 *Il existe un voisinage de l'origine et des constantes positives $C_1, \cdots, C_5$ tels que pour tout x dans ce voisinage :*

$$C_1||x|| \leq \hat{d}(0,x) \leq C_2||x||$$

$$C_3||x|| \leq d(0,x) \leq C_4||x||$$

$$|d(0,x) - \hat{d}(0,x)| \leq C_5||x||^{1+\frac{1}{r}}$$

1.7 Courbes hamiltoniennes.

A une structure sous-riemannienne on associe un hamiltonien de la manière suivante :

Définition 1.37 *Le hamiltonien H est la fonction définie sur T^*M par :*

$$\begin{array}{rcl} H \,:\, T^*M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\xi) & \longmapsto & \langle \xi, G_x \xi \rangle. \end{array}$$

Soit Ω la 2-forme symplectique canonique sur T^*M Pour (X_1, λ_1) et (X_2, λ_2) dans $T_{(x,\xi)}T^*M$ nous avons

$$\Omega_{(x,\xi)}((X_1,\lambda_1),(X_2,\lambda_2)) = \langle \lambda_1, X_2 \rangle - \langle \lambda_2, X_1 \rangle.$$

Définition 1.38 *Le champ hamiltonien $\vec{H}$ est le champ de vecteurs défini sur T^*M par :*

$$i_{\vec{H}}\Omega = -\frac{1}{2}dH.$$

Ceci signifie que pour tout y dans T^*M et tout Z dans T_yT^*M

$$\Omega_y(\vec{H}(y), Z) = -\frac{1}{2}DH(y)Z.$$

Exemple 1.39 *: le cas local (suite).*

Le hamiltonien défini sur $M \times (\mathbb{R}^n)^*$ s'écrit :

$$H(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} \langle \xi, X_i(x) \rangle^2$$

et donc

$$DH(x,\xi)(Y,\lambda) = 2\sum_{i=1}^{m} \langle \xi, X_i(x) \rangle (\langle \lambda, X_i(x) \rangle + \langle \xi, DX_i(x)Y \rangle)$$

ou encore

$$DH(x,\xi)(Y,\lambda) = 2\sum_{i=1}^{m}\langle \xi, X_i(x)\rangle\langle \lambda, X_i(x)\rangle + \langle \xi, X_i(x)\rangle\langle {}^t DX_i(x)\xi, Y\rangle.$$

Pour déterminer $\vec{H} = (\vec{H}_1, \vec{H}_2)$ il faut résoudre

$$\langle \vec{H}_2(x,\xi), Y\rangle - \langle \lambda, \vec{H}_1(x,\xi)\rangle =$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\langle \xi, X_i(x)\rangle\langle \lambda, X_i(x)\rangle + \langle \xi, X_i(x)\rangle\langle {}^t DX_i(x)\xi, Y\rangle$$

pour tout (Y,λ) dans $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\vec{H}_1(x,\xi) &= \sum_{i=1}^{m}\langle \xi, X_i(x)\rangle X_i(x) = G_x\xi \\
\vec{H}_2(x,\xi) &= -\sum_{i=1}^{m}\langle \xi, X_i(x)\rangle\, {}^t DX_i(x)\xi.
\end{aligned}$$

Ceci s'écrit également :

$$\begin{aligned}
\vec{H}_1(x,\xi) &= \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi}(x,\xi) \\
\vec{H}_2(x,\xi) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi).
\end{aligned}$$

En particulier, si (γ,ξ) est solution de l'équation $(\dot\gamma,\dot\xi) = \vec{H}(\gamma,\xi)$, alors γ est horizontale, $\dot\gamma = G_\gamma\xi$ et (γ,ξ) est un relèvement de γ. De plus $H(\gamma(t),\xi(t))$ ne dépend pas de t et donc que γ est paramétrée à vitesse constante.

fin de l'exemple

Définition 1.40 *Une courbe γ est dite hamiltonienne si elle possède un relèvement (γ,ξ) dans T^*M tel que (γ,ξ) soit une courbe intégrale de $\vec{H}$. Nous appellerons (γ,ξ) un relèvement hamiltonien de γ.*

Une courbe hamiltonienne est solution d'un système différentiel de classe C^l, elle est donc de classe C^l et d'après l'étude locale faite précédemment, une courbe hamiltonienne γ est horizontale et paramétrée à vitesse constante. De plus, si (γ,ξ) est un relèvement hamiltonien de γ, $G_\gamma\xi = \dot\gamma$ et $E(\gamma) = H(\gamma(0),\xi(0))$. De plus nous avons la

Théorème 1.41 *Liu-Sussmann [26] Une courbe hamiltonienne est toujours localement minimisante.*

Pour tout (x,q) appartenant à T^*M, il existe une unique courbe intégrale maximale (γ,ξ) de $\vec{H}$ définie sur un intervalle $I_{(x,q)}$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\xi(0) = q$. Nous notons $\gamma(t) = \exp_t(x,q)$. Soit $\mathcal{D}_{exp}$ l'ouvert de T^*M formé des éléments (x,q) tels que $I_{(x,q)}$ contienne $[0,1]$.

Définition 1.42 *L'application exponentielle est l'application*

$$\begin{array}{rccl} exp\ : & \mathcal{D}_{exp} & \longrightarrow & M \\ & (x,q) & \longmapsto & exp_1(x,q). \end{array}$$

C'est une application de classe C^l.

Exemple 1.43 *Distributions (-1)-homogènes de degré 2 (suite).*

Nous reprenons les notations des exemples 1.12 et 1.30. Une base orthonormée de Δ est donnée par

$$X_i(a,\alpha) = (e_i, \frac{1}{2}[a, e_i]).$$

Pour (a,α) et (b,β) dans $V \times \mathcal{D}$ l'application $G : T^*M \longrightarrow TM$ est

$$\begin{aligned} G_{(a,\alpha)}(b,\beta) &= \sum_{i=1}^{m} (\langle b, e_i\rangle + \frac{1}{2}\big\langle \beta, [a, e_i]\big\rangle) X_i(a,\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle b - \frac{1}{2}\beta a, e_i\rangle X_i(a,\alpha) \\ &= (b - \frac{1}{2}\beta a, \frac{1}{2}[a, b - \frac{1}{2}\beta a]). \end{aligned}$$

et l'hamiltonien $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit

$$H((a,\alpha),(b,\beta)) = |b - \frac{1}{2}\beta a|^2.$$

Calculons maintenant le champ hamiltonien $\vec{H}$:

pour (a,α) et (b,β) dans $V \times \mathcal{D}$

$$DX_i((a,\alpha))(b,\beta) = (0, \frac{1}{2}[b, e_i])$$

donc

$$\langle {}^t DX_i((a,\alpha))(c,\chi), (b,\beta)\rangle = \langle (c,\chi), DX_i((a,\alpha))(b,\beta)\rangle = \frac{1}{2}\big\langle \chi, [b, e_i]\big\rangle = \langle b, \frac{1}{2}\chi e_i\rangle$$

et finalement :

$${}^t DX_i((a,\alpha))(c,\chi) = (\frac{1}{2}\chi e_i, 0).$$

Le champ hamiltonien $\vec{H}$ définit par $i_{\vec{H}}\omega = -\frac{1}{2}dH$ s'écrit :

$$\vec{H}((a,\alpha),(b,\beta)) = ((b - \frac{1}{2}\beta a, \frac{1}{2}[a, b - \frac{1}{2}\beta a]), (-\frac{1}{2}\beta(b - \frac{1}{2}\beta a), 0)).$$

Une courbe intégrale (γ, p) du champ Hamiltonien est une solution du système

$$(HJ) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{b}(t) &=& -\frac{1}{2}\beta(b - \frac{1}{2}\beta\varphi) \\ \dot{\beta}(t) &=& 0 \\ \dot{\varphi}(t) &=& b - \frac{1}{2}\beta\varphi \\ \dot{\Phi}(t) &=& \frac{1}{2}[\varphi, b - \frac{1}{2}\beta\varphi] \end{array} \right.$$

où $\gamma = (\varphi, \Phi)$ et $p = (b, \beta)$ sont dans $V \times \mathcal{D}$. Ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b(t) & = & b(0) - \frac{1}{2}\beta\varphi(t) \\ \beta(t) & = & \beta(0) \\ \dot{\varphi}(t) & = & b(0) - \beta\varphi(t) \\ \Phi(t) & = & \frac{1}{2}\int_0^t [\varphi, b - \frac{1}{2}\beta\varphi] \end{array} \right.$$

En différentiant $\dot{\varphi}(t) = b(0) - \beta\varphi(t)$, le contrôle $u = \dot{\varphi}$ de γ vérifie $\dot{u} = -\beta u$ et donc :

$$u(t) = e^{-t\beta(0)} b(0).$$

Fin de l'exemple

1.8 Points critiques de l'énergie.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des chemins horizontaux de M identifié par le théorème 1.20 à un ouvert de $M \times L^2_m$. Nous posons $N = M \times M \times \mathrm{I\!R}$ et

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{H} & \longrightarrow & N \\ \gamma & \longmapsto & (e(\gamma), E(\gamma)) \end{array}$$

Lemme 1.44 *Si γ est un minimum local de la restriction de E à $e^{-1}(\gamma(0), \theta(1))$, alors il existe un voisinage V de γ dans $\mathcal{H}$ tel que $\theta(\gamma)$ soit dans le bord de l'image par θ de V. En particulier, θ n'est pas une submersion en γ.*

Preuve : sinon, pour tout voisinage V de γ, $\theta(\gamma)$ est dans l'intérieur de W, l'image par θ de V. Il existe alors ε positif tel que $\{\pi(\gamma)\}\times]E(\gamma) - \varepsilon, E(\gamma) + \varepsilon[$ soit contenu dans W. Or pour tout $\bar{\gamma}$ dans V tel que $\theta(\bar{\gamma}) \in \{\pi(\gamma)\}\times]E(\gamma) - \varepsilon, E(\gamma)[$, nous avons $\pi(\bar{\gamma}) = \pi(\gamma)$ et $E(\bar{\gamma}) < E(\gamma)$. En appliquant ceci à une suite décroissante V_σ de voisinage de γ qui tend vers $\{\gamma\}$, nous construisons une suite γ_σ qui tend vers γ telle que $\pi(\gamma_\sigma) = \pi(\gamma)$ et $E(\gamma_\sigma) < E(\gamma)$. Ceci contredit le fait que γ est minimisant.

Si θ est une submersion en γ, l'image d'un voisinage de γ par θ est un voisinage de $\theta(\gamma)$ et contredit donc le fait que γ soit un minimum local. □

D'après le lemme 1.44 si une courbe γ est minimisante alors il existe λ non nul dans $T^*_z N$, $z = \theta(\gamma)$, tel que $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ s'annule .

Définition 1.45 *Un chemin horizontal γ est appelé point critique de l'énergie s'il existe $\lambda = (\alpha, \beta, \lambda_0)$ dans $T^*_{\theta(\gamma)}N$, tel que λ_0 soit non nul et $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ s'annule.*

Proposition 1.46 *Soit γ dans $\mathcal{H}$ et $\lambda = (\alpha, \beta, \lambda_0)$ dans $T^*_{\theta(\gamma)}N$, alors $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ s'annule si et seulement si le relèvement q de γ tel que $q(0) = \alpha$ vérifie :*

- $q(1) = -\beta$,
- $G_\gamma q = 2\lambda_0 \dot{\gamma}$.

Si λ_0 est nul, γ est une singularité de l'application extrémité et q sera appelé relèvement anormal de γ.

Si λ_0 est non nul, alors quitte à multiplier λ par $\dfrac{1}{2\lambda_0}$, nous pouvons supposer $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, et alors q est un relèvement hamiltonien. En particulier γ est un point critique de l'énergie si et seulement si c'est une courbe hamiltonienne.

Nous déduisons alors du lemme 1.44 que si γ est un minimum local, soit c'est une courbe hamiltonienne, soit c'est une courbe anormale.

Démonstration : puisque $X_1, \cdots, X_m$ est une base orthonormée de Δ, l'énergie de γ est égale à $||u||^2_{L^2}$ et donc

$$\nabla E(\gamma) = (0, 2u).$$

Grace au lemme 1.25, le gradient $\nabla_\lambda \theta(\gamma)$ s'écrit :

$$\nabla_\lambda \theta(\gamma) = (\alpha + {}^tM_\gamma(1)\beta, 2\lambda_0 u + \nabla_\beta \pi_x(\gamma)),$$

et donc $\nabla_\lambda \theta(\gamma) = 0$ si et seulement si

$$\alpha + {}^tM_\gamma(1)\beta = 0 \text{ et } 2\lambda_0 u + \nabla_\beta \pi_x(\gamma) = 0.$$

Or, si $\alpha = -{}^tM_\gamma(1)\beta$

$$\begin{aligned} \nabla^i_\beta \pi_x(\gamma)(s) &= \langle \beta, M_\gamma(1) M_\gamma^{-1}(s) X_i(\gamma(s))\rangle \\ &= -\langle N_\gamma(s)\alpha(s), X_i(\gamma(s))\rangle \\ &= -\langle q(s), X_i(\gamma(s))\rangle \end{aligned}$$

où $q = N_\gamma \alpha$ est le relèvement de γ tel que $q(0) = \alpha$. Nous obtenons

$$\sum_{i=1}^m \nabla^i_\beta \pi_x(\gamma) X_i(\gamma) = -\sum_{i=1}^m \langle q, X_i(\gamma)\rangle X_i(\gamma) = -G_\gamma q.$$

Finalement $\nabla_\lambda \theta(\gamma) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} G_\gamma q &= 2\lambda_0 \dot\gamma \\ q(1) &= -\beta \end{cases}$$

et donc q satisfait bien les conclusion de la proposition.

Si λ_0 est nul alors $\lambda \cdot D\theta(\gamma) = (\alpha, \beta) \cdot De(\gamma) = 0$ et donc γ est une courbe anormale.

Si λ_0 est non nul, alors quitte à multiplier λ par $\dfrac{1}{2\lambda_0}$, nous pouvons supposer $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ et dans ce cas q est un relèvement hamiltonien d'après l'exemple 1.39. □

Définition 1.47 *Une biextrèmale est un triplet (γ, q, λ_0) vérifiant $G_\gamma q = 2\lambda_0 \dot\gamma$. Cette biextrèmale sera dite anormale si $\lambda_0 = 0$ et normale sinon.*

Définition 1.48 *Une courbe minimisante qui n'est pas hamiltonienne est dite strictement anormale*

L'exemple classique de courbe minimisante strictement anormale a été donné par R. Montgomery [16], voir également [25, 13, 19]. Si la distribution est de degré 2 toutes les courbes minimisantes sont hamiltoniennes. Ce résultat a été annoncé indépendamment par H.Sussmann et A. Agrachev (voir remarque dans [4]) et est démontré à la proposition 3.15.

1.9 Distributions (-1)-homogènes de degré 2.

Suite des exemples 1.12, 1.30 et 1.43.

Nous avons vu qu'une distribution (-1)-homogène de degré 2 peut être vue comme une distribution invariante à gauche sur un groupe de Lie $M = V \times \mathcal{D}$ où V est un espace euclidien et $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\wedge^2 V^*$. Une base orthonormée de champs de vecteurs invariants par les translations à gauche est donnée par :

$$X_i(a, \alpha) = (e_i, \frac{1}{2}[a, e_i]).$$

Soit $\gamma = (\varphi, \Phi)$ une courbe horizontale, le système $T^*\Delta(\gamma)$ s'écrit en notant $q = (b, \beta)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{b} & = & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} u_i \beta e_i = -\frac{1}{2}\beta u \\ \dot{\beta} & = & 0 \end{array} \right.$$

et finalement tout relèvement de γ est de la forme $q = (b(0) - \frac{1}{2}\beta(0)\varphi, \beta(0))$. La condition $G_\gamma q = 2\lambda_0 \dot{\gamma}$ devient :

$$(b(0) - \beta(0)\varphi, \frac{1}{2}[\varphi, b(0) - \beta(0)\varphi]) = 2\lambda_0(u, \frac{1}{2}[\varphi, u]),$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2\lambda_0 u & = & b(0) - \beta(0)\varphi \\ \frac{1}{2}[\varphi, b(0) - 2\lambda_0 u] & = & 0 \end{array} \right.$$

et encore à :

$$2\lambda_0 u = b(0) - \beta(0)\varphi.$$

Si λ_0 est nul, ceci implique que φ est tracé dans $\ker\beta(0)$ et nous retrouvons ainsi la caractérisation des anormales donnée à la fin de l'exemple 1.30.

Si $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ nous retrouvons le résultat de l'example 1.43 c'est-à-dire, γ est hamiltonienne et son contrôle est donné par $u(t) = e^{-t\beta(0)}b(0)$.

Définition 1.49 *Soit γ une courbe horizontale et G un sous-groupe de $V \times \mathcal{D}$ tel que γ est tracée dans G. Nous dirons que G est un sous-groupe caractéristique de γ si γ est normale pour la structure sous-riemannienne induite sur G*

Lemme 1.50 *Toute courbe γ possède un sous-groupe caractéristique.*

Preuve : soit $\gamma = (\varphi, \Phi)$ et W le sous-espace vectoriel de V engendré par les $\varphi(t)$ où t décrit l'interval $[0, 1]$. Soit

$$\mathcal{D}_W = \{[X, Y] \,/\, X \in W, Y \in W\},$$

alors $G := W \times \mathcal{D}_W$ est un sous-groupe de $V \times \mathcal{D}$ et γ est tracé dedans.

Montrons que γ est normale pour la structure sous-riemannienne induite sur G. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathcal{D}_W & \longrightarrow & \wedge^2 W^* \\ A & \longmapsto & P \circ A_{|W} \end{array}$$

où P est la projection orthogonale de V sur W. Soit A dans $\mathcal{D}_W$, alors l'égalité $\tau(A) = P \circ A_{|W} = 0$ est équivalente à $\langle [X,Y], A \rangle = \langle AX, Y \rangle = 0$ pour tout X et Y dans W et donc A appartient à l'orthogonal de $\mathcal{D}_W$ dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire $A = 0$. L'application τ est donc injective et permet d'identifier $\mathcal{D}_W$ avec $\mathcal{D}'$ son image par τ.

Ceci nous permet d'identifier G avec $W \times \mathcal{D}'$. Si A dans $\mathcal{D}'$ est telle que $A\varphi = 0$ alors A s'annule sur W et est donc nulle. Ceci montre que γ est normale pour la structure sous-riemannienne sur $W \times \mathcal{D}'$ donc normale dans qui est alors un sous-groupe caractéristique de γ. $\square$

Remarque : si γ est hamiltonienne dans G, Alors, en reprenant les notations de la démonstration précédente, il existe une matrice β dans $\mathcal{D}'$ telle que le contrôle u de γ s'écrive :

$$u(t) = e^{-\beta t} b_0$$

où b_0 est dans W. Une telle matrice est de la forme $P \circ A_{|W}$ où A est dans $\mathcal{D}_W$ et l'égalité

$$u(t) = e^{-At} b_0$$

est vrai si et seulement si $P \circ A_{|W} = A_{|W}$, ce qui est faux en général. Une courbe hamiltonienne dans G n'est donc pas forcément hamiltonienne dans $V \times \mathcal{D}$.

Nous étudions maintenant le cas où $\mathcal{D} = \wedge^2 V^*$. Ce cas apporte beaucoup de simplifications dans l'étude des sous-groupes caractéristiques, en particulier nous montrons, très simplement que toute courbe minimisante est hamiltonienne. Beaucoup de résultats concernant les distributions invariantes à gauche sur les groupes de Lie ont été publiés [17, 9, 11, 4].

Lemme 1.51 *Soit W un sous-espace vectoriel de V et*

$$L(W, W^\perp) = \{B \in \wedge^2 V^* \,/\, ImB_{|W^\perp} \subset W \text{ et } ImB_{|W} \subset W^\perp\}.$$

Nous identifions $\wedge^2 W^*$ (resp. $\wedge^2 {W^\perp}^*$) avec $\{B \in \wedge^2 V^* \,/\, B_{|W^\perp} = 0\}$ (resp. $\{B \in \wedge^2 V^* \,/\, B_{|W} = 0\}$). Alors l'espace $\wedge^2 V^*$ admet la décomposition en somme orthogonale suivante :

$$\wedge^2 V^* = \wedge^2 W^* \oplus \wedge^2 {W^\perp}^* \oplus L(W, W^\perp).$$

Preuve : Fixons nous $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormée de V telle que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq w}$, $w = \dim W$, soit une base orthonormée de W. Soit $ST(W) = \{A \in \wedge^2 V^* / \mathrm{Im} A_{|W} \subset W\}$. Les matrices étant antisymétriques : $ST(W) = ST(W^\perp)$.

Montrons que $\wedge^2 V^* = ST(W) \oplus L(W, W^\perp)$ (somme orthogonale). Soit $A \in ST(W)$, $B \in L(W, W^\perp)$.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_i, Be_i\rangle \\ &= \sum_{e_i \in W} \langle Ae_i, Be_i\rangle + \sum_{e_i \in W^\perp} \langle Ae_i, Be_i\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $L(W, W^\perp) \subset ST(W)^\perp$. Réciproquement, si $B \in ST(W)^\perp$, nous définissons $A_{ik} \in ST(W)$ par $A_{ik}e_i = e_k$, $A_{ik}e_k = -e_i$ et $A_{ik}e_j = 0$ pour $1 \leq i < k \leq \dim W$, $j \neq i$ et $j \neq k$. Alors $\langle A_{ik}, B\rangle = 2\langle Be_i, e_k\rangle = 0 \quad \Longrightarrow ImB_{|W^\perp} \subset W$. De même que $ImB_{|W} \subset W^\perp$ et donc $ST(W)^\perp \subset L(W, W^\perp)$.

Montrons maintenant que $ST(W) = \wedge^2 W^* \oplus \wedge^2 {W^\perp}^*$. Il est clair que $\wedge^2 W^*$ et $\wedge^2 {W^\perp}^*$ sont orthogonaux. Soit $A \in \wedge^2 {{W^\perp}^*}^\perp$, alors pour $dimW < i < k \leq m$,

$$\langle A, A_{ik}\rangle = 2\langle Ae_i, e_k\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Ae_i \in {W^\perp}^\perp = W \quad dimW < i \leq m$$

$$\text{or } A \in ST(W) = ST(W^\perp) \Longrightarrow \quad Ae_i \in W^\perp \cap W \quad dimW < i \leq m$$

D'où $\wedge^2 {W^*}^\perp = \wedge^2 {W^\perp}^*$ dans ST(W). □

Lemme 1.52 *Pour tout sous-espace W de V, $W \times \wedge^2 W^*$ est un sous-groupe de lie de $V \times \wedge^2 V^*$ qui possède la propriété suivante : toute courbe minimisante γ telle que $\gamma(1)$ appartienne à $W \times \wedge^2 W^*$ est tracée dans $W \times \wedge^2 W^*$.*

De plus, toute courbe γ tracée dans $W \times \wedge^2 W^*$ hamiltonienne pour la structure sous-riemannienne sur $W \times \wedge^2 W^*$ est hamiltonienne pour la structure sous-riemannienne de $V \times \wedge^2 V^*$.

