Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

Mariano Echeverría

Introducción al Curso

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todos los modelos matemáticos de algún fenómeno natural. Por ejemplo, la ecuación más importante de la Mecánica Clásica, la segunda ley de Newton $F = ma$, es una ecuación diferencial disfrazada lo cual implica que básicamente en todos los problemas de la mecánica aparecerá una ecuación diferencial por resolver, aún cuando en algunos casos es tan sencilla que no se reconzca como tal. De hecho, en cualquier problema en que una cantidad física esté involucrada con una alguna variación de tal cantidad va a aparecer una ecuación diferencial.

La primera parte del curso se dedica exclusivamente a la resolución de tales ecuaciones diferenciales usando varios métodos clásicos. Lamentablemente, la cantidad de ecuaciones que pueden resolverse con tales métodos es bastante pequeña, por lo que se harán mención de algunas formas alternativas para resolver las ecuaciones, incluyendo el significado geométrico de estas y el análisis cualititativo de la solución. A su vez, es importante tener presente qué condiciones garantizan que un problema que involucre ecuaciones diferenciales va a tener solución única, pues tal unicidad generalmente se interpreta como la presencia de causalidad o determinismo en el sistema.

La segunda parte del curso sigue dedicado a la resolución de ecuaciones diferenciales, sin embargo, las ecuaciones a las que se dedican, que son las lineales, son tan importantes que merecen su propio estudio. La razón por la que las ecuaciones lineales son tan importantes va de lo pragmático a lo teórico: primero que todo, son por mucho las ecuaciones en las que resulta más fácil caracterizar en forma explícita el método para resolverlas y pueden aparecer muchas veces como una primera aproximación (el régimen lineal) a un problema más complicado. Desde el punto de vista teórico, tales ecuaciones cuentan con muchas propiedades matemáticas importantes, por ejemplo, el principio de superposición y la descomposición de la solución como una parte homogénea y no homogénea de la ecuación. Además, tales ecuaciones y sus parientes cercanos, que son los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, son analizables en gran parte con la ayuda del Álgebra Lineal y el cálculo de valores y vectores propios revelan mucha información sobre las soluciones, por ejemplo, su estabilidad. Dentro del estudio de las ecuaciones lineales aparece la primera generalización del concepto de función que se va a estudiar, que consiste en los operadores diferenciales lineales. Tales operadores poseen muchas propiedades similares al álgebra matricial y permiten interpretar la ecuación en términos de hallar cierta respuesta o output frente a una entrada o input particular.

Siguiendo con la misma línea de resolver ecuaciones diferenciales, otra técnica clásica es el método de solución por medio de series. Este método tiene la ventaja de que permite hallar soluciones a ecuaciones más complicadas siempre y cuando los coeficientes de la ecuación sean analíticos, es decir, expresables como series de potencias. Incluso en el caso en que no sean los coeficientes analíticos, el método de Frobenius se encarga de resolver algunas casos en los que falla la analiticidad.

En el tema siguiente apareceran dos generalizaciones adicionales del concepto de función. El primero va a ser la idea de una función generalizada, que básicamente es una "función" que puede tomar valores infinitos, siempre y cuando lo haga bajo reglas estrictas. Con las funciones generalizadas es posible extender muchas técnicas del cálculo, por ejemplo, hallar la "derivada" de una función en un punto de discontinuidad o aplicar un impulso instántaneo a una partícula. El representante más importante de las funciones generalizadas es la delta de Dirac, y con ella será más que suficiente para lo que se va a hacer durante el curso. La otra generalización de función es el concepto de transformada, que se interpretará como enviar una función de un espacio a otro. La transformada que se estudiará es la de Laplace, que como se verá luego toma una función o señal del dominio temporal en el dominio de frecuencia. La Transformada de Laplace es una de las técnicas más eficientes para resolver los llamados LTI, linear time invariant system, y a partir del teorema de convolución tales sistemas están resueltos en el momento que se halle la llamada función de transferencia del sistema.

Finalmente, se estudiarán las series de Fourier, que de forma similar a la transformada de Laplace, consiste en estudiar una función en términos más simples. En este caso la idea será tomar una función periódica y descomponerla en términos de sus armónicos, es decir, descomponer cualquier señal como una superposición de senos y cosenos de distintas frecuencias. Los métodos de Fourier son absolutamente indispensables en todos los fenómenos que involucren ondas u oscilaciones, aunque en el curso no se verá su forma más poderosa, la transformada de Fourier. Luego se utilizarán las series de Fourier y otras técnicas vistas durante el curso para resolver las ecuaciones diferenciales parciales. Estas ecuaciones son las más importantes de todas por la gran variedad de fenómenos que modelan y debido a su complejidad es mejor analizar cada ecuación con sus propios métodos. Durante el curso solo se verán las formas más simples de las tres ecuaciones parciales clásicas: la ecuación del calor (o difusión), la ecuación de onda y la ecuación de Laplace.

Índice general

1 Teoría Elemental de ODEs

1.1. Introducción a las ODEs

Antes de describir exactamente qué significa una ecuación diferencial y qué significa resolver una ecuación diferencial, es útil tener unos cuantos ejemplos de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse de manera sencilla sin tener que pensar mucho en la teoría subyacente. En los ejemplos siguientes se van a introducir tres de los métodos más importantes para estudiar una ecuación diferencial: el método analítico, el método geométrico y el método cualitativo. La ventaja de estos ejemplos es que al ser tan básicos es posible utilizar los tres métodos simultáneamente y de esta forma comparar las ventajas y desventajas de cada uno. Más adelante, cuando se estudien ecuaciones más complicadas, no será posible analizar el problema desde algunas de las perspectivas anteriores, e incluso se volvería indispensable recurrir a métodos numéricas.

1.1.1. Método Analítico y Geométrico para resolver una ODE

La ecuación diferencial más sencilla que existe es una ODE[1] de variables separables. Un caso especial de tal tipo de ecuación es

$$y' = f(x) \tag{1.1.1}$$

donde $y' = \frac{dy}{dx}$. Para analizar las ODEs es usual utilizar dos posibles notaciones: la primera es la que se utilizó arriba donde y se considera la variable dependiente y x es la variable independiente. La otra notación alternativa a 1.1.1 es

$$\dot{x} = f(t) \tag{1.1.2}$$

donde la notación punto de Newton significa derivación con respecto al tiempo, es decir,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \tag{1.1.3}$$

Es decir, en este caso es la variable x la que se considera como variable dependiente y la variable t, que se interpreta usualmente como el tiempo, es la variable independiente. Esta notación es sobre todo útil para considerar que la ecuación modela un sistema que evoluciona en el tiempo, por ejemplo, la posición de una partícula en función del tiempo o el crecimiento de una población en función del tiempo. Antes de dar el método general para resolver tales ecuaciones, se dará un ejemplo de ella.

[1]ODE significa ecuación diferencial ordinaria, o *ordinary differential equation* por sus siglas en inglés

Ejemplo 1. Resuelva la ODE $y' = 2x$

Este ejemplo, aún cuando es muy básico, permite introducir los métodos más importantes para resolver una ODE. Primero que todo, en la notación de Leibniz, que para lo que sigue es más útil, se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1.1.4}$$

Básicamente el significado de 1.1.4 es: encuentre una función $y(x)$ tal que su derivada es $2x$, es decir, $\frac{dy}{dx} = 2x$. De cálculo se reescribiría la ecuación 1.1.4 como

$$dy = 2xdx \tag{1.1.5}$$

e integrando a ambos lados se obtiene

$$y + c_1 = x^2 + c_2 \tag{1.1.6}$$

donde c_1, c_2 son constantes de integración que resultan de cada integración particular. Se puede definir $c \equiv c_2 - c_1$ como la constante genérica del problema para obtener

$$y(x) = x^2 + c \tag{1.1.7}$$

¿Cómo saber si se obtuvo una solución válida de 1.1.4? Simplemente se deriva la función y se verifica que se cumpla la ecuación, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x \tag{1.1.8}$$

por lo tanto se cumple 1.1.4 y se dice que $y(x)$ es una solución de la ODE 1.1.4. Esta forma de resolver la ecuación se llama la forma analítica pues se usaron técnicas de análisis (integración, diferenciación, etc) para obtener la solución. De hecho, del problema anterior se puede observar que

1. En general, para resolver una ecuación diferencial hay que realizar alguna integración.

2. Al realizar la integración, no aparece una única solución, sino más bien toda una familia de candidatos posibles. Por ejemplo, en la solución del problema anterior, dependiendo del valor de la constante que se tome, hay una solución distinta, por ejemplo, para $c = 1$ se tiene $y(x) = x^2 + 1$ y para $c = 0$ se tiene $y(x) = x^2$. Para indicar mejor la dependencia de la solución con respecto a la constante, se puede reescribir 1.1.7 como
$$y_c(x) = x^2 + c \tag{1.1.9}$$
y la constante c se interpreta en este caso como un parámetro que se puede variar a libertad y tal que cada escogencia particular del parámetro produce una solución distinta. Escrita de la forma anterior, se dice que 1.1.9 es una familia de soluciones de un parámetro.

3. Como se verá más adelante, para eliminar la dependencia de c y obtener una única solución, habrá que especificar ciertas condiciones iniciales, por ejemplo, si además de $y' = 2x$ se hubiera pedido que $y(0) = 0$ entonces la única solución en 1.1.9 que cumple la condición anterior es $y_0(x) = x^2$. Tales condiciones se llamarán condiciones iniciales y el problema se conocerá como un Problema de Valor Inicial (PVI).

El método geométrico consiste en interpretar la ecuación

$$y' = 2x \tag{1.1.10}$$

a través del significado geométrico de la derivada. Primero que todo, como se busca una función $y(x)$ se puede realizar un dibujo del plano xy: la solución va a ser una función, o de forma más general, una curva sobre el plano xy.

Luego, como la derivada es la pendiente de la recta tangente a la función, 1.1.10 indica que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x es $2x$. Luego, en el punto (x, y) del plano se traza un segmento de recta con pendiente $2x$ que indica la dirección que tiene la curva en el punto. Por lo tanto, la ecuación 1.1.10 especifica un Campo de Direcciones de forma que en cada punto (x, y) del plano la ecuación diferencial indica la dirección que debe tener cualquier curva que sea solución de la ecuación.

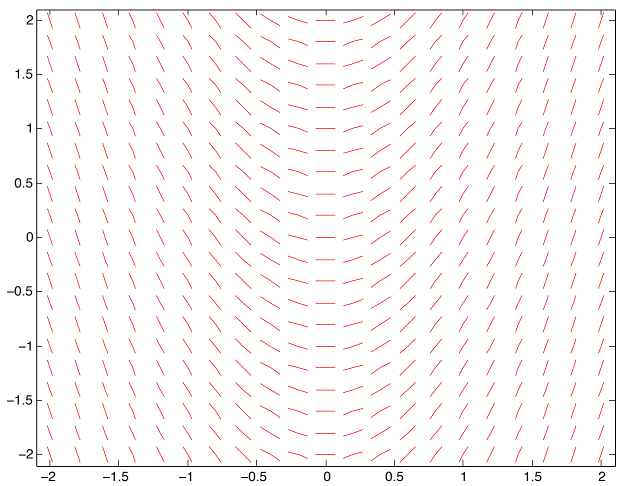

Figura 1.1.1: Campo de Direcciones

Luego las curvas en el plano xy que cumplen la ecuación diferencial se llaman las Curvas Integrales del Campo de Direcciones.

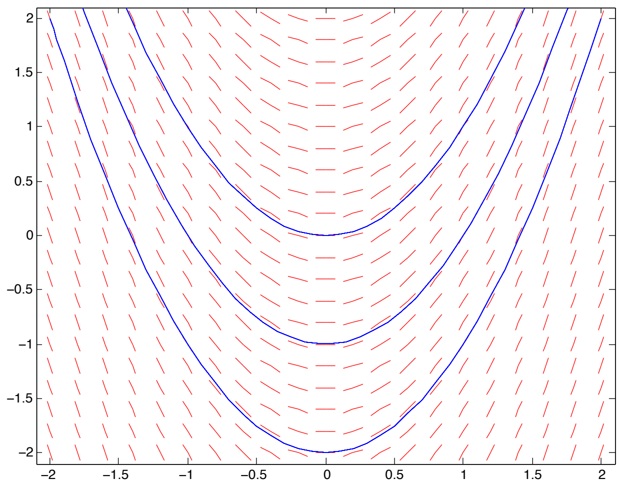

Figura 1.1.2: Curvas Integrales

Es fácil observar que las curvas integrales son parábolas como lo indica la solución 1.1.10 y más aún: las curvas integrales no se intersecan. Esto será consecuencia del teorema de existencia y unicidad que se verá más adelante y podrá interpretarse como una manifestación del determinismo o causalidad en el sistema, es decir, las mismas condiciones iniciales producen el mismo futuro y pasado.

Como se vio del ejemplo anterior, para resolver una ODE de la forma 1.1.1 solo hay que integrar la ecuación a ambos lados. La integración que se utilizó fue en realidad lo que se conoce como hallar una antiderivada de la función, sin embargo, a veces es más útil utilizar una integral definida como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Resuelva la ODE $y' = \sin\left(x^2\right)$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

Nuevamente la ecuación se puede escribir en notación de Leibniz como

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(x^2\right) \tag{1.1.11}$$

e integrando a ambos lados se puede escribir

$$y = \int \sin\left(x^2\right) dx + c \tag{1.1.12}$$

el problema con presentar la solución de esta forma es que no se puede escribir la integral anterior en términos de funciones elementales como cosenos, senos, exponenciales, logaritmos, etc, por lo que en realidad la integral indefinida no sirve de mucho en este caso. De hecho, para este tipo de problemas lo más útil es utilizar la integral indefinida recordando que el Teorema Integral del Cálculo establece que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x) \tag{1.1.13}$$

Luego, se reescribe la ecuación diferencial como

$$dy = \sin\left(x^2\right) dx \tag{1.1.14}$$

el lado derecho se va a integrar desde 0 a x (es útil escoger 0 por la condición inicial $y(0) = 1$) mientras que el lado izquierdo se integra desde 1 a y (se escoge 1 porque $y(0) = 1$, es decir,

$$\int_1^y dy = \int_0^x \sin\left(x^2\right) dx \tag{1.1.15}$$

Como la variable x dentro del integrando es muda es mejor cambiarla a una letra neutra, por ejemplo, u, por lo tanto, se escribirá la solución como

$$y(x) = 1 + \int_0^x \sin\left(u^2\right) du \tag{1.1.16}$$

Nuevamente, para verificar que 1.1.16 es solución se deriva la función utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + \int_0^x \sin\left(u^2\right) du\right) = \sin\left(x^2\right) \tag{1.1.17}$$

La ventaja de escribir la solución de esta forma es que incorpora automáticamente la condición inicial ya que

$$y(0) = 1 + \int_0^0 \sin\left(u^2\right) du = 1 \tag{1.1.18}$$

En resumen,

La solución paramétrica del problema

$$y' = f(x) \tag{1.1.19}$$

es

$$y_c(x) = \int f(x)dx + c \tag{1.1.20}$$

donde c es una constante o parámetro.
La solución del problema de valor incial para la ecuación

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1.21}$$

es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u)du \tag{1.1.22}$$

1.1.2. ODEs de Variables Separables de Primer Orden

Ahora se va a analizar el caso general de una ODE de variables separables. Estas son ecuaciones diferenciales de la forma [2]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1.1.23}$$

Tales ecuaciones aparecen en distintos problemas matemáticos y físicos como se muestra a continuación.

1.1.2.1. Problemas Geométricos

1.1.2.1.1. Trayectorias Ortogonales Suponga que se tiene una familia de curvas $y_c(x)$ que dependen de un parámetro y se buscan hallar las curvas que son perpendicualres a la familia y_c. Tales curvas perpendiculares se llaman las trayectorias ortogonales a la familia paramétrica de curvas. Ahora bien, ¿qué significa que dos curvas son ortogonales? Significa que en los puntos en que se intersecan, las rectas tangentes correspondientes son perpendiculares. Ahora bien, de geometría euclídea se sabe que dos rectas con pendientes m_1, m_2 son perpendicualres si y solo si

$$m_1 m_2 = -1 \tag{1.1.24}$$

Ahora bien, si la curva ortogonal es $y(x)$, dado que las pendientes de las rectas tangentes son y' y y'_c respectivamente, la ecuación diferencial que debe cumplir y es

$$y' = -\frac{1}{y'_c} \tag{1.1.25}$$

En resumen,

Para encontrar las curvas ortogonales a la familia $y_c(x)$ se resuelve la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{1}{y'_c} \tag{1.1.26}$$

Ejemplo 3. Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y_c = cx^5$

Suponga que y es una curva ortogonal a todas las curvas y_c. Primero que todo, si y y y_c se intersecan en x entonces

$$y_c(x) = y(x) \tag{1.1.27}$$

por lo que

$$c = \frac{y(x)}{x^5} \tag{1.1.28}$$

[2] la función que depende de y se escribe en el denominador por comodidad a la hora de resolver la ecuación

Por otro lado

$$y_c'(x) = 5cx^4 \tag{1.1.29}$$

y por 1.1.26 la ecuación diferencial por resolver es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5cx^4} \quad x \neq 0 \tag{1.1.30}$$

observe que antes de resolver la ecuación hay que sustituir el valor de c hallado en 1.1.28 puesto que el parámetro c va variando y por lo tanto no se puede tratar como constante. Por lo tanto hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{5y} \qquad x \neq 0, y \neq 0 \tag{1.1.31}$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$5ydy = -xdx \tag{1.1.32}$$

y nuevamente puede integrarse a ambos lados para obtener

$$\frac{5}{2}y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \tag{1.1.33}$$

o bien

$$\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}y^2 = C \quad x, y \neq 0 \tag{1.1.34}$$

por lo que las curvas son una familia de elipses. En el caso de que $x = y = 0$ la curva que es perpendicular a la familia y_c es el eje y.