Preuve : soit u le contrôle de γ , v dans $L^2(W)$ et w dans $L^2(W^\perp)$ tels que $u = v + w$, alors :

$$\langle \nu, \pi_0(u)\rangle = \begin{cases} \langle \nu, \pi_0(v)\rangle & \text{si} \quad \nu \in \wedge^2 W^* \\ \langle \nu, \pi_0(w)\rangle & \text{si} \quad \nu \in \wedge^2 {W^\perp}^* \\ \int_0^1 \nu(\int w, v) + (\int v, w) & \text{si} \quad \nu \in L(W, W^\perp). \end{cases}$$

En particulier, si $\gamma(1) \in W \times \wedge^2 W^*$ alors $\pi(u) = \pi(v)$ et $||v||_{L^2} < ||u||_{L^2}$ si $w \neq 0$. Ceci contredit le fait que γ est minimisante.

Supposons maintenant que γ est une courbe hamiltonienne de $W \times \wedge^2 W^*$, alors son contrôle u dans $L^2(W)$ est de la forme

$$u(t) = e^{-t\beta} b$$

avec (b, β) dans $W \times \wedge^2 W^*$ (voir exemple 1.30). Nous prolongeons β en un élément α de $\wedge^2 V^*$ en posant $\alpha x = 0$ pour tout x dans $W^\perp$, alors

$$u(t) = e^{-t\alpha} b$$

et donc γ est hamiltonienne dans $V \times \wedge^2 V^*$. □

Théorème 1.53 *Toute courbe horizontale possède un sous-groupe caractéristique $W \times \wedge^2 W^*$, en particulier toute courbe minimisante est hamiltonienne .*

Preuve : une courbe γ est anormale si et seulement si il existe $\xi = (0, A)$ non nul dans $V \times \wedge^2 V^*$ tel que $\nabla_\xi(u) = 0$, où u est le contrôle de γ. Soit W l'espace vectoriel engendré par les $\varphi(t)$ où t décrit $[0,1]$, alors W est contenu dans le noyau de A (voir exemple 1.30) et γ est tracée dans $W \times \wedge^2 W^*$. Soit B dans $\wedge^2 W^*$, alors $B\varphi$ est nul si et seulement si B s'annule sur W et donc si et seulement si B est nul. La courbe γ est donc normale pour la structure sous-riemannienne induite sur $W \times \wedge^2 W^*$ (voir exemple 1.30). $\square$

Chapitre 2

Points minimisants et sous-analycité.

Tous les objets considérés dans ce chapitre sont de classe C^l où l appartient à $[2, +\infty] \cup \{\omega\}$ et est plus grand que 2.

Soient $\mathcal{H}$ une variété hilbertienne , M une variété de dimension finie égale à n, π une application de $\mathcal{H}$ dans M et E une fonction sur $\mathcal{H}$. Nous cherchons à caractériser les points de $\mathcal{H}$ qui réalisent le minimum de E sur une fibre $\pi^{-1}(x)$ où x est dans M. M. Tamm montre dans [27] que sous certaines hypothèses, la fonction f définie sur M par $f(x) = \inf\{E(\gamma) \,/\, \pi(\gamma) = x\}$ est sous-analytique. Il se restreint au cas où π est une submersion. Nous obtenons le même résultat 2.26 sans faire cette hypothèse sur π.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{F}"'] & M \arrow[dl, "f"] \\
\mathrm{I\!R} &
\end{tikzcd}$$

Définition 2.1 *Un élément γ de $\mathcal{H}$ qui réalise le minimum de E sur une fibre $\pi^{-1}(x)$ sera dit minimisant.*

Soit θ l'application définie sur $\mathcal{H}$ et à valeur dans $N = M \times \mathrm{I\!R}$ par $\theta(\gamma) = (\pi(\gamma), E(\gamma))$, alors si γ est minimisant , $\theta(\gamma)$ appartient au bord de l'image de θ. Les corollaires 2.10 et 2.25 donnent des conditions nécessaires pour que $\theta(\gamma)$ soit dans le bord de l'image de θ.

Définition 2.2 *Une variation γ_s de γ (π fixé) est une application $s \mapsto \gamma_s$ de classe C^2 d'un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathcal{H}$ telle que :*

- $\gamma_0 = \gamma$
- $\pi(\gamma_s) = x$ *pour tout s dans* $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Soit γ un point régulier de π, alors $\pi^{-1}(\pi(\gamma))$ est une sous-variété de $\mathcal{H}$ au voisinage de γ et son plan tangent en γ est le noyau de $D\pi(\gamma)$. Pour tout V dans $\ker D\pi(\gamma)$, il existe donc une variation γ_s (π fixé) telle que $\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0} = V$. Nous verrons que si γ est une singularité de π, ce résultat reste vrai mais en remplaçant $\ker D\pi(\gamma)$ par le sous-espace $\mathcal{R}_\gamma^\pi$ de $\ker D\pi(\gamma)$ défini par : V appartient à $\mathcal{R}_\gamma^\pi$ si et seulement si l'application $W \mapsto \pi''(\gamma)(W, W)$ est une submersion en V et s'annule en V. Ceci nous permettra de faire du calcul variationnel au voisinage des singularités de π. Une étude analogue est réalisée dans [1].

2.1 Dérivée seconde.

Dans toute la section 2.1, θ est une application de classe C^l d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans une variété N de dimension q. Pour γ dans $\mathcal{H}$ et $x = \theta(\gamma) \in N$, nous notons $\theta'(\gamma)$ la différentielle de θ en γ , $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ son noyau et $\mathcal{I}_\gamma^\theta$ son image.

2.1.1 Définition.

Soit $\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et $\varphi : W \longrightarrow V$ des cartes définies aux voisinages de γ et x, où $\mathcal{W}$ est un ouvert d'un espace de Hilbert H et V un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Phi"'] & W \subset N \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{W} \subset H \arrow[r, "\nu"] & V \subset \mathbb{R}^q
\end{tikzcd}$$

La différentielle de Φ en γ sera notée $\Phi'(\gamma)$.

Lemme 2.3 *Pour* (v, w) *dans* $\mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta$

$$D\varphi^{-1}(\varphi(x))D^2\nu(\Phi(\gamma))(\Phi'(\gamma)v, \Phi'(\gamma)w) \ mod\ \mathcal{I}_\gamma^\theta$$

ne dépend pas du choix des cartes.

Preuve : il suffit pour cela de supposer que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, que M est égal à $\mathbb{R}^n$ et de montrer que pour (v, w) dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta$

$$D^2\theta(\gamma)(v, w) \equiv D\varphi^{-1}(\varphi(x))D^2\nu(\Phi(\gamma))(\Phi'(\gamma)v, \Phi'(\gamma)w) \ \mathrm{mod}\mathcal{I}_\gamma^\theta.$$

En dérivant l'égalité $\theta = \varphi^{-1} \circ \nu \circ \Phi$ nous obtenons

$$\theta'(\gamma) = D\varphi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma)) D\nu(\Phi(\gamma)) \Phi'(\gamma)$$

et donc pour (v, w) dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta$

$$\begin{aligned} D^2\theta(\gamma)(v, w) &= D^2\varphi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma))(D\nu(\Phi(\gamma))\Phi'(\gamma)v, D\nu(\Phi(\gamma))\Phi'(\gamma)w) \\ &+ D\varphi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma)) D^2\nu(\Phi(\gamma))(\Phi'(\gamma)v, \Phi'(\gamma)w) \\ &+ D\varphi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma)) D\nu(\Phi(\gamma)) D^2\Phi(\gamma)(v, w). \end{aligned}$$

Or, v et w étant dans le noyau de $\theta'(\gamma)$, $D\nu(\Phi(\gamma))\Phi'(\gamma)v$ et $D\nu(\Phi(\gamma))\Phi'(\gamma)$ s'annulent. De plus,

$$D\varphi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma)) D\nu(\Phi(\gamma)) D^2\Phi(\gamma)(v, w) = D\theta(\Phi(\gamma)) D\Phi^{-1}(\nu \circ \Phi(\gamma)) D^2\Phi(\gamma)(v, w)$$

et s'annule donc modulo $\mathcal{I}_\gamma^\theta$. Finalement

$$D^2\theta(\gamma)(v, w) \equiv D\varphi^{-1}(\varphi(x)) D^2\nu(\Phi(\gamma))(\Phi'(\gamma)v, \Phi'(\gamma)w) \bmod \mathcal{I}_\gamma^\theta. \quad \square$$

La définition suivante a donc un sens.

Définition 2.4 *Nous appellerons dérivée seconde (intrinsèque) $\theta''(\gamma)$ est l'application bilinéaire symétrique*

$$\begin{aligned} \theta''(\gamma) : \mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta &\longrightarrow T_x N / \mathcal{I}_\gamma^\theta \\ (v, w) &\longmapsto D\varphi^{-1}(\varphi(x)) D^2\nu(\Phi(\gamma))(\Phi'(\gamma)(v), \Phi'(\gamma)(w)) \ \mathit{mod}\ \mathcal{I}_\gamma^\theta \end{aligned}$$

Notations : nous noterons $D^2\theta$ pour désigner la differentielle seconde au sens classique dans les espaces de Hilbert et θ'' la dérivée seconde au sens de la définition 2.4. Remarquons que la seconde est invariante par difféomorphisme mais pas la première.

2.1.2 Interprétation de la dérivée seconde.

Soit γ un élément de $\mathcal{H}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hilbertien de $T_\gamma \mathcal{H}$. Pour tout λ dans $T_x^* N$, il existe un élement $\nabla_\lambda \theta(\gamma)$ dans $T_\gamma \mathcal{H}$ tel que

$$\langle \nabla_\lambda \theta(\gamma), v \rangle = \langle \lambda, D\theta(\gamma) v \rangle \qquad \forall v \in T_\gamma \mathcal{H}.$$

Ainsi, λ appartient à $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$ si et seulement si $\nabla_\lambda \theta(\gamma)$ est nul et

$$\mathcal{K}_\gamma^\theta = \{\nabla_\lambda \theta(\gamma) \,/\, \lambda \in T_x^* M\}^\perp.$$

Soit λ dans $(T_x N / \mathcal{I}_\gamma^\theta)^*$ nous associons à la forme quadratique $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ l'opérateur autoadjoint borné Ω_λ défini sur $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ par

$$\langle \Omega_\lambda \alpha, \beta \rangle = \lambda \cdot \theta''(\gamma)(\alpha, \beta) \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta.$$

D'après le lemme 2.3 et par définition de la dérivée seconde, nous pouvons calculer θ'' dans des cartes. Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{H}$ est un voisinage de 0 d'un espace de Hilbert H, $N = \mathrm{IR}^q$, $\gamma = 0$ et $\theta(\gamma) = 0$.

L'espace dual $(T_x N/\mathcal{I}_\gamma^\theta)^*$ s'identifie canoniquement avec $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp \subset T_x^* N$. Alors, pour tout λ dans $(T_x N/\mathcal{I}_\gamma^\theta)^*$ et tout (α, β) dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta \times \mathcal{K}_\gamma^\theta$:

$$\lambda \cdot \theta''(\gamma)(\alpha, \beta) = \langle \lambda, D^2\theta(\gamma)(\alpha, \beta) \rangle = D^2\theta_\lambda(\gamma)(\alpha, \beta)$$

où θ_λ est égale à $\lambda \cdot \theta$. Si $\nabla\theta_\lambda(\gamma)$ représente le gradient de θ_λ, c'est-à-dire

$$\langle \nabla\theta_\lambda(\gamma), \alpha \rangle = D\theta_\lambda(\gamma)\alpha \qquad \forall \alpha \in H,$$

alors $\nabla\theta_\lambda(\gamma) = \nabla_\lambda\theta(\gamma)$ et l'opérateur Ω_λ est donné par :

$$\Omega_\lambda \alpha = PD\nabla\theta_\lambda(\gamma)\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathcal{K}_\gamma^\theta$$

où P est la projection orthogonale de H sur $\mathcal{K}_\gamma^\theta$.

Soit $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_q\}$ une base de $(\mathrm{IR}^q)^*$ telle que $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ soit une base de $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, nous pouvons supposer que $\lambda_j = dx_j$. Grace au théorème d'inversion locale, nous pouvons supposer que $\mathcal{H} = V \times \mathcal{V}$, où V est un ouvert de IR^{q-k} et $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{K}_0^\theta$, et que θ est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} \theta\,:\,\mathcal{H} = V \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathrm{IR}^{q-k} \times \mathrm{IR}^k \\ \varphi = (y, v) & \longmapsto & \theta(\varphi) = (y, \zeta(y, v)) \end{array}$$

où ζ est une application de classe C^l vérifiant $D\zeta(0,0) = 0$.

Alors, pour tout λ dans $\{0\} \times (\mathrm{IR}^k)^*$, la restriction de $\lambda \cdot D^2\theta(0)$ à $\mathcal{K}_0^\theta$ est égal à $\lambda \cdot D_2^2\zeta(0,0)$ et donc, après identification entre $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$ et IR^k, $\theta''(\gamma)$ est égale à $D_2^2\zeta(0,0)$.

2.2 Déformations

2.2.1 Eclatement.

Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{H}$ un voisinage de 0 dans H et soit S_H la sphère unité de H. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} B\,:\,\mathrm{IR} \times \mathrm{S_H} & \longrightarrow & H \\ (a, \gamma) & \longmapsto & a\gamma \end{array}$$

est analytique et sa restriction B_+ (resp. B_-) à $]0, +\infty[\times S_H$ (resp. $]-\infty, 0[\times S_H$) est un difféomorphisme sur $H\backslash\{0\}$.

Définition 2.5 *L'éclatement de H (resp. de $\mathcal{H}$) en 0 est l'espace $E_0H = \mathrm{IR} \times \mathrm{S_H}$ (resp. $E_0\mathcal{H} = B^{-1}(\mathcal{H})$).*

Lemme 2.6 *Soit $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^{l+1} telle que $D^j f(0) = 0$ pour tout $j < \sigma$ où σ est un entier inférieur où égal à l. Alors, l'application $Ef : E_0\mathcal{H} \longrightarrow F$ définie par*

$$\begin{cases} Ef(a,\gamma) &= \frac{f(a\gamma)}{a^\sigma} \\ Ef(0,\gamma) &= \frac{1}{\sigma!}D^\sigma(0)\gamma^\sigma \end{cases}$$

est de classe $C^{l-\sigma}$.

Démonstration: classique.

Nous nous fixons, pour la proposition 2.7 et le corollaire 2.8 suivants, une application de classe $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_q)$ de classe C^{l+1} de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^q$ et un système de poids $0 < \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_q \leq l$ tels que :

- $\theta(0) = 0$,
- $D^\sigma \theta_i(0) = 0 \qquad \forall\, \sigma < \omega_i,\ i = 1, \cdots, q.$

nous noterons $\hat{\theta}_i$ la forme ω_i-linéaire symétrique $\dfrac{1}{\omega_i!}D^{\omega_i}\theta_i(0)$ et $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n)$.

D'après le lemme 2.6, $E\theta_i$ définie par

$$\begin{cases} E\theta_i(a,\gamma) &= \dfrac{\theta_i(a\gamma)}{a^{\omega_i}} \\ E\theta_i(0,\gamma) &= \hat{\theta}_i(\gamma) \end{cases}$$

est une fonction de classe $C^{l-\omega_i}$ sur $E_0\mathcal{H}$ et donc $E\theta = (E\theta_1, \cdots, E\theta_n)$ est une application de classe $C^{l-\omega_n}$ sur $E_0\mathcal{H}$.

Proposition 2.7 *Soit $\hat{\mathcal{R}}$ l'ensemble des points γ de H tels que $\hat{\theta}(\gamma) = 0$ et $\hat{\theta}$ soit une submersion en γ.*

Si $\hat{\mathcal{R}}$ est non vide alors pour tout γ dans $\hat{\mathcal{R}}$ il existe une variation γ_s de 0 (θ fixé) telle que $\dfrac{\partial \gamma_s}{\partial s}|_{s=0} = \gamma$ et θ soit une submersion en γ_s pour tout s non nul.

Démonstration : Supposons $\hat{\mathcal{R}}$ non vide et soit γ dans $\hat{\mathcal{R}}$, $v = \dfrac{\gamma}{|\gamma|}$. Montrons qu'il existe une variation (a_s, v_s) de $(0, v)$ dans $E_0\mathcal{H}$ ($E\theta$ fixé) telle que $\dfrac{\partial a_s}{\partial s}_{|s=0} = |\gamma|$ et pour tout s, $E\theta$ est une submersion en (a_s, v_s).

- Vérifions tout d'abord que $E\theta$ est une submersion en $(0, v)$. En effet l'application $\hat{\theta}_i$ étant une forme ω_i-symétrique, $D\hat{\theta}_i(v)v = \omega_i\hat{\theta}_i(v) = 0$ et donc $D\hat{\theta}(v)v = 0$. La différentielle $D\hat{\theta}(v)$ reste donc surjective quand elle est restreinte à $\{v\}^\perp = T_vS_H$ et donc la restriction de $\hat{\theta}$ à S_H est une submersion en v. Or, puisque $E\theta_{|\{0\}\times S_H} = \hat{\theta}_{|S_H}$, $E\theta$ est une submersion en $(0, v)$.

- Il existe V dans T_vS_H tel que $(|\gamma|, V)$ appartienne à $\ker DE\theta(0, v)$. En effet, $\hat{\theta}_{|S_H}$ étant une submersion en v, il existe V dans T_vS_H tel que $D_2E\theta(0, v)V = -D_1E\theta(0, v)|\gamma|$, c'est à dire $(|\gamma|, V) \in \ker DE\theta(0, v)$.

Puisque $E\theta$ est une submersion en $(0, v)$, $E\theta^{-1}(0)$ est une sous-variété au voisinage de $(0, v)$ et $(|\gamma|, V)$ étant dans $T_{(0,v)}E\theta^{-1}(0) = \ker DE\theta(0, v)$, il existe une variation (a_s, v_s) de $(0, v)$ (θ fixé) telle que $\frac{\partial a_s}{\partial s}_{|s=0} = |\gamma|$, $\frac{\partial v_s}{\partial s}_{|s=0} = V$ et telle que $E\theta$ soit une submersion en (a_s, v_s) pour tout s. Ceci nous donne la variation (a_s, v_s) recherchée.

Posons maintenant $\gamma_s = a_s v_s$, nous obtenons alors :
- $\gamma_0 = a_0 v_0 = 0$
- $\theta_i(\gamma_s) = a_s^{\omega_i} E\theta_i(a_s, v_s) = 0 \; \forall s \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$, $i = 1, \cdots, n$
- $\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0} = \frac{\partial a_s}{\partial s}_{|s=0} v_0 + a_0 \frac{\partial v_s}{\partial s}_{|s=0} = |\gamma| v = \gamma$.

Montrons que pour s non nul, θ est une submersion en γ_s : $\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}$ étant non nul, nous pouvons supposer que $\gamma_s \neq 0$ pour $s \neq 0$. Alors pour $s > 0$, θ est au voisinage de γ_s la composition de $(B_+)^{-1}$ avec l'application

$$(a, u) \longmapsto (a^{\omega_1} E\theta_1(a, u), \cdots, a^{\omega_n} E\theta_n(a, u)).$$

La différentielle en (a_s, v_s) de l'application $(a, u) \longmapsto a^{\omega_i} E\theta_i(a, u)$ est :

$$(b, w) \longmapsto (b\omega_i a_s^{\omega_i - 1} E\theta_i(a_s, v_s) + a_s^{\omega_i} DE\theta_i(a_s, v_s)(b, w)$$

et $E\theta_i(a_s, v_s)$ étant nul, ceci s'écrit :

$$(b, w) \longmapsto a_s^{\omega_i} DE\theta_i(a_s, v_s)(b, w).$$

La différentielle en (a_s, v_s) de l'application

$$(a, u) \longmapsto (a^{\omega_1} E\theta_1(a, u), \cdots, a^{\omega_n} E\theta_n(a, u))$$

est donc la composition de l'application surjective $DE\theta(a_s, v_s)$ avec l'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (a_s^{\omega_1} x_1, \cdots, a_s^{\omega_n} x_n).$$

Nous en déduisons que θ est une submersion en γ_s pour $s > 0$. En remplaçant B_+ par B_- nous obtenons le même résultat pour $s < 0$ et γ_s est la variation cherchée. □

Corollaire 2.8 *Soit $\hat{\mathcal{R}}$ l'ensemble des points γ de H tels que $\hat{\theta}(\gamma) = 0$ et $\hat{\theta}$ est une submersion en γ. Alors si $\hat{\mathcal{R}}$ est non vide, l'image d'un voisinage de 0 par θ est un voisinage de 0.*

Démonstration : soit V un ouvert contenant 0, alors d'après la proposition 2.7, il existe γ dans V tel que θ soit une submersion en γ et $\theta(\gamma) = 0$. L'ouvert V est alors un voisinage de γ et sont image par θ est donc un voisinage de 0. □

2.2.2 L'espace $\mathcal{R}_\gamma^\theta$.

Soit θ une application de classe C^l d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans une variété N de dimension q.

Définition 2.9 *Soit γ dans $\mathcal{H}$, nous noterons :*

- h_γ l'application quadratique associée à $\theta''(\gamma)$, c'est-à-dire $h_\gamma(v) = \theta''(\gamma)(v,v)$ pour tout v dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta$

- $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ l'ensemble des points v dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ tels que $h(v)$ soit nul et h soit une submersion en v.

Corollaire 2.10 *Supposons $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ non vide, alors pour tout v dans $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ il existe une variation γ_s de γ (θ fixé) telle que $\dfrac{\partial \gamma_s}{\partial s}|_{s=0} = v$ et telle que θ soit une submersion en γ_s pour s non nul.*

Si $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ est non vide, l'image d'un voisinage de γ par θ est un voisinage de $\theta(\gamma)$.

Démonstration : d'après la section 2.1.2 nous pouvons supposer que nous sommes dans situation suivante : $\mathcal{H} = V \times \mathcal{V}$ où V est un ouvert de $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{q-k}}$, $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$, $\gamma = 0$, $\theta(\gamma) = 0$ et θ s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \theta \,:\, \mathcal{H} = V \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathrm{I\!R}^{\mathrm{q-k}} \times \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}} \\ \varphi = (y,v) & \longmapsto & \theta(\varphi) = (y, \zeta(y,v)) \end{array}$$

où ζ est une application de classe C^l vérifiant $D\zeta(0,0) = 0$.

Posons $\omega_j = 1$ pour j allant de 1 à $q-k$ et $\omega_j = 2$ pour j allant de $q-k+1$ à q. Comme pour la proposition 2.7, nous définissons $\hat\theta_i$ la forme i-linéaire symétrique $\dfrac{1}{\omega_i!}D^{\omega_i}\theta_i(0)$ et $\hat\theta = (\hat\theta_1, \cdots, \hat\theta_n)$. Soit $\hat{\mathcal{R}}$ l'ensemble des points γ de $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{q-k}} \times \mathcal{K}_0^\theta$ tels que $\hat\theta(\gamma) = 0$ et $\hat\theta$ soit une submersion en γ.

Montrons que $\hat{\mathcal{R}} = \{0\} \times \mathcal{R}_0^\theta$. Soit (Y,W) dans $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{q-k}} \times \mathcal{K}_0^\theta$, l'égalité $\hat\theta_j(Y,W) = 0$ pour j allant de 1 à $q-k$ implique que $Y = 0$. De plus

$$(\hat\theta_{q-k+1}(0,W), \cdots, \hat\theta_q(0,W)) = \frac{1}{2}D_2^2\zeta(0,0)(0,W)^2$$

et donc égal, après identification entre $T_xN/\mathcal{I}_\gamma^\theta$ et $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$, à $\dfrac{1}{2}\theta''(\gamma)(W,W) = \dfrac{1}{2}h_\gamma(W)$. Nous en déduisons que (Y,W) appartenant à $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{q-k}} \times \mathcal{K}_0^\theta$ et dans $\hat{\mathcal{R}}$ si et seulement si $Y = 0$ et W est dans $\mathcal{R}_\gamma^\theta$.

Le corollaire 2.10 est alors une conséquence directe de la proposition 2.7 et du corollaire 2.8. □

2.3 Points critiques.

Nous posons ici : $N = M \times \mathrm{I\!R}$ et $\theta = \pi \times E$. Le lemme suivant se démontre de la même façon que le lemme 1.44

Lemme 2.11 *Si γ est un minimum local, alors il existe un voisinage V de γ dans $\mathcal{H}$ tel que $\theta(\gamma)$ soit dans le bord de l'image par θ de V.*

Proposition 2.12 *A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1] Si γ est un minimum local, alors :*
i) θ n'est pas une submersion en γ,
ii) l'ensemble $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ est vide

Démonstration : si θ est une submersion en γ, ceci contredit le lemme 2.11 et également si $\mathcal{R}_\gamma^\theta$ est non vide à cause du corollaire 2.10. □

Soit γ un élément de $\mathcal{H}$ et $y = \theta(\gamma) = (x, E(\gamma))$. Dire que θ n'est pas une submersion en γ revient à dire qu'il existe λ non nul dans T_y^*N tel que l'application linéaire $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ s'annule sur $T_\gamma\mathcal{H}$, c'est-à-dire que $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp \subset T_y^*N$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Définition 2.13 *Un élément γ est un point critique de E si il existe $\lambda = (\alpha, c) \in T_x^*M \times \mathbb{R}$ tel que c est non nul et λ appartient à $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$.*

Lemme 2.14 *Soit γ dans $\mathcal{H}$ et $y = (x, E(\gamma)) = \theta(\gamma)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*
i) γ est un point critique de E
ii) il existe λ dans T_x^*M tel que $\nabla E(\gamma) = \nabla_\lambda \pi(\gamma)$
iii) $DE(\gamma)$ s'annule sur $\mathcal{K}_\gamma^\pi$
iv) $\mathcal{K}_\gamma^\theta = \mathcal{K}_\gamma^\pi$
v) $\dim(T_yN/\mathcal{I}_\gamma^\theta) = \dim(T_xM/\mathcal{I}_\gamma^\pi) + 1$

Preuve : *i)* $\Longleftrightarrow$ *ii)* est évident. La différentielle $DE(\gamma)$ s'annule sur $\mathcal{K}_\gamma^\pi$ si et seulement $\nabla E(\gamma)$ est dans l'orthogonal de $\mathcal{K}_\gamma^\pi$ qui est $\{\nabla_\lambda \pi(\gamma) / \lambda \in T_x^*M\}$ et donc *ii)* $\Longleftrightarrow$ *iii)*. De plus $\mathcal{K}_\gamma^\theta \subset \mathcal{K}_\gamma^\pi$ et il y a égalité si et seulement si $DE(\gamma)$ s'annule sur $\mathcal{K}_\gamma^\pi$, d'où *iii)* $\Longleftrightarrow$ *iv)*. Finalement, $\dim(T_xM/\mathcal{I}_\gamma^\pi)$ est égale à $n - \mathrm{codim}\mathcal{K}_\gamma^\pi$ et $\dim(T_yN/\mathcal{I}_\gamma^\theta) = n + 1 - \mathrm{codim}\mathcal{K}_\gamma^\theta$ et donc *iv)* $\Longleftrightarrow$ *v)*. □

Lemme 2.15 *Soit γ un point critique de E et γ_s une variation de γ (π fixé), si elle existe. Donnons nous $\lambda = (\alpha, c)$ dans $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$ avec c non nul, alors*

$$\frac{\partial^2 E(\gamma_s)}{\partial s^2}_{|s=0} = \frac{1}{c}\lambda \cdot \theta''(\gamma)\left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}\right)$$

Preuve : Quitte à multiplier par $\frac{1}{c}$, nous pouvons supposer que $c = 1$. D'après le lemme 2.3 nous pouvons supposer que $\mathcal{H}$ est un ouvert d'un espace de Hilbert H et que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit γ_s une variation de γ (π fixé) et $v = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}$, alors :

$$E(\gamma_s) = E(\gamma_s) + \alpha\pi(\gamma_s) - \alpha\pi(\gamma) = \lambda \cdot \theta(\gamma_s) - \alpha\pi(\gamma)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial E(\gamma_s)}{\partial s} = \lambda \cdot D\theta(\gamma_s)\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 E(\gamma_s)}{\partial s}_{|s=0} = \lambda \cdot D^2\theta(\gamma)(v, v) + \lambda \cdot D\theta(\gamma)\frac{\partial^2 \gamma_s}{\partial s}_{|s=0}.$$

Or, λ étant dans $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$, $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ est nul et donc

$$\frac{\partial^2 E(\gamma_s)}{\partial s}_{|s=0} = \lambda \cdot \theta''(\gamma)(\gamma)(v,v).$$

□

Proposition 2.16 *Soit γ minimisant dans $\mathcal{H}$. Supposons que $\mathcal{R}_\gamma^\pi$ soit total dans $\mathcal{K}_\gamma^\pi$, alors γ est un point critique de E et pour tout $\lambda = (\alpha, 1) \in (\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$, $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ est positif sur $\mathcal{R}_\gamma^\pi$.*

Démonstration : soit v dans $\mathcal{R}_\gamma^\pi$, il existe d'après le corollaire 2.10 une variation γ_s de γ (π fixé) telle que $\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}|_{s=0} = v$ et donc, γ étant minimisant :

$$DE(\gamma)v = \frac{\partial E(\gamma_s)}{\partial s}_{|s=0} = 0.$$

Nous en déduisons que $DE(\gamma)$ doit s'annuler sur $\mathcal{R}_\gamma^\pi$ et donc sur $\mathcal{K}_\gamma^\pi$ puisque $\mathcal{R}_\gamma^\pi$ est total dans $\mathcal{K}_\gamma^\pi$, c'est-à-dire γ est un point critique de E (lemme 2.14).

Soit $\lambda = (\alpha, 1) \in (\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$, alors d'après le lemme 2.15

$$\frac{\partial^2 E(\gamma_s)}{\partial s^2}_{|s=0} = \lambda \cdot \theta''(\gamma)(v,v)$$

est positif puisque γ est minimisant. Nous en déduisons que $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ est positif sur $\mathcal{R}_\gamma^\pi$. □

2.4 Indice d'une forme quadratique.

Le but de ce chapitre est de traduire les résultats précédents en terme d'indice de la dérivée seconde.

Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{Q}$ une forme bilinéaire symétrique continue sur H et h la forme quadratique associée a $\mathcal{Q}$.

Définition 2.17 *L'indice de $\mathcal{Q}$, noté $ind(\mathcal{Q})$ et appartenant à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est le maximum des entiers d vérifiant : il existe un sous-espace vectoriel W de H tel que $\dim W = d$ et $h_{|W}$ est définie négative.*

Lemme 2.18 *Si F est un sous-espace vectoriel de codimension k de H, alors $ind(\mathcal{Q}_{|F}) \geq ind(\mathcal{Q}) - k$.*

Preuve : Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de H tel que $h_{|W}$ soit définie négative et H' un supplémentaire de $W + F$ dans H . Alors, si W_1 est un supplémentaire de $W \cap F$ dans W, $H' \oplus W_1$ est un supplémentaire de F dans H et donc :

$$\dim(H' \oplus W_1) = \dim(W) - \dim(W \cap F) + \dim(H') = k$$

où encore

$$\dim(W \cap F) = \dim(W) + \dim(H') - k \geq \dim(W) - k\,.$$

La restriction $h_{|F}$ étant définie négative sur $W \cap F$, nous en déduisons que

$$\mathrm{ind}(\mathcal{Q}_{|F}) \geq \dim(W \cap F) \geq \dim(W) - k\,.$$

Ceci étant vrai pour tout sous-espace W tel que $h_{|W}$ soit définie négative, nous avons bien

$$\mathrm{ind}(\mathcal{Q}_{|F}) \geq \mathrm{ind}(\mathcal{Q}) - k\,.$$

Fin de la preuve.

Puisque H est un espace de Hilbert, il existe un opérateur Ω borné sur H tel que, pour tout v et w dans H, $\mathcal{Q}(v,w) = \langle \Omega v, w\rangle$.

Nous dirons que $\mathcal{Q}$ ou Ω est diagonalisable s'il existe une base Hilbertienne de H formée des vecteurs propres de Ω.

Lemme 2.19 *Si $\mathcal{Q}$ est diagonalisable, son indice est égal au nombre de valeurs propres strictement négatives de Ω comptées avec leurs multiplicités.*

preuve : Supposons qu'il existe N vecteurs propres linéairement indépendants de Ω tels que leurs valeurs propres soient strictement négatives. Alors, si W est l'espace vectoriel engendré par ces N vecteurs, la restriction de $\mathcal{Q}$ à W est définie négative et $\dim W = N$. Nous en déduisons que l'indice de $\mathcal{Q}$ est au moins égal à N.

Réciproquement, si l'indice de $\mathcal{Q}$ est supérieur où égal à N, il existe un sous-espace W de dimension N tel que $\mathcal{Q}_{|W}$ soit définie négative. Supposons que le nombre de valeurs propres strictement négatives de Ω (comptées avec leurs multiplicités) soit strictement inférieur à N . Considérons la décomposition orthogonale

$$H = H_- \oplus H_{0+}$$

où H_- est la somme des espaces propres associés aux valeurs propres strictement négatives et H_{0+} la somme hilbertienne des espaces propres associés aux valeurs propres positives ou nulles. L'hypothèse faite est donc que la dimension de H_- est strictement inférieure à N.

Considérons P la restriction à W de la projection orthogonale de H sur H_-. Soit w dans W. Alors $Pw = 0$ implique que w appartient à $H_-^{\perp} = H_{0+}$ et donc que $\mathcal{Q}(w,w) \geq 0$. Donc $w = 0$ puisque $\mathcal{Q}$ est définie négative sur W. Alors P est injective, ce qui contredit l'hypothèse $\dim H_- < N = \dim W$. L'opérateur Ω à donc au moins N valeurs propres négatives (comptées avec leurs multiplicités). $\square$

Lemme 2.20 *Soit $\mathcal{Q}$ diagonalisable et supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel V de H de dimension N tel que h soit négative ou nulle sur V et qu'aucun élément non nul de V ne soit dans le noyau de Ω, alors l'indice de $\mathcal{Q}$ est au moins égal à N.*

Preuve : soit H_- la somme hilbertienne des espaces propres associés aux valeurs propres strictement négatives de Ω et P la restriction à V de la projection orthogonale de H sur H_-. Un élément x de V est dans le noyau de P si et seulement si x appartient à l'orthogonal de H_- dans H qui est égal à la somme hilbertienne des espaces propres associés aux valeurs propres positives où nulles. Donc x est dans le noyau de P si et seulement si il est dans le noyau de Ω. D'après les hypothèses x est nul. Nous en déduisons que P est injective et donc que la dimension de H_-, c'est-à dire l'indice de $\mathcal{Q}$, est au moins égal à N. □

Définition 2.21 *Soit L une application bilinéaire symétrique continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$). L'indice de L est défini par :*

$$ind(L) = \min\{ind(\lambda \cdot L) \;/\; \lambda \in (\mathbb{R}^k)^* \backslash \{0\}\}.$$

La proposition suivante fait le lien entre les résultats de la section précédente et l'indice d'une application.

Proposition 2.22 *Soit L une application bilinéaire symétrique continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), h l'application définie sur H et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ par $h(v) = L(v, v)$, $\mathcal{R}(h)$ ou simplement $\mathcal{R}$ l'ensemble des v de H tel que $h(v) = 0$ et h soit une submersion en v.*

i) Si $ind(L) \geq k$, alors $\mathcal{R}$ est non vide.

ii) Si $ind(L) > k$, alors la famille $\mathcal{R}$ est totale dans H.

Démonstration : L'affirmation 1) est démontrée dans [1] si H est de dimension finie.

Supposons H de dimension infinie et ramenons nous au cas de dimension finie. Pour tout λ dans la sphère unité S^{k-1} de $(\mathbb{R}^k)^*$, il existe par hypothèse un sous-espace W_λ, de dimension k, sur lequel $\lambda \cdot L$ soit définie négative. Il existe, par continuité de l'application $\lambda \mapsto \lambda \cdot L$, un voisinage U_λ de λ tel que, pour tout $\beta \in U_\lambda$, $\beta L_{|W_\lambda}$ soit définie négative.

Par compacité nous pouvons recouvrir S^{k-1} par un nombre fini d'ouverts $U_{\lambda_1}, \cdots, U_{\lambda_s}$. L'espace $W = W_{\lambda_1} + \cdots + W_{\lambda_s}$ est alors de dimension finie, et pour tout λ il existe un sous-espace W_{λ_i} de W tel que $\lambda \cdot L_{|W}$ soit définie négative sur W_{λ_i}. Nous pouvons alors appliquer le résultat en dimension finie à $L_{|W}$. Un point régulier v de $h_{|W}$ tel que $h_{|W}(v) = 0$ est également un point régulier de h et $h(v) = 0$, ce qui démontre i) pour tout espace de Hilbert H.

Montrons maintenant l'affirmation *ii*). Raisonnons par l'absurde en supposant que l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $reg(h^{-1}(0))$ soit contenu dans un sous-espace F de codimension 1 dans H. L'indice de $h_{|F}$ est donc au moins égal à k d'après le lemme 2.18 et donc avec i), il existe x dans F tel qu'au voisinage de x, $h_{|F}^{-1}(0)$ soit une sous-variété de codimension k dans F donc de dimension $k+1$ dans H. Or, $h_{|F}$ étant une submersion en x, il en est de même pour h. Il existe donc un voisinage U de x tel que $U \cap h_{|F}^{-1}(0)$ soit une sous-variété de codimension k dans F et $U \cap h^{-1}(0)$ une sous-variété de codimension k dans H. Puisque $h^{-1}(0) \subset F$, $U \cap h_{|F}^{-1}(0) = U \cap h^{-1}(0)$ mais les codimensions dans H ne sont pas les mêmes, ce qui est absurde et termine la démonstration de la proposition. □

2.5 Indice d'une singularité.

Lemme 2.23 *Soit L une application continue d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans l'espace $L^2(H, \mathbb{R}^k)$ des applications bilinéaires symétriques continues de $H \times H$ dans $\mathbb{R}^k$, où H est un espace de Hilbert. Soit γ_0 dans $\mathcal{H}$ et N un entier tel que $ind(L(\gamma_0)) \geq N$, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de γ_0 dans $\mathcal{H}$ tel que $ind(L(\gamma)) \geq N$ pour tout γ dans $\mathcal{V}$.*

Preuve : Nous noterons h_γ l'application définie sur H par $h_\gamma(v) = L(\gamma)(v,v)$. Soit S la sphère unité de $(\mathbb{R}^k)^*$. Nous nous fixons λ dans S. Puisque l'indice de $L(\gamma)$ est au moins égal à N, il existe un sous-espace W de dimension N tel que $(\lambda \cdot h_{\gamma_0})_{|W}$ soit définie négative. Soit S_W la sphère unité de W. Alors S_W est compact et $(\lambda \cdot h_{\gamma_0})_{|S_W}$ est strictement négative. Par continuité de l'application $(\lambda, \gamma) \mapsto \lambda \cdot L(\gamma)$, il existe des voisinages U_λ de λ dans S et $\mathcal{V}_\lambda$ de γ_0 tels que $(\beta \cdot h_\gamma)_{|S_W}$ soit strictement négative pour tout (β, γ) dans $U_\lambda \times \mathcal{V}_\lambda$, c'est-à-dire $\beta \cdot L(\gamma)_{|W}$ est définie négative.

Les U_λ forment un recouvrement ouvert de S. Par compacité de S, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini $U_1, \cdots, U_s$. Soit $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_s$ les voisinages de γ_0 correspondant aux U_i. Alors, en posant $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{V}_s$, il existe, pour tout γ dans $\mathcal{V}$ et β dans S, un sous espace W de dimension N tel que $\beta \cdot L(\gamma)_{|W}$ soit définie négative et donc l'indice de $L(\gamma)$ est au moins égal à N.

Fin de la preuve.

Lemme 2.24 *Soit π une application de classe C^2 d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans une variété M de dimension n. Nous notons $k(\gamma)$ la codimension de $ImD\pi(\gamma)$ dans $T_{\pi(\gamma)}M$ et soit f l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{H} & \longmapsto & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \gamma & \longmapsto & ind(\pi''(\gamma)) - k(\gamma). \end{array}$$

Alors f est semi-continue inférieurement.

Preuve : fixons γ dans $\mathcal{H}$ et plaçons nous dans des cartes aux voisinages de γ et $\pi(\gamma)$. Nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{H}$ est un voisinage ouvert de $\gamma = 0$ dans un espace de Hilbert $H = \mathbb{R}^{n-k} \times$ K et que π se met sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ \varphi = (x, v) & \longmapsto & \pi(\varphi) = (x, \rho(x, v)) \end{array}$$

où $k = k(\gamma)$.

Alors $\mathcal{K}_0^\pi = \{0\} \times K$ et $\mathcal{I}_0^\pi = \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$. Pour λ dans $(\mathbb{R}^k)^*$ nous avons

$$\lambda \cdot \pi''(0) = \lambda \cdot D_2^2\pi(0,0).$$

Soit $\varphi = (x, v)$ au voisinage de 0, alors $\mathcal{K}_\varphi^\pi$ est un sous-espace de codimension $k - k(\varphi)$ et pour λ dans $(\mathcal{I}_{\pi(\varphi)}^\pi)^\perp \subset \{0\} \times (\mathbb{R}^k)^*$, $\lambda \cdot \pi''(\varphi)$ est la restriction de $\lambda \cdot D_2^2\rho(\varphi)$ à $\mathcal{K}_\varphi^\pi$.

Soit N tel que $f(0) \geq N$, c'est-à-dire $\mathrm{ind}(\pi''(0)) \geq N + k$. Alors il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$ tel que pour tout φ dans ce voisinage, l'indice de $D_2^2\rho(\varphi)$ soit au moins $N + k$ (lemme 2.23) et donc l'indice de $\pi''(\varphi)$ est au moins $N + k - (k - k(\varphi))$ (lemme 2.18). Ceci implique que $f(\varphi) \geq N$ pour φ proche de 0 et démontre le lemme. □

Théorème 2.25 *A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1] Soit π une application d'une variété hilbertienne $\mathcal{H}$ dans M une variété de dimension n et E une fonction sur $\mathcal{H}$.*

i) Si l'indice de $\pi''(\gamma)$ est plus grand que la codimension de $\mathcal{I}_\gamma^\pi$ dans T_xM alors l'image d'un voisinage de γ par π est un voisinage de x.

ii) Si γ est minimisant et si l'indice de $\pi''(\gamma)$ est strictement plus grand que la codimension de $\mathcal{I}_\gamma^\pi$ dans T_xM alors γ est un point critique de E.

Soit $\theta = (\pi, E)$:

iii) Si γ est minimisant, alors l'indice de θ est strictement plus petit que la codimension de $\mathcal{I}_\gamma^\theta$ dans T_yN.

Démonstration : c'est une conséquence directe des propositions 2.22 et 2.16 et du corollaire 2.10. □

2.6 Sous-analycité.

Nous supposons dans cette section que les applications

$$\pi\,:\,\mathcal{H} \longmapsto M \quad \text{et} \quad E\,:\,\mathcal{H} \longmapsto \mathbb{R}$$

sont analytiques.

Soit f la fonction définie sur M par

$$f(x) = \inf\{E(\gamma)\,/\,\pi(\gamma) = x\,\}.$$

Nous notons $\mathcal{M}$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ formé des éléments de $\mathcal{H}$ qui réalisent le minimum de E sur une fibre de π. En d'autres termes :

$$\mathcal{M} = \{\gamma \in \mathcal{H}\,/\,E(\gamma) = f(\pi(\gamma))\}.$$

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème de M. Tamm (voir [27]) dans le cadre hilbertien (il se place dans des variétés préhilbertiennes), où il obtient un résultat analogue mais en imposant à π d'être une submersion.

Théorème 2.26 *Supposons que*

H1) la restriction de π à $\mathcal{M}$ soit surjective et propre.

H2) Pour tout γ dans $\mathcal{M}$ et λ non nul dans T_z^*N vérifiant $\lambda \cdot \theta'(\gamma) = 0$ et tel que l'indice de $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ soit plus petit que la codimension de $Im\theta'(\gamma)$ dans T_zN, l'opérateur associé à la forme $\lambda \cdot \theta''(\gamma)$ est un opérateur de Fredholm diagonalisable.

Alors f est une fonction sous-analytique sur M.

Démonstration :

Etape 1 : *réduction au cas local.*

La sous-analycité est un propriété locale : il suffit, pour montrer que f est sous-analytique, de montrer que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction de f à U est une fonction sous-analytique sur U. Nous pouvons donc supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $x = 0$.

Soit $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap \pi^{-1}(0)$, alors l'hypothèse H1) implique que $\mathcal{M}_0$ est un compact. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}$, nous définissons $f_{\mathcal{V}}$ par :

$$f_{\mathcal{V}}(y) = \inf\{E(\gamma) \,/\, \pi(\gamma) = y \text{ et } \gamma \in \mathcal{V}\}.$$

Lemme 2.27 *Soit $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_N$ un recouvrement ouvert fini de $\mathcal{M}_0$, nous notons f_j au lieu de $f_{\mathcal{V}_j}$. Alors il existe un voisinage ouvert U de 0 dans M tel que pour tout y dans U*

$$f(y) = \inf\{f_j(y) \,;\, j = 1, \cdots, N\}.$$

En particulier, si chacune des f_j est sous-analytique sur U, il en est de même pour f.

preuve : il suffit de montrer qu'il existe un voisinage U de 0 tel que si γ est dans $\mathcal{M}$ tel que $\pi(\gamma)$ est dans U alors γ est dans l'un des $\mathcal{V}_j$. Pour cela nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $\{\gamma_s\}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\pi(\gamma_s)$ converge vers 0 quand s tend vers l'infini et aucuns des γ_s n'est dans l'un des $\mathcal{V}_j$. La restriction de π à $\mathcal{M}$ étant propre, nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que γ_s converge vers un élément γ de $\mathcal{M}$ et par continuité de π, γ est dans $\mathcal{M}_0$. Soit $\mathcal{V}_j$ contenant γ, alors pour s suffisamment grand, γ_s est dans $\mathcal{V}_j$, ce qui donne une contradiction et montre la première partie du lemme. La deuxième partie est un résultat classique sur les fonctions sous-analytiques (voir [27]). □

Etape 2 : *le cas local.*

Soit $\bar{\gamma}$ dans $\mathcal{M}_0$ montrons la proposition suivante :

Proposition 2.28 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\bar{\gamma}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $f_{\mathcal{V}}$ est sous-analytique.*

Preuve : nous nous plaçons tout d'abord au voisinage de $\bar{\gamma}$ et nous pouvons donc supposer que $\mathcal{H}$ est un ouvert d'un espace de Hilbert H et que $\bar{\gamma}$ est égal à 0. Soit K le noyau de $D\theta(0)$ et k la codimension de l'image de $D\theta(0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que θ est au voisinage de 0 de la forme :

$$\begin{aligned} \theta \,:\, \mathcal{H} = U_1 \times \mathcal{V}_0 &\longmapsto U_1 \times U_2 \\ \gamma = (z, u) &\longmapsto \theta(\gamma) = (z, \rho(z, u)) \end{aligned}$$

où U_1 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, U_2 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{V}_0$ est un voisinage de 0 dans K et $p = n + 1 - k$ et ρ est telle que $D\rho(0)$ est nulle.