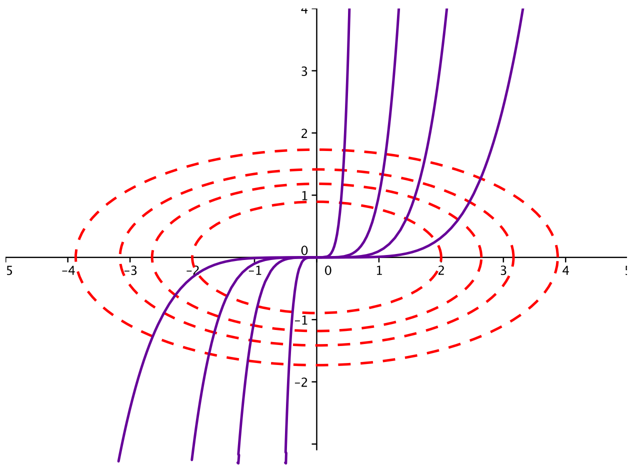

Figura 1.1.3: Trayectorias Ortogonales

Ejemplo 4. Halle las trayectorias ortogonales ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación $x\left(y^2+1\right)+xy^2=c$

La única diferencia con respecto al problema anterior es que hay que derivar implícitamente. Aquí cabe mencionar que es usual eliminar el índice c en y_c por lo que derivando la familia de curvas

$$y^2+1+x\left(2yy'\right)+y^2+2xyy'=0 \tag{1.1.35}$$

o bien

$$y'=-\frac{2y^2+1}{4xy} \qquad x,y\neq 0 \tag{1.1.36}$$

Luego usando 1.1.26 se tiene que hay que resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy}{2y^2+1} \tag{1.1.37}$$

O bien

$$\frac{2y^2+1}{y}dy=4xdx \tag{1.1.38}$$

e integrando a ambos lados se tiene

$$y^2+\ln y=2x^2+C \tag{1.1.39}$$

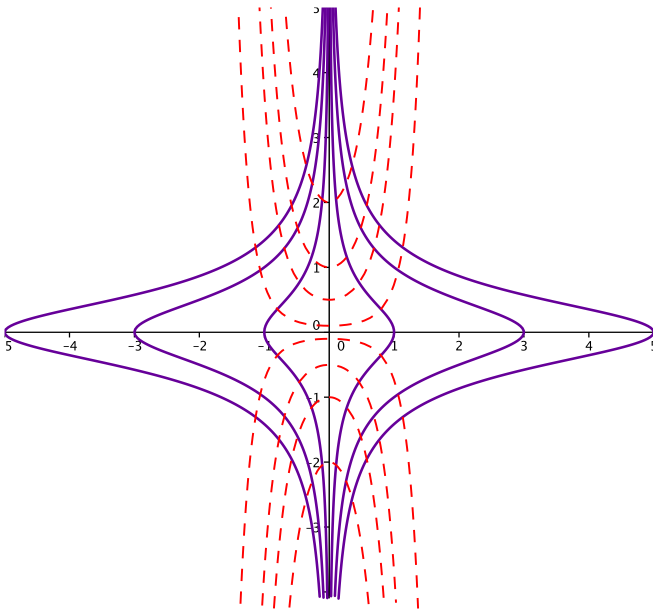

Figura 1.1.4: Famila paramétrica (curvas moradas) y familia ortogonal (curvas rojas)

1.1.2.2. Ecuaciones con dependencia exponencial

Muchos modelos útiles satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dA}{dt} = kA \tag{1.1.40}$$

donde A es una cantidad física de intéres y k es una constante (positiva o negativa). Básicamente 1.1.40 significa que la tasa a la que cambia A en cada instante es proporcional a la cantidad actual de A.

- Si $A(t) = N(t)$ se interpreta como la población de una especie en presencia de recursos ilimitados y sin predadores entonces se toma $k > 0$ ya que conforme la población $N(t)$ es más grande más individuos deberían estar en capacidad de reproducirse por lo que la tasa de crecimiento aumenta, es decir, $\frac{dN}{dt} > 0$. Como se verá luego este modelo no es realista puesto que no impone límites al número de miembros de una población y será modificado en la ecuación logística.

- Si $A(t)$ representa la cantidad de partículas en tiempo t de un material radioactivo entonces $\frac{dA}{dt}$ representa la tasa de desintegración de partículas. En este caso se toma $k < 0$ lo cual significa que entre menos material radioactivo hay la tasa de desintegración es menor.

- Suponga que se tiene una cuenta de colones en el banco, $D(t)$ representa el dinero en tiempo t. Si está depositado en una cuenta con tasa de interés k, esto significa que después del período de intéres (puede ser una tasa mensual, anual, etc) $\triangle t$ se añade a la cuenta una cantidad de dinero $\triangle D(t) = kD(t)\triangle t$, de esta forma $D(t+\triangle t) = D(t) + \triangle D(t) = D(t) + kD(t)\triangle t$ por lo que

$$\frac{D(t+\triangle t) - D(t)}{\triangle t} = kD(t) \tag{1.1.41}$$

  y suponiendo que el período de intéres es cada vez más pequeño, es decir, $\triangle t \longrightarrow 0$ se tiene que $\frac{dD}{dt} = kD$ que es una ecuación igual a la de 1.1.40.

- Una ecuación muy similiar a 1.1.40 es la ley de Newton de enfriamiento. Se supone que se tiene un objeto a temperatura $T(t)$ expuesto a un medio ambiente con temperatura T_e. Si el ambiente es lo suficientemente grande, se puede tomar T_e contante y que solo el objeto va a sufrir cambios de temperatura. A su vez, también es natural suponer que el cambio en temperatura, es decir, $\frac{dT}{dt}$, depende solamente de la *diferencias* entre la temperatura del objeto y la del ambiente, es decir,

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_e\right) \tag{1.1.42}$$

  donde k es una constante que por simplicidad se toma constante y el signo $-$ se toma para tener $k > 0$ pues por la experiencia se sabe que el objeto a mayor temperatura comienza a disminuir su temperatura al entrar en contancto con un objeto más frío. Observe que en este caso por análisis dimensional k debe tener unidades de tiempo^{-1} por lo que puede definirse una escala adimensional de tiempo como

$$\tilde{t} \equiv kt \tag{1.1.43}$$

A su vez, hay una escala natural de temperatura que consisten en comparar la temperatura con respecto a la temperatura del ambiente, es decir, se define

$$\tilde{T} \equiv \frac{T}{T_e} \tag{1.1.44}$$

Luego, se puede reescribir ambos lados de 1.1.42 en función de las variables adimensionales como

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = T_e \frac{d\tilde{T}}{dt} = T_e \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = kT_e \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} \\ -k\left(T - T_e\right) = -kT_e\left(\tilde{T} - 1\right) \end{cases} \tag{1.1.45}$$

por lo que la forma adimensional de 1.1.42 es

$$\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = -\left(\tilde{T} - 1\right) \tag{1.1.46}$$

Se va a resolver 1.1.46 en vez de 1.1.40 pues es un poco más general. Primero que todo observe que hay una solución de *equilibrio* que se halla al resolver $\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = 0$,

$$\tilde{T}_{eq}(t) = 1 \tag{1.1.47}$$

Por 1.1.44 esto significa que una solución de 1.1.46 es simplemente que la temperatura del objeto ya coincidía con la temperatura ambiente por lo que no hay ninguna variación en la temperatura del objeto.

Para resolver el caso general de la ecuación 1.1.46 se divide por $\tilde{T} - 1$

$$\frac{d\widetilde{T}}{\widetilde{T} - 1} = -d\tilde{t} \tag{1.1.48}$$

Luego integrando a ambos lados

$$\ln\left|\tilde{T} - 1\right| = -\tilde{t} + c \tag{1.1.49}$$

o bien

$$\left|\tilde{T} - 1\right| = e^c e^{-\tilde{t}} \tag{1.1.50}$$

en el caso de que $\tilde{T} > 1$ se puede escribir la solución

$$\tilde{T} = 1 + e^c e^{-\tilde{t}} \tag{1.1.51}$$

en el caso de que $\tilde{T} < 1$ se puede escribir la solución

$$\tilde{T} = 1 - e^c e^{-\tilde{t}} \tag{1.1.52}$$

Observe que ambos casos se puede reescribir como

$$\tilde{T}(\tilde{t}) = 1 + Ce^{-\tilde{t}} \tag{1.1.53}$$

donde $C = \pm e^c$. Ahora que se ha resuelto la ecuación para las variables adimensionales la solución en función de las variables originales es

$$T(t) = T_e \left(1 + Ce^{-kt}\right) \tag{1.1.54}$$

de aquí se ve que cuando $t \longrightarrow \infty$ la temperatura tiende a la temperatura ambiente, es decir, para tiempos grandes, la temperatura ambiente y la del objeto son indistinguibles. Por lo tanto se puede escribir

$$T(t) = T_e + T_t(t) \tag{1.1.55}$$

donde $T_t(t) = Ce^{-kt}$ corresponde al término transitorio (en inglés *transient term*) , es decir, el término que contribuye sobre todo al inicio del problema pero que luego va desapareciendo y un término estacionario (en inglés *steady state solution*) que es la que domina en tiempo grandes.

Como se mencionó antes, el modelo de crecimiento de poblaciones $\frac{dN}{dt} = kN$ no es muy realista pues permitiría en principio que una población pueda crecer indefinidamente. Un modelo que evite esa situación y a la vez sea fácil de resolver viene dado por la versión continua de la *ecuación logística*

$$\frac{dN}{dt} = kN(N^* - N) \qquad k, N^* > 0 \tag{1.1.56}$$

Observe que si $0 < N < N^*$ entonces $\frac{dN}{dt} > 0$ lo cual significa que la población crece para valores pequeños mientras que si $N > N^*$ entonces $\frac{dN}{dt} < 0$ lo cual significa que la población comienza a disminuir. Por lo tanto, N^* funciona como un valor poblacional crítico, en el sentido de que el comportamiento de la población depende de como se compare la población actual con respecto a tal valor. Al igual que para la ecuación de Newton, conviene definir una escala relativa

$$\tilde{N} = \frac{N}{N^*} \qquad \tilde{t} = kt \tag{1.1.57}$$

por lo que realizando un cálculo similar al de Newton se llega a la ecuación logística

$$\frac{d\tilde{N}}{d\tilde{t}} = N^* \tilde{N} \left(1 - \tilde{N}\right) \tag{1.1.58}$$

Antes de resolver la ecuación conviene realizar un poco de análisis cualitativo sobre la solución. Una opción es trazar el campo de direcciones en el plano $\tilde{t}\tilde{N}$, sin embargo, otra técnica bastante útil es la de trazar el *diagrama de fase* , que consiste en graficar $\frac{d\tilde{N}}{d\tilde{t}}$ como función de $\tilde{N}$, es decir,

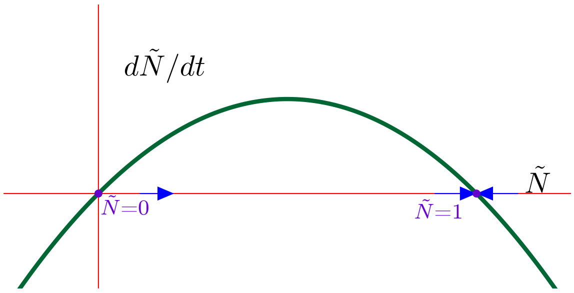

Figura 1.1.5: Diagrama de fase ecuación logística

Nuevamente, los puntos de equilibrio, corresponden al caso en que $\frac{d\tilde{N}}{d\tilde{t}} = 0$ que son dos

$$\tilde{N}(\tilde{t}) = 0 \qquad \tilde{N}(\tilde{t}) = 1 \tag{1.1.59}$$

La primera solución corresponde al caso en que no había población inicial por lo que no puede haber crecimiento ni decrecimiento, la segunda solución corresponde a una población inicial de N^* lo cual significa que para tal valor poblacional hay un balance perfecto entre muertes y nacimientos, por lo que la población se mantiene estática.

Ahora bien, la segunda pregunta es si el equilibrio es estable o inestable. Equilibrio inestable significaría que poblaciones cercanas a algún valor de equilibrio tienden a alejarse de tal valor. Por ejemplo, para el punto de equilibrio $\tilde{N} = 0$, valores cercanos de la población comienzan a crecer en número (como se puede observar del diagrama de fase) por lo que en efecto la población no se acerca al valor de equilibrio, es decir, el punto $\tilde{N} = 0$ es un equilibrio inestable (la flecha simboliza el hecho de que los valores de la población se alejan del equilibrio).

Por otro lado, las poblaciones que están un poco a la derecha o a la izquierda del valor $\tilde{N} = 1$ tienden a acercarse al valor $\tilde{N} = 1$ lo cual significa que $\tilde{N} = 1$ es un equilibrio estable.

Con esta discusión preliminar ya se tiene una idea sobre qué cosas esperar en la solución por lo que se procederá a resolverla. Primero se reescribe 1.1.58 como

$$\frac{d\tilde{N}}{\tilde{N}\left(1-\tilde{N}\right)} = N^* d\tilde{t} \tag{1.1.60}$$

El denominador se puede separar con la técnica de fracciones parciales , es decir, se reescribe

$$\frac{1}{\tilde{N}\left(1-\tilde{N}\right)} = \frac{A}{\tilde{N}} + \frac{B}{1-\tilde{N}} \tag{1.1.61}$$

donde A, B son constantes por determinar. En este caso es fácil ver que $A = B = 1$ funciona por lo que la ecuación diferencial se reescribe como

$$\frac{d\tilde{N}}{\tilde{N}} + \frac{d\tilde{N}}{1-\tilde{N}} = N^* d\tilde{t} \tag{1.1.62}$$

e integrando la ecuación [3] se obtiene

$$\ln \tilde{N} - \ln\left(1 - \tilde{N}\right) = N^*\tilde{t} + c \tag{1.1.63}$$

o bien

$$\frac{\tilde{N}}{1 - \tilde{N}} = Ce^{N^*\tilde{t}} \tag{1.1.64}$$

finalmente la ecuación se puede escribir como

$$\tilde{N}(\tilde{t}) = \frac{C}{C + e^{-N^*\tilde{t}}} \tag{1.1.65}$$

Luego, la solución en función de las variables originales es

$$N(t) = \frac{CN^*}{C + e^{-N^*kt}} \tag{1.1.66}$$

Si se impone la condición inicial $N(0) = N_0$, es decir, la población inicial es N_0, entonces se tiene que

$$N_0 = \frac{CN^*}{C + 1} \tag{1.1.67}$$

por lo que

$$C = \frac{N_0}{N^* - N_0} \tag{1.1.68}$$

y sustituyendo el valor de C en 1.1.66 se obtiene

$$N(t) = \frac{N_0 N^*}{N_0 + (N^* - N_0)\, e^{-N^*kt}} \tag{1.1.69}$$

por lo que cuando $t \longrightarrow \infty$ $N(t) \longrightarrow N^*$, es decir, todas las poblaciones se aproximan al valor de equilibrio tal como se había inferido del diagrama de fase.

En resumen,

Una ecuación diferencial ordinaria de variables separables es una ecuación diferencial de la forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1.1.70}$$

La solución paramétrica del problema anterior es

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c \tag{1.1.71}$$

donde c es una constante o parámetro.

[3] Aquí podría considerarse nuevamente el caso $\tilde{N} - 1 > 0$ pero al igual para la ecuación de enfriamento una redefinición adecuada de la constante se encarga de que formalmente no haya que preocuparse por esta posibilidad

1.2. Concepto General de una Ecuación Diferencial

Ahora que se tiene más familiaridad con las ecuaciones diferenciales se pueden enunciar la teoría necesaria para poder resolver los problemas que siguen con más confianza.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función con sus derivadas.

Por ejemplo, algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt}+\sin t=x^2\\
\frac{d^2y}{dx^2}+y=0\\
\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}\\
\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)^2+x^2=-1\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0
\end{gathered} \tag{1.2.1}$$

Una ecuación diferencial se llama Ecuación Diferencial Ordinaria (o bien ODE por sus siglas en inglés) si solo aparecen derivadas con respecto a una variable, por ejemplo, las primeras cuatro ecuaciones en 1.2.1 son ODEs, por otro lado, la última ecuación en 1.2.1 es una Ecuación Diferencial Parcial (PDE por sus siglas en inglés) pues aparecen derivadas con respecto a más de una variable.

Si se denota

$$y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dx^n} \tag{1.2.2}$$

las ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden escribir como

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.2.3}$$

por ejemplo, las F correspondientes de 1.2.1 son

$$\begin{array}{rl}
\frac{dx}{dt}+\sin t=x^2 & F(t,x,\dot{x})=\dot{x}+\sin t-x^2\\
\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 & F(x,y,y',y'')=y''+y\\
\frac{dy}{dx}=xy^{1/2} & F(x,y,y')=y'-xy^{1/2}\\
\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-1 & F(t,x,x',x'',x^{(3)})=\left(x^{(3)}\right)^2+(x')^2+1
\end{array} \tag{1.2.4}$$

El orden de una ODE es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Por ejemplo, los órdenes de las ecuaciones en 1.2.4 son $1, 2, 1, 3$ respectivamente.
Una solución de la ODE 1.2.3 consiste en encontrar un intervalo $I = (a, b)$ y una función $y(x)$ que satisfaga 1.2.3, es decir, que cumpla

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.2.5}$$

La ecuación diferencial está en forma normal si está escrita como

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.2.6}$$

Las formas normales de las primeras tres ecuaciones en 1.2.6 son

$$\begin{array}{cc} \frac{dx}{dt} = -\sin t + x^2 & f(t, x) = -\sin t + x^2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} = -y & f(x, y, y') = -y \\ \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} & f(x, y) = xy^{1/2} \end{array} \tag{1.2.7}$$

Por ejemplo, $y(x) = \cos x$ es una solución de la segunda ecuación en 1.2.4 sobre el intervalo $I = \mathbb{R}$. No es cierto que todas las ecuaciones diferenciales deban tener solución, por ejemplo, la útlima ecuación en 1.2.4 no puede tener solución ya que el lado izquierdo de la ecuación siempre será positivo o cero mientras que el lado derecho siempre es negativo.

En las ecuaciones diferenciales que se han resuelto, generalmente no se obtenía una única solución, sino una familia de funciones que dependían de una constante, la forma de eliminar la constante era al imponer una condición inicial, tal problema se llama un problema de valor inicial PVI

Un Problema de Valor Inicial para la ecuación de primer orden $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ es resolver la ODE anterior sujeta a la condición inicial $x(t_0) = x_0$, es decir, resolver

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Ahora bien, a pesar de que en los PVI que se han hecho hasta el momento se ha encontrado una única solución, no siempre es posible garantizar unicidad en la solución, por ejemplo, considere el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Es fácil verficar que $y(x) = 0$ y $y(x) = \frac{1}{16}x^4$ son dos soluciones del PVI anterior, es decir, no hay unicidad en el PVI anterior.

Ahora bien, es importante encontrar condiciones matemáticas que garanticen la existencia y la unicidad de los PVI. Esto porque la unicidad de un PVI está intímamente con el determinismo y causalidad en la naturaleza, es decir, la idea de que el estado actual de un sistema (o el universo) determina el estado posterior del universo y la tesis de que la misma causa (o condiciones iniciales en este caso) producen los mismos efectos (o evolución temporal del sistema en este caso). Básicamente la razón por la cual el PVI 1.2.9 tiene más de una solución es que el término $xy^{1/2}$ no es derivable con respecto a y en el punto $(0,0)$, dicho de otra forma, si $f(x,y) = xy^{1/2}$ entonces $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ no existe en $y = 0$.

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

En el caso de que $f(t,x)$ sea una función continua y $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua entonces existe un intervalo centrado en t_0, es decir, un intervalo de la forma $I = (t_0 - h, t_0 + h)$ de forma que el PVI anterior posee una única solución $x(t)$ definida sobre I.

Más adelante será importante estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo, resolver el sistema

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3xy + \frac{dx}{dt} = t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 3 \tag{1.2.11}$$

Observe que aquí se buscan hallar dos funciones $x(t), y(t)$. En general, una de las ventajas de las ODEs es que introduciendo nuevas variables siempre es posible reducirlas a sistemas de primer orden, es decir, sistemas de ecuaciones donde las variables aparecen derivadas a lo sumo una vez. Por ejemplo, para este problema particular se utilizan las variables

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x \\ x_2 &\equiv \tfrac{dx}{dt} \\ x_3 &\equiv y \\ x_4 &\equiv \tfrac{dy}{dt} \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

y ahora el sistema de ecuaciones 1.2.11 se ha convertido en el sistema de cuatro ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} - 3x_1x_3 + x_2 = t \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} + x_3 = 3 \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Aquí conviene introducir la notación vectorial

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} \tag{1.2.14}$$

por lo que 1.2.13 se reescribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.2.15}$$

donde

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1x_3 - x_2 + t \\ x_4 \\ 3 - x_3 \end{pmatrix} \tag{1.2.16}$$

Ahora bien, al final se tiene un sistema de primer orden con cuatro incógnitas por lo que se esperaría intuitivamente que hay que realizar cuatro integraciones y por lo tanto aparecerían cuatro constantes y por ende se requerirían cuatro condiciones iniciales para especificar el problema. El razonamiento anterior es básicamente correcto como indica el siguiente teorema de unicidad

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{1.2.17}$$

donde

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \tag{1.2.18}$$

En el caso de que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sea una función continua y las derivadas parciales $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ existan y sean continuas entonces existe un intervalo centrado en t_0, es decir, un intervalo de la forma $I = (t_0 - h, t_0 + h)$ de forma que el PVI anterior posee una única solución $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ definida sobre I.
En un sistema de la forma 1.2.17, $\mathbf{x}_c$ es un punto crítico o un punto de equilibrio si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x_c}) = \mathbf{0}$ para todo t, en cuyo caso una solución de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es la solución constante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c$.

A veces la solución de una ODE puede darse de forma implícita, por ejemplo, considere la ODE

$$y' = \frac{xy}{y^2 + 1} \tag{1.2.19}$$

Esta ecuación es de variables separables y se puede escribir como

$$\left(y + \frac{1}{y}\right) dy = x dx \tag{1.2.20}$$

e integrando a ambos lados se obtiene

$$\frac{y^2}{2} + \ln y = \frac{x^2}{2} + C \tag{1.2.21}$$

la ecuación anterior define y como función de x en forma implícita y derivando implícitamente a ambos lados puede verificarse que es una solución de la ODE original.

Una una ecuación de la forma $g(x, y) = 0$ se llama una solución implícita de la ODE

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.2.22}$$

sobre un intervalo $I = (a, b)$ si

1. Es posible escribir y como función de x sobre el intervalo I, para encontrar el intervalo I basta por el Teorema de la función implícita verificar que $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ en un punto (x_0, y_0) y luego hay un intervalo I alrededor de x_0
2. Sobre el intervalo I $y = y(x)$ es solución explícita de la ODE $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

1.3. Solución de ODEs Particulares

Dado que las ODEs son muy difícildes de resolver, es importante tener en cuenta los métodos que se conocen para resolver cierto tipo de ecuaciones particulares. Por ejemplo, mientras una ecuación como $y' = y - x^2$ puede resolverse de forma explícita, una ecuación como $y' = x - y^2$ no puede resolverse en forma explícita (es decir, con funciones elementales) aún cuando su solución se pueda aproximar tanto como se quiera.

1.3.1. Ecuaciones Homogéneas

Una función $f(x, y)$ de dos variables es homogénea de grado n si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad \lambda > 0 \tag{1.3.1}$$

es decir, si al reescalar o dilatar las variables x, y por un factor de λ la función de las variables dilatadas es igual a la función original multiplicada por una potencia del reescalamiento. Algunos ejemplos de funciones homogéneas son los siguientes:

1. La Ley de Gas Ideal establece que la presión como función de temperatura y el volumen es
$$P(V, T) = Nk\frac{T}{V} \tag{1.3.2}$$
donde N, k se toman como constantes. En este caso la presión es homogénea de grado cero pues
$$P(\lambda V, \lambda T) = Nk\frac{\lambda T}{\lambda V} = Nk\frac{T}{V} = \lambda^0 P(V, T) \tag{1.3.3}$$
2. La distancia del punto (x, y) al origen es
$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3.4}$$

observe que esta función es homogénea de grado 1 puesto que

$$d(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda^1 d(x, y) \tag{1.3.5}$$

3. El área de un rectángulo con vértices $(0,0), (0,x), (0,y), (x,y)$ es

$$A(x, y) = xy \tag{1.3.6}$$

en este caso el área es homogénea de grado 2 puesto que

$$A(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy = \lambda^2 A(x, y) \tag{1.3.7}$$

Suponga que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 0 y que $x > 0$ a manera de ejemplo. Entonces con $\lambda = x$

$$f(x, y) = f\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.3.8}$$

donde

$$g\left(\frac{y}{x}\right) \equiv f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{1.3.9}$$

Lo cual dice que en realidad una función homogénea de grado 0 es una función de la combinación $\frac{y}{x}$ en vez de x, y por separado. Por lo tanto, si se tiene una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{1.3.10}$$

donde $f(x, y)$ es homogénea de grado cero realizando el cambio de variable

$$y = ux \tag{1.3.11}$$

se tiene que

$$y' = u'x + u \tag{1.3.12}$$

y por la discusión anterior la ecuación se puede escribir como

$$u'x + u = g(u) \tag{1.3.13}$$

lo cual es una ODE de variables separables.

Una ODE es homogénea si se puede escribir de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{1.3.14}$$

donde $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero. Para resolverla se utiliza el cambio de variable

$$y = ux \tag{1.3.15}$$

y se convierte la ecuación en una ecuación de variables separables en u, x.
A veces también puede ser útil el cambio de variable $x = uy$.

Ejemplo 5. Resuelva la ecuación

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \tag{1.3.16}$$

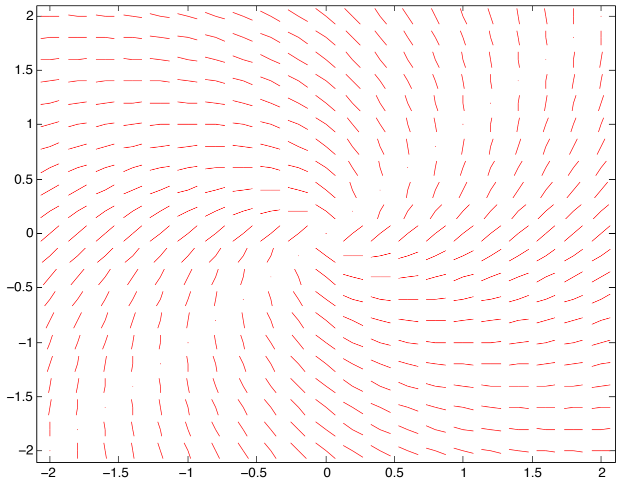

Figura 1.3.1: Campo de Direcciones de la ODE 1.3.16

Definiendo

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \tag{1.3.17}$$

es claro que f es homogénea de grado cero. Por otro lado, dado que 1.3.16 se indefine sobre la recta $x = y$ las soluciones a la ecuación se van a buscar fuera de tal recta. Se utiliza el cambio de variable

$$y = ux \tag{1.3.18}$$

Luego

$$y' = u'x + u \tag{1.3.19}$$

Por otro lado

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{x+ux}{x-ux} = \frac{1+u}{1-u} \tag{1.3.20}$$

Por lo tanto 1.3.16 se transforma en

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \tag{1.3.21}$$

o bien

$$u'x = \frac{1+u^2}{1-u} \tag{1.3.22}$$

De esta forma es separable

$$\frac{1-u}{u^2+1}du = \frac{1}{x}dx \tag{1.3.23}$$

o bien
$$\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{u}{u^2+1}\right)du=\frac{1}{x}dx \tag{1.3.24}$$
integrando a ambos lados
$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)=\ln|x|+C \tag{1.3.25}$$
Como la solución debe darse en términos de x, y se elimina u con el cambio de variable original
$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=\ln|x|+C \tag{1.3.26}$$
Observe que la solución anterior está bien definida siempre y cuando no interseque al eje y.

Ejemplo 6. Resuelva el PVI $\begin{cases} x^2y'=y^2+xy \\ y(1)=1 \end{cases}$

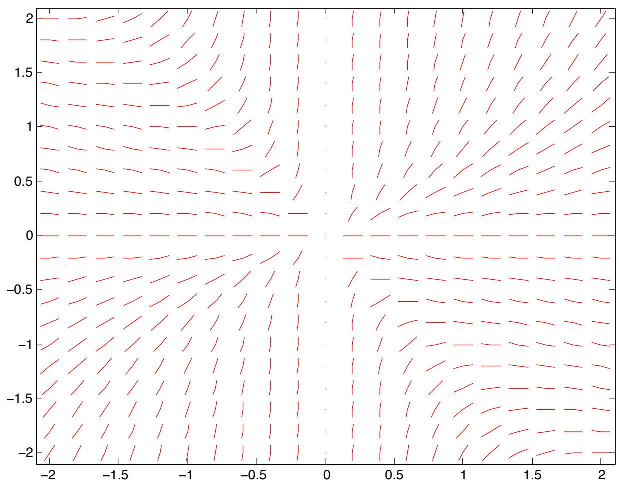

Figura 1.3.2: Campo de Direcciones del Problema

Como la condición inicial es en $x=1$ por el teorema de existencia y unicidad se puede encontrar una solución alrededor de $x=1$ lo cual permite dividir por x^2 en la ecuación diferencial y escribirla como
$$y'=\frac{y^2+xy}{x^2} \tag{1.3.27}$$
Luego, si $f(x,y)=\frac{y^2+xy}{x^2}$ es claro que es una función homogénea de grado cero por lo que se puede utilizar el cambio de variable
$$y=ux \tag{1.3.28}$$

Lo cual da

$$y' = u'x + u \tag{1.3.29}$$

Y

$$\frac{y^2 + xy}{x^2} = \frac{u^2x^2 + ux^2}{x^2} = u^2 + u \tag{1.3.30}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial se convierte en

$$u'x + u = u^2 + u \tag{1.3.31}$$

o bien

$$\frac{1}{u^2}du = \frac{1}{x}dx \tag{1.3.32}$$

Integrando a ambos lados se obtiene

$$-\frac{1}{u} = \ln x + C \tag{1.3.33}$$

o bien

$$u = -\frac{1}{\ln x + C} \tag{1.3.34}$$

La solución en términos de x, y sería

$$y = -\frac{x}{\ln x + C} \tag{1.3.35}$$

y por la condición inicial $y(1) = 1$ se llega a

$$1 = -\frac{1}{C} \tag{1.3.36}$$

o bien

$$C = -1 \tag{1.3.37}$$

Por lo tanto,

$$y(x) = -\frac{x}{\ln x - 1} \tag{1.3.38}$$

1.3.2. Ecuación Diferencial con Coeficientes Lineales

Suponga que se tiene una ecuación diferencial de la forma

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0 \tag{1.3.39}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son constantes. Primero que todo, si $c_1 = c_2 = 0$ se podría reescribir la ecuación anterior como una ecuación homogénea de grado cero la cual se estudió antes. En cualquier caso, las ecuaciones

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{1.3.40}$$

representan líneas rectas en el plano xy. Suponiendo que las rectas no son paralelas se intersecan entonces en el punto (h,k) como se indica en la siguiente figura.

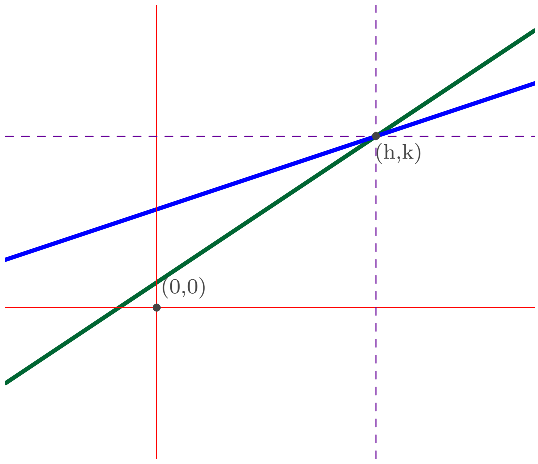

Figura 1.3.3: Intersección de rectas

Si se realiza el cambio de variables

$$\bar{x} = x - h \qquad \bar{y} = y - k \tag{1.3.41}$$

el punto (h,k) pasa a ser el origen, es decir, el cambio de variable 1.3.41 realiza una traslación de los ejes de forma que el nuevo origen es el punto (h,k). Este cambio de variables cambia la ecuación en

$$\begin{gathered}(a_1 x + b_1 y + c_1)\, dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)\, dy = \\ (a_1(\bar{x} + h) + b_1\left(\bar{y} + k\right) + c_1)\, d\bar{x} + (a_2\left(\bar{x} + k\right) + b_2\left(\bar{y} + k\right) + c_2)\, d\bar{y}\end{gathered} \tag{1.3.42}$$

Como (h,k) era el punto de intersección de la rectas

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \qquad a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \tag{1.3.43}$$

la ecuación 1.3.42 se convierte en

$$(a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y})\, d\bar{x} + (a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y})\, d\bar{y} = 0 \tag{1.3.44}$$

y se puede observar que la ecuación con respecto a estas variables es homogénea de grado cero.