Fixons nous $\bar{\lambda}$ dans S la sphère unité de $(\mathbb{R}^k)^*$, tel que l'indice de $\bar{\lambda} \cdot \theta''(0)$ soit inférieur à k. L'hypothèse H2 implique que K est la somme orthogonale

$K_1 \oplus K_2$, où K_1 est le noyau de $\bar{\lambda} \cdot \theta''(0)$ et est de dimension finie. Nous notons $\Omega_{\bar{\lambda}}$ l'opérateur associé à $\bar{\lambda} \cdot \theta''(0)$. Puisque son image est fermée sa restriction à K_2 est un isomorphisme de K_2 dans lui-même. Nous écrivons les éléments γ de $\mathcal{H}$ sous la forme $\gamma = (z, u_1, u_2)$ avec z dans U_1, u_1 dans K_1 et u_2 dans K_2. Soit Φ l'application de $S \times \mathcal{H}$ définie par :

$$\langle \Phi(\lambda, \gamma), V \rangle = \langle \lambda, D\theta(\gamma)V \rangle$$

pour tout V dans K_2, c'est à dire, $\Phi(\lambda, \gamma)$ est l'image par la projection orthogonale de K sur K_2 du gradient $\nabla_\lambda(\gamma)$ et donc d'après le théorème 2.25 si γ est dans $\mathcal{M}$, il existe λ dans S tel que $\Phi(\lambda, \gamma) = 0$. La différentielle de Φ par rapport à la variable dans K_2, $D_4\Phi(\bar{\lambda}, 0)$ est alors égale à $\Omega_{\bar{\lambda}}$ et est donc un isomorphisme de K_2. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathcal{V}_1 = U_3 \times U_4 \times U_5 \times \mathcal{V}_2$ de $(\bar{\lambda}, 0)$ dans $S \times \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}} \times \mathrm{K}_1 \times \mathrm{K}_2$ et une application analytique

$$\varphi \,:\, U_3 \times U_4 \times U_5 \longmapsto \mathcal{V}_2$$

tel que pour tout (λ, z, u_1, u_2) dans $\mathcal{V}_1$, $\Phi(\lambda, z, u_1, u_2) = 0$ si et seulement si $u_2 = \varphi(\lambda, z, u_1)$. Nous pouvons également choisir un voisinage ouvert U_6 analytique relativement compact U de $(\bar{\lambda}, 0, 0)$ dans $U_3 \times U_4 \times U_5$ et un voisinage $\mathcal{V}_3$ de 0 dans $\mathcal{V}_2$ tel que si $\Phi(\lambda, z, u_1, u_2) = 0$ et u_2 est dans $\mathcal{V}_3$, alors (λ, z, u_1) est dans U_6. Soit

$$\begin{array}{rcl} f_{\bar{\lambda}} \,:\, M & \longrightarrow & \mathrm{I\!R} \\ x & \longmapsto & \inf\{E(\xi, \varphi(\xi)) \,/\, \pi(\xi, \varphi(\xi)) = x \text{ et } \xi \in U_6\} \end{array}$$

et soit $U_{\bar{\lambda}}$ la projection sur S de U_6. Alors U_6 étant analytique et relativement compact, $f_{\bar{\lambda}}$ est sous-analytique.

Le lemme suivant termine la démonstration de la proposition 2.28

Lemme 2.29 *Il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, un voisinage U de 0 dans $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$ tel que pour tout y dans U*

$$f_{\mathcal{V}}(y) = \inf\{f_{\lambda_j}(y) \,;\, j = 1 \cdots, N\}$$

où les f_{λ_j} sont les fonctions sous-analytiques définies comme précédemment à partir des λ_j.

En particulier $f_{\mathcal{V}}$ est sous-analytique sur U.

Preuve : d'après le lemme 2.23, l'ensemble des λ de S tel que l'indice de $\lambda \cdot \theta''(0)$ est supérieur où égal à k est un ouvert de S. Son complémentaire $\mathcal{C}$ est donc compact. Considérons un recouvrement de $\mathcal{C}$ par des ouverts U_λ avec λ dans $\mathcal{C}$ et soit $\lambda_1, \cdots \lambda_N$ dans $\mathcal{C}$ tels que les U_{λ_j} forment un sous-recouvrement fini de $\mathcal{C}$. Il suffit alors pour montrer le lemme de montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{H}$ tel que pour tout γ minimisant dans $\mathcal{V}$, il existe λ dans l'un des U_{λ_j} tel que $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ soit nul. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe des suites $\{\gamma_s\}$ dans $\mathcal{M}$ et $\{\lambda_s\}$ dans S telles que :

- γ_s tend vers 0,
- $\lambda_s \cdot D\theta(\gamma_s) = 0$ pour tout s,

- l'indice de $\lambda_s \cdot \theta''(\gamma_s)$ est strictement plus petit que $k_s = \mathrm{codimIm} D\theta(\gamma_s)$,
- λ_s ne soient dans aucuns des U_{λ_j} pour tout s.

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que λ_s converge vers $\bar{\lambda}$ dans S mais pas dans $\mathcal{C}$. L'indice de $\bar{\lambda} \cdot \theta''(0)$ est donc au moins égale à k et donc pour s assez grand, l'indice de $\lambda_s \cdot \theta''(\gamma_s)$ est au moins égale à k_s, ce qui donne une contradiction.

Fin de la démonstration du lemme 2.29 et de la proposition 2.28.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2.26. Choisissons x dans M , par l'hypothèse H2, $\mathcal{M} \cap \pi^{-1}(x)$ est compact. D'après la proposition 2.28 nous pouvons recouvrir $\mathcal{M} \cap \pi^{-1}(x)$ par un nombre fini d'ouverts $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_N$ tels que les fonctions $f_j = f_{\mathcal{V}_j}$ soient sous-analytiques et donc f est sous-analytique d'après le lemme 2.27. Le théorème est donc démontré. $\square$

Chapitre 3

Courbes minimisantes.

Le but de ce chapitre est d'appliquer les résultats du chapitre précédent au problème sous-riemannien : étudier, parmi les courbes horizontales de mêmes extrémités, celles qui réalisent le minimum de l'énergie.

Nous faisons dans ce chapitre les hypothèses suivantes :

- M est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$,

- Δ est engendrée par m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ de classe C^l, $l = +\infty$ ou ω,

- la métrique g est telle que ces m champs de vecteurs soient orthonormés.

Il existe alors une base de n champs de 1-formes de classe C^l sur M, $\zeta^1, \cdots, \zeta^n$, telle que pour tout x dans M et X dans Δ_x :

$$\zeta_x^i(X) = \begin{cases} g_x(X, X_i) & \text{si} \quad i = 1, \cdots, m \\ 0 & \text{si} \quad i = m+1, \cdots, n. \end{cases}$$

Nous reprenons les notations du premier chapitre : $\mathcal{H}$ est l'espace des chemins horizontaux, e l'application extrémité, E l'énergie et θ est l'application

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{H} & \longrightarrow & N = M \times M \times \mathbb{R} \\ \gamma & \longmapsto & (e(\gamma), E(\gamma)). \end{array}$$

Pour pouvoir appliquer l'étude réalisée au deuxième chapitre, nous devons étudier l'indice de la dérivée seconde de θ. Nous faisons dans un premier temps l'étude de la différentielle seconde, $D^2e(\gamma)$ de θ en une courbe γ et nous en déduisons ensuite des propriétés de θ'' .

3.1 Calcul des dérivées secondes.

3.1.1 Expression de $D^2\theta$.

Soit $\gamma = (x, u)$ dans $\mathcal{H}$. Le noyau de $De(\gamma)$, $\mathcal{K}^e_\gamma$, est le sous-espace de $\{0\} \times L^2_m$ formé des éléments de la forme $(0, W)$ tels que

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m W_i(t)\langle q(t), X_i(\gamma(t))\rangle \, dt = 0$$

pour tout relèvement q de γ (section 1.5).

Nous considérons $\mathcal{K}^e_\gamma$ comme un sous-espace de L^2_m et puisque $\theta''(\gamma)$ est définie sur $\mathcal{K}^\theta_\gamma \subset \mathcal{K}^e_\gamma$, nous pouvons nous limiter à calculer $D^2\theta(\gamma)((0, V), (0, W)$ pour des éléments V et W de L^2_m. Dans ce cas,

$$D^2\theta(\gamma)((0, V), (0, W) = (D^2\pi_{\gamma(0)}(V, W), 2\langle V, W\rangle_{L^2}).$$

Le lemme 1.25 s'exprime de la manière suivante : $T\mathcal{H}$ est l'espace des chemins horizontaux pour la distribution $T\Delta$. Il s'identifie à l'espace des contrôles associés à la base $Y_1, \cdots, Y_{2m}$ (voir en fin de section 1.7 pour l'expression des Y_i) et $T\mathcal{C}^{-1}$ est l'application qui à un contrôle et une condition initiale dans TM associe la courbe horizontale pour $T\Delta$ correspondante.

Nous avons donc une application extrémité

$$Te \,:\, T\mathcal{H} \longrightarrow TM \times TM$$

définie par

$$\begin{aligned} Te(x, X, u, V) &= (\,(\gamma(0), \mu(0))\,,\,(\gamma(1), \mu(1))\,) \\ &= (\,(\gamma(0), \mu(0))\,,\,(\pi(\gamma), D\pi(\gamma)(X, V)\,) \end{aligned}$$

où $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(\gamma)(X, V)$. En différentiant Te nous obtenons :

$$DTe(x, X, u, V)(Y, 0, W, 0) = (\,(\nu(0), 0)\,,\,(\nu(1), D^2\pi(\gamma)((X, V), (Y, W)))\,)$$

où $\nu = \mathcal{C}^{-1}(\gamma)(Y, W)$.

Nous nous sommes donc ramenés à calculer la différentielle d'une application extrémité, ce que nous pouvons faire grace au lemme 1.25. D'où le lemme :

Lemme 3.1 *Soit $\gamma = (x, u)$ une courbe horizontale, μ et ν deux champs de vecteurs horizontaux d'origine nulle le long de γ et soient V et W leurs contrôles, alors*

$$D^2\pi_x(\gamma)(V, W) = \Gamma(1)$$

où Γ la solution du système :

$$T^2\Delta(\gamma, V, W) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot\Gamma(t) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^m u_i(t)DX_i(\gamma(t))\Gamma(t) + u_i(t)D^2X_i(\gamma(t))(\mu(t), \nu(t)) \\ && +V_i(t)DX_i(\gamma(t))\nu(t) + W_i(t)DX_i(\gamma(t))\mu(t) \\ \Gamma(0) &=& 0. \end{array} \right.$$

Ceci s'écrit encore :

$$D^2\pi_x(\gamma)(V,W) = M_\gamma(1)\int_0^1 M_\gamma^{-1}(t)f(t)\,dt$$

avec

$$f(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)D^2X_i(\gamma(t))(\mu(t),\nu(t)) + V_i(t)DX_i(\gamma(t))\nu(t) + W_i(t)DX_i(\gamma(t))\mu(t)$$

et M_γ est le champ de matrice donné par la définition 1.21.

Notation : Pour i allant de 1 à m, x dans M et Y dans $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$, nous notons $P_x^i(Y)$ la matrice $n\times n$:

$$\begin{array}{rcl} P_x^i(Y) : \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} & \longrightarrow & \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \\ Z & \longmapsto & D^2X_i(x)(Y,Z). \end{array}$$

Définition 3.2 *Soit μ un champ de vecteurs tangents le long d'une courbe horizontale γ et V son contrôle. Soit q un relèvement de γ.*

Un q-relèvement de μ le long de γ (ou simplement relèvement si q est fixé) est une solution Q du système :

$$TT^*\Delta(\gamma,V,q)\left\{\begin{array}{rcl} \dot Q(t) & = & -\sum_{i=1}^m u_i(t)({}^tDX_i(\gamma(t))Q + {}^tP^i_{\gamma(t)}(\mu(t))q(t)) \\ & & +V_i(t)\,{}^tDX_i(\gamma(t))q(t) \end{array}\right.$$

Remarque : une solution Q d'un tel système est de la forme :

$$N_\gamma(t)Q(0) - N_\gamma(t)\int_0^t N^{-1}_{\gamma(s)}(s)\sum_{i=1}^m u_i(s)\,{}^tP^i_{\gamma(s)}(\mu(s))q(s) + V_i(s)\,{}^tDX_i(\gamma(s))q(s)\,ds$$

où N_γ est le champ de matrice donné par la définition 1.21.

Si $\tilde Q$ est un autre q-relèvement de μ alors $\tilde Q - Q$ est égal à $N_\gamma(t)\tilde Q(0) - N_\gamma(t)Q(0)$. C'est donc un relèvement de γ.

Proposition 3.3 *Soit $\gamma = (x,u)$ dans $\mathcal{H}$, β dans $(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})^*$, V et W dans L^2_m, alors $\langle\beta, D^2\pi_x(u)(V,W)\rangle$ est égal à*

$$\sum_{k=1}^m\int_0^1 W_k(t)(\langle Q(t) - N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)Q(1), X_k(\gamma(t))\rangle + \langle\,{}^tDX_k(\gamma(t))q(t),\mu(t)\rangle)\,dt$$

où q est le relèvement de γ vérifiant $q(1) = \beta$, μ est le champ de vecteurs tangents le long de γ d'origine nulle et de contrôle V, Q est le $q-$relèvement de μ d'origine nulle.

L'opérateur de L^2_m associé à la forme quadratique $\beta\cdot D^2\pi_x(\gamma)$ est un opérateur autoadjoint compact.

Démonstration : soit q le relèvement de γ tel que $q(1)=\beta$. D'après le lemme 3.1,

$$\begin{aligned}\langle \beta, D^2\pi_x(u)(V,W)\rangle &= \langle q(1), M_\gamma(1)\int_0^1 M_\gamma^{-1}(s)f(s)\rangle\, ds\\ &= \int_0^1 \langle N_\gamma(s)\,{}^tM_\gamma(1)q(1), f(s)\rangle\, ds\\ &= \int_0^1 \langle q(s), f(s)\rangle\, ds\end{aligned}$$

où $f=f_1+f_2$ avec

$$\begin{aligned}f_1(t) &= \sum_{i=1}^m (u_i(t)P^i_{\gamma(t)}(\mu(t)) + V_i(t)DX_i(\gamma(t)))\nu(t),\\ f_2(t) &= \sum_{i=1}^m W_i(t)DX_i(\gamma(t))\mu(t)\end{aligned}$$

et

$$\nu(t) = M_\gamma(t)\int_0^t \sum_{k=1}^m W_k(s)M_\gamma^{-1}(s)X_k(\gamma(s))\, ds.$$

En posant

$$h_k(s) = W_k(s)M_\gamma^{-1}(s)X_k(\gamma(s)),$$

$\int_0^1 \langle q(t), f_1(t)\rangle\, dt$ s'écrit

$$\sum_{k=1}^m \int_0^1 \sum_{i=1}^m \langle {}^tM_\gamma(t)[u_i(t)^tP^i_{\gamma(t)}(\mu(t)) + V_i(t)\,{}^tDX_i(\gamma(t))]q(t), \int_0^t h_k(s)\, ds\rangle\, dt.$$

Après une intégration par parties, ceci est égal à

$$\sum_{k=1}^m \int_0^1 \langle \int_0^1 \sum_{i=1}^m N_\gamma^{-1}(s)(u_i(s)^tP^i_{\gamma(s)}(\mu(s)) + V_i(s)\,{}^tDX_i(\gamma(s)))q(s)\, ds, h_k(t)\rangle\, dt$$

$$-\sum_{k=1}^m \int_0^1 \langle \int_0^t \sum_{i=1}^m N_\gamma^{-1}(s)(u_i(s)^tP^i_{\gamma(s)}(\mu(s)) + V_i(s)\,{}^tDX_i(\gamma(s)))q(s)\, ds, h_k(t)\rangle\, dt$$

et donc

$$\int_0^1 \langle q(t), f_1(t)\rangle\, dt = \sum_{k=1}^m \int_0^1 W_k(t)\langle Q(t) - N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)Q(1), X_k(\gamma(t))\rangle\, dt$$

où Q est le q-relèvement de μ tel que $Q(0)=0$. D'autre part :

$$\int_0^1 \langle q(t), f_2(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^m W_k(t)\langle {}^tDX_k(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle\, dt.$$

Finalement, $\langle \beta, D^2\pi_x(u)(V,W)\rangle$ est égal à

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 W_k(t)(\langle Q(t)-N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)Q(1), X_k(\gamma(t))\rangle + \langle {}^t DX_k(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt.$$

Ce qui donne l'égalité recherchée. Pour montrer que l'opérateur associé à la forme quadratique $\beta\cdot D^2\pi_x(\gamma)$ est un opérateur autoadjoint compact, il suffit alors de remarquer que

$$\langle Q(t)-N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)Q(1), X_k(\gamma(t))\rangle + \langle {}^t DX_k(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle$$

peut se mettre sous la forme

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{m} a_i^k(s,t)V_i(s)ds$$

où les a_i^k sont dans $L^2([0,1]^2, \mathbb{R})$. L'opérateur associé à la forme quadratique $\beta\cdot D^2\pi_x(\gamma)$ est alors un opérateur de Hilbert-Schmidt donc compact. □

3.1.2 Etude de θ''

Le lemme 1.44 et la proposition 1.46 donnent la première condition d'optimalité suivante : si γ est minimisante, il existe un relèvement non nul q de γ et un réel λ_0 tels que pour presque tout t dans $[0,1]$, $G_{\gamma(t)}q(t)=\lambda_0\dot\gamma(t)$. Ce relèvement est tel que $\lambda\cdot\theta'(\gamma)$ est nul avec $\lambda=(q(0),-q(1),\lambda_0)$. Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition 1.46.

Corollaire 3.4 *Nous notons $\mathcal{I}_\gamma^\theta$ l'image de $D\theta(\gamma)$ et S_γ^θ l'espace des relèvements q de γ vérifiant : il existe λ_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $G_\gamma q = 2\lambda_0\dot\gamma$. Alors $\mathcal{I}_\gamma^\theta$ et S_γ^θ sont isomorphes par l'application :*

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma^\theta & \longrightarrow & \mathcal{I}_\gamma^\theta \\ q & \longmapsto & (q(0),-q(1),\lambda_0) \end{array}$$

où λ_0 satisfait $G_\gamma q = 2\lambda_0\dot\gamma$. Cet isomorphisme permet également d'identifier les relèvements anormaux de γ avec $(\mathcal{I}_\gamma^e)^\perp$.

Notations : soit λ dans $(\mathcal{I}_\gamma^\theta)^\perp$ et q le relèvement de γ tel que $\lambda=(q(0),-q(1),\lambda_0)$ nous noterons $q\cdot\theta''(\gamma)$ au lieu de $\lambda\cdot\theta''(\gamma)$.

Si q est un relèvement de γ appartenant à S_γ^θ nous le noterons (q,λ_0) au lieu de q pour préciser que $G_{\gamma(t)}q(t)=\lambda_0\dot\gamma(t)$.

Définition 3.5 *Un relèvement (q,λ_0) d'une courbe γ est dit optimal si l'indice de $q\cdot\theta''(\gamma)$ est inférieur strictement à la codimension de l'image de $D\theta(\gamma)$.*

La condition iii) du théorème 2.25 s'énonce alors :

Corollaire 3.6 *Si une courbe γ est localement minimisante, elle possède un relèvement optimal.*

Théorème 3.7 *Soit (γ, q, λ_0) une biextrèmale , alors pour tout champ de vecteurs tangents μ le long de γ, d'extrémités nulles et de contrôle V dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ et pour tout W dans $\mathcal{K}_\gamma^\theta$:*

$$q \cdot D^2\theta(\gamma)(V,W) =$$

$$2\lambda_0\langle W,V\rangle_{L^2} - \sum_{i=1}^m \int_0^1 W_i(t)(\langle Q(t), X_i(\gamma(t))\rangle + \langle {}^t DX_i(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt.$$

pour tout relèvement Q de μ.

L'opérateur de $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ associé à $q \cdot \theta''(\gamma)$ est de la forme $2\lambda_0 I - L$, où L est un opérateur autoadjoint compact. En particulier, c'est un opérateur de fredholm si et seulement si λ_0 est non nul.

Si nous supposons γ hamiltonienne, alors $\mathcal{K}_\gamma^\theta = \mathcal{K}_\gamma^e$ et il existe un relèvement Q de μ tel que :

$$\Omega_q V = 2\lambda_0 V - (\langle Q, X_1(\gamma)\rangle + \langle {}^t DX_1(\gamma)q, \mu\rangle, \cdots, \langle Q, X_m(\gamma)\rangle + \langle {}^t DX_m(\gamma)q, \mu\rangle).$$

Démonstration : d'après la proposition 3.3, $\langle q(1), D^2\pi_x(\gamma)(V,W)\rangle$ est de la forme :

$$\sum_{k=1}^m \int_0^1 W_k(t)(\langle \tilde{Q}(t) - N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)\tilde{Q}(1), X_k(\gamma(t))\rangle + \langle {}^t DX_k(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt$$

où $\tilde{Q}$ est le q-relèvement de μ tel que $\tilde{Q}(0) = 0$. Or, W étant dans $\mathcal{K}_\gamma^{\pi_x}$,

$$\sum_{k=1}^m \int_0^1 W_k(t)\langle N_\gamma(t)N_\gamma^{-1}(1)\tilde{Q}(1), X_k(\gamma(t))\rangle\, dt = 0$$

et donc ,

$$\langle q(1), D^2\pi_x(\gamma)(V,W)\rangle = \sum_{i=1}^m \int_0^1 W_i(t)\langle \tilde{Q}(t)X_i(\gamma(t)) + {}^t DX_i(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle\, dt.$$

Si Q est un autre relèvement de μ, $\tilde{Q} - Q$ est un relèvement de γ et W étant dans $\mathcal{K}_\gamma^{\pi_x}$,

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m W_i(s)\langle \tilde{Q}(s) - Q(s), X_i(\gamma(s))\rangle\, ds = 0$$

et donc

$$\langle q, D^2 e(\gamma)(V,W)\rangle = -\sum_{i=1}^m \int_0^1 W_i(t)(\langle Q(t), X_i(\gamma(t))\rangle + \langle {}^t DX_i(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt$$

pour tout relèvement Q de γ ce qui donne l'égalité recherchée puisque

$$\lambda_0 D^2 E(\gamma) = 2\lambda_0\langle W,V\rangle_{L^2}.$$

La forme quadratique $q \cdot \theta''(\gamma)$ est la restriction à $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ de

$$\lambda_0 D^2 E(\gamma) - q(1) D^2 \pi_x(\gamma).$$

Si nous notons $\tilde{L}_{q(1)}$ l'opérateur de L^2_m associé à $q(1) \cdot D^2\pi_x(\gamma)$, alors $\tilde{L}_{q(1)}$ est un opérateur autoadjoint compact d'après la proposition 3.3 et donc également L la restriction à $\mathcal{K}_\gamma^\theta$ de $P\tilde{L}$ où P est la projection orthogonale de L^2_m sur $\mathcal{K}_\gamma^\theta$. Or $\Omega_q = 2\lambda_0 I - L$.

Si λ_0 est non nul, le noyau de Ω_q est égal à l'espace propre associé à la valeur propre $2\lambda_0$ de L, il est donc de dimension fini. De plus le spectre de Ω_q peut être ordonné pour former une suite de valeurs propres qui tend vers $2\lambda_0$ et donc Ω_q est inversible sur l'orthogonal de son noyau. C'est donc un opérateur de fredholm.

Si λ_0 est nul, $\Omega_q = L$ est un opérateur autoadjoint compact et n'est donc pas un opérateur de fredholm.

Supposons γ hamiltonienne et donc $\mathcal{K}_\gamma^e = \mathcal{K}_\gamma^\theta$ (lemme 2.14). Soit $\tilde{Q}$ un relèvement de μ. D'après la proposition 3.3, $\Omega_q V$ est le projeté orthogonal sur $\mathcal{K}_\gamma^e$ de

$$(2\lambda_0 V_1 - \langle \tilde{Q}, X_1(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_1(\gamma) q, \mu\rangle, \cdots, 2\lambda_0 V_m - \langle \tilde{Q}, X_m(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_m(\gamma) q, \mu\rangle).$$

L'orthogonal de $\mathcal{K}_\gamma^e$ étant formé des éléments de la forme $(\langle \xi, X_1\rangle, \cdots, \langle \xi, X_m\rangle)$ où ξ est un relèvement de γ, nous en déduisons qu'il existe un relèvement ξ de γ tel que

$$\begin{aligned}\Omega_q V = (&2\lambda_0 V_1 - \langle \tilde{Q}, X_1(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_1(\gamma) q, \mu\rangle - \langle \xi, X_1\rangle, \cdots,\\ &2\lambda_0 V_m - \langle \tilde{Q}, X_m(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_m(\gamma) q, \mu\rangle - \langle \xi, X_m\rangle)\end{aligned}$$

et donc $Q = \xi + \tilde{Q}$ est le relèvement cherché. □

3.1.3 Le chemin constant.

Nous considérons donc ici $\gamma = (x, 0)$ le chemin constant égal à x. la différentielle $D\pi_x(\gamma)$ est l'application $V \mapsto \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(t) X_i(x)\, dt$ et donc son noyau est égal à $\{V \in L^2_m \,/\, \int_0^1 V(t)\, dt = 0\}$, son image est Δ_x, $(\mathcal{I}_\gamma^e)^\perp = \{(\alpha, \alpha) \,/\, \alpha \in \Delta_x^\perp\}$.

Un relèvement q de γ est constant et un q-relèvement Q de V s'écrit :

$$Q(t) = -\sum_{i=1}^m \left(\int_0^t V_i(s)\, ds\right) {}^t DX_i(x) q(0).$$

D'après la proposition 3.7, ω est une valeur propre de Ω_λ si et seulement si il existe σ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ et V non nul dans $\mathcal{K}$ tels que

$$\omega V_i(t) = \langle \sigma, X_i(x)\rangle - \sum_{k=1}^m \left(\int_0^t V_k(s)\, ds\right) \langle {}^t DX_k(x) q(0), X_i(x)\rangle$$

$$+\langle {}^t DX_i(x)q(0), \sum_{k=1}^{m} (\int_0^t V_k(s)\, ds) X_k(x) \rangle$$

ce qui est équivalent à

$$\omega V_i(t) = \langle \sigma, X_i(x) \rangle - \sum_{k=1}^{m} (\int_0^t V_k(s)\, ds) \langle q(0), [X_k, X_i](x) \rangle.$$

En intégrant entre 0 et 1, nous obtenons

$$\langle \sigma, X_i(x) \rangle = \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} (\int_0^t V_k(s)\, ds) \langle q(0), [X_k, X_i](x) \rangle \, dt.$$

La famille $\{X_1(x), \cdots, X_m(x)\}$ étant libre, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathrm{n}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \\ \sigma & \longmapsto & (\langle \sigma, X_1(x) \rangle, \cdots, \langle \sigma, X_m(x) \rangle) \end{array}$$

est de rang m, c'est-à-dire surjective et donc ω est une valeur propre non nulle de Ω_λ si et seulement si il existe V dans L^2_m vérifiant

$$(*) \left\{ \begin{array}{lll} \dot{V}(t) & = & \frac{1}{\omega} A_{q(0)}(x) V(s) \\ \displaystyle\int_0^1 V(t)\, dt & = & 0 \end{array} \right.$$

où $A_{q(0)}(x)$ est la matrice antisymétrique $(\langle q(0), [X_i, X_k](x) \rangle)$. Remarquons que $A_{q(0)}(x)$ est nulle si et seulement si $q(0)$ appartient à $(\Delta_x^2)^\perp$.

Lemme 3.8 *Soit α dans $\Delta_x^\perp$ et $\lambda = (\alpha, \alpha)$, alors Ω_λ est nul si et seulement si α appartient à $(\Delta_x^2)^\perp$ et si α appartient à $\Delta_x^\perp \backslash (\Delta_x^2)^\perp$ son indice est infini.*

Preuve : Si $\alpha \in \Delta_x^\perp \backslash (\Delta_x^2)^\perp$, la matrice $A_\alpha(x)$ est non nulle. C'est une matrice antisymétrique donc diagonalisable dans $\mathbb{C}^n$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre et $i\tau \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, sa valeur propre. Soit $z(t) = e^{i\frac{\tau t}{\omega}} z_0$ alors

$$\omega \dot{z}(t) = i\tau e^{i\frac{\tau t}{\omega}} z_0 = A_\alpha(x) z(t)$$

et

$$\int_0^1 z = \frac{\omega}{i\tau}(e^{i\frac{\tau}{\omega}} - 1) = 0$$

si et seulement si $\dfrac{\tau}{\omega} = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}^*$.

Maintenant, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, $\omega = \dfrac{\tau}{2p\pi}$ est une valeur propre de Ω_λ car si z vérifie $(*)$, la matrice $A_\alpha(x)$ étant réelle, il en est de même pour $\bar{z}$ et donc pour les réels $z + \bar{z}$ et $i(z - \bar{z})$. Le complexe z étant non nul, l'un des deux réels précédent est non nul et est donc un vecteur propre de Ω_λ. Cela étant vrai pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, il existe une infinité de valeurs propres négatives. □

3.2 Indice de $q \cdot \theta''(\gamma)$

3.2.1 Concaténation.

Définition 3.9 *Soit $[a,b]$ un intervalle inclus dans $[0,1]$ et $\gamma = (x,u)$ dans $\mathcal{H}$, la restriction de γ à $[a,b]$, notée $\gamma_{[a,b]}$,est définie par*

$$\gamma_{[a,b]}(t) = \gamma(\sigma(t)) \qquad \forall t \in [0,1]$$

où σ est l'application $t \mapsto a(1-t)+tb$.

Lemme 3.10 *Le contrôle de $\gamma_{[a,b]}$ noté $u_{[a,b]}$ est égal à $\dot\sigma u \circ \sigma$.*

Soit q un relèvement de γ alors $q_{[a,b]} = q \circ \sigma$ est un relèvement de $\gamma_{[a,b]}$.

Si il existe un réel λ_0 tel que $G_\gamma q = 2\lambda_0 \dot\gamma$ alors

$$G_{\gamma_{[a,b]}} q_{[a,b]} = 2\frac{\lambda_0}{b-a}\dot\gamma_{[a,b]}.$$

En particulier, si q est un relèvement hamiltonien (resp. anormal) de γ, alors $(b-a)q_{[a,b]}$ est un relèvement hamiltonien (resp. anormal) de $\gamma_{[a,b]}$.

Preuve : simple calcul. □

Nous considérons une suite $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et pour tout j nous posons $\gamma^j = \gamma_{[t_{j-1},t_j]}$, $q^j = q_{[t_{j-1},t_j]}$, $u^j = u_{[t_{j-1},t_j]}$ et σ_j l'application $t \mapsto t_{j-1}(1-t) + tt_j$.

Définition 3.11 *Pour tout j nous nous donnons μ^j un champ de vecteurs tangents nul aux extrémités et de contrôle V^j appartenant à $\mathcal{K}^e_{\gamma^j}$.*

La concaténation μ des $\mu^1, \cdots, \mu^N$ est définie par

$$\mu(t) = \mu^j(\sigma_j^{-1}(t)) \quad pour \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Nous noterons $\mu = \mu^1 \times \cdots \times \mu^N$.

Lemme 3.12 *L'élément μ ainsi définit est un champ de vecteurs tangents le long de γ, son contrôle noté $V = V^1 \times \cdots \times V^N$ est donné par :*

$$V(t) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} V^j(\sigma_j^{-1}(t)) \quad pour \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Soit Q un q-relèvement de μ , alors $Q^j = Q \circ \sigma_j$ est un q^j-relèvement de μ^j.

Preuve : pour t appartenant à $[t_{j-1}, t_j]$ et $s = \sigma_j^{-1}(t)$

$$\begin{aligned}
\dot\mu(t) &= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \dot\mu^j(s) \\
&= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \sum_{i=1}^m u_i^j(s) DX_i(\gamma^j(s))\mu^j(s) + V_i^j(s) X_i(\gamma^j(s)) \\
&= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \sum_{i=1}^m (t_j - t_{j-1}) u_i(t) DX_i(\gamma(t))\mu(t) + V_i^j(s) X_i(\gamma(t)) \\
&= \sum_{i=1}^m u_i(t) DX_i(\gamma(t))\mu(t) + \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \sum_{i=1}^m V_i^j(s) X_i(\gamma(t))
\end{aligned}$$

et donc $D\mathcal{C}(\gamma)\mu = (0, V)$ où V est défini par

$$V(t) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} V^j(\sigma_j^{-1}(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Puisque $\mu(0) = \mu(1) = 0$, V appartient à $\mathcal{K}_\gamma^e$.

Soit Q un relèvement de μ et $Q^j = Q \circ \sigma_j$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^j(t) &= (t_j - t_{j-1})\dot{Q}(\sigma_j(t)) \\
&= -(t_j - t_{j-1}) \sum_{i=1}^m u_i(\sigma_j(t))({}^t DX_i(\gamma^j(t))Q(\sigma_j(t)) \\
&\quad + {}^t P^i_{\gamma^j(t)}(\mu(\sigma_j(t)))q(\sigma_j(t))) + V_i(\sigma_j(t))\, {}^t DX_i(\gamma^j(t))q(\sigma_j(t)) \\
&= -\sum_{i=1}^m u_i^j(t)({}^t DX_i(\gamma^j(t))Q^j(t) + {}^t P^i_{\gamma^j(t)}(\mu^j(t)q^j(t)) \\
&\quad + V_i^j(t)\, {}^t DX_i(\gamma^j(t))q^j(t)
\end{aligned}$$

et donc Q^j est un q^j-relèvement de μ^j. □

Lemme 3.13 *Ceci nous permet de décomposer $q \cdot \theta''(\gamma)$:*

$$q \cdot \theta''(\gamma)(V, V) = \sum_{j=1}^N q^j \cdot \theta''(\gamma^j)(V^j, V^j).$$

Preuve : d'après la proposition 3.7

$$\begin{aligned}
& q \cdot D^2\theta(\gamma)(V, V) \\
= & \sum_{i=1}^m \int_0^1 V_i(t)(2\lambda_0 V_i(t) - \langle Q(t), X_i(\gamma(t))\rangle - \langle {}^t DX_i(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt \\
= & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} V_i(t)(2\lambda_0 V_i(t) - \langle Q(t), X_i(\gamma(t))\rangle - \langle {}^t DX_i(\gamma(t))q(t), \mu(t)\rangle)\, dt \\
= & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \int_0^1 (t_{j-1} - t_j) V_i(\sigma_k(s))(2\lambda_0 V_i(\sigma_k(s)) - \langle Q(\sigma_k(s)), X_i(\gamma(\sigma_k(s)))\rangle \\
& - \langle {}^t DX_i(\gamma(\sigma_k(s)))q(\sigma_k(s)), \mu(\sigma_k(s))\rangle)\, ds \\
= & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \int_0^1 V_i^j(s)(2\frac{\lambda_0}{(t_{j-1} - t_j)} V_i^j(s) - \langle Q^j(s), X_i(\gamma^j(s))\rangle \\
& - \langle {}^t DX_i(\gamma^j(s))q^j(s), \mu^j(s)\rangle)\, ds
\end{aligned}$$

et donc $q \cdot \theta''(\gamma)(V, V) = \sum_{j=1}^N q^j \cdot \theta''(\gamma^j)(V^j, V^j)$. □

Corollaire 3.14 *L'indice de $q \cdot \theta''(\gamma)$ est au moins égal à la somme des indices des $q^j \cdot \theta''(\gamma^j)$.*

Démonstration : soit E_k un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^e_{\gamma^k}$ tel que $q^k \cdot \theta''(\gamma^k)$ soit défini négative sur E_k et soit E l'espace des éléments V de la forme $V_1 \times \cdots \times V_N$ où les V_k sont dans E_k. Alors la dimension de E est égale à la somme des dimensions des E_k et $q \cdot \theta''(\gamma)$ est définie négative sur E d'après le lemme 3.13. □

3.2.2 Courbes strictement anormales.

Proposition 3.15 *A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1] Soit q un relèvement anormal de γ, alors pour que l'indice de $q \cdot e''(\gamma)$ soit fini, il faut que q appartienne à $(\Delta^2)^{\perp}$.*

Démonstration : supposons que l'indice de $q \cdot e''(\gamma)$ soit fini, égal à N, et supposons qu'il existe t dans $[0,1]$ tel que $q(t)$ n'appartienne pas à $(\Delta^2_{\gamma(t)})^{\perp}$. Pour tout entier σ suffisament grand, nous posons $\gamma_\sigma = \gamma_{[t,\frac{1}{\sigma}]}$, $q_\sigma = q_{[t,\frac{1}{\sigma}]}$ et $\lambda_\sigma = (q_\sigma(0), -q_\sigma(1), 0)$. Alors quand σ tend vers l'infini, γ_σ converge vers le chemin constant égal à $\gamma(t)$ et λ_σ converge vers $(q(t), -q(t), 0)$ avec $q(t)$ dans $(\Delta_{\gamma(t)})^{\perp} \backslash (\Delta^2_{\gamma(t)})^{\perp}$. D'après les lemmes 3.8 et 2.23, pour σ suffisament grand, l'indice de $q_\sigma \cdot D^2 e(\gamma_\sigma)$ est plus grand que $N+1+2n$ et donc l'indice de $q_\sigma \cdot e''(\gamma_\sigma)$ est plus grand que $N+1$. D'après le corollaire 3.14 l'indice de $q \cdot e''(\gamma)$ est également plus grand que $N+1$, ce qui donne une contradiction. □

Corollaire 3.16 *A.A. Agrachev, A.V. Sarychev [1] Si une courbe minimisante γ est strictement anormale alors il existe un relèvement anormal de γ dans $(\Delta^2)^{\perp}$.*

Si Δ est de degré 2 où si Δ^2 est une distribution régulière qui satisfait la condition H^2-forte alors toutes les courbes minimisantes sont hamiltoniennes.

Démonstration : la première affirmation découle directement du théorème 2.25 et du corollaire 3.15.

Si Δ est de degré 2 où si Δ^2 satisfait la condition H^2-forte, les seules courbes qui sont anormales pour la distribution Δ^2 sont les chemins constants qui sont des courbes hamiltoniennes. D'après la première partie du corollaire, il n'existe pas de courbes strictement anormales. □

3.3 Indice d'une courbe hamiltonienne.

Dans tout le paragraphe 3.3 nous nous fixons une courbe hamiltonienne γ et q un relèvement hamiltonien de γ. Nous supposerons de plus que γ n'a pas de points doubles, en particulier, γ n'est pas un chemin constant.

3.3.1 Points conjugués.

Pour $\xi = (x,q)$ dans T^*M et (Y,Q) dans $T_\xi T^*M$ nous posons :

$$f_i(x,q,Y,Q) = \langle Q, X_i(x)\rangle + \langle q, DX_i(x)Y\rangle.$$

L'application $(Y,Q) \mapsto f_i(x,q,Y,Q)$ est la différentielle en (x,q) de l'application $(x,q) \mapsto \langle q, X_i(x)\rangle$. Alors $D\vec{H}(x,q,Y,Q)$ est égal à

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle q, X_i(x)\rangle DX_i(x)Y + \sum_{i=1}^{m} f_i(x,q,Y,Q)X_i(x) \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{m} \langle q, X_i(x)\rangle ({}^tDX_i(x)Q + {}^tP_x^i(Y)q) + f_i(x,q,Y,Q)\,{}^tDX_i(x)q \end{pmatrix}$$

Soit (Y_0, Q_0) dans $T_{(\theta(0),q_0)}T^*M$ et (μ, Q) la solution du système $(J(\gamma,q))$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mu} &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle q, X_i(\gamma)\rangle DX_i(\gamma)\mu + \sum_{i=1}^{m} f_i(\gamma,q,\mu,Q)X_i(\gamma) \\ \dot{Q} &=& \displaystyle -\sum_{i=1}^{m} \langle q, X_i(\gamma)\rangle ({}^tDX_i(\gamma)Q + {}^tP_\gamma^i(\mu)q) + f_i(\gamma,q,\mu,Q)\,{}^tDX_i(\gamma)q \end{array} \right.$$

d'origine (Y_0, Q_0), alors

$$Dexp(x,q_0)(Y_0,Q_0) = (Y_0, \mu(1)).$$

Définition 3.17 *Un co-champ de Jacobi le long d'une biextrèmale $(\gamma, q, \frac{1}{2})$ est une solution (μ, Q) du système différentiel :*

$$(J(\gamma,q)) \quad (\dot{\mu}, \dot{Q}) = D\vec{H}(x,q,\mu,Q).$$

Le champ de vecteurs μ est appelé champ de Jacobi le long de γ (relativement à q) et Q est appelé relèvement de Jacobi de μ.

Soit μ une solution du système $(J(\gamma,q))$, alors en posant

$$V_i(t) = f_i(\gamma(t), q(t), \mu(t), Q(t))$$

nous avons

$$\dot{\mu}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) DX_i(\gamma(t))\mu + \sum_{i=1}^{m} V_i(t) X_i(\gamma(t))$$

et donc $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(\gamma)(\mu(0), V)$, ce qui nous permet de voir les champs de Jacobi comme des éléments de $T_\gamma\mathcal{H}$. De plus

$$\dot{Q}(t) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(t)({}^tDX_i(\gamma(t))Q(t) + {}^tP_{\gamma(t)}^i(\mu(t))q(t)) + V_i(t)\,{}^tDX_i(\gamma(t))q(t)$$

et donc Q est un relèvement de μ.

Pour tout (μ_0, Q_0) dans $T_{(\gamma(0),q(0)}T^*M$ il existe une unique solution du système $(J(\gamma,q))$ et l'espace de ces solutions est un espace vectoriel de dimension $2n$

Lemme 3.18 *Soit (μ, Q) un co-champ de Jacobi le long de (γ, q), alors μ est identiquement nul si et seulement $\mu(0) = 0$ et il existe un relèvement anormal ξ de γ tel que $\xi(t) = Q(t)$ pour un t dans $[0,1]$. Dans ce cas, nous avons $\xi = Q$.*

Preuve : si μ est identiquement nul, son contrôle $V_i = f_i(\gamma, q, \mu, Q)$ est nul également. Ceci implique que $\langle Q, X_i(\gamma)\rangle$ est nul. De plus, le système $T^*T\Delta(\gamma, 0, q)$ est équivalent à :

$$\dot{Q}(t) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, {}^t DX_i(\gamma(t))Q(t)$$

et donc Q est un relèvement anormal de γ.

Réciproquement, soit ξ un relèvement anormal de γ tel que $\xi(t) = Q(t)$ pour un t dans $[0,1]$. Il est facile de vérifier que $(0,\xi)$ est solution de $(J(\gamma, q))$ et puisque $(\mu(t), Q(t)) = (0, \xi(t))$, (μ, Q) est égal à $(0, \xi)$. □

Remarque : Si Q et $\tilde{Q}$ sont deux relèvements de Jacobi de μ, alors leur différence est un relèvement anormal de γ.

La proposition suivante est également démontrée dans [11].

Proposition 3.19 *Le noyau de l'application $Dexp(\gamma(0), q(0))$ s'identifie à l'espace des co-champs de Jacobi (μ, Q) le long de (γ, q) tels que $\mu(0) = \mu(1) = 0$ par l'application qui à (μ, Q) lui associe $(\mu(0), Q(0))$ dans $T_{(\gamma(0),q(0))}T^*M$.*

Cet espace s'identifie également avec la somme directe entre l'espace des champs de Jacobi s'annulant aux extrémités avec l'espace des relèvements anormaux de γ.

Démonstration : un élément (Y, Q_0) est dans le noyau de $Dexp(\gamma(0), q(0))$ si et seulement si $Y = 0$ et le co-champ de Jacobi (μ, Q) d'origine $(0, Q_0)$ est tel que $\mu(1) = 0$. Ceci montre la première assertion.

D'après le lemme 3.18, le noyau de l'application qui à un co-champ de Jacobi (μ, Q) associe le champ de Jacobi μ est l'espace des relèvements anormaux de γ. □

Définition 3.20 *Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont dits conjugués (de multiplicité p) le long de γ si il existe un champ de Jacobi non nul le long de γ s'annulant aux extrémités (et p est la dimension de l'espace des champs de Jacobi s'annulant aux extrémités).*

Proposition 3.21 *Le noyau de $q \cdot \theta''(\gamma)$ est égal à l'espace des champs de Jacobi s'annulant aux extrémités.*

Démonstration : soit μ un champ de Jacobi et Q un relèvement de Jacobi de μ. Si μ s'annule aux extrémités, alors μ appartient à $\mathcal{K}^e_\gamma$. Soit V le contrôle de μ, alors

$$V_i = f_i(\gamma, q, \mu, Q) = \langle Q, X_i(\gamma)\rangle + \langle {}^t DX_i(\gamma)q, \mu\rangle$$

et donc

$$V_i - \langle Q, X_i(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_i(\gamma)q, \mu\rangle = 0,$$

c'est-à-dire V est dans le noyau de $q \cdot \theta''(\gamma)$ d'après la proposition 3.7.