Para resolver la ecuación diferencial

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0 \tag{1.3.45}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son constantes y $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$ representan líneas rectas que se intersecan en el punto (h, k) se realiza el cambio de variable

$$\bar{x} = x - h \qquad \bar{y} = y - k \tag{1.3.46}$$

obteniendo una ecuación diferencial homogénea en $\bar{x}, \bar{y}$.

$$(a_1\bar{x} + b_1\bar{y})\,d\bar{x} + (a_2\bar{x} + b_2\bar{y})\,d\bar{y} = 0 \tag{1.3.47}$$

Ejemplo 7. Resuelva la ecuación $(2x - y + 1)\,dx + (x + y)dy = 0$

Primero se considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \tag{1.3.48}$$

el cual tiene solución $(h, k) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Luego se realiza el cambio de variable

$$\bar{x} = x + \frac{1}{3} \qquad \bar{y} = y - \frac{1}{3} \tag{1.3.49}$$

De esta forma

$$(2x - y + 1)\,dx + (x + y)dy = (2\bar{x} - \bar{y})\,d\bar{x} + (\bar{x} + \bar{y})\,d\bar{y} = 0 \tag{1.3.50}$$

que se puede reescribir como

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{y} - 2\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \tag{1.3.51}$$

Ahora se introduce el cambio de variable

$$\bar{y} = u\bar{x} \tag{1.3.52}$$

por lo que

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{du}{d\bar{x}}\bar{x} + u \tag{1.3.53}$$

y

$$\frac{\bar{y} - 2\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} = \frac{u\bar{x} - 2\bar{x}}{\bar{x} + u\bar{x}} = \frac{u - 2}{u + 1} \tag{1.3.54}$$

La ecuación 1.3.51 se convierte en

$$\frac{du}{d\bar{x}}\bar{x} + u = \frac{u - 2}{u + 1} \tag{1.3.55}$$

o bien

$$\frac{du}{d\bar{x}}\bar{x} = \frac{-2-u^2}{u+1} \tag{1.3.56}$$

Dado que es separable se reescribe como

$$\left(\frac{u}{u^2+2} + \frac{1}{u^2+2}\right) du = -\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} \tag{1.3.57}$$

e integrando a ambos lados se obtiene

$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) = -\ln|\bar{x}| + C \tag{1.3.58}$$

Como $u = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)^2 + 2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{2}\bar{x}}\right) = -\ln|\bar{x}| + C \tag{1.3.59}$$

Como $\bar{x} = x + \frac{1}{3}$ y $\bar{y} = y - \frac{1}{3}$ se obtiene finalmente una forma implícita de la solución

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{3y-1}{3x+1}\right)^2 + 2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3y-1}{\sqrt{2}\,(3x+1)}\right) + \ln|3x+1| = C \quad x \neq -\frac{1}{3} \tag{1.3.60}$$

Para resolver la ecuación diferencial

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0 \tag{1.3.61}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son constantes y $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$ representan líneas rectas que son paralelas se realiza el cambio de variable

$$u = a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{o} \quad u = a_2x + b_2y + c_2 \tag{1.3.62}$$

obteniendo una ecuación diferencial de variables separables.

Ejemplo 8. Encuentre una familia de soluciones de un parámetro de la ODE $(2x+3y-1)\,dx + (4x+6y+2)\,dy = 0$

Se realiza la substitución

$$u = 2x + 3y - 1 \tag{1.3.63}$$

por lo que

$$du = 2dx + 3dy \tag{1.3.64}$$

o bien
$$dx = \frac{du - 3dy}{2} \tag{1.3.65}$$
Reemplazando x, dx en la ODE original se tiene
$$u\left(\frac{du - 3dy}{2}\right) + 2\,(u + 2)\,dy = 0 \tag{1.3.66}$$
Es decir,
$$\frac{u}{2}du = \left(\frac{3}{2}u - 2u - 4\right)dy \tag{1.3.67}$$
Por lo tanto
$$\frac{u}{u+8}du = -dy \tag{1.3.68}$$
Integrando a ambos lados se obtiene que
$$u - 8\ln|u + 8| + y = C \tag{1.3.69}$$
Sustituyendo el valor de u la solución es
$$2x + 3y - 1 - 8\ln|2x + 3y + 7| + y = C \tag{1.3.70}$$

1.3.3. Ecuaciones Diferenciales Exactas

Si $f(x)$ es una función de una variable entonces su diferencial está definido como
$$df \equiv f'(x)dx \tag{1.3.71}$$
La propiedad importante del diferencial de una función es que si este es cero, es decir, $df = 0$ en todo punto, entonces la función debe ser constante. De manera similar, si $f(x, y)$ es una función de dos variables entonces su diferencial se define como
$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.3.72}$$
Y de manera análoga al caso de una variable, si $df = 0$ en todo punto (x, y) entonces $f(x, y)$ debe ser constante.

Ahora bien, considere una partícula que se mueve bajo el efecto de una fuerza $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, el trabajo infinitesimal que produce la fuerza es en este caso
$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_1dx + F_2dy \tag{1.3.73}$$
Ahora bien, comparando 1.3.72 y 1.3.73 hay un enorme parecido entres ambas expresiones. Sin embargo, existe una diferencia importante: en 1.3.72 se comenzó con una función

escalar $f(x, y)$ para obtener su diferencial, en 1.3.73 no se comenzó con un función de trabajo $W(x, y)$, sino que simplemente se realizó el producto punto entre dos vectores, es decir, no existe necesariamente una función W de manera que el lado derecho de 1.3.73 sea el diferencial de W. Esta diferencia trae como consecuencia el hecho de que el trabajo realizado en llevar la partícula de un punto al otro depende de la trayectoria tomada.

Un diferencial es una expresión de la forma

$$F_1 dx + F_2 dy \tag{1.3.74}$$

Se dice que el diferencial anterior es exacto si se puede escribir como el diferencial de una función escalar f, es decir,

$$F_1 dx + F_2 dy = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y} dy \tag{1.3.75}$$

De lo contrario, el diferencial se llama un diferencial inexacto.

Es muy útil saber que condiciones garantizan que un diferencial sea exacto. Para empezar, si se supiera de antemano que el diferencial es exacto entonces se tendría 1.3.75, es decir,

$$F_1 dx + F_2 dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y} dy \tag{1.3.76}$$

Luego, se puede igualar los coeficientes de dx, dy para obtener

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.3.77}$$

Suponiendo que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces la igualdad de las derivadas mixtas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{1.3.78}$$

se traduce en la igualdad de las siguientes derivadas

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{1.3.79}$$

Sorprendentemente, la condición 1.3.79 es suficiente para garantizar que el diferencial 1.3.74 sea exacto, siempre y cuando el dominio en el que está definido la función sea suficientemente decente (la condición es que el dominio sea simplemente conexo, pero para lo que sigue basta pensar que está definida en todo el plano xy).

El diferencial

$$F_1 dx + F_2 dy \tag{1.3.80}$$

es exacto si

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{1.3.81}$$

en tal caso, para hallar la función f se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \tag{1.3.82}$$

y se obtiene que f cumple

$$df = F_1 dx + F_2 dy \tag{1.3.83}$$

En tal caso, la solución de la ODE

$$F_1 dx + F_2 dy = 0 \tag{1.3.84}$$

es simplemente

$$f(x, y) = C \tag{1.3.85}$$

donde C es una constante.

Ejemplo 9. Halle una familia de soluciones de 1-parámetro de la ecuación diferencial $\cos y dx - \left(x \sin y - y^2\right) dy = 0$**.**

Tomando

$$F_1 = \cos y \quad F_2 = -x \sin y + y^2 \tag{1.3.86}$$

se verifica que se cumple 1.3.81

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1.3.87}$$

Por lo tanto el diferencial es exacto. Para hallar la función f se resuelve 1.3.82

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = \cos y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = -x \sin y + y^2 \tag{1.3.88}$$

Por ejemplo, como $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y$ se integra esta ecuación con respecto a x para obtener

$$f = x \cos y + g(y) \tag{1.3.89}$$

donde la constante en este caso puede ser una función de y pues con respecto a x es una constante. De esta forma

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + g'(y) \tag{1.3.90}$$

y comparando con 1.3.88 se obtiene que

$$g'(y) = y^2 \tag{1.3.91}$$

por lo que

$$g(y) = \frac{y^3}{3} + c \tag{1.3.92}$$

y la función f es

$$f(x, y) = x\cos y + \frac{y^3}{3} + c \tag{1.3.93}$$

Por 1.3.85 la solución es

$$x\cos y + \frac{y^3}{3} = C \tag{1.3.94}$$

Suponga que se tiene la ODE

$$F_1 dx + F_2 dy = 0 \tag{1.3.95}$$

con $F_1 dx + F_2 dy$ un diferencial inexacto. En este caso no se pueden aplicar la técnica anterior para resolver la ecuación diferencial, sin embargo, en vez de resolver 1.3.95 puede multiplicarse por una función $\mu(x, y)$ que sea diferente de cero e intentar resolver la ODE

$$\mu F_1 dx + \mu F_2 dy = 0 \tag{1.3.96}$$

Si se escoge la función μ de forma inteligente el diferencial $\mu F_1 dx + \mu F_2 dy$ se convierte en un diferencial exacto (aunque no necesariamente esto va a ocurrir siempre, esto depende de la región en que esté definido el diferencial). Tal escogencia de la función μ que convierte el diferencial inexacto en uno exacto se llama un factor integrante.[4] Para lograr que 1.3.96 sea exacto debe tenerse la condición de exactitud de un diferencial, es decir,

$$\frac{\partial(\mu F_1)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu F_2)}{\partial x} \tag{1.3.97}$$

Para simplificar el problema, a veces se busca un factor que solo dependa de una de los dos variables en vez de ambas. Por ejemplo, si el factor μ solo es función de x, es decir $\mu = \mu(x)$ entonces 1.3.97 se convierte en

$$\mu\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx}F_2 + \mu\frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1.3.98}$$

que se puede escribir como

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)}{F_2} \tag{1.3.99}$$

[4]un ejemplo muy importante de los factores integrantes ocurre en la termodinámica. Ahí el calor es un diferencial inexacto δQ por lo que la segunda ley, que afirma la existencia de una función de estado llamada la entropía puede verse en términos matemáticos como la existencia de un factor integrante que hace que el calor se vuelva un diferencial exacto, que es la entropía dS. Tal factor integrante es el inverso de la temperatura absoluta, es decir, $dS = \frac{1}{T}\delta Q$

En el caso de que el lado derecho de 1.3.99 solo dependa de x, es decir, sea una función $F(x)$, se puede escribir 1.3.99 como

$$\frac{d\mu}{\mu} = F(x)dx \tag{1.3.100}$$

e integrando esta ecuación se encuentra que el factor integrante tiene la forma

$$\mu(x) = e^{\int F(x)dx} \tag{1.3.101}$$

Si el factor μ solo es función de y, es decir $\mu = \mu(y)$ entonces 1.3.97 se convierte en

$$\frac{d\mu}{dy}F_1 + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} = \mu\frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1.3.102}$$

que se puede escribir como

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}{F_1} \tag{1.3.103}$$

En el caso de que el lado derecho de 1.3.103 solo dependa de y, es decir, sea una función $G(y)$, se puede escribir 1.3.103 como

$$\frac{d\mu}{\mu} = G(y)dy \tag{1.3.104}$$

e integrando esta ecuación se encuentra que el factor integrante tiene la forma

$$\mu(y) = e^{\int G(y)dy} \tag{1.3.105}$$

Ejemplo 10. Resuelva la ODE $(e^x - \sin y)\,dx + \cos y dy = 0$ encontrando un factor de integración $\mu(x)$.

Primero que todo

$$F_1 = e^x - \sin y \quad F_2 = \cos y \tag{1.3.106}$$

Luego

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\cos y \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \tag{1.3.107}$$

por lo que la ecuación no es exacta. Como se busca un factor integrante $\mu = \mu(x)$ se llega a 1.3.99

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)}{F_2} = -1 \tag{1.3.108}$$

por lo tanto

$$\mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x} \tag{1.3.109}$$

Luego se multiplica la ecuación diferencial por el factor integrante y se obtiene

$$\left(1 - e^{-x}\sin y\right)dx + e^{-x}\cos y dy = 0 \tag{1.3.110}$$

Esta ecuación es exacta como se puede verificar fácilmente. Ahora hay que resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - e^{-x}\sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos y \tag{1.3.111}$$

Integrando la primera condición con respecto a x se tiene

$$f = x + e^{-x}\sin y + g(y) \tag{1.3.112}$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos y + g'(y) \tag{1.3.113}$$

Por lo que

$$g'(y) = 0 \tag{1.3.114}$$

o bien

$$g(y) = c \tag{1.3.115}$$

Finalmente

$$f(x,y) = x + e^{-x}\sin y + c \tag{1.3.116}$$

por lo que la solución de la ODE es

$$x + e^{-x}\sin y = C \tag{1.3.117}$$

Ejemplo 11. Resuelva la siguiente ODE $\left(y^3 + xy^2 + y\right)dx + \left(x^3 + x^2y + x\right)dy = 0$ **con un factor integrante de la forma** $\mu = \mu(xy)$.

Aquí conviene definir $u = xy$ para ver el factor integrante como función de u. De esta forma, en 1.3.97 se tiene

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}F_1 + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}F_2 + \mu\frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1.3.118}$$

o bien por regla de la cadena sobre μ

$$\left(\frac{d\mu}{du}x\right)F_1 + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} = \left(\frac{d\mu}{du}y\right)F_2 + \mu\frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1.3.119}$$

Como

$$F_1 = y^3 + xy^2 + y \quad F_2 = x^3 + x^2y + x \tag{1.3.120}$$

la condición que debe cumplir μ se transforma en

$$\left(\frac{d\mu}{du}x\right)\left(y^3 + xy^2 + y\right) + \mu\left(3y^2 + 2xy + 1\right) = \left(\frac{d\mu}{du}y\right)\left(x^3 + x^2y + x\right) + \mu\left(3x^2 + 2xy + 1\right) \tag{1.3.121}$$

simplificando un poco y usando $u = xy$

$$u\frac{d\mu}{du}\left(y^2+u+1\right)+\mu\left(3y^2+2u+1\right)=u\frac{d\mu}{du}\left(x^2+u+1\right)+\mu\left(3x^2+2u+1\right) \quad (1.3.122)$$

Por lo tanto

$$u\frac{d\mu}{du}\left(y^2-x^2\right)=3\mu\left(x^2-y^2\right) \quad (1.3.123)$$

es decir

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3}{u}du \quad (1.3.124)$$

Integrando a ambos lados e ignorando la constante de integración

$$\ln\mu=-3\ln u \quad (1.3.125)$$

Por lo que

$$\mu=u^{-3}=(xy)^{-3} \quad (1.3.126)$$

Multiplicando la ecuación original por el factor integrante se convierte en

$$\left(x^{-3}+x^{-2}y^{-1}+x^{-3}y^{-2}\right)dx+\left(y^{-3}+x^{-1}y^{-2}+x^{-2}y^{-3}\right)dy=0 \quad (1.3.127)$$

Luego hay que resolver el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^{-3}+x^{-2}y^{-1}+x^{-3}y^{-2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=y^{-3}+x^{-1}y^{-2}+x^{-2}y^{-3} \quad (1.3.128)$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x

$$f=-\frac{1}{2}x^{-2}-x^{-1}y^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2}+g(y) \quad (1.3.129)$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{-1}y^{-2}+x^{-2}y^{-3}+g'(y) \quad (1.3.130)$$

y por comparación se concluye que

$$g'(y)=y^{-3} \quad (1.3.131)$$

Por lo tanto

$$g(y)=-\frac{1}{2}y^{-2}+c \quad (1.3.132)$$

y f sería

$$f=-\frac{1}{2}x^{-2}-x^{-1}y^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2}-\frac{1}{2}y^{-2}+c \quad (1.3.133)$$

La solución de la ecuación original es

$$-\frac{1}{2}x^{-2}-x^{-1}y^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2}-\frac{1}{2}y^{-2}=C \quad (1.3.134)$$

2 ODES Lineales y Temas Relacionados

2.1. ODEs Lineales

2.1.1. Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Las Ecuaciones Diferenciales Lineales, sean ordinarias o parciales, constituyen quizás el tipo de ecuación diferencial más importante ya que pueden analizarse a través del Principio de Superposición. Para este tema, resulta conveniente utilizar t como variable independiente para pensar que se están estudiando sistemas que varían con respecto al tiempo.

Una ODE Lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \tag{2.1.1}$$

donde la notación del punto simboliza la derivación con respecto al tiempo. El nombre lineal se utiliza por que la función x y sus derivadas siempre aparecen elevadas a la potencia 1, es decir, no hay términos como $x^2, (\dot{x})^3$, etc. . La razón por la que se escribe 2.1.1 de esa forma es porque la parte de la ecuación que involucra a x queda del lado izquierdo mientras que la parte de la ecuación que no la involucra queda a la derecha. De hecho, una forma de pensar en 2.1.1 es que el lado izquierdo se refiere a características intrínsecas del sistema, es decir, que el sistema no modifica a lo largo de varios experimentos, mientras que el lado derecho consiste en el input o influencia externa que se aplica sobre el sistema que varía de experimento a experimento.

$$\underbrace{\dot{x} + p(t)x}_{\text{(sistema)}} = \underbrace{q(t)}_{\text{(input)}} \tag{2.1.2}$$

Algunas de las ecuaciones que se han estudiado antes eran a su vez ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Por ejemplo, la Ley de Newton de enfriamiento 1.1.42

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_e\right) \tag{2.1.3}$$

se puede reescribir como

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_e \tag{2.1.4}$$

El lado izquierdo en este caso se refiere al comportamiento de la temperatura del sistema que depende del propio sistema (por ejemplo, la conductividad térmica no variaría de experimento a experimento) mientras que el lado derecho sería la fuente a temperatura T_e con la que el sistema se pone a interactuar.

Una de las propiedades más importantes de las ecuaciones lineales es que la solución de estos siempre puede hallarse como la suma de dos soluciones, una solución homogénea y otra solución llamada particular. Primero que todo, una ODE lineal es homogénea si $q(t) = 0$ siempre, es decir, se puede escribir como [1]

$$\dot{x} + p(t)x = 0 \tag{2.1.5}$$

Suponga que se conocen dos soluciones x_1, x_2 de 2.1.5, es decir,

$$\dot{x}_1 + p(t)x_1 = 0 \qquad \dot{x}_2 + p(t)x_2 = 0 \tag{2.1.6}$$

Ahora se pueden sumar ambas ecuaciones para obtener que

$$\dot{x}_1 + p(t)x_1 + \dot{x}_2 + p(t)x_2 = 0 \tag{2.1.7}$$

lo cual puede escribirse como (aquí se regresa a la notación de Leibniz por comodidad)

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + p(t)(x_1 + x_2) = 0 \tag{2.1.8}$$

es decir, si se define

$$x_3(t) \equiv x_1(t) + x_2(t) \tag{2.1.9}$$

Entonces x_3 también resuelve la ODE homogénea 2.1.5. Esta observación es la esencia del Principio de Superposición.

Principio de Superposición: Si x_1, x_2 son dos soluciones de la ODE Lineal Homogénea

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \tag{2.1.10}$$

entonces cualquier combinación lineal de las soluciones también es solución, es decir, si c_1, c_2 son constantes y se define

$$x_3(t) \equiv c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{2.1.11}$$

entonces x_3 también es solución de la ODE homogénea original.

Primero que todo, observe que si una solución es cero en un punto, es decir, $x_1(t_0) = 0$, entonces debe ser cero siempre. Esto porque el PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

tiene como solución la función nula $x(t) = 0$ y por el Teorema de Existencia y Unicidad, dado que x_1 también resuelve el PVI, deben ser la misma función. Es decir, la solución

[1] El nombre de homogéneo aquí no guarda ninguna relación con las ODEs homogéneas de grado cero que se estudiaron antes

de 2.1.10 tiene tres opciones: o es la función nula o es siempre positiva o es siempre negativa.

De hecho, es muy fácil encontrar todas las soluciones de 2.1.10 pues es de variables separables, nada más hay que reescribirla como

$$\frac{dx}{x} = -p(t)dt \tag{2.1.13}$$

e integrando a ambos lados

$$\ln|x| = \int -p(t)dt + c \tag{2.1.14}$$

o bien

$$|x| = e^c e^{-\int p(t)dt} \tag{2.1.15}$$

Para quitar el valor absoluto de la ecuación anterior por la discusión inicial la solución (mientras no sea trivial) siempre es positiva o negativa, por lo que puede escribirse

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt} \tag{2.1.16}$$

donde C es una nueva constante que puede ser negativa o positiva, por lo tanto, se ha encontrado que

Las soluciones de la ODE

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \tag{2.1.17}$$

son

- ➯ La solución nula $x(t) = 0$
- ➯ La familia de soluciones de un parámetro

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt} \tag{2.1.18}$$

La solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.19}$$

es

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \tag{2.1.20}$$

Observe que se utiliza una variable muda τ en la integración de 2.1.20 porque ahora la integral es definida en vez de indefinida.

Ejemplo 12. Resuelva $\dot{x} - 2tx = 0$

Nada más hay observar que en este caso $p(t) = -2t$ por lo que por 2.1.18 la solución es

$$x(t) = Ce^{-\int(-2t)dt} = Ce^{t^2} \tag{2.1.21}$$

Ejemplo 13. Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} + 3\frac{y}{x} = 0$ con la condición inicial $y(1) = 1$

Aquí x juega el papel de t mientras que y juega el papel de x por lo que $p(x) = \frac{3}{x}$ y por 2.1.18 la solución es

$$y(x) = Ce^{-\int \frac{3}{x}dx} = Ce^{-3\ln x} = Cx^{-3} \tag{2.1.22}$$

y como se busca $y(1) = 1$ se obtiene $C = 1$ por lo que

$$y(x) = \frac{1}{x^3} \tag{2.1.23}$$

También se podía hallar la solución utilizando 2.1.20 directamente como puede verificarse.

Ahora se va a resolver el caso no homogéneo

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \tag{2.1.24}$$

Para esto, viendo la solución de 2.1.18 aparece el término $e^{-\int p(t)dt}$. Si se cambia el signo del integrando este término tiene la propiedad de que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int p(t)dt}\right) = p(t)e^{\int p(t)dt} \tag{2.1.25}$$

Ahora bien, por la regla de producto

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right) = e^{\int p(t)dt}\frac{dx}{dt} + p(t)e^{\int p(t)dt}x = e^{\int p(t)dt}\left(\dot{x} + p(t)x\right) \tag{2.1.26}$$

por lo tanto

$$\dot{x} + p(t)x = e^{-\int p(t)dt}\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right) \tag{2.1.27}$$

y de esta forma la ecuación lineal no homogénea se puede escribir como

$$e^{-\int p(t)dt}\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right) = q(t) \tag{2.1.28}$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right) = e^{\int p(t)dt}q(t) \tag{2.1.29}$$

Esto convierte la ecuación en una de variables separables ya que

$$d\left(xe^{\int p(t)dt}\right) = e^{\int p(t)dt}q(t)dt \tag{2.1.30}$$

puede integrarse como

$$xe^{\int p(t)dt} = \int e^{\int p(t)dt}q(t)dt + c \tag{2.1.31}$$

que da finalmente por solución

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right) \tag{2.1.32}$$

Dado que es improbable que alguien quiera aprenderse la fórmula anterior es más fácil dar el algoritmo para resolver la ODE lineal, sea homogénea o no.

Para resolver la ecuación

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \tag{2.1.33}$$

multiplique ambos lados de la ecuación por $e^{\int p(t)dt}$ y escriba el lado izquierdo como $\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right)$

Ejemplo 14. Resuelva $t\frac{dx}{dt} - 4x = t^6 e^t$

Primero se escribe en la forma estándar

$$\frac{dx}{dt} - \frac{4}{t}x = t^5 e^t \tag{2.1.34}$$

En este caso $p(t) = -\frac{4}{t}$ por lo que

$$e^{\int p(t)dt} = e^{-4\int \frac{dt}{t}} = e^{-4\ln t} = \frac{1}{t^4} \tag{2.1.35}$$

Ahora se multiplica por $\frac{1}{t^4}$ a ambos lados de la ecuación obteniendo

$$\frac{1}{t^4}\frac{dx}{dt} - \frac{4}{t^5}x = te^t \tag{2.1.36}$$

el lado izquierdo se escribe como

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{1}{t^4}\right) = te^t \tag{2.1.37}$$

o bien

$$d\left(x\frac{1}{t^4}\right) = te^t dt \tag{2.1.38}$$

El lado derecho se integra por partes

$$\int te^t dt = te^t - e^t \tag{2.1.39}$$

Luego

$$x\frac{1}{t^4} = te^t - e^t + c \tag{2.1.40}$$

y la solución general se escribe como

$$x(t) = t^5 e^t - t^4 e^t + ct^4 \tag{2.1.41}$$

observe que la solución final es válida incluso para $t = 0$ aún cuando durante el proceso de hallar la solución se tuvo que dividir por t.

Ejemplo 15. Resuelva la ODE $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2}$

Esta ecuación no es lineal en la variable y, sin embargo, sí lo es con respecto a x ya que

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \tag{2.1.42}$$

Luego se escribe en la forma estándar

$$\frac{dx}{dy} - x = y^2 \tag{2.1.43}$$

en este caso $p(y) = -1$ por lo que

$$e^{\int p(y)dy} = e^{-y} \tag{2.1.44}$$

y se multiplica a ambos lados por el factor anterior

$$e^{-y}\frac{dx}{dy} - e^{-y}x = e^{-y}y^2 \tag{2.1.45}$$

o bien

$$\frac{d}{dy}\left(xe^{-y}\right) = e^{-y}y^2 \tag{2.1.46}$$

Por partes

$$\int e^{-y}y^2 = -y^2e^{-y} + 2\int ye^{-y} = -y^2e^{-y} - 2\left(ye^{-y} + e^{-y}\right) \tag{2.1.47}$$

luego

$$xe^{-y} = -y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y} + c \tag{2.1.48}$$

por la que la solución implícita es

$$x = -y^2 - 2y - 2 + ce^{y} \tag{2.1.49}$$

2.1.2. ODE Lineal de Segundo Orden

Una ODE lineal de segundo orden es una ecuación de la forma

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.1.50}$$

Resolver una ODE lineal de segundo orden es más complicado que el caso de primer orden, sin embargo, muchas de las técnicas introducidas para las ecuaciones lineales de primer orden se pueden extender al caso de segundo orden. Antes de comenzar a resolver la ecuación anterior, se van a introducir algunas situaciones físicas que se modelan por 2.1.50.

Considere que se tiene una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza $F(x)$ y suponga por comodidad que $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de la fuerza, es decir, $F(0) = 0$. Luego se puede realizar una expansión de Taylor para la fuerza alrededor de cero y escribir

$$F(x) = F(0) + \frac{dF}{dx}\,|_{x=0}\, x + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}\,|_{x=0}\, x^2 + \cdots \tag{2.1.51}$$

como el origen es un punto de equilibrio si se ignoran los términos superiores se tiene en 2.1.51 que

$$F(x) \simeq \frac{dF}{dx}\,|_{x=0}\, x \tag{2.1.52}$$

Si el equilibrio es un equilibrio estable, entonces $\frac{dF}{dx}\,|_{x=0} < 0$ por lo que se puede definir

$$k \equiv -\frac{dF}{dx}\,|_{x=0} \tag{2.1.53}$$

de forma que $k > 0$ y usando la Segunda Ley de Newton se llega a

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.1.54}$$

la cual es la ecuación para el Movimiento Armónico Simple

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.1.55}$$

Los cálculos anteriores indican que siempre que se tengan desplazamientos pequeños con respecto a un equilibrio estable, la fuerza que actúa sobre una partícula puede escribirse a través de la Ley de Hooke, $F = -kx$.

Si se define

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \tag{2.1.56}$$

entonces se puede reescribir 2.1.55 como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1.57}$$

Cuando se resuelva la ecuación se verá que el movimiento es sinusoidal con velocidad angular ω_0. La ecuación anterior sirve en ausencia de fuerzas disipativas, si se quieren introducir fuerzas disipativas como la viscosidad de modo que la ecuación siga siendo lineal, se supone una fuerza de la forma

$$F = -b\dot{x} \tag{2.1.58}$$

por lo que si se define el coeficiente de amortiguamiento

$$\beta \equiv \frac{b}{2m} \tag{2.1.59}$$

2.1.55 se convierte en

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1.60}$$

Finalmente, puede ocurrir que las oscilaciones sean forzadas, es decir, que se introduzca una fuerza adicional $F(t)$ que actúa sobre la partícula. En tal caso la ecuación diferencial por resolver es

$$\underbrace{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x}_{sistema}=\underbrace{\frac{F(t)}{m}}_{input} \tag{2.1.61}$$

Otro ejemplo que es útil tener en mente es el de un circuito RLC en serie.

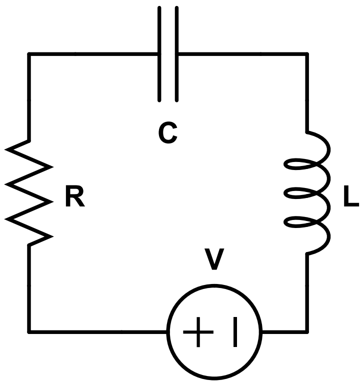

Figura 2.1.1: Cirucito RLC

La ley de Kirchoff establece que

$$V=V_L+V_R+V_C \tag{2.1.62}$$

donde V es el potencial de la fuente y V_L, V_R, V_C son las caídas de potencial a través del inductor, la resistencia y la capacitancia respectivamente. Más aún,

$$V_L=L\frac{dI}{dt} \tag{2.1.63}$$

donde I es la corriente que atraviesa el circuito y L la inductancia. Por la ley de Ohm

$$V_R=RI \tag{2.1.64}$$

donde R es la resitencia. Finalmente,

$$V_C=\frac{q}{C} \tag{2.1.65}$$

donde C es la capacitancia y q la carga eléctrica que fluye. Dado que $I=\frac{dq}{dt}$ la ley de Kirchoff se puede reescribir como

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=V \tag{2.1.66}$$

si el potencial de la fuente depende del tiempo, es decir, $V = V(t)$, la ley de Kirchoff se reescribe como

$$\underbrace{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q}_{sistema} = \underbrace{V(t)}_{input} \tag{2.1.67}$$

Formalmente, las ecuaciones 2.1.61 y 2.1.67 son las mismas, de hecho, se puede hacer las identificaciones

Mecánica	Electricidad
desplazamiento x	carga q
velocidad $\dot{x}$	corriente I
masa m	inductancia L
amortiguamiento b	resistencia R
inverso constante hooke $1/k$	capacitancia
fuerza F	voltaje fuente V

De forma análoga al caso de la ecuación lineal de primer orden, una ODE es lineal homogénea de segundo orden si es de la forma

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.1.68}$$

Primero que todo, defina S como el conjunto de soluciones de 2.1.68, es decir,

$$S \equiv \{x = x(t) \mid \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0\} \tag{2.1.69}$$

observe que S es un conjunto formado por funciones y no por números. Igual que antes, si $x_1(t), x_2(t)$ son dos elementos de S, es decir, son dos soluciones de 2.1.68, entonces $x_3 \equiv c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ también es una solución de 2.1.68, es decir, $x_3(t) \in S$.

Principio de Superposición: Si $x_1(t), x_2(t)$ son dos soluciones de 2.1.68, entonces $x_3 \equiv c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ también es una solución de 2.1.68, es decir, S es un subespacio vectorial del espacio vectorial de funciones de variable real.

Ahora bien, como se sabe de Álgebra Lineal, todo espacio vectorial (o subespacio vectorial) posee una base. Por lo tanto, la pregunta aquí es: ¿cuál es la dimensión de S, es decir cuántas funciones forman la base de S y qué significa tener una base de funciones para un conjunto?

Primero que todo, en Álgebra Lineal un grupo de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son linealmente independientes si y solo si la única combinación lineal posible entre ellos es la nula, es decir, si

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0 \tag{2.1.70}$$

donde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ son números reales, entonces necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Para funciones la relación es la misma solo que debe cumplirse para todos los puntos donde se pueda evaluar la función

Un conjunto de funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son linealmente independientes sobre un intervalo I si la única forma en que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \tag{2.1.71}$$

para todo t en I es que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. De lo contrario las funciones son linealmente dependientes , es decir, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son linealmente dependientes si existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ no todas cero de forma que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \tag{2.1.72}$$

para todo t en I.

Ejemplo 16. Determine si $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$, $f_3(t) = e^{3t}$ son linealmente independientes o no sobre $\mathbb{R}$

Primero se supone que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) = 0 \tag{2.1.73}$$

o bien,

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} = 0 \tag{2.1.74}$$

se puede factorizar un e^t y eliminarlo puesto que e^t nunca es cero

$$c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} = 0 \tag{2.1.75}$$

como esta relación es válida para todo t, se puede derivar la ecuación anterior con respecto a t para obtener que

$$c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} = 0 \tag{2.1.76}$$

o bien eliminando un e^t

$$c_2 + 2c_3 e^t = 0 \tag{2.1.77}$$

luego se deriva de nuevo y se obtine

$$2c_3 e^t = 0 \tag{2.1.78}$$

lo cual implica que

$$c_3 = 0 \tag{2.1.79}$$

y sustituyendo este valor en 2.1.77 se llega a $c_2 = 0$ y de forma similar en 2.1.75 se llega a $c_1 = 0$, por lo tanto, las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 17. Determine si e^t, e^{-t}, $\cosh t$ son linealmente independientes o no.

Nuevamente se toma

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cosh t = 0 \tag{2.1.80}$$

sin embargo, como

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \tag{2.1.81}$$

se puede tomar $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -2$ y de esta forma

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cosh t = e^t + e^{-t} - 2\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = 0 \tag{2.1.82}$$

por lo que las funciones no son linealmente independientes, es decir, son linealmente dependientes.