Réciproquement, si V est dans le noyau de $q \cdot \theta''(\gamma)$ il existe d'après le proposition 3.7 un relèvement Q de V tel que

$$V_i - \langle Q, X_i(\gamma)\rangle - \langle {}^t DX_i(\gamma)q, \mu\rangle = 0,$$

où $\mu = D\mathcal{C}^{-1}(\gamma)V$. Nous en déduisons que $V_i = f_i(\gamma, q, \mu, Q)$ et donc μ est un champ de Jacobi. Puisque V appartient à $\mathcal{K}_\gamma^e$, μ s'annule aux extrémités. □

3.3.2 Théorème de l'indice.

Nous voulons maintenant obtenir des résultats similaires à ceux valables en géométrie riemannienne. La difficulté en géométrie sous-riemannienne est que l'application exponentielle n'est pas un difféomorphisme au voisinage de la section nulle de fibré cotangent.

Proposition 3.22 *Supposons que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ ne sont pas conjugués le long de γ, alors pour tout (Y, Z) dans l'image de $De(\gamma)$, il existe un unique champ de Jacobi μ tel que $\mu(0) = Y$ et $\mu(1) = Z$.*

Démonstration : soit a la dimension de l'espace des relèvements anormaux de γ et J l'espace des champs de Jacobi. Nous avons vu au théorème 1.46 que l'orthogonal de $\mathcal{I}_\gamma^e$ dans $T_{\gamma(0)} \times T_{\gamma(1)}$ s'identifie à l'espace des relèvements anormaux de γ et donc la dimension de $\mathcal{I}_\gamma^e$ est $2n - a$. D'autre part, l'espace des champs de Jacobi peut être vu comme un sous-espace de $T_\gamma\mathcal{H}$ de dimension $2n - a$. Le noyau de la restriction à J de $De(\gamma)$ est égal à l'espace des champs de Jacobi s'annulant aux extrémités. Or $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ n'étant pas conjugués le long de γ, ce noyau est réduit à $\{0\}$. La restriction de $De(\gamma)$ à J est donc injective de J dans $\mathcal{I}_\gamma^e$ et les deux espaces ayant la même dimension, c'est un isomorphisme. □

Définition 3.23 *Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont dits conjugués (de multiplicité p) le long de γ si ils sont conjugués le long de $\gamma_{[a,b]}$ relativement à $(b-a)q_{[a,b]}$ (de multiplicité p).*

Proposition 3.24 *Pour tout t_0 dans $[0, 1]$, il existe un voisinage $[a, b]$ de t_0 dans $[0, 1]$ tel que $q_{[a,b]} \cdot \theta''(\gamma_{[a,b]})$ soit définie positive.*

Démonstration : Nous nous plaçons dans un système de coordonnées tel que $\gamma(t_0) = 0$ et $q(t_0) = dx_1$. Posons $W = U \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, où U est un voisinage ouvert de 0 dans M, et soit λ un champ de $1-$formes défini sur U qui s'annule sur TW et tel que $\lambda(0) = q(t_0)$.

Pour t au voisinage de t_0 et x au voisinage de 0 dans W nous notons $(\gamma_x(t), q_x(t))$ la solution du flot hamiltonien telle que $(\gamma_x(t_0), q_x(t_0)) = (x, \lambda(x_0))$.

Dans la démonstration du théorème 1.41 donnée dans [26] (Appendix C), W. Liu et H. J. Sussmann montrent que nous pouvons choisir U tel que :

- il existe un intervalle $J_\varepsilon =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ tel que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mu : J_\varepsilon \times W & \longrightarrow & M \\ (t, x) & \longmapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

soit un difféomorphisme de $J_\varepsilon \times W$ sur un voisinage de 0 dans M,

- si V est la fonction définie au voisinage de 0 dans M par $V(\gamma_x(t)) = t$, et ω est la 1-forme définie par $\omega(\gamma_x(t)) = q_x(t)$, alors $\omega = -dV$,

- pour tout a et b dans J_ε, $\gamma_{[a,b]}$ minimise l'énergie parmi les courbes horizontales φ telles que $V(\varphi(0)) = a$ et $V(\varphi(1)) = b$.

Soit ν l'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\nu(\varphi) = (V(\varphi(0)), V(\varphi(1)))$, c'est-à-dire $\nu = (V \times V) \circ e$. Vérifions que ν est une submersion en $\gamma_{[a,b]}$. En effet,

$$D\nu(\gamma_{[a,b]}) = (dV(\gamma(a)) \times dV(\gamma(b)))De(\gamma_{[a,b]}) = -(q(a) \times q(b))De(\gamma_{[a,b]})$$

et q n'étant pas un relèvement anormal de $\gamma_{[a,b]}$

$$(\alpha, \beta) \cdot D\nu(\gamma_{[a,b]}) = -(\alpha q(a), \beta q(b))De(\gamma_{[a,b]})$$

est nul si et seulement si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Puisque $\gamma_{[a,b]}$ minimise E sur $\nu^{-1}(a, b)$ et que ν est une submersion, il existe, d'après le théorème 2.25, un unique (α, β) dans $(\mathbb{R}^2)^*$ tel que $(\alpha, \beta) \cdot D\nu(\gamma_{[a,b]}) + \frac{1}{2}DE(\gamma_{[a,b]})$ soit nul et

$$(\alpha, \beta) \cdot D^2\nu(\gamma_{[a,b]}) + \frac{1}{2}D^2E(\gamma_{[a,b]})$$

est positif sur $\ker D\nu(\gamma_{[a,b]})$, donc sur $\ker De(\gamma_{[a,b]})$. Pour $\alpha = -(b - a)$ et $\beta = b - a$, nous avons

$$(\alpha, \beta) \cdot D^2\nu(\gamma_{[a,b]}) + \frac{1}{2}D^2E(\gamma_{[a,b]}) = (b-a)(q(a), -q(b))De(\gamma_{[a,b]}) + \frac{1}{2}DE(\gamma_{[a,b]})$$

est nul puisque $(b - a)q_{[a,b]}$ est un relèvement hamiltonien de $\gamma_{[a,b]}$ et donc, par unicité, $(b - a)q_{[a,b]} \cdot \theta''(\gamma_{[a,b]})$ est positive.

Montrons maintenant que nous pouvons choisir $[a, b]$ tel que la forme quadratique $(b - a)q_{[a,b]} \cdot \theta''(\gamma_{[a,b]})$ soit définie positive. Quitte à restreindre γ à un sous-intervalle, nous pouvons supposer d'après ce qui précède que $q \cdot \theta''(\gamma)$ est positive. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $[a_s, b_s]$ strictement décroissante de voisinages de t_0 dans $[0, 1]$ telle que les suites a_s et b_s tendent vers t_0 et tel que pour tout s, $\gamma(a_s)$ et $\gamma(b_s)$ soient conjugués.

Soit q_s le relèvement hamiltonien de $\gamma_s = \gamma_{[a_s,b_s]}$ égal à $(b_s - a_s)q_{[a_s,b_s]}$, K_s le noyau de $q_s \cdot \theta''(\gamma_s)$ et N_s sa dimension. D'après le corollaire 3.14, $q_s \cdot \theta''(\gamma_s)$ est positive et $N_s < \infty$ d'après les propositions 3.19 et 3.21.

Montrons que la suite N_s est décroissante. En effet, soit $\sigma > s$ et soit μ un élément de K_σ. Prolongeons μ en un élément $\tilde{\mu}$ de $\mathcal{K}^e_{\gamma_s}$ tel que la restriction de $\tilde{\mu}$ à $[a_s, b_s]\backslash[a_\sigma, b_\sigma]$ soit nulle. Alors $q_s \cdot \theta''(\gamma_s)(\tilde{\mu}, \tilde{\mu})$ est nul d'après le lemme 3.13 et donc, puisque $q_s \cdot \theta''(\gamma_s)$ est positive, $\tilde{\mu}$ appartient à K_s d'après le lemme 2.20. Nous avons donc définie une application linéaire de K_σ dans K_s qui est clairement injective, ce qui démontre bien que $N_\sigma \leq N_s$.

Fixons nous s et montrons qu'il existe $\sigma > s$ tel que $N_\sigma < N_s$. En effet si nous supposons que, pour tout $\sigma > s$, N_σ et N_s sont égaux alors l'application définie précédemment et un isomorphisme pour tout $\sigma > s$. Choisissons $\tilde{\mu}$ non nul dans K_s, alors pour tout $\sigma > s$ il existe μ_σ dans K_σ tel que la restriction de $\tilde{\mu}$ à $[a_\sigma, b_\sigma]$ soit égale à μ_σ et la restriction de $\tilde{\mu}$ à $[a_s, b_s]\backslash[a_\sigma, b_\sigma]$ soit nulle.

Puisque par hypothèse $[a_s, b_s]$ décroît vers $\{t_0\}$, $\tilde{\mu}$ est nul et donc N_s est nul, ce qui est absurde puisque $\gamma(a_s)$ et $\gamma(b_s)$ sont conjugués.

Nous pouvons alors extraire de la suite N_s une sous-suite strictement décroissante, ce qui donne une contradiction et termine la démonstration. □

Nous considérons des réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ tels que pour chaque j entre 1 et N, $q_{[t_{j-1},t_j]} \cdot \theta''(\gamma_{[t_{j-1},t_j]})$ soit définie positive.

Soit $\mathcal{J} = \mathcal{J}(t_1, \cdots, t_N)$ l'espace des champs de Jacobi par morceaux, c'est-à-dire, l'espace des champs de vecteurs J le long de γ tels que :

- $J(1) = J(0) = 0$,
- $J_{[t_{j-1},t_j]}$ est un champ de Jacobi le long de $\gamma_{[t_{j-1},t_j]}$.

Alors $\mathcal{J}$ est un sous-espace de dimension fini de $\mathcal{K}_\gamma^e$.

Soit $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t_1, \cdots, t_N)$ le sous-espace de $\mathcal{K}_\gamma^e$ formé des champs de vecteurs tangents μ le long de γ tels que $\mu(t_j) = 0$ pour j allant de 0 à N.

notations : pour j allant de 1 à N, nous noterons $\gamma_j = \gamma_{[t_{j-1},t_j]}$ et $q_j = (t_j - t_{j-1})q_{[t_{j-1},t_j]}$. Alors q_j est un relèvement hamiltonien de γ_j.

Lemme 3.25 *Nous avons la décomposition :*

$$\mathcal{K}_\gamma^e = \mathcal{J}(t_1, \cdots, t_N) \oplus \mathcal{K}(t_1, \cdots, t_N)$$

et cette décomposition est orthogonale par rapport à $q \cdot \theta''(\gamma)$. De plus, la restriction de $q \cdot \theta''(\gamma)$ à $\mathcal{K}$ est définie positive et l'indice de $q \cdot \theta''(\gamma)$ est égal à l'indice de sa restriction à $\mathcal{J}$.

Preuve : montrons tout d'abord que $\mathcal{K}_\gamma^e = \mathcal{J} + \mathcal{K}$. Soit μ dans $\mathcal{K}_\gamma^e$. Pour tout j, il existe, d'après le lemme 3.22, un champ de Jacobi J_j le long de $\gamma_{[t_{j-1},t_j]}$ tel que $J_j(0) = \mu(t_{j-1})$ et $J_j(1) = \mu(t_j)$. Posons $J = J_1 \times \cdots \times J_N$ et $\nu = \mu - J$. Alors J appartient à $\mathcal{J}$, ν appartient à $\mathcal{K}$ et $\mu = J + \nu$.

Montrons maintenant que la somme est directe. Soit μ appartenant à $\mathcal{J} \cap \mathcal{K}$, alors pour tout j, $\mu_{[t_{j-1},t_j]}$ est un champ de Jacobi qui s'annule aux extrémités. Il est identiquement nul puisque $\gamma(t_{j-1})$ et $\gamma(t_j)$ ne sont pas conjugués le long de γ et donc $\mu = 0$.

Montrons que cette décomposition est orthogonale par rapport à $q \cdot \theta''(\gamma)$. Soit J dans $\mathcal{J}$, W son contrôle et Γ un relèvement de J. Puisque $J_j = J_{[t_{j-1},t_j]}$ est un champ de Jacobi, il existe par définition un q_j-relèvement Λ_j de J_j tel que

$$W_i^j = f_i(\gamma_j, J_j, q_j, \Lambda_j).$$

De plus $\Gamma_j = (t_j - t_{j-1})\Gamma_{[t_{j-1},t_j]}$ est également un q_j-relèvement de J_j et donc $\xi_j = \Lambda_j - \Gamma_j$ est un relèvement de γ_j.

Soit μ dans $\mathcal{K}$, V son contrôle et V^j le contrôle de $\mu_j = \mu_{[t_{j-1},t_j]}$. Nous pouvons alors exprimer $q \cdot \theta''(\gamma)(\mu, J)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} & q \cdot \theta''(\gamma)(\mu, J) \\ = & \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(t)(W_i(t) - f_i(\gamma(t), J(t), q(t), \Gamma(t)))\, dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i^j(t)(W_i^j(t) - f_i(\gamma_j(t), J_j(t), q_j(t), \Gamma_j(t)))\, dt$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i^j(t)\langle \xi_j(t), X_i(\gamma_j(t))\rangle\, dt.$$

Or, V^j appartenant à $\mathcal{K}^e_{\gamma_j}$,

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{m} V_i^j(t)\langle \xi_j(t), X_i(\gamma_j(t))\rangle\, dt = 0$$

et donc $q \cdot \theta''(\gamma)(\mu, J) = 0$.

La restriction de $q \cdot \theta''(\gamma)$ à $\mathcal{K}$ est définie positive car pour V dans $\mathcal{K}$

$$q \cdot \theta''(\gamma)(V, V) = \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{j-1}) q_j \cdot \theta''(\gamma_j)(V^j, V^j)$$

d'après le lemme 3.13 et chacune des $q_j \cdot \theta''(\gamma_j)$ étant définie positive, il en est de même pour la restriction de $q \cdot \theta''(\gamma)$ à $\mathcal{K}$.

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace de $\mathcal{K}^e_\gamma$ tel que la restriction de $q \cdot \theta''(\gamma)$ soit définie négative. Tout élément μ de $\mathcal{V}$ s'écrit de manière unique $\mu = J + \nu$ où J est dans $\mathcal{J}$ et ν est dans $\mathcal{K}$. Alors si μ est non nul, $q \cdot \theta''(\gamma)(\mu, \mu)$ est strictement négatif et puisque $q \cdot \theta''(\gamma)(\nu, \nu)$ est positif, $q \cdot \theta''(\gamma)(J, J)$ est également strictement négatif (en particulier J est non nul). Soit $\mathcal{W}$ l'image de $\mathcal{V}$ par la projection (relativement à la décomposition $\mathcal{K}^e_\gamma = \mathcal{J} \oplus \mathcal{K}$) de $\mathcal{K}^e_\gamma$ sur $\mathcal{J}$. Alors $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$ et la restriction de $q \cdot \theta''(\gamma)$ à $\mathcal{W}$ est définie négative. Donc l'indice de $q \cdot \theta''(\gamma)$ est inférieur ou égal à l'indice de sa restriction à $\mathcal{J}$. L'inégalité inverse étant évidente, nous avons démontré le lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer l'analogue du théorème de l'indice en géométrie riemannienne [14]. **Nous nous limitons au cas analytique, c'est-à-dire, Δ est engendré par m champs de vecteurs orthonormés analytiques**. Les courbes hamiltoniennes sont alors analytiques.

Théorème 3.26 *L'indice de $q \cdot \theta''(\gamma)$ est égal au nombre de points $\gamma(t)$ conjugués à $\gamma(0)$ le long de (γ, q) comptés avec leur multiplicité.*

Démonstration : fixons nous des réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ comme pour le lemme 3.25 et soit τ_0 dans $[0, 1]$. Nous pouvons supposer qu'il existe $\sigma \in \{1, \cdots N\}$ tel que $t_{\sigma-1} < \tau_0 < t_\sigma$ (si $\sigma_0 = 1$ nous pouvons toujours prolonger γ en une courbe hamiltonienne définie au-delà de 1 et se ramener au cas $\sigma_0 < 1$). Pour τ au voisinage de τ_0, nous notons γ_τ au lieu de $\gamma_{[0,\tau]}$ et $q_\tau = \tau q_{[0,\tau]}$.

Soit $\mathcal{J}_\sigma$ l'ensemble des champs de vecteurs J le long de γ_σ tels que :

- $J(0) = 0$,
- $J_{[t_{j-1}, t_j]}$ est un champ de Jacobi le long de γ_j pour tout $j \leq \sigma$.

Alors $\mathcal{J}_\sigma$ est un espace vectoriel de dimension finie qui s'identifie d'après le lemme 3.22 au sous-espace de $T_{\gamma(t_1)}M \times \cdots \times T_{\gamma(t_\sigma)}M$ formé des éléments

$(Y_1, \cdots, Y_\sigma)$ tels que $(0, Y_1)$ appartienne à $\mathrm{Im}De(\gamma_1)$ et pour $j = 2, \cdots, \sigma$, (Y_{j-1}, Y_j) est dans $\mathrm{Im}De(\gamma_j)$. Cette identification est donnée par l'application qui à un élément J de $\mathcal{J}_\sigma$ lui associe $(J(t_1), \cdots, J(t_\sigma))$.

Nous nous fixons une base $\{Z_1, \cdots, Z_\alpha\}$ de $\mathcal{J}_\sigma$ et pour tout j nous choisissons un relèvement T_j de Z_j. Ceci nous permet d'associer de façon unique un relèvement à tout élément de $\mathcal{J}_\sigma$: si $J = \sum c_j Z_j$, nous choisirons comme relèvement de J, $Q = \sum c_j T_j$.

Pour τ au voisinage de τ_0 nous définissons sur $\mathcal{J}_\sigma$ la forme quadratique

$$H^\tau(J^1, J^2) = \frac{1}{2}(H_0^\tau(J^1, J^2) + H_0^\tau(J^2, J^1))$$

avec

$$H_0^\tau(J^1, J^2) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{i=1}^m V_i^1(s)(V_i^2(s) - f_i(\gamma_\sigma(s), J^2(s), q_\sigma(s), Q^2(s))\, ds$$

et pour $j = 1, 2$, V^j est le contrôle de J^j et Q^j son relèvement. Alors H^τ dépend continûment de τ.

Remarquons que si $J^1(\tau) = J^2(\tau) = 0$ alors

$$H^\tau(J^1, J^2) = q_\sigma \cdot \theta''(\gamma_\sigma)(J^1_{[0,\tau]}, J^2_{[0,\tau]})$$

et donc, si nous posons $\mathcal{J}_\tau = \{J \in \mathcal{J}_\sigma \,/\, J(\tau) = 0\}$ alors H^τ et $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ coincident sur $\mathcal{J}_\tau$ et puisque d'après le lemme 3.25, l'indice de $q_\sigma \cdot \theta''(\gamma_\sigma)$ est égal à l'indice de sa restriction à $\mathcal{J}_\sigma$, il est encore égale à l'indice de la restriction de H^τ à $\mathcal{J}_\sigma$.

Fixons nous $(J^1, \cdots, J^\nu)$ une base de $\mathcal{J}_{\sigma-1}$. Puisque $\gamma(t_{\sigma-1})$ et $\gamma(t_\sigma)$ ne sont pas conjugués, il existe un supplémentaire Σ de $T^*_{\gamma(t_{\sigma-1})}M$ tel que la restriction Φ_{τ_0} de $D\exp(\gamma(t_{\sigma-1}), (\tau_0 - t_{\sigma-1})q(t_{\sigma-1}))$ à $T_{\gamma(t_{\sigma-1})}M \times \Sigma$ soit un isomorphisme sur son image. Par continuité et puisque pour τ proche de τ_0, $\gamma(t_{\sigma-1})$ et $\gamma(\tau)$ ne sont pas conjugués, la restriction Φ_τ de $D\exp(\gamma(t_{\sigma-1}), (\tau - t_{\sigma-1})q(t_{\sigma-1}))$ à $T_{\gamma(t_{\sigma-1})}M \times \Sigma$ est également un isomorphisme sur son image.

Pour τ proche de τ_0 nous définissons maintenant une forme quadratique F^τ sur $\mathcal{J}_{\sigma-1}$. Soit J^j un élément de la base de $\mathcal{J}_{\sigma-1}$, nous le prolongeons en un élément J^j_τ de $\mathcal{J}_\sigma$ tel que : la restriction μ de $\mathcal{J}_\sigma$ à $[t_{\sigma-1}, t_\sigma]$ est l'unique champ de Jacobi qui possède un relèvement Q tel que (μ, Q) est le co-champ de Jacobi d'origine $(\Phi_\tau)^{-1}(J^j(t_{\sigma-1}), 0)$. Si nous regardons $\mathcal{J}_{\sigma-1}$ comme un sous-espace de $T_{\gamma(t_1)}M \times \cdots \times T_{\gamma(t_{\sigma-1})}M$ et $\mathcal{J}_\sigma$ comme un sous-espace de $T_{\gamma(t_1)}M \times \cdots \times T_{\gamma(t_\sigma)}M$ cette application est donnée par :

$$(J(t_1), \cdots, J(t_{\sigma-1}))$$

$$\longmapsto$$

$$(J(t_1), \cdots, J(t_{\sigma-2}), D\exp(\gamma(t_{\sigma-1}), (t_\sigma - t_{\sigma-1})q(t_{\sigma-1}))(\Phi_\tau)^{-1}(J(t_{\sigma-1}), 0)).$$

L'application qui à τ associe J^j_τ est alors continue.

Pour j et l entre 1 et ν, nous posons :

$$F^\tau(J^j, J^l) = H^\tau(J^j_\tau, J^l_\tau)$$

et donc, la forme quadratique ainsi définie dépend continûment de τ. Nous notons $\lambda(\tau)$ l'indice de F^τ, $\lambda^-(\tau)$ l'indice de $-F^\tau$ et $\lambda^0(\tau) = \nu - \lambda(\tau) - \lambda^-(\tau)$ la dimension du noyau de F^τ. Alors $\lambda(\tau)$ est également l'indice de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ et $\lambda^0(\tau)$ est la dimension de son noyau, c'est-à-dire la multiplicité de la conjugaison entre $\gamma(0)$ et $\gamma(\tau)$.

D'après la continuité de l'application $\tau \mapsto F^\tau$, pour τ proche de τ_0 nous avons $\lambda(\tau) \geq \lambda(\tau_0)$ et $\lambda^-(\tau) \geq \lambda^-(\tau_0)$ et donc

$$\lambda(\tau_0) \leq \lambda(\tau) \leq \nu - \lambda^-(\tau_0) = \lambda(\tau_0) + \lambda^0(\tau_0).$$

En particulier, si $\gamma(\tau_0)$ n'est pas conjugué à $\gamma(0)$ le long de γ, $\lambda^0(\tau_0)$ est nul et donc l'indice de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ reste constant au voisinage de τ_0.