Los ejemplos anterior fueron hallados por prueba y error, ahora se quiere una forma más eficiente para determinar la independencia lineal o dependencia lineal. Primero que todo tome dos funciones f_1, f_2 y suponga que para todo $t \in I$

$$c_1f_1(t) + c_2f_2(t) = 0 \tag{2.1.83}$$

luego suponiendo que f_1, f_2 son derivables se tiene también que

$$c_1\dot{f}_1(t) + c_2\dot{f}_2(t) = 0 \tag{2.1.84}$$

estas dos ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.85}$$

Ahora bien, si f_1, f_2 son linealmente dependientes entonces el sistema anterior tiene una solución no nula c_1, c_2 y de Álgebra Lineal esto ocurre cuando el determinante de la matriz es cero, es decir,

$$W\left(f_1, f_2\right)(t) \equiv \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) \end{vmatrix} = f_1(t)\dot{f}_2(t) - f_2(t)\dot{f}_1(t) = 0 \tag{2.1.86}$$

donde $W(f_1, f_2)$ se llama el Wronskiano de las funciones f_1, f_2. Por lo tanto, como lo mismo funciona para n funciones f_1,f_2,...,f_n lo anterior significa que

Si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son n funciones derivables $n-1$ veces su Wronskiano se define como el determinante de la matriz $n \times n$ siguiente

$$W(f_1, \cdots f_n) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.1.87}$$

Si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son linealmente dependientes, entonces $W(f_1, \cdots f_n)$ se anula en todo el intervalo I. Por lo tanto, para verificar que $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son linealmente independientes es suficiente ver que el Wrosnkiano $W(f_1, \cdots f_n)$ no se anula en algún punto del intervalo I.

Ejemplo 18. Determine si $\sin t, \cos t$ son linealmente independientes o no.
Si $f_1(t) = \sin t,\ f_2(t) = \cos t$ entonces su Wronskiano es

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1 \tag{2.1.88}$$

y como nunca se anula entonces las funciones son linealmente independientes.

Suponga que $x_1(t), x_2(t)$ son dos soluciones de la ODE lineal homogénea

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.1.89}$$

entonces el Wronskiano de las soluciones es

$$W(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 \tag{2.1.90}$$

y la derivada del Wronskiano es

$$\dot{W} = \dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\dot{x}_1 - x_2\ddot{x}_1 = x_1\ddot{x}_2 - x_2\ddot{x}_1 \tag{2.1.91}$$

como x_1, x_2 son soluciones de 2.1.89 entonces

$$\dot{W} = x_1(-p\dot{x}_2 - qx_2) - x_2(-p\dot{x}_1 - qx_1) = -pW \tag{2.1.92}$$

por lo tanto

$$\dot{W} = -pW \tag{2.1.93}$$

la ecuación anterior es lineal de primer orden y se puede integrar para obtener

$$W(t) = Ce^{-\int p dt} \tag{2.1.94}$$

con lo cual se llega a la Identidad de Abel

Identidad de Abel: Si $x_1(t), x_2(t)$ son dos soluciones de

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.1.95}$$

entonces

$$W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \tag{2.1.96}$$

lo cual permite concluir que el Wronskiano de dos soluciones de 2.1.95 es siempre cero, siempre positivo o siempre negativo.

Considere ahora los problemas de valor inicial PVI siguientes

$$\begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \\ x\left(t_0\right) = 1 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \\ x\left(t_0\right) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 1 \end{cases} \tag{2.1.97}$$

por el Teorema de Existencia y Unicidad si p, q son diferenciables (de hecho, para este tipo de ecuación basta con que sean continuas) cada uno de los problemas anteriores tienen una única solución. Llamando $x_1(t), x_2(t)$ las dos soluciones respectivas se tiene que

$$W(x_1, x_2)(t_0) = x_1(t_0)\dot{x}_2(t_0) - x_2(t_0)\dot{x}_1(t_0) = 1 \tag{2.1.98}$$

por lo tanto, $x_1(t), x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes. Luego, si $x(t)$ es otra solución y $x(t_0) = a$ y $\dot{x}\left(t_0\right) = b$ entonces defina la función auxiliar

$$y(t) \equiv x(t) - ax_1(t) - bx_2(t) \tag{2.1.99}$$

Primero que todo, por el principio de superposición $y(t)$ también es solución de 2.1.95. Además,

$$y(t_0) = x(t_0) - ax_1(t_0) - bx_2(t_0) = a - a = 0 \tag{2.1.100}$$

$$\dot{y}(t_0) = \dot{x}(t_0) - a\dot{x}_1(t_0) - b\dot{x}_2(t_0) = b - b = 0 \tag{2.1.101}$$

por lo tanto, $y(t)$ satisface el PVI

$$\begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \\ x\left(t_0\right) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{2.1.102}$$

pero una solución del PVI anterior es la función idénticamente cero, luego, por unicidad se tiene que

$$y(t) = 0 \tag{2.1.103}$$

o bien

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \tag{2.1.104}$$

lo cual significa que $x(t)$ es combinación lineal de x_1, x_2 y como $x(t)$ era una solución arbitraria se concluye que

Sea S el conjunto solución de la ODE lineal homogénea de segundo orden

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.1.105}$$

es decir,

$$S = \{x = x(t) \mid \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0\} \tag{2.1.106}$$

entonces como subespacio vectorial

$$\dim S = 2 \tag{2.1.107}$$

es decir, si se conocen dos soluciones $x_1(t), x_2(t)$ linealmente independientes, cualquier otra solución $x(t)$ puede escribirse como

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{2.1.108}$$

donde c_1, c_2 son constantes.
En general, se denotarán las soluciones arbitrarias (es decir, que pueden representar cualquier solución variando los valores de c_1, c_2) de la ecuación homogénea como x_h.

Gracias a lo anterior, es posible a su vez caracterizar todas las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.1.109}$$

Primero que todo si $x_p(t)$ es una solución de 2.1.109 y $x(t)$ es otra solución de 2.1.109 entonces

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \quad \ddot{x_p} + p(t)\dot{x_p} + q(t)x_p = f(t) \tag{2.1.110}$$

Luego se pueden restar las ecuaciones anteriores

$$(\ddot{x} - \ddot{x}_p) + p(t)(\dot{x} - \dot{x}_p) + q(t)(x - x_p) = 0 \tag{2.1.111}$$

es decir,

$$x_h(t) \equiv x(t) - x_p(t) \tag{2.1.112}$$

es una solución de la ecuación lineal homogénea asociada. Por lo tanto se puede escribir la solución $x(t)$ como

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2.1.113}$$

y la solución homogénea puede escribirse como

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{2.1.114}$$

o bien

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \tag{2.1.115}$$

por lo tanto

Si se conoce alguna solución $x_p(t)$ de la ecuación

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.1.116}$$

entonces cualquier otra solución $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \tag{2.1.117}$$

donde $x_1(t), x_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea asociada. Dicho de otra forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2.1.118}$$

donde

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \tag{2.1.119}$$

representa la solución general de la ecuación homogénea.

Antes de comenzar a resolver ecuaciones de segundo orden, es importante tener presente que va a ser muy útil trabajar con números complejos ya que las exponenciales son más fáciles de derivar e integrar que los senos y cosenos y la fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \tag{2.1.120}$$

establece que en vez de trabajar con senos y cosenos siempre pueden utilizarse exponenciales. Por lo tanto, es útil buscar soluciones complejas de

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.1.121}$$

Luego, si

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{2.1.122}$$

es una solución de la ecuación homogénea anterior entonces

$$\ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z = 0 \tag{2.1.123}$$

por lo tanto

$$(\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x) + i\,(\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y) = 0 \tag{2.1.124}$$

y luego la parte real e imaginaria deben ser individualmente cero, es decir,

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0 \tag{2.1.125}$$

por lo tanto, se ha obtenido

Principio de Realidad: Si $z(t)$ es una solución compleja de la ecuación lineal homogénea

$$\ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z = 0 \tag{2.1.126}$$

entonces Rez e Imz son soluciones reales de la ecuación anterior, donde Rez e Imz son la parte real e imaginaria de z respectivamente. Es decir, para resolver una ecuación diferencial lineal homogénea pueden buscarse soluciones complejas y luego tomar la parte real e imaginaria para obtener soluciones reales.

También, las ecuaciones lineales presentan otro principio de superposición.

Segundo Principio de Superposición: Suponga que se quiere resolver la ecuación

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) + g(t) \tag{2.1.127}$$

entonces se pueden resolver por aparte las ecuaciones

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \quad \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = g(t) \tag{2.1.128}$$

y si x_1, x_2 son las soluciones respectivas entonces $x = x_1 + x_2$ es solución de la ecuación completa.

2.1.2.1. ODE Lineal Orden dos con Coeficientes Constantes

Ahora se van a estudiar ODEs lineales de segundo orden con homogéneas coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{2.1.129}$$

con a, b, c números reales y $a \neq 0$. Primero que todo, como en la solución de las ecuaciones lineales de primer orden, se van a intentar soluciones de la forma

$$z(t) = e^{mt} \tag{2.1.130}$$

donde se escribe z pues como se verá m puede ser un número complejo. Luego

$$\dot{z}(t) = me^{mt} \quad \ddot{z}(t) = m^2 e^{mt} \tag{2.1.131}$$

y de esta forma para que $z(t)$ sea solución de 2.1.129 se debe tener que

$$am^2 e^{mt} + bme^{mt} + ce^{mt} = 0 \tag{2.1.132}$$

o bien

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.1.133}$$

La ecuación 2.1.133 se llama la ecuación característica de 2.1.129. Como es una ecuación cuadrática tiene raíces

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1.134}$$

como es de esperar, la naturaleza de la solución va a depender del valor del discriminante $b^2 - 4ac$.

1. Caso $b^2 - 4ac > 0$: Aquí habrían dos raíces reales m_1, m_2 en 2.1.134

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1.135}$$

y es fácil verificar que $x_1(t) = e^{m_1 t}$, $x_2(t) = e^{m_2 t}$ son dos soluciones linealmente independientes de 2.1.129. Luego, como solo hay que encontrar dos soluciones linealmente independientes pues la dimensión de las bases del espacio de soluciones es dos, entonces la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \tag{2.1.136}$$

2. Caso $b^2 - 4ac = 0$: Aquí solo hay una raíz m en 2.1.134

$$m = -\frac{b}{2a} \tag{2.1.137}$$

Luego $x_1(t) = e^{mt}$ es una solución de 2.1.129. Como se ocupan dos soluciones linealmente independientes se va a buscar una solución de la forma

$$x_2(t) = u(t)x_1(t) \tag{2.1.138}$$

donde $u(t)$ es una función por determinar. Luego

$$\dot{x}_2 = \dot{u}x_1 + u\dot{x}_1 \quad \ddot{x}_2 = \ddot{u}x_1 + 2\dot{u}\dot{x}_1 + u\ddot{x}_1 \tag{2.1.139}$$

y sustituyendo en 2.1.129 se llega a que $u(t)$ tendría que satisfacer la ecuación

$$a(\ddot{u}x_1 + 2\dot{u}\dot{x}_1 + u\ddot{x}_1) + b(\dot{u}x_1 + u\dot{x}_1) + cux_1 = 0 \tag{2.1.140}$$

que se puede escribir como

$$a\left(\ddot{u}x_1 + 2\dot{u}\dot{x}_1\right) + b\dot{u}x_1 + u(a\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + c) = 0 \tag{2.1.141}$$

luego como x_1 es solución se elimina el último término y además se obtiene

$$a\left(\ddot{u}e^{mt} + 2\dot{u}me^{mt}\right) + b\dot{u}e^{mt} = 0 \tag{2.1.142}$$

luego puede eliminarse e^{mt} y se llega a

$$a\ddot{u} + \dot{u}(2am + b) = 0 \tag{2.1.143}$$

pero $m = -\frac{b}{2a}$ por lo que se obtiene

$$\ddot{u} = 0 \tag{2.1.144}$$

como solo interesa una función que cumpla la ecuación anterior puede tomarse $u(t) = t$ y entonces se toma $x_2(t) = te^{mt}$, es fácil verificar que x_1, x_2 son linealmente independientes. Luego la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{mt} + c_2 t e^{mt} \tag{2.1.145}$$

3. Caso $b^2 - 4ac < 0$: En este caso las raíces son imaginarias

$$m_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad m_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.1.146}$$

que se pueden escribir como

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad m_2 = \alpha - i\beta \tag{2.1.147}$$

donde

$$\alpha \equiv -\frac{b}{2a} \quad \beta \equiv \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.1.148}$$

Luego $z_1(t) = e^{m_1 t}$ y $z_2(t) = e^{m_2 t}$ son soluciones linealmente independientes como puede verificarse. Sin embargo, siempre se quiere que las soluciones sean reales por lo que se utiliza el hecho mencionado antes de que la parte real e imaginaria de una solución compleja es solución de la ecuación. Por lo tanto por Euler

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{m_1 t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{it\beta} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right) \\ z_2(t) = e^{m_2 t} = e^{\alpha t - i\beta t} = e^{\alpha t} e^{-it\beta} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\right) \end{cases} \tag{2.1.149}$$

Luego, se define

$$x_1(t) \equiv e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad x_2(t) \equiv e^{\alpha t} \sin(\beta t) \tag{2.1.150}$$

es fácil verificar que ambas soluciones son linealmente independientes por lo que la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \tag{2.1.151}$$

En resumen,

Para resolver

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{2.1.152}$$

se plantea la ecuación característica

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.1.153}$$

que tiene por raíces

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1.154}$$

Aparecen tres casos:

1. Caso $b^2 - 4ac > 0$: Aquí habrían dos raíces reales m_1, m_2

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1.155}$$

   y la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \tag{2.1.156}$$

2. Caso $b^2 - 4ac = 0$: Aquí solo hay una raíz m

$$m = -\frac{b}{2a} \tag{2.1.157}$$

   y la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{mt} + c_2 t e^{mt} \tag{2.1.158}$$

3. Caso $b^2 - 4ac < 0$: En este caso las raíces son imaginarias

$$m_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad m_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.1.159}$$

   que se pueden escribir como

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad m_2 = \alpha - i\beta \tag{2.1.160}$$

   donde

$$\alpha \equiv -\frac{b}{2a} \quad \beta \equiv \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.1.161}$$

   La solución general es

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \tag{2.1.162}$$

Ejemplo 19. Resuelva la ecuación diferencial $2\ddot{x} - 5\dot{x} - 3x = 0$

En este caso la ecuación característica es

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \tag{2.1.163}$$

que puede factorizarse como

$$2m^2 - 5m - 3 = (2m+1)(m-3) = 0 \tag{2.1.164}$$

luego

$$m_1 = -\frac{1}{2} \quad m_2 = 3 \tag{2.1.165}$$

como las raíces son reales y distintas la solución es

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{3t} \tag{2.1.166}$$

Ejemplo 20. Resuelva la ecuación diferencial $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

En este caso la ecuación característica es

$$m^2 - 10m + 25 = 0 \tag{2.1.167}$$

cuya única raíz es

$$m = 5 \tag{2.1.168}$$

por lo tanto la solución es

$$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t} \tag{2.1.169}$$

Ejemplo 21. Resuelva el PVI $\begin{cases} 4y'' + 4y' + 17y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

En este caso la ecuación característica es

$$4m^2 + 4m + 17 = 0 \tag{2.1.170}$$

Para hallar las raíces se utiliza la fórmula cuadrática

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 272}}{8} = -\frac{1}{2} \pm 2i \tag{2.1.171}$$

como las raíces son imaginarias la solución es

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(2x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(2x) \tag{2.1.172}$$

Como debe cumplir la condición $y(0) = -1$ se tiene

$$-1 = c_1 \tag{2.1.173}$$

Como debe cumplir la condición $y'(0) = 2$ primero con $c_1 = -1$

$$y'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cos(2x) + 2e^{-\frac{1}{2}x}\sin(2x) - \frac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin(2x) + 2c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(2x) \quad (2.1.174)$$

por lo que

$$2 = \frac{1}{2} + 2c_2 \quad (2.1.175)$$

por lo tanto

$$c_2 = \frac{3}{4} \quad (2.1.176)$$

La solución que satisface el PVI es

$$y(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}\cos(2x) + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\sin(2x) \quad (2.1.177)$$

Ahora que se saben resolver ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes, puede retomarse el estudio de los modelos mecánicos introducidos al inicio.

El primer modelo que se puede estudiar es el del movimiento armónico simple que tiene por ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1.178)$$

La ecuación auxiliar de 2.1.178 es

$$m^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (2.1.179)$$

que tiene raíces complejas

$$m = \pm i\omega_0 \quad (2.1.180)$$

por lo tanto, la solución real del movimiento armónico simple es

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \quad (2.1.181)$$

es decir, es un movimiento períodico. Para hallar el período T este debe cumplir (dado que el coseno es de período 2π) que

$$\omega_0(t+T) - \omega_0 t = 2\pi \quad (2.1.182)$$

por lo tanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.1.183)$$

Es común escribir 2.1.181 de otra forma. Para esto, hay que notar que

$$x(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin(\omega_0 t)\right) \quad (2.1.184)$$

Luego puede definirse un ángulo θ como

$$\cos\theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \qquad \sin\theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \quad (2.1.185)$$

que puede memorizarse con el siguiente diagrama

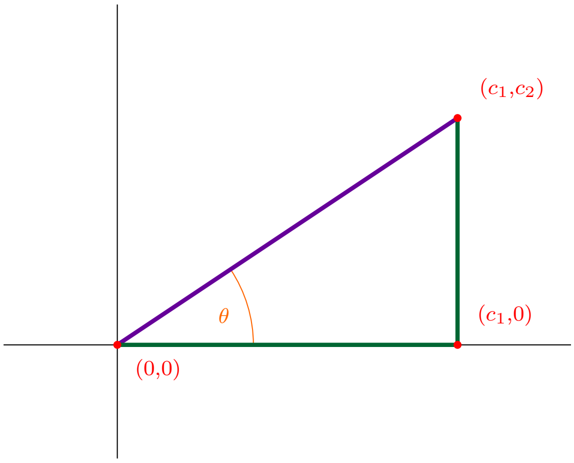

Figura 2.1.2: Diagrama

Luego,

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,(\cos\theta \cos(\omega_0 t) + \sin\theta \sin(\omega_0 t)) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\omega_0 t - \theta) \tag{2.1.186}$$

que usualmente se escribe como

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) \tag{2.1.187}$$

donde A es la amplitud de movimiento armónico y φ es la fase. Como se ha visto, ambas maneras son equivalentes y puede utilizarse cualquiera de las dos.

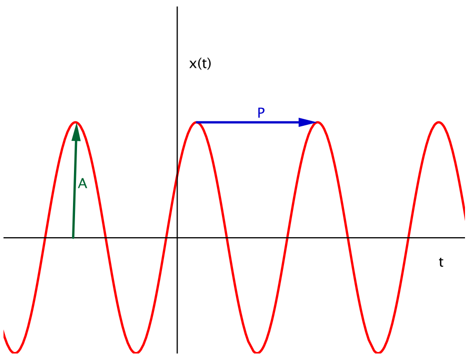

Figura 2.1.3: Gráfica movimiento armónico simple con período P y amplitud A

También es útil graficar el diagrama de fase. De 2.1.187

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{2.1.188}$$

Luego es sencillo verificar que

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{A\omega_0}\right)^2 = 1 \tag{2.1.189}$$

por lo tanto, las trayectorias de una partícula en Movimiento Armónico Simple son representadas en el diagrama de fase como elipses centradas en el origen. Las soluciones de la ecuación siempre permanecen dentro de una elipse, y cada elipse corresponde a una energía posible del sistema.

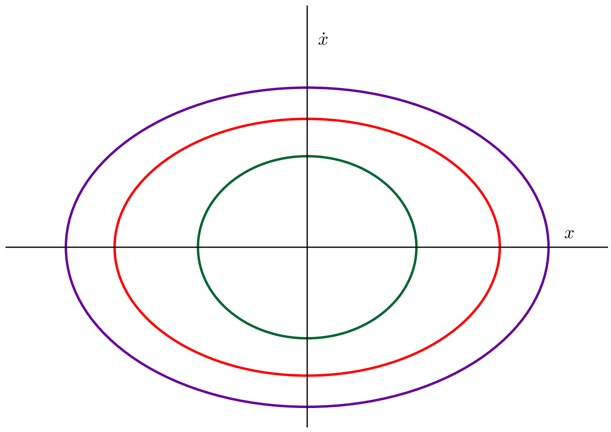

Figura 2.1.4: Diagrama de Fase Movimiento Armónico Simple

El caso con amortiguamiento es más interesante. La ecuación es en este caso

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1.190}$$

La ecuación característica de 2.1.190 es

$$m^2 + 2\beta m + \omega_0^2 = 0 \tag{2.1.191}$$

y las raíces son

$$m = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{2.1.192}$$

claramente hay tres casos:

1. Caso $\omega_0^2 > \beta^2$, movimiento subamortiguado: aquí conviene definir

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 \tag{2.1.193}$$

como las raíces son imaginarias la solución es

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t) + c_2 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t) \tag{2.1.194}$$

que puede reescribirse como

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \tag{2.1.195}$$

en este caso la curva se mueve entre las dos envolventes

$$x_{en}(t) \equiv \pm Ae^{-\beta t} \tag{2.1.196}$$

y aunque el movimiento no es estrictamente período, es común referirse a ω_1 como la frecuencia del movimiento.

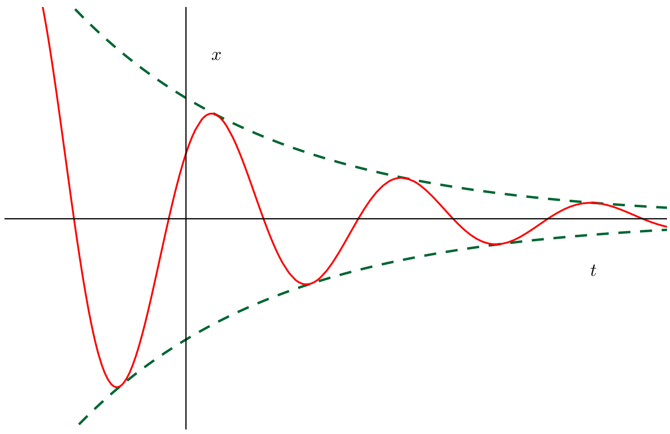

Figura 2.1.5: Curva movimiento subamortiguado

2. Caso $\omega_0^2 = \beta^2$, movimiento críticamente amortiguado: en este caso solo hay una raíz

$$m = -\beta \tag{2.1.197}$$

por lo que la solución es

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t} \tag{2.1.198}$$

de los tres casos, el movimiento críticamente amortiguado es el que permite llegar al equilibrio lo más rápido posible sin realizar oscilaciones.

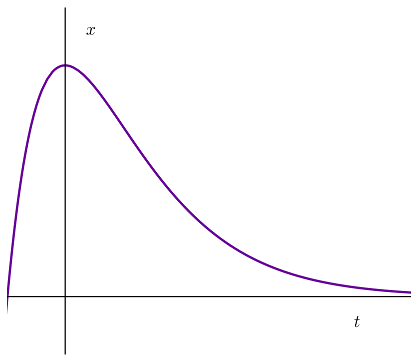

Figura 2.1.6: Movimiento críticamente amortiguado con $\dot{x}(0) = 0$

3. Caso $\beta^2 > \omega_0^2$, movimiento sobreamortiguado: en este caso hay dos raíces reales

$$m = -\beta \pm \omega_2 \tag{2.1.199}$$

donde se definió

$$\omega_2^2 \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{2.1.200}$$

luego la solución se puede escribir como

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t + \omega_2 t} + c_2 e^{-\beta t - \omega_2 t} \tag{2.1.201}$$

en este movimiento tampoco hay oscilaciones.

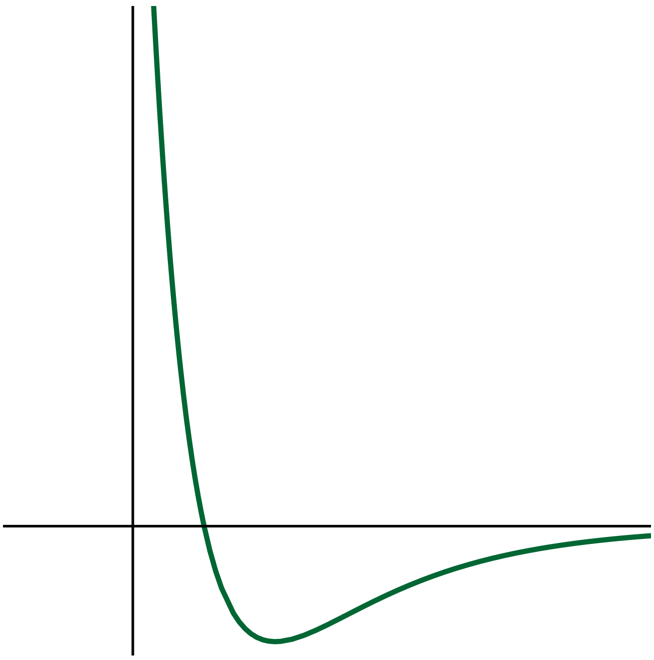

Figura 2.1.7: Movimiento sobreamortiguado con $\dot{x}(0) < 0$

2.1.3. ODE Lineal Orden n con Coeficientes Constantes

Antes de resolver las ecuaciones lineales no homogéneas, se va describir como resolver las ecuaciones homogéneas lineales de orden n. Primero que todo, una ODE lineal de orden n es una ecuación diferencial de la forma

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \tag{2.1.202}$$

En general, si $a_n(t) \neq 0$, puede dividirse por a_n en ambos lados de la ecuación para obtener

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \tilde{a}_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + \tilde{a}_1(t)\frac{dx}{dt} + \tilde{a}_0(t)x = \tilde{f}(t) \tag{2.1.203}$$

donde
$$\tilde{a}_i(t) \equiv \frac{a_i(t)}{a_n(t)} \qquad \tilde{f}(t) \equiv \frac{f(t)}{a_n(t)} \tag{2.1.204}$$
aunque en la práctica siempre se trabaja con solo una de las dos formas por lo que se omitirían las barras. Dado que la notación para 2.1.202 es un poco tediosa, es útil introducir la noción de un Operador Diferencial .

Primero que todo, una función f se puede pensar como una máquina que recibe un número (input o entrada) , realiza un proceso (aplicarle la función) y regresa un número (output o salida): es decir, el input y output de una función son números.

Por ejemplo, la función $f(t) = t^2 + 4$ puede verse como un proceso de la siguiente forma (la primera línea es el proceso abstracto mientras que la segunda es el proceso aplicado a $t = 1$).
$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & & \downarrow & & \\ t & \rightarrow & [f(t)] & \rightarrow & t^2+4 \\ & & & & \\ & & f & & \\ & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & [f(1)] & \rightarrow & 5 \end{array} \tag{2.1.205}$$
De lo anterior puede notarse que es usual identificar la función f con el proceso $f(t)$ que realiza sobre cada t, de ahí que uno diga muchas veces la función $f(t)$, aún cuando $f(t)$ se refiere al output y no a la función en sí.

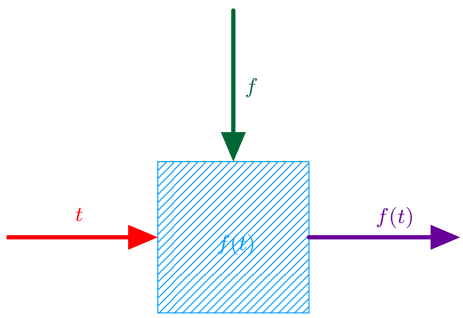

Figura 2.1.8: Diagrama función

Por otro lado, un operador es una máquina que recibe una función (input), realiza un proceso (aplicarle el operador a la función) y regresa otra función (output); es decir, el input y output son funciones.

El operador más importante será el operador de diferenciación D, básicamente, si f es una función Df es la derivada de f

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & & \downarrow & & \\ f & \rightarrow & [Df] & \rightarrow & \frac{df}{dt} \\ & & & & \\ & & D & & \\ & & \downarrow & & \\ f(t)=\sin t & \rightarrow & [Df] & \rightarrow & Df(t)=\cos t \end{array} \tag{2.1.206}$$

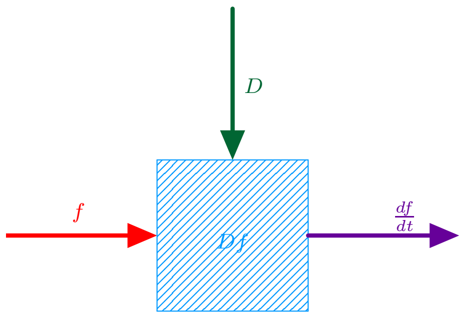

Figura 2.1.9: Diagrama Operador

A partir de D es posible constuir operadores asociados. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{2.1.207}$$

Para hallar el operador asociado a 2.1.207 se "factoriza" x por la derecha para escribir 2.1.207 como

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+t\frac{d}{dt}+1\right)x=0 \tag{2.1.208}$$

y como ya se introdujo D 2.1.208 se puede escribir como

$$\left(D^2+tD+1\right)x=0 \tag{2.1.209}$$

donde D^2 significa el operador de derivar dos veces. De hecho, definiendo el operador

$$L\equiv D^2+tD+1 \tag{2.1.210}$$

la ecuación 2.1.209 se puede escribir simplemente como

$$Lx=0 \tag{2.1.211}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & & \downarrow & & \\
x & \rightarrow & [Lx] & \rightarrow & \frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x \\
 & & D & & \\
 & & \downarrow & & \\
x(t) = t^2 + t & \rightarrow & [Lx] & \rightarrow & Lx(t) = 3t^2 + 2t + 2
\end{array}
\tag{2.1.212}
$$

Como se verá más adelante, así como las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse, ser inyectivas, sobreyectivas, invertibles, etc, los operadores pueden sumarse, restarse, multiplicarse, ser inyectivos, sobreyectivos, invertibles, etc.

De esta forma, 2.1.202 puede escribirse como

$$Lx = f \tag{2.1.213}$$

donde ahora

$$L \equiv a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0 \tag{2.1.214}$$

El nombre de ODE lineal se justifica con esta nueva notación, ya que el operador L es lineal, es decir,

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Lx_1 + c_2Lx_2 \tag{2.1.215}$$

La mayoría de los resultados para las ODEs lineales de segundo orden se traducen fácilmente al caso de orden n que se está estudiando, por lo que simplemente se van a enunciar.

Principio de Superposición: Si x_1, x_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$Lx = 0 \tag{2.1.216}$$

entonces $x_3 \equiv c_1x_1 + c_2x_2$ también es solución, es decir, $Lx_3 = 0$.

Segundo Principio de Superposición: Para resolver la ecuación difernecial lineal de orden n

$$Lx = f(t) + g(t) \tag{2.1.217}$$

pueden resolverse por aparte las ecuaciones

$$Lx = f(t) \qquad Lx = g(t) \tag{2.1.218}$$

y si x_1, x_2 son las soluciones respectivas entonces $x_3 \equiv x_1 + x_2$ es solución del problema original.

Sea S el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea

$$S = \{x(t) \mid Lx = 0\} \tag{2.1.219}$$

entonces

$$\dim S = n \tag{2.1.220}$$

es decir, si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son n soluciones de $Lx = 0$ entonces cualquier otra solución x_h puede escribirse como combinación lineal de tales soluciones, es decir, la forma general de la solución homogénea es

$$x_h = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{2.1.221}$$

Si se conoce alguna solución $x_p(t)$ de la ODE lineal de orden n

$$Lx = f \tag{2.1.222}$$

entonces cualquier otra solución x puede escribirse como

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \tag{2.1.223}$$

donde x_h es la solución general del problema homogéneo asociado $Lx = 0$.

Para resolver la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \tag{2.1.224}$$

se plantea la ecuación característica asociada

$$a_n m^n + a_{n-1} m^n + \cdots + am + a_0 = 0 \tag{2.1.225}$$

Si $m_1, m_2, \cdots, m_s$ son las s raíces distintas y $r_1, r_2, \cdots, r_s$ son las multiplicidades respectivas, es decir,

$$a_n m^n + a_{n-1} m^n + \cdots + am + a_0 = a_n (m - m_1)^{r_1} \cdots (m - m_s)^{r_s} \tag{2.1.226}$$

entonces se realizan los siguientes casos:

- Si la raíz m_i es real las soluciones asociadas a la raíz son de la forma

$$e^{m_i t}, te^{m_i t}, \cdots, t^{r_i - 1} e^{m_i t} \tag{2.1.227}$$

- Si la raíz $m_i = \alpha_i + i\beta_i$ es compleja entonces su conjugado complejo $\bar{m}_i = \alpha_i - i\beta_i$ también es una raíz con la misma multiplicidad que m_i, por lo tanto, se mezclan ambas soluciones para escribirlas como

$$\begin{gathered} e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t), e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t), te^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t), te^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t), \cdots \\ t^{r_i-1}e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t), t^{r_i-1}e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t) \end{gathered} \tag{2.1.228}$$

Ejemplo 22. Resuelva la ecuación diferencial $\dddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$

La ecuación característica asociada es

$$m^3 - 3m + 2 = 0 \tag{2.1.229}$$

que puede factorizarse como

$$m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2) \tag{2.1.230}$$

por lo tanto las raíces son

$$\begin{matrix} m_1 = 1 & m_2 = -2 \\ r_1 = 2 & r_2 = 1 \end{matrix} \tag{2.1.231}$$

Luego la solución se escribe como

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2t} \tag{2.1.232}$$

Ejemplo 23. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$
La ecuación característica es en este caso

$$m^4 + 3m^2 + 2 = 0 \tag{2.1.233}$$

que puede factorizarse como

$$m^4 + 3m^2 + 2 = \left(m^2 + 2\right)\left(m^2 + 1\right) = \left(m + \sqrt{2}i\right)\left(m - \sqrt{2}i\right)(m + i)(m - i) \tag{2.1.234}$$

luego las raíces son

$$\begin{array}{cccc} m_1 = -\sqrt{2}i & m_2 = \sqrt{2}i & m_3 = -i & m_4 = i \\ r_1 = 1 & r_2 = 1 & r_3 = 1 & r_4 = 1 \end{array} \tag{2.1.235}$$

Luego la solución es

$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{2}x\right) + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) \tag{2.1.236}$$

Ejemplo 24. Resuelva la ecuación diferencial $y^{(6)} - 64y = 0$
La ecuación característica es

$$m^6 - 64 = 0 \tag{2.1.237}$$

que puede factorizarse como

$$\left(m^3 - 8\right)\left(m^3 + 8\right) = (m - 2)\left(m^2 + 2m + 4\right)(m + 2)\left(m^2 - 2m + 4\right) \tag{2.1.238}$$

y las raíces son $\pm 2, -1 \pm i\sqrt{3}, 1 \pm i\sqrt{3}$ por lo que la solución es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x} \cos\sqrt{3}x + c_4 e^{-x} \sin\sqrt{3}x + c_5 e^{x} \cos\sqrt{3}x + c_6 e^{x} \sin\sqrt{3}x \tag{2.1.239}$$

2.2. ODE Lineal No Homogénea

2.2.1. Coeficientes Indeterminados

2.2.1.1. Método de Superposición

Ahora se van a comenzar a resolver las ecuaciones lineales no homogéneas, es decir, las ecuaciones de la forma

$$Lx = f \tag{2.2.1}$$

Para el método de coeficientes indeterminados, se considera el caso en que el operador L solo tiene coeficientes constantes, de esa forma se puede hallar primero la ecuación homogénea con la ayuda de la ecuación característica. Además, la función f debe ser un polinomio, exponencial, senos, cosenos, o producto de ellos ya que estas funciones tienen la propiedad de que sus derivadas son nuevamente funciones del mismo tipo. Antes de dar el método general, se va a realizar un ejemplo para ilustrar la idea del método.