Etudions maintenant le passage d'un point conjugué. Pour $\tau \leq \tau_0$ nous avons $\lambda(\tau_0) \leq \lambda(\tau)$ et l'inégalité inverse est montrée au corollaire 3.14. Donc $\lambda(\tau_0) = \lambda(\tau)$. Soit maintenant $\tau > \tau_0$, montrons que $\lambda(\tau) \geq \lambda(\tau_0) + \lambda^0(\tau_0)$. Soit $\mathcal{W}$ le sous-espace de $\mathcal{K}^e_{\gamma_{\tau_0}}$ formé des vecteurs propres de $q_{\tau_0} \cdot \theta''(\gamma_{\tau_0})$ associés aux valeurs propres négatives où nulles. Alors $\dim \mathcal{W}$ est égale à $\lambda(\tau_0) + \lambda^0(\tau_0)$. Nous pouvons voir $\mathcal{W}$ comme un sous-espace de $\mathcal{K}^e_{\gamma_\tau}$ en prolongeant les champs de vecteurs de $\mathcal{W}$ par 0 sur $[\tau_0, \tau]$ et pour tout μ dans $\mathcal{W}$ nous avons $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)(\mu, \mu) \leq 0$ d'après le lemme 3.13.

Montrons qu'aucun élément non nul de $\mathcal{W}$ n'est dans le noyau de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$. Si μ est dans le noyau de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$, alors μ est un champ de Jacobi le long de γ_τ. Soit Q un relèvement de jacobi de μ et $(\tilde{\mu}, \tilde{Q})$ le co-champ de Jacobi le long de (γ, q) d'origine $(0, Q(0))$. La restriction de $\tilde{\mu}$ à $[0, \tau]$ est égale à μ et donc $\tilde{\mu}$ s'annule sur $[\tau_0, \tau]$ et donc la restriction de $\tilde{Q}$ à $[\tau_0, \tau]$ est un relèvement anormal de $\gamma_{[\tau_0, \tau]}$ d'après le lemme 3.18. Soit ξ le relèvement de γ tel que $\xi(\tau) = \tilde{Q}(\tau)$, alors la restriction de ξ à $[\tau_0, \tau]$ est un relèvement anormal de $\gamma_{[\tau_0, \tau]}$ et donc, puisque γ et ξ sont analytiques, ξ est un relèvement anormal de γ. nous déduisons alors du lemme 3.18 que $\tilde{\mu}$ est identiquement nul donc μ également.

Nous avons donc montré que $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ est négative sur $\mathcal{W}$ mais qu'aucun élément non nul de $\mathcal{W}$ n'est dans le noyau de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ et donc d'après le lemme 2.20 l'indice de $q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)$ est plus grand que $\dim \mathcal{W} = \lambda(\tau_0) + \lambda^0(\tau_0)$ et puisque nous avons déjà montré l'inégalité inverse, $\mathrm{ind}(q_\tau \cdot \theta''(\gamma_\tau)) = \mathrm{ind}(q_{\tau_0} \cdot \theta''(\gamma_{\tau_0})) + \lambda^0(\tau_0)$. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Le but de cette étude est de constituer une approche dans l'étude du lieu conjugué en géométrie sous-riemannienne.

Chapitre 4

Sous-analycité de la distance.

Tous les objets considérés dans ce chapitre sont analytiques.

4.1 Distributions de degré 2.

Nous étudions dans cette section la sous-analycité de la distance pour des distributions de degré 2 en utilisant l'application exponentielle. Le théorème 4.2 peut également être vu comme un cas particulier de la proposition 4.2.2 qui est une conséquence du théorème 2.26.

Théorème 4.1 *Soit Δ est une distribution de degré 2 sur une variété M et g un métrique sur Δ. pour tout x dans M, il existe un voisinage V de x et une constante K tels que toute courbe γ minimisante ayant ses extrémités dans V s'écrit $\gamma(t) = exp_{\gamma(0)}(tq_0)$ avec q_0 dans $T^*_{\gamma(0)}M$ et $|q_0| < K$.*

Démonstration : Quitte à se restreindre à un voisinage de x nous pouvons supposer que nous sommes dans le cas local (hypothèses du début du chapitre 3).

Soit S la sphère unité de $(\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}_x = \{\lambda \in S / l = (\alpha, \alpha, 0)\,;\, \alpha \in \Delta_x^{\perp}\}$. Pour tout λ dans $\mathcal{A}_x$, il existe d'après les lemmes 2.23 et 3.8 des voisinages V_λ de λ dans S et W_λ de $(x, 0)$ dans $\mathcal{H}$, l'espace des chemins horizontaux, tels que l'indice de $\xi \cdot D^2\theta(\gamma)$ soit au moins $2n+1$ pour tout (ξ, γ) dans $V_\lambda \times W_\lambda$. Par compacité de $\mathcal{A}_x$, nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini de $\mathcal{A}_x$, $V = \bigcup_{\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}} V_\lambda$, tel que si $W = \bigcap_{\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}} W_\lambda$ et (ξ, γ) appartient à $V \times W$ alors l'indice de $\xi \cdot D^2\theta(\gamma)$ est au moins $2n+1$.

Montrons par l'absurde qu'il existe une constante C et un voisinage W_1 de $(x, 0)$ dans $\mathcal{H}$ tel que pour tout γ dans W_1 et pour tout $\lambda = (\alpha, \beta, \lambda_0)$ dans S optimal alors $|\lambda_0| > C$. En effet, supposons qu'il existe une suite γ^σ tendant vers $(x, 0)$ et pour tout σ un élément $\lambda^\sigma = (\alpha^\sigma, \beta^\sigma, \lambda_0^\sigma)$ dans S optimal pour γ^σ tel que λ_0^σ tende vers 0 quand σ tend vers l'infini. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que λ^σ converge vers un élément λ de S et puisque γ^σ converge vers $(x, 0)$ nous pouvons supposer que les γ^σ sont contenus dans W. Par continuité de $D\theta$, $\lambda^\sigma \cdot D\theta(\gamma^\sigma)$ converge vers $\lambda \cdot D\theta(\gamma)$ et donc $\lambda \cdot D\theta(0, x)$ s'annule, c'est-à-dire λ appartient à $\mathcal{A}_x$. Pour σ assez grand, $(\gamma^\sigma, \lambda^\sigma)$ appartient à $V \times W$ et donc l'indice de $\lambda^\sigma \cdot D^2\theta(\gamma^\sigma)$ est au moins $2n+1$. Ceci implique que l'indice de $\lambda^\sigma \cdot \theta''(\gamma^\sigma)$ est au moins égal à la dimension de $(\mathcal{I}^\theta_{\gamma^\sigma})^\perp$ et contredit le fait que λ_σ soit optimal.

Soit γ dans W_1 une courbe minimisante, il existe d'après le théorème 3.6 un relèvement optimal de γ. Soit $\lambda = (q(0), q(1), \lambda_0)$ avec $G_\gamma q = 2\lambda_0\dot{\gamma}$, alors quitte à diviser par $|\lambda|$ nous pouvons supposer que λ est dans S et donc que $|\lambda_0|$ est plus grand que C. Ceci implique que $\dfrac{|q(0)|}{2\lambda_0}$ est inférieur à $K = \dfrac{1}{2\lambda_0}$. Ceci démontre le théorème puisque $\gamma(t) = exp_{\gamma(0)}(\dfrac{tq(0)}{2\lambda_0})$. □

Théorème 4.2 *Supposons que (Δ, g) soit une structure sous-riemannienne analytique de degré 2 sur une variété M, alors pour tout x_0 dans M, il existe un voisinage U de x_0 dans M tel que $d_{|U\times U} : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ soit sous-analytique.*

Démonstration : nous choisissons U un voisinage sous-analytique tel que $U \subset B(x_0, \varepsilon)$ où ε est tel que $B(x_0, 4\varepsilon)$ soit contenu dans un voisinage de x_0 donné par le théorème 4.1.

L'application exponentielle est bien définie et analytique sur

$$\Lambda = \{(x, q)\ ;\ x \in B(x_0, \varepsilon),\ \sum_{i=1}^m \langle q, X_i(x)\rangle^2 < 4\varepsilon^2\}.$$

Si x et y sont dans U, alors $d(x, y) < 2\varepsilon$ et donc si $y = exp(x, q)$ où $t \mapsto exp(x, tq)$ est minimisante, $\sum_{i=1}^m \langle q, X_i(x)\rangle^2 = d^2(x, y) < 4\varepsilon^2$, c'est-à-dire $(x, q) \in \Lambda$.

D'après le théorème 4.1, il existe un compact K sous-analytique tel que pour tout $(x, y) \in U \times U$,

$$d(x, y) = \inf\{(\sum_{i=1}^m \langle q, X_i(x)\rangle^2)^{\frac{1}{2}}\ ;\ y = exp(x, q),\ (x, q) \in \Lambda \cap (U \times K)\}.$$

$\Lambda \cap (U \times K)$ étant relativement compact, d'après [27], d est sous-analytique sur $U \times U$. □

Corollaire 4.3 *Soit M une variété riemannienne complète. Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M où Δ est de degré 2 et g est la restriction à Δ de la métrique riemannienne.*

Alors, la distance sous-riemannienne

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

est sous-analytique.

Démonstration : Nous notons δ la distance riemannienne de M. Nous nous fixons x et y dans M et nous cherchons des voisinages U_x et U_y de x et y dans M tels que $d_{|U_x \times U_y}$ soit sous-analytique.

Soit R tel que $d(x,y) < R$ et $K = \bar{B}_\delta(x,R)$ où $B_\delta(x,R)$ est la boule de centre x et de rayon R pour la distance riemannienne. La variété étant complète pour la métrique δ, K est un compact. Fixons nous $\varepsilon > 0$ tel que $d(x,y) + 4\varepsilon < R$ et choisissons U_x (resp. U_y) comme étant la boule sous-riemannienne de rayon ε centrée en x (resp. y). Montrons tout d'abord que si x' est dans U_x et y' dans U_y, alors toute courbe horizontale γ joignant x' et y' et de longueur strictement inférieure à $d(x',y') + \varepsilon$ est tracée dans K . En effet :

$$\begin{aligned}
\delta(x,\gamma(t)) &\leq d(x,\gamma(t)) \\
&\leq d(x,x') + d(x',\gamma(t)) \\
&\leq d(x,x') + L(\gamma) \\
&< d(x,x') + d(x',y') + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon + d(x',x) + d(x,y) + d(y,y') \\
&< d(x,y) + 4\varepsilon \\
&< R
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\gamma(t)$ est dans K pour tout t dans $[0,1]$. Ainsi, le minimum des longueurs des courbes horizontales joignant x' et y' est égal au minimum des longueurs des courbes horizontales joignant x' et y' tracées dans K.

D'après le théorème 4.2, tout point de K possède un voisinage ouvert sous-analytique U tel que $d_{|U \times U}$ soit une fonction sous-analytique de $M \times M$. Par compacité de K, Nous pouvons donc le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $B_0, \cdots, B_q$ sous-analytiques, B_0 étant égal à U_x et B_q à U_y, tels que $d_{|\bar{B}_i \times \bar{B}_i}$ soit une fonction sous-analytique de $M \times M$. Soit Σ l'ensemble des applications σ injectives définies sur $Dom(\sigma) = \{0, \cdots, q_\sigma\}$, $q_\sigma \leq q$, à valeurs dans $\{0, \cdots, q\}$, tel que $\sigma(0) = 0$, $\sigma(q_\sigma) = q$, et $W_i = B_{\sigma(i-1)} \cap B_{\sigma(i)} \neq \emptyset$.

Pour $\sigma \in \Sigma$ l'application $f_\sigma : U_x \times U_y \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\sigma(\alpha,\beta) = \inf\{d(\alpha,x_1) + \cdots + d(x_{q_\sigma},\beta)\ ,\ x_i \in W_i\}$$

est sous-analytique. Il en est alors de même pour f définie sur $U_x \times U_y$ par

$$f(\alpha,\beta) = \inf\{f_\sigma(\alpha,\beta)\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$$

puisque Σ est fini. Montrons que f et d sont égales sur $U_x \times U_y$.

Soit α et β dans U_x et U_y. Il existe alors σ dans Σ et $x_1, \cdots, x_{q_\sigma}$ avec x_i dans $\bar{W}_i$ tels que

$$f(\alpha,\beta) = d(\alpha,x_1) + \cdots + d(x_{q_\sigma},\beta).$$

Considérons pour tout i une courbe minimisante horizontale γ_i joignant x_i à x_{i+1} ($x_0 = \alpha$, $x_{q_\sigma+1} = \beta$) et γ la concaténation de toutes ces courbes reparamétrisées sur $[0,1]$. Alors $L(\gamma) = f(\alpha,\beta)$ et donc $f(\alpha,\beta) \geq d(\alpha,\beta)$.

Réciproquement, pour toute courbe γ tracée dans K et joignant α à β, il existe σ dans Σ et $t_1, \cdots, t_{q_\sigma}$ tels que $x_i = \gamma(t_i)$ appartienne à W_i. Alors $L(\gamma)$ est supérieure à $d(\alpha, x_1) + \cdots + d(x_{q_\sigma}, \beta)$ et donc à $f(\alpha, \beta)$. D'où $f(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \beta)$, ce qui termine la démonstration. □

4.2 Résultat faible en degré quelconque.

Nous nous plaçons dans le cas local et nous nous intéressons maintenant aux distributions Δ satisfaisant la condition de Hormänder mais de degré plus grand que 2. L'existence dans ce cas de courbes minimisantes possédant des relèvements anormaux optimaux ne nous permet pas d'appliquer les techniques précédentes, en particulier le théorème 4.1 n'est plus valable. Nous pouvons néanmoins démontrer la sous-analycité de la fonction distance sur certains ouverts de $M \times M$.

Soit x_0 dans M et U un voisinage ouvert de x_0 tel que pour tout couple (x, y) de $U \times U$, il existe une courbe minimisante joignant x à y. D'après la proposition 1.34 nous pouvons prendre pour U une boule sous-riemannienne de centre x_0 et de rayon a telle que la boule sous-riemannienne de centre x_0 et de rayon $3a$ soit relativement compact .

4.2.1 Compacité des courbes minimisantes.

Soit $\mathcal{H}_U$ l'ensemble des courbes de $\mathcal{H}$ ayant leurs extrémités dans $U \times U$ et soit $\mathcal{M}_U$ l'ensemble des courbes minimisantes de $\mathcal{H}_U$.

Vérifions que l'hypothèse H1 du théorème 2.26 est satisfaite.

Proposition 4.4 *La restriction de l'application extrémité à $\mathcal{M}_U$ est surjective et propre.*

Démonstration : le fait qu'elle soit surjective est immédiat d'après le choix de U. Pour montrer la propreté, choisissons une suite de courbes minimisantes $\{\gamma_\sigma\}$ telle que $e(\gamma_\sigma)$ appartienne à $U \times U$ et converge vers un élément (x, y) dans $U \times U$ et montrons qu'il existe une sous-suite de $\{\gamma_\sigma\}$ qui converge vers une courbe minimisante joignant x à y.

Soit $x_\sigma = \gamma_\sigma(0)$ et u_σ le contrôle de γ_σ. Quitte à une sous-suite nous pouvons supposer que la suite $\{u^\sigma\}$ converge faiblement vers un contrôle u dans $B_0(a)$ la boule de rayon a et de centre 0 de L^2_m. Soit γ la courbe horizontale d'origine x est de contrôle u. Démontrons tout d'abord le résultat suivant :

Lemme 4.5 *La suite $\{\gamma_\sigma\}$ converge uniformément vers γ.*

Preuve :

$$
\begin{aligned}
& |\gamma_\sigma(t) - \gamma(t)|_n^2 \\
= \quad & |x_\sigma - x + \int_0^t \sum_{i=1}^m u_i^\sigma(s) X_i(\gamma_\sigma(s)) - u_i(s) X_i(\gamma(s)) ds|_n^2 \\
\leq \quad & C(|x_\sigma - x|_n^2 + |\int_0^t \sum_{i=1}^m u_i^\sigma(s)(X_i(\gamma_\sigma(s)) - X_i(\gamma(s)) ds|_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+|\int_0^t \sum_{i=1}^{m}(u_i^\sigma(s)-u_i(s))X_i(\gamma(s))ds|_n^2) \\
\leq\ & C(+|x_\sigma - x|_n^2 + ||u^\sigma||_{L^2}^2 \int_0^t |\gamma_\sigma(s)-\gamma(s)|_n^2 ds + \\
& \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} |\int_0^t (u_i^\sigma(s)-u_i(s))X_i^j(\gamma(s))ds|_n^2) \\
\leq\ & C(||u^\sigma||_{L^2}^2 \int_0^t |\gamma_\sigma(s)-\gamma(s)|_n^2 ds + |x_\sigma - x|_n^2 + C \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \phi_{ij}^\sigma(t)).
\end{aligned}
$$

Le fait que u^σ converge faiblement vers u implique que ϕ_{ij}^σ tend simplement vers 0, de plus :

$$
|\phi_{ij}^\sigma(t_1) - \phi_{ij}^\sigma(t_2)| \leq C\int_{t_1}^{t_2} |u_i^\sigma(s)-u_i(s)|^2 ds \leq C|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2.
$$

Les ϕ_{ij}^σ forment une partie équicontinue donc relativement compacte pour la topologie uniforme; 0 étant le seul point d' accumulation,

$$
\lim_{\sigma\to+\infty} ||\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \phi_{ij}^\sigma||_\infty = 0.
$$

Finalement,

$$
|\gamma_\sigma(t)-\gamma(t)|_n^2 \leq C\int_0^t |\gamma_\sigma(s)-\gamma(s)|_n^2 ds + C(||\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \phi_{ij}^\sigma||_\infty + |x_\sigma - x|_n^2)
$$

$$
\Longrightarrow ||\gamma_\sigma - \gamma||_\infty^2 \leq C(||\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \phi_{ij}^\sigma||_\infty + |x_\sigma - x|_n^2).
$$

Ceci termine la démonstration du lemme 4.5.

Revenons à la démonstration de la proposition et montrons que $\{\gamma_\sigma\}$ converge fortement vers γ et que γ est minimisante.

La distance sous riemannienne étant continue, $d(x_\sigma, \gamma_\sigma(1))$ tend vers $d(x, \gamma(1))$. Nous avons $d(x_\sigma, \gamma_\sigma(1)) = ||u_\sigma||_{L^2}$ et $d(x, \gamma(1)) \leq ||u||_{L^2}$. Or

$$
||u_\sigma - u||_{L^2}^2 = ||u_\sigma||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2 - 2\langle u_\sigma, u\rangle = d(x_\sigma, \gamma_\sigma)^2 + ||u||_{L^2}^2 - 2\langle u_\sigma, u\rangle
$$

ce qui tend vers $d(x, \gamma(1))^2 - ||u||_{L^2}^2 \geq 0$ et implique que $d(0, \gamma(1)) \geq ||u||_{L^2}$.

Donc $d(0, \gamma(1)) = ||u||_{L^2}$ et $\lim_{\sigma\to+\infty} ||u_\sigma - u||_{L^2} = 0$, c' est-à-dire : γ_σ tend vers γ et γ est minimisante. □

4.2.2 Application du théorème 2.26

Nous nous intéressons maintenant à l'hypothèse H2 du théorème 2.26. Nous avons vu que si le degré de Δ était plus grand que 2 en un point x, alors γ le chemin constant égal à x possède toujours un relèvement anormal optimal q (lemme 3.8) tel que $q \cdot \theta''(\gamma)$ soit identiquement nul et donc H2 n'est pas satisfaite.

Nous considérons une courbe γ minimisante et q un relèvement optimal de γ. Si q est un relèvement anormal, l'opérateur associé à $q \cdot \theta''(\gamma)$ est un opérateur autoadjoint compact (proposition 3.7) et ne vérifie donc pas l'hypothèse $H2$.

Par contre si q est un relèvement qui n'est pas anormal, alors l'opérateur associé à $q \cdot \theta''(\gamma)$ est de la forme $\lambda_0 I + \Omega$ où Ω est un opérateur autoadjoint compact (proposition 3.7) et λ_0 un réel non nul. Un tel opérateur est bien un opérateur de Fredholm.

Notons V le sous-ensemble de $U \times U$ formé des couples (x, y) tel que, pour toute courbe minimisante γ joignant x à y, l'indice de $e''(\gamma)$ soit strictement plus grand que $k^e(\gamma)$ la codimension de $\mathrm{Im}De(\gamma)$, c'est-à-dire, γ ne possède pas de relèvements anormaux optimaux. Par exemple, si Δ^2 satisfait la condition H^2-forte, V est égal à $U \times U$ privé de sa diagonale et si Δ est de degré 2, V est égal à $U \times U$.

Montrons que V est un ouvert. En effet, supposons que ce n'est pas le cas et soit une suite $\{(x_\sigma, y_\sigma)\}$ contenue dans le complémentaire de V dans $U \times U$ et qui converge vers un élément (x, y) de V. Puisque (x_σ, y_σ) n'est pas dans V, il existe une courbe minimisante γ_σ joignant x à y tel que $\mathrm{ind}(e''(\gamma_\sigma)) - k^e(\gamma_\sigma)$ soit négatif. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{\gamma_\sigma\}$ converge vers une courbe γ minimisante entre x et y (lemme 4.4). D'après le lemme 2.24, $\mathrm{ind}(e''(\gamma)) - k^e(\gamma)$ est également négatif, ce qui donne une contradiction et montre que V est ouvert.

Soit $\mathcal{H}_V = e^{-1}(V)$, il est maintenant clair que les hypothèses H2 et H1 sont vérifiées pour $\mathcal{H}_V$, $e_{|\mathcal{H}_V}$, $E_{|\mathcal{H}_V}$, V et donc, nous déduisons la proposition suivante du théorème 2.26.

Proposition 4.6 *La distance sous-riemannienne est sous-analytique sur V.*

Remarque : nous ne pouvons pas espérer de résultat plus fort dans le cas général. En effet, l'étude du cas Martinet plat réalisée dans [2] montre que les sphères sous-riemanniennes ne sont pas sous-analytiques.

4.3 Le cas H^3-fort.

Nous nous plaçons dans le cas local décrit au début du troisième chapitre et nous étudions maintenant le problème à origine fixée, c'est-à-dire, pour x_0 fixé, nous regardons la fonction définie au voisinage de x_0 dans M par

$$x \longmapsto d(x_0, x).$$

Nous supposons que M est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, que x_0 est égale à 0 et que nous sommes dans un système privilégié de coordonnées (lemme 1.35).

Définition 4.7 *La distribution Δ satisfait la condition H^3-forte si Δ^2 est une distribution régulière qui satisfait la condition H^2-forte.*

Nous savons que si Δ^2 satisfait la condition H^2-forte, le chemin constant est le seul à posséder un relèvement anormal optimal. Nous allons contourner ce problème en faisant un éclatement du chemin constant (voir [8] dans le cas H^2-fort). Nous utilisons pour cela l'approximation nilpotente, c'est-à-dire une distribution (-1)-homogène sur $\mathbb{R}^n$ engendrée par les m champs de vecteurs orthonormés $\hat{X}_i$ définis au lemme 1.35.

Dans toute la section 4.3, Δ est une distribution engendrée par m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ et g la métrique les rendant orthonormés, avec

$$X_i = \hat{X}_i + R_i$$

où $\hat{X}_i$ est homogène de degré -1 et R_i est de degré au moins 0 pour un système de poids $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$. La distribution $\hat{\Delta}$ est celle engendrée par les $\hat{X}_i$ et la métrique $\hat{g}$ est métrique les rendant orthonormés. La distance sous-riemannienne associée à cette structure sera notée $\hat{d}$. Nous dirons que nous sommes dans le cône tangent pour faire référence à cette structure.

Les résultats obtenus de la section 4.3.1 à la section 4.3.3 sont valables sans hypothèses supplémentaires sur Δ, la section 4.3.4 se limite au cas H^3-fort.

4.3.1 Approximation nilpotente.

Soit Φ (resp. $\hat{\Phi}$) l'application définie au voisinage de 0 dans L^2_m (resp. sur L^2_m) par $\Phi(u) = \gamma$ (resp. $\hat{\Phi}(u) = \hat{\gamma}$) où γ (resp. $\hat{\gamma}$) est la courbe horizontale pour Δ (resp. $\hat{\Delta}$) d'origine nulle et de contrôle u. Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ égale à $\Phi - \hat{\Phi}$.

Lemme 4.8 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans L^2_m et une constante positive C tel que pour tout u dans $\mathcal{V}$ et $j = 1, \cdots, n$:*

$$T_j(u) \leq C||u||_{L^2}^{\omega_j+1}.$$

Preuve : dans cette preuve, C représente une constante qui ne dépend que des voisinages sur lesquels on se restreint.

Nous avons vu dans la section 3.1.3 que

$$\begin{aligned} D\Phi(0)V &= \int \sum_{i=1}^{m} V_i X_i(0) \\ D\hat{\Phi}(0)V &= \int \sum_{i=1}^{m} V_i \hat{X}_i(0) \end{aligned}$$

et puisque $X_i(0) = \hat{X}_i(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, pour u proche de 0,

$$|\Phi(u) - \hat{\Phi}(u)|_1 \leq C||u||^2_{L^2}.$$

En particulier

$$|T_j(u)|_1 \leq C||u||_{L^2}^2$$

et le lemme est démontré pour $\omega_j = 1$.

Supposons maintenant le lemme vrai pour $\omega_j \leq k$ et soit j tel que $\omega_j = k+1$, alors pour presque tout t dans $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
|\dot{\gamma}_j(t) - \dot{\hat{\gamma}}_j(t)| &= |\sum_{i=1}^{m} u_i(t)(X_i^j(\gamma(t)) - \hat{X}_i^j(\hat{\gamma}(t)))| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|(|X_i^j(\gamma(t)) - \hat{X}_i^j(\gamma(t))| + |\hat{X}_i^j(\gamma(t)) - \hat{X}_i^j(\hat{\gamma}(t))|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|(|R_i^j(\gamma(t))| + |\hat{X}_i^j(\gamma(t)) - \hat{X}_i^j(\hat{\gamma}(t))|).
\end{aligned}$$

Soit $n_{k-1} = inf\{l \setminus \omega_l = k-1\}$.

$$\hat{X}_i^j(x) - \hat{X}_i^j(y) = \sum_{\omega(\sigma)=1}^{\omega(\sigma)=k} C_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}\hat{X}_i^j}{\partial x_1^{\sigma_1}\cdots\partial x_n^{\sigma_n}}(x)(x_1-y_1)^{\sigma_1}\cdots(x_{n_{k-1}} - y_{n_{k-1}})^{\sigma_{n_{k-1}}}.$$

Les $\hat{X}_i^j$ étant des polynômes homogènes de degré k-1, $\dfrac{\partial^{|\sigma|}\hat{X}_i^j}{\partial x_1^{\sigma_1}\cdots\partial x_n^{\sigma_n}}$ est homogène de degré $k-1-\omega(\sigma)$, et donc d'après le théorème 1.36

$$|\frac{\partial^{|\sigma|}\hat{X}_i^j}{\partial x_1^{\sigma_1}\cdots\partial x_n^{\sigma_n}}(\gamma(t))| \leq C||u||_{L^2}^{k-1-\omega(\sigma)}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
& |(\gamma_1(t) - \hat{\gamma}_1(t))^{\sigma_1}\cdots(\gamma_{n_{k-1}}(t) - \hat{\gamma}_{n_{k-1}}(t))^{\sigma_{n_{k-1}}}| \\
= \; & |T_1(u)(t)|^{\sigma_1}\cdots|T_{n_{k-1}}(u)(t)|^{\sigma_{n_{k-1}}} \\
\leq \; & (C||u||_{L^2}^2)^{\sigma_1}\cdots(C||u||_{L^2}^k)^{\sigma_{n_{k-1}}} \\
\leq \; & C||u||_{L^2}^{\omega(\sigma)+|\sigma|} \\
\leq \; & C||u||_{L^2}^{\omega(\sigma)+1}
\end{aligned}$$

d'où :

$$|\hat{X}_i^j(\gamma(t)) - \hat{X}_i^j(\hat{\gamma}(t))| \leq C\sum_{\omega(\sigma)=1}^{\omega(\sigma)=k} C_\sigma||u||_{L^2}^{k-1-\omega(\sigma)}||u||_{L^2}^{1+\omega(\sigma)} \leq C||u||_{L^2}^k.$$

De plus, R_i^j étant de degré au moins k,

$$|R_i^j(\gamma(t))| \leq C||u||_{L^2}^k$$

toujours d'après le théorème 1.36. Finalement :

$$|\dot{\gamma}_j(t) - \dot{\hat{\gamma}}_j(t)| \leq C||u||_{L^2}^k \sum_{i=1}^m |u_i(t)|$$

et donc $|\gamma_j - \hat{\gamma}_j|_1 \leq C||u||_{L^2}^{k+1}$. $\square$

4.3.2 Eclatement du chemin constant.

Nous notons π l'application $u \mapsto \Phi(u)(1)$, $\hat{\pi}$ l'application $u \mapsto \hat{\Phi}(u)(1)$ et $\nu = \pi - \hat{\pi}$ est l'application $u \mapsto T(u)(1)$. D'après le lemme 4.8 nous avons

$$||\nu(u)|| \leq C||u||_{L^2}^{1+\frac{1}{r}}.$$

Soit S la sphère unité de L^2_m et S_ω l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ tels que $||x|| = 1$. Soit B et B_ω les applications :

$$\begin{aligned} B \ : \mathbb{R} \times \mathrm{S} \ &\longrightarrow \ H \\ (a, u) \ &\longmapsto \ au \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_\omega \ : \mathbb{R} \times \mathrm{S}_\omega \ : \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^n \\ (b, x) \ &\longmapsto \ \delta_b x. \end{aligned}$$

Définition 4.9 *Soit $\mathcal{H}_0$ l'espace des chemins horizontaux d'origine nulle. L'éclatement de $\mathcal{H}_0$ est le sous-espace $\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0$ de $\mathbb{R} \times \mathrm{S}$ formé des éléments (a, u) de $\mathbb{R} \times \mathrm{S}$ tels que si a est non nul, $\pi(au)$ est non nul et si a est nul, $\hat{\pi}(u)$ est non nul.*

Lemme 4.10 *L'application définie sur $\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0 \backslash \{0\} \times S$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathrm{S}_\omega$ par*

$$(a, u) \mapsto (||\pi(au)||, \delta^{-1}_{||\pi(au)||}\pi(au))$$

se prolonge sur $\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0$ en une application analytique notée $\mathcal{E}_0\pi$ et pour $(0, u)$ appartenant à $\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0$,

$$\mathcal{E}_0\pi(0, u) = (0, \delta^{-1}_{||\hat{\pi}(u)||}\hat{\pi}(u)).$$

Preuve : nous écrivons

$$\begin{aligned} \pi(au) \ &= \ \hat{\pi}(au) + T(au)(1) \\ &= \ \delta_a(\hat{\pi}(au) + \delta_a^{-1}T(au)(1)) \end{aligned}$$

et

$$\delta_a^{-1}T(au)(1) = (\cdots, \frac{T_j(au)(1)}{a^{\omega_j}}, \cdots).$$

D'après le lemme 4.8 et le lemme 2.6, $\frac{T_j(au)(1)}{a^{\omega_j}}$ se prolonge en une application de classe C^l au voisinage de $\{0\} \times S$. Notons $\tilde{T}_j$ ce prolongement et $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \cdots, \tilde{T}_n)$. Alors l'application $\tilde{\pi}$ définie au voisinage de $\{0\} \times S$ par

$$\tilde{\pi}(a, u) = \hat{\pi}(u) + \tilde{T}(a, u)$$

est de classe C^l au voisinage de $\{0\} \times S$ et $\mathcal{E}_0\pi$ qui s'écrit :

$$\mathcal{E}_0\pi(a, u) = (a||\tilde{\pi}(a, u)||, \delta_{||\tilde{\pi}(a,u)||}\tilde{\pi}(a, u))$$

est de classe C^l au voisinage de tout point (a, u) vérifiant $\tilde{\pi}(a, u) \neq 0$. □

4.3.3 Prolongement de l'énergie.

Nous notons $\tilde{E}$ l'application de classe C^l :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{E} : \mathcal{E}_0\mathcal{H}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, u) & \longmapsto & \dfrac{a^2}{||\pi(au)||^2} = \dfrac{1}{||\tilde{\pi}(a, u)||^2} \end{array}$$

et nous étudions le problème suivant : minimiser $\tilde{E}$ sur la fibre $\mathcal{E}_0\pi^{-1}(z)$ notée $(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_z$ où z est dans $\mathbb{R} \times \mathrm{S}_\omega$.

Lemme 4.11 *Soit z dans S_ω et u dans $S_{L^2_m}$, alors $(0, u)$ réalise le minimum de $\tilde{E}$ sur la fibre $\mathcal{E}_0\pi^{-1}(0, z)$ si et seulement si u est minimisant dans le cône tangent.*

Preuve : Supposons que u minimise $\tilde{E}$. Soit v dans L^2_m tel que $\hat{\pi}(v) = \hat{\pi}(u)$, montrons que $||v||_{L^2} \geq ||u||_{L^2} = 1$. Puisque $\mathcal{E}_0\pi(0, \frac{1}{||v||_{L^2}}v) = \mathcal{E}_0\pi(0, u)$ et u minimise $\tilde{E}$,

$$\frac{||v||^2_{L^2}}{||\hat{\pi}(v)||^2} = \tilde{E}(0, \frac{v}{||v||_{L^2}}) \geq \frac{1}{||\hat{\pi}(u)||^2}$$

et puisque $\hat{\pi}(v) = \hat{\pi}(u)$, $||v||_{L^2} \geq 1$. Ceci montre que u est minimisant dans le cône tangent.

Réciproquement, si u est minimisant dans le cône tangent nous choisissons v dans $S_{L^2_m}$ tel que $\mathcal{E}_0\pi(0, v) = \mathcal{E}_0\pi(0, u)$. Alors

$$\hat{\pi}(\frac{||\hat{\pi}(u)||}{||\hat{\pi}(v)||}v) = \hat{\pi}(u)$$

et puisque u est minimisant dans le cône tangent

$$\frac{||\hat{\pi}(u)||}{||\hat{\pi}(v)||} \geq 1.$$

Ceci implique bien que $\tilde{E}(v) \geq \tilde{E}(u)$ et donc $(0, u)$ minimise $\tilde{E}$. □

Soit U un voisinage de 0 dans M tel que pour tout x dans U il existe une courbe minimisante joignant x_0 à x et $\mathcal{E}_\omega U := B_\omega^{-1}(U)$. Soit $\mathcal{H}_U = \pi^{-1}(U)$, $(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_U = B^{-1}(\mathcal{H}_U)$ et $\mathcal{E}_0\mathcal{M}_U$ l'ensemble des éléments de $(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_U$ qui minimisent $\tilde{E}$.

Proposition 4.12 *La restriction de $\mathcal{E}_0\pi$ à $\mathcal{E}_0\mathcal{M}_U$ et à valeurs dans $\mathcal{E}_\omega U$ est surjective et propre.*

Démonstration : nous considérons pour cela une suite $\{(a_\sigma, u_\sigma)\}$ dans $\mathcal{E}_0\mathcal{M}_U$ telle que $\mathcal{E}_0\pi(a_\sigma, u_\sigma)$ converge dans $\mathcal{E}_\omega U$ et montrons que $\{(a_\sigma, u_\sigma)\}$ possède une sous-suite qui converge dans $\mathcal{E}_0\mathcal{M}_U$.

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer être dans l'un des 3 cas suivants :

- a_σ converge vers un réel a strictement positif,
- a_σ est nul pour tout σ
- a_σ converge vers 0.

Dans les deux premiers cas le résultat découle immédiatement de la proposition 4.4 appliquée à Δ et à $\hat{\Delta}$, traitons le troisième :

Lemme 4.13 *Soit $\{a_s\}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et $\{u_s\}$ une suite de $S_{L^2_m}$ telles que pour tout s, $a_s u_s$ minimise l'énergie, il existe alors une sous-suite de $\{u_s\}$ qui converge vers un contrôle minimisant du cône tangent.*

Preuve : quitte à extraire une sous-suite , nous pouvons supposer que $\{u_s\}$ converge faiblement vers u dans la boule unité de L^2_m et que $\delta^{-1}_{||\pi(a_s u_s)||}\pi(a_s u_s)$ converge dans S_ω. Nous devons montrer que $||u||_{L^2} = 1$ et que u est minimisant dans le cône tangent. Puisque

$$||u_s - u||^2_{L^2} = ||u_s||^2_{L^2} + ||u||^2_{L^2} - 2\langle u, u_s\rangle_{L^2} \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - ||u||^2_{L^2} \geq 0,$$

il suffit de montrer que $|u|_1 \geq 1$. Or

$$||u||_{L^2} \geq \hat{d}(0, \hat{\pi}(u)) = \lim_{s\to+\infty} \hat{d}(0, \delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1))$$

par continuité de $\hat{d}$. Nous décomposons $\hat{d}(0, \delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1))$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
\hat{d}(0, \delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)) &= \hat{d}(0, \delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)) - \hat{d}(0, \delta_{a_s}^{-1}\gamma_s(1)) \\
&\quad + \frac{1}{a_s}(\hat{d}(0, \gamma_s(1)) - d(0, \gamma_s(1))) \\
&\quad + \frac{1}{a_s} d(0, \gamma_s(1)).
\end{aligned}$$

Les courbes γ_s étant minimisantes, $d(0, \gamma_s(1)) = a_s$. D'après le théorème 1.36 :

$$|\hat{d}(0, \gamma_s(1)) - d(0, \gamma_s(1))| \leq C a_s^{1+\frac{1}{r}}$$

et donc $\frac{1}{a_s}(\hat{d}(0,\gamma_s(1)) - d(0,\gamma_s(1)))$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini. D'après le lemme 4.8

$$||\delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)) - \delta_{a_s}^{-1}\gamma_s(1))|| = ||(\ldots, \frac{T_j(a_s, u_s)}{a_s^{\omega_j}}, \ldots)|| \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites $\delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)$ et $\delta_{a_s}^{-1}\gamma_s(1)$ ont donc la même limite et par continuité de $\hat{d}$, $\hat{d}(0,\delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)) - \hat{d}(0,\delta_{a_s}^{-1}\gamma_s(1))$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini. Finalement

$$\lim_{s\to+\infty} \hat{d}(0,\delta_{a_s}^{-1}\hat{\gamma}_s(1)) = 1$$

et donc

$$||u||_{L^2} = \hat{d}(0,\hat{\pi}(u)) = 1$$

ce qui signifie bien que u_s converge fortement vers u dans S et que u est minimisant dans le cône tangent. Ceci termine la démonstration du lemme et de la proposition. □

4.3.4 Sous-analycité de $d(x,\cdot)$.

Théorème 4.14 *Supposons que Δ satisfait la condition H^3-forte, alors l'application*

$$x \longmapsto d(0,x)$$

est sous-analytique sur U.

Nous avons en fait le résultat plus fort suivant : l'application

$$x \longmapsto \frac{d(0,x)}{||x||}$$

se relève en une application sous-analytique continue sur $\mathcal{E}_w U$.

Démonstration : la continuité est une conséquence immédiate de la proposition 4.12. Nous voulons vérifier que la condition H2 du théorème 2.26 est satisfaite. Considérons tout d'abord un élément $\varphi = (a,u)$ dans $\mathcal{E}_0\mathcal{M}_U$ tel que a est strictement positif. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_U \arrow[r, "\mathcal{E}_0\theta"] \arrow[d, "B"'] & \mathrm{I\!R} \times \mathrm{S}_\omega \times \mathrm{I\!R} \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathcal{H}_U \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{I\!R}^n \times \mathrm{I\!R}
\end{tikzcd}$$

et puisque $a > 0$, B est un difféomorphisme au voisinage de φ et Ψ est un difféomorphisme au voisinage de $\mathcal{E}_0\theta(\varphi)$. La condition H2 étant vérifiée pour $\mathcal{H}_U$ et θ sauf au chemin constant, elle est vérifiée pour φ.

Considérons maintenant un élément minimisant $\varphi = (0, u)$ avec u dans $S_{L^2_m}$. Soit $\lambda = (c, \beta, \lambda_0)$ dans $T_z(\mathbb{R} \times \mathrm{S}_\omega \times \mathbb{R})$, où $z = \mathcal{E}_0\theta(\varphi)$, tel que $\lambda \cdot (\mathcal{E}_0\theta)'(\varphi)$ soit nul et $\lambda \cdot (\mathcal{E}_0\theta)''(\varphi)$ soit d'indice fini et montrons que l'opérateur qui lui est associé est un opérateur de Fredholm.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathrm{S}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{m}}} \arrow[r, "\mathcal{E}_0\hat{\theta}"] \arrow[d, "B"'] & \mathbb{R} \times \mathrm{S}_\omega \times \mathbb{R} \arrow[d, "\Psi"] \\
L^2_m \arrow[r, "\hat{\theta}"] & \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \times \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

alors pour $\tilde{\lambda} = (0, \beta, \lambda_0)$, $\tilde{\lambda} \cdot D\mathcal{E}_0\hat{\theta}(1, u) = 0$ et pour tout V dans $\{u\}^\perp$ nous avons

$$\lambda \cdot (\mathcal{E}_0\theta)''(\varphi)(V, V) = \tilde{\lambda} \cdot (\mathcal{E}_0\hat{\theta})''(1, u)(V, V).$$

Si Δ^2 est une distribution régulière H^2- forte, il en est de même pour $\hat{\Delta}^2$ et puisque u est minimisant dans le cône tangent et est différent du chemin constant, que B et Ψ sont des difféomorphismes aux voisinages de $(1, u)$ et $\mathcal{E}_0\hat{\theta}(1, u)$, nous déduisons que $\tilde{\lambda} \cdot (\mathcal{E}_0\hat{\theta})''(1, u)$ vérifie la condition H2, donc également $\lambda \cdot (\mathcal{E}_0\theta)''(\varphi)$ puisque $\{0\} \times \{u\}^\perp$ est de codimension 1 dans $T_\varphi(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_U$.

Nous avons montré que la condition H2 était satisfaite en tout point de $(\mathcal{E}_0\mathcal{H}_0)_U$. Le condition H1 est également satisfaite d'après la proposition 4.12. Nous déduisons donc le théorème 4.14 du théorème 2.26. $\square$

Bibliographie

[1] A.A. Agrachev, A.V. Sarychev "Abnormal Sub-Riemannian Geodesics : Morse index and Rigidity", Annales de l'institut Poincaré , vol 13 (1996).

[2] A.A. Agrachev , B.Bonnard, M.Chyba, I. Kupka, "Sub-Riemannian sphere in the Martinet flat case" à paraître dans COCV/ESAIM.

[3] M.Alcheick, P.Orro, F.Pelletier,"Singularité de l'application extrémité pour les chemins horizontaux", Prépublication 95-09a , Lama, Université de Savoie.

[4] M.Alcheick, P.Orro, F.Pelletier, "Characterizations of Hamiltonian geodesics in subRiemannian geometry" à paraître dans J.of.cont.theory and dynamical systems.

[5] A. Bellaïche "The tangent space in Sub-Riemannian Geometry, Progress in Mathematics", Vol. 144, 1996 Birkhäuser Verlag.

[6] J.M. Bismut "Large Deviation and the Malliavin Calculus", Birkhäuser, 1984.

[7] W. L. Chow "Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung", Math. Ann., 117, (1939) 98-105

[8] Z. Ge "Horizontal path spaces and Carnot-Carathéodory metrics", pacific journal of mathematics, 1993.

[9] C. Cole, R. Karidi, A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie groups, J. Dyn. and Control Syst., Vol 1, n. 4 (1995), p. 535-549.

[10] M. Gromov "Carnot-Carathéodory spaces seen from within", Progress in Mathematics, Vol. 144, 1996 Birkhäuser Verlag.

[11] U. Hamenstädt, Some regularity theorems for Carnot-Carathéodory metrics, J. Diff. Geom. 32 (1991), pp. 192-201.

[12] S.Jacquet, "Structure de l'espace des chemins horizontaux au voisinage d'une courbe normale ", mémoire de D.E.A (1993).

[13] I. Kupka, Abnormal extremal, Preprint 1992.

[14] J. Milnor, Morse theory, Annals of Mathmatics studies 51, 1969.

[15] J. Mitchell, "On Carnot-Carathéodory metrics", J. Differ. Geom. 21 (1985), 33-45.

[16] R.Montgomery "Geodesics Which Do Not Satisfy the Geodesic Equations", SIAM J. Cont. Opt. 32, n.6, 1605-1620 (1994).

[17] R.Montgomery, Singular extremals on Lie groups, Math. Control Signals Syst., n. 3, 217-234 (1994).

[18] R. Palais, Foundations of Global Non linear Analysis, Benjamin, New York, 1968.

[19] F. Pelletier, L. Valere, Abnormality of trajectory in sub riemannian Structure. Geometry in non linear control and differential inclusions, Banach center publication, vol 32, p. 301-317, Polish Academy of Sciences Warszawa 1995.

[20] P. K. Rashevsky, Any two points of a tottaly nonholonomic space may be connected by an admissible line. Uch. Zap. Ped. Inst. im. Liebknechta, Ser. Phys. Math.,2 (1938), 83-94.

[21] L. P. Rotschild and E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math.,137 (1976),247-320.

[22] R. Strichartz : Sub-Riemannian geometrie, J. Differential geometry, 24, (1986), 221-263.

[23] H. J. Sussmann, "Subanalycity of the distance function for real analytic subRiemannian metrics on three dimensional manifolds", Report SYCON-91-05a, Rutgers, 1991.

[24] H. J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. Amer. Math. Soc.,180 (1973), 171-188.

[25] H. J. Sussmann, A cornupia of four-dimensional abnormal sub-Riemnnian minimizers, Progress in Mathematics, Vol. 144, 1996 Birkhäuser Verlag.

[26] W. S Liu, H. J. Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions, to appear Trans. AMS.

[27] M. Tamm "Subanalytic sets in the calculus of variation" acta math, 1981.

[28] A. M. Vershik and V. Ya. Gershkovich, Nonholonomic problems and the theory of dictibutions, Acta Appl. Math., 12, 181-209, 1988.

[29] A. M. Vershik and V. Ya. Gershkovich, Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems, in Dynamical Systems VII, V.I. Arnold, S. P. novikov (Eds), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 16, Springer, 1994.