Ejemplo 25. Resuelva $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=4t^2+6e^t$

Primero se resuelve la ecuación homogénea que tiene ecuación auxiliar

$$m^2+4m+4=0 \tag{2.2.2}$$

como

$$m^2+4m+4=(m+2)^2 \tag{2.2.3}$$

la solución de la ecuación homogénea es

$$x_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t} \tag{2.2.4}$$

Luego, por el segundo principio de superposición se buscan por separado soluciones de las ecuaciones

$$\underbrace{\ddot{x}+4\dot{x}+4x}_{sistema}=\underbrace{4t^2}_{input} \qquad \underbrace{\ddot{x}+4\dot{x}+4x}_{sistema}=\underbrace{6e^t}_{input} \tag{2.2.5}$$

La idea del método de coeficientes indeterminados es suponer que la solución tiene una forma similar al input que recibe la ecuación. Por ejemplo, para la primera ecuación en 2.2.5 se intenta con una solución polinomial pues el input es un polinomio, es decir, se prueba con

$$x_1=At^2+Bt+C \tag{2.2.6}$$

donde A,B,C son constantes por determinar. Derivando dos veces

$$\dot{x}_1=2At+B \qquad \ddot{x}_1=2A \tag{2.2.7}$$

y sustituyendo en la primera ecuación de 2.2.5 se tiene

$$2A+4(2At+B)+4\left(At^2+Bt+C\right)=4t^2 \tag{2.2.8}$$

luego se agrupan los términos según la potencia de t, es decir,

$$(4A-4)t^2+(8A+4B)t+(2A+4B+4C)=0 \tag{2.2.9}$$

para que la igualdad sea válida para todos los valores de t cada coeficiente debe ser cero, es decir, se obtiene el sistema

$$\begin{cases}4A-4=0\\8A+4B=0\\2A+4B+4C=0\end{cases} \tag{2.2.10}$$

que tiene por solución

$$A=1 \quad B=-2 \quad C=\frac{3}{2} \tag{2.2.11}$$

por lo tanto, la solución x_1 es

$$x_1(t)=t^2-2t+\frac{3}{2} \tag{2.2.12}$$

Para la segunda solución en 2.2.5 se propone un término de la forma

$$x_2(t) = Ee^t \tag{2.2.13}$$

donde E es una constante. Derivando se obtiene

$$\dot{x} = Ee^t \quad \ddot{x} = Ee^t \tag{2.2.14}$$

y sustituyendo se obtiene

$$Ee^t + 4Ee^t + 4Ee^t = 6e^t \tag{2.2.15}$$

por lo que

$$E = \frac{2}{3} \tag{2.2.16}$$

y de esta forma

$$x_2(t) = \frac{2}{3}e^t \tag{2.2.17}$$

luego la solución general es

$$x(t) = t^2 - 2t + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^t + c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \tag{2.2.18}$$

Observe que también se podía resolver ambas ecuación a la vez proponiendo una solución $x_3 = At^2 + Bt + C + Ee^t$ y realizar el mismo análisis de antes.

De esta forma, el método de superposición se divide en dos casos:

Caso I: Ningún término en $f(t)$ aparece en la solución general homogénea: en tal caso se propone x_p como la combinación lineal de los términos en $f(t)$ junto con todas las derivadas de los términos de $f(t)$ que son linealmente independientes entre ellas.

Ejemplo 26. Halle la solución de $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2te^{3t} + 3\sin t$

La ecuación característica es

$$m^2 - 3m + 2 = (m-2)(m-1) = 0 \tag{2.2.19}$$

por lo tanto, la solución homogénea es

$$x_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t \tag{2.2.20}$$

Observe que ningún término de x_h está presente en $f(t) = 2te^{3t} + 3\sin t$, por lo tanto, se estudian las derivadas de $f(t)$

$$\dot{f}(t) = 2e^{3t} + 6te^{3t} + 3\cos t \tag{2.2.21}$$

y si se vuelve a derivar solo aprecerían términos con la misma forma que los que se encuentrar en $f(t)$ y $\dot{f}(t)$ por lo tanto, se propone una solución de la forma

$$x_p(t) = C_1 te^{3t} + C_2 \sin t + C_3 e^{3t} + C_4 \cos t \tag{2.2.22}$$

luego

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) = C_1 e^{3t} + 3C_1 te^{3t} + C_2 \cos t + 3C_3 e^{3t} - C_4 \sin t = \\ 3C_1 te^{3t} - C_4 \sin t + (C_1 + 3C_3)\, e^{3t} + C_2 \cos t\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

observe que los términos de $\dot{x}_p$ tienen la misma forma que los de x_p. Luego

$$\begin{aligned}\ddot{x}_p(t) &= 3C_1 e^{3t} + 9C_1 te^{3t} - C_4 \cos t + 3\,(C_1 + 3C_3)\, e^{3t} - C_2 \sin t \\ &= 9C_1 te^{3t} - C_2 \sin t + (6C_1 + 9C_3)\, e^{3t} - C_4 \cos t\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

sustituyendo la solución propuesta y sus derivadas en la ecuación y agrupando según la forma del término se tiene que

$$\begin{gathered}(9C_1 - 9C_1 + 2C_1)\, te^{3t} + (-C_2 + 3C_4 + 2C_2) \sin t \\ + (6C_1 + 9C_3 - 3C_1 - 9C_3 + 2C_3)\, e^{3t} + (-C_4 - 3C_2 + 2C_4) \cos t \\ = 2te^{3t} + 3 \sin t\end{gathered} \tag{2.2.25}$$

igualando los coeficientes de los términos respectivos se llega al sistema

$$\begin{cases} 2C_1 = 2 \\ C_2 + 3C_4 = 3 \\ 3C_1 + 2C_3 = 0 \\ C_4 - 3C_2 = 0 \end{cases} \tag{2.2.26}$$

que tiene por solución

$$C_1 = 1 \quad C_2 = \frac{3}{10} \quad C_3 = -\frac{3}{2} \quad C_4 = \frac{9}{10} \tag{2.2.27}$$

por lo tanto,

$$x_p(t) = te^{3t} + \frac{3}{10} \sin t - \frac{3}{2} e^{3t} + \frac{9}{10} \cos t \tag{2.2.28}$$

luego la solución general es

$$x(t) = te^{3t} + \frac{3}{10} \sin t - \frac{3}{2} e^{3t} + \frac{9}{10} \cos t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} \tag{2.2.29}$$

Caso II: Algún término de $f(t)$ es t^k ($k \geq 0$) veces un término $u(t)$ de x_h, que aparece de una raíz de multiplicidad r. En tal caso se propone un término de la forma $t^{k+r}u(t)$ como solución junto con todas sus derivadas linealmente independientes. Los demás términos se tratan como en el caso I.

Ejemplo 27. Determine la solución de $\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = 8e^t$
La ecuación característica es

$$m^2 - 5m + 4 = (m-4)(m-1) = 0 \tag{2.2.30}$$

luego la solución homogénea es

$$x_h(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^t \tag{2.2.31}$$

Aquí aplica el caso II para $8e^t$ con $k = 0$ y $r = 1$, por lo tanto se propone una solución de la forma (la derivada de te^t no se incluye pues el término e^t ya está dentro de la solución complementaria)

$$x_p(t) = C_1 te^t \tag{2.2.32}$$

Derivando se obtiene

$$\begin{gathered} \dot{x}_p(t) = C_1 e^t + C_1 te^t \\ \ddot{x}_p(t) = C_1 e^t + C_1 te^t + C_1 e^t = C_1 te^t + 2C_1 e^t \end{gathered} \tag{2.2.33}$$

y sustituyendo en la ecuación original

$$(C_1 - 5C_1 + 4C_1)\, te^t + (2C_1 - 5C_1)\, e^t = 8e^t \tag{2.2.34}$$

que implica

$$C_1 = -\frac{8}{3} \tag{2.2.35}$$

por lo tanto la solución completa es

$$x(t) = -\frac{8}{3}te^t + c_1 e^{4t} + c_2 e^t \tag{2.2.36}$$

Ejemplo 28. Halle una solución de $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t$.
La ecuación característica es

$$m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0 \tag{2.2.37}$$

Por lo tanto la solución homogénea es

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 te^t \tag{2.2.38}$$

En este caso $r = 2$ y $f(t) = e^t$ es t^0 veces el término $u(t) = e^t$ por lo que se prueba con $t^{k+r}u(t) = t^{0+2}e^t = t^2 e^t$. Es decir, (no se consideran las derivadas pues ya aparecen en la solución homogénea)

$$x_p = C_1 t^2 e^t \tag{2.2.39}$$

es fácil verificar que en tal caso

$$C_1 = \frac{1}{2} \tag{2.2.40}$$

por lo que

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t + c_1 e^t + c_2 te^t \tag{2.2.41}$$

Ejemplo 29. Encuentre la solución general de $y'' + y = \sin^3 x$
La ecuación característica es

$$m^2 + 1 = (m - i)(m + i) \tag{2.2.42}$$

por lo que la solución homogénea es

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{2.2.43}$$

Luego, hay que escribir $\sin^3 x$ en función de senos y cosenos. Para esto se utiliza su representación compleja

$$\begin{aligned} \sin^3 x = \left(\tfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \tfrac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\ = -\tfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{8i} + \tfrac{3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{8i} = -\tfrac{1}{4}\sin 3x + \tfrac{3}{4}\sin x \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Comparando con la homogénea, el término $-\frac{1}{4}\sin 3x$ no se repite por lo que puede usarse el caso I y suponer que la solución particular es de la forma $C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$. Por otro lado, el término $\frac{3}{4}\sin x$ se repite (salvo el coeficiente) en la solución homogénea, en este caso, se toma $k = 0$ y $r = 1$ pues las raíces a las que está asociado tienen multiplicidad uno, por lo tanto, se supone una dependencia $C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$, es decir, se toma

$$y_p(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x \tag{2.2.45}$$

las derivadas son

$$\begin{aligned} y_p' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x + C_3 \cos x - C_3 x \sin x + C_4 \sin x + C_4 x \cos x \\ y_p'' = -9C_1 \sin 3x - 9C_2 \cos 3x - 2C_3 \sin x - C_3 x \cos x \\ +2C_4 \cos x - C_4 x \sin x \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{aligned} (-9C_1 + C_1)\sin 3x + (-9C_2 + C_2)\cos 3x + (2C_4)\cos x + (-2C_3)\sin x \\ + (-C_4 + C_4)\, x \sin x + (-C_3 + C_3)\, x \cos x = -\tfrac{1}{4}\sin 3x + \tfrac{3}{4}\sin x \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

por lo tanto

$$C_1 = \frac{1}{32} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = -\frac{3}{8} \quad C_4 = 0 \tag{2.2.48}$$

y la solución es

$$y(x) = \frac{1}{32}\sin 3x - \frac{3}{8}x \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{2.2.49}$$

2.2.1.2. Oscilaciones Forzadas

Con el método de coeficientes indeterminados es posible terminar de resolver el problema mecánico del resorte. Ahora se puede estudiar el problema de un oscilador que se somete a una fuerza externa, es decir, estudiar la ecuación

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \tag{2.2.50}$$

Se hará la suposición de que la fuerza es sinusoidal, es decir,

$$F(t) \equiv Am\cos(\omega t) \tag{2.2.51}$$

donde ω es la frecuencia forzada y la amplitud se escoge de la forma anterior para eliminar la masa de la ecuación, es decir, hay que resolver

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t) \tag{2.2.52}$$

primero que todo, hay que mencionar que tomar un seno o coseno es básicamente lo mismo pues las funciones diferen únicamente por su fase. Por otro lado, podría resultar molesto suponer que la fuerza es un coseno pues parece una escogencia muy específica: sin embargo, como se verá más adelante con las series de Fourier, es suficiente estudiar senos y cosenos pues en cierto sentido toda función puede descomponerse a través de senos y cosenos.

Primero se analizará el caso sin amortiguamiento, luego el caso con amortiguamiento con métodos complejos desde el incio en el caso de los circuitos (que formalmente es el mismo que el del resorte), pues aparecen ideas útiles al ver el método por completo con números complejos.

2.2.1.2.1. Oscilaciones Forzadas sin Amortiguamiento

Aquí se debe resolver

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t) \tag{2.2.53}$$

la solución homogénea se estudió antes y conviene en este caso escribirla como

$$x_h = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \tag{2.2.54}$$

Por el método de coeficientes indeterminados, para proponer la solución particular hay que tomar en cuenta dos casos: cuando $\omega = \omega_0$ y cuando $\omega \neq \omega_0$

➯ Caso $\omega \neq \omega_0$: Se puede suponer que

$$x_p = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) \tag{2.2.55}$$

derivando

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= -C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t) \\ \ddot{x}_p &= -C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

sustituyendo en 2.2.53

$$-C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t) + C_1\omega_0^2\cos(\omega t) + C_2\omega_0^2\sin(\omega t) = A\cos(\omega t) \tag{2.2.57}$$

que da

$$C_1 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad C_2 = 0 \tag{2.2.58}$$

por lo tanto, la solución completa es

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \tag{2.2.59}$$

Observe que la solución anterior está "oscilando" a dos frecuencias distintas. Más aún, si la frecuencia forzada se acerca a la frecuencia natural, entonces las oscilaciones se vuelven cada vez más fuertes, por otro lado, si las frecuencias difieren mucho entonces el primer término no va a contribuir tanto. Para analizar mejor la situación, se va a reescribir la solución en forma ligeramente distinta. Primero que todo, por la discusión realizada en el tema de amoriguamiento, la solución homogénea se reescribe como (la amplitud se ha reescalado para simplicar el álgebra)

$$c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega_0 t - \varphi) \tag{2.2.60}$$

por lo que

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(A\cos(\omega t) + B\cos(\omega_0 t - \varphi)\right) \tag{2.2.61}$$

a su vez por simplicidad suponga que se han escogido las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$. En tal caso es fácil verificar que puede tomarse $B = -A$ y $\varphi = 0$, de modo que la solución se reduce a

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right) \tag{2.2.62}$$

Antes de continuar, es útil realizar algunos experimentos númericos. Por ejemplo, tomando una frecuencia forzada lejos de la natural, como (ignorando unidades) $A = 8$, $\omega = 1$, $\omega_0 = 3$, se obtiene la siguiente gráfica

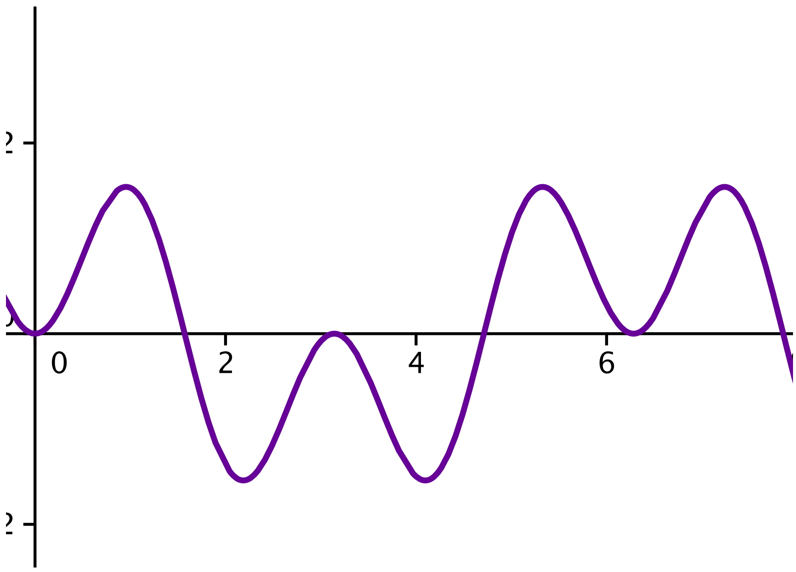

Figura 2.2.1: Frecuencia forzada lejos de la natural $x(t) = \cos(t) - \cos(3t)$

Aquí es fácil observar que el movimiento es periódico pues el cociente de las frecuencias es un número racional. Sin embargo, si el cociento no es racional entonces el movimiento no es periódico. Por ejemplo, tomando $A = 14$, $\omega = \sqrt{2}$, $\omega_0 = 4$ se obtiene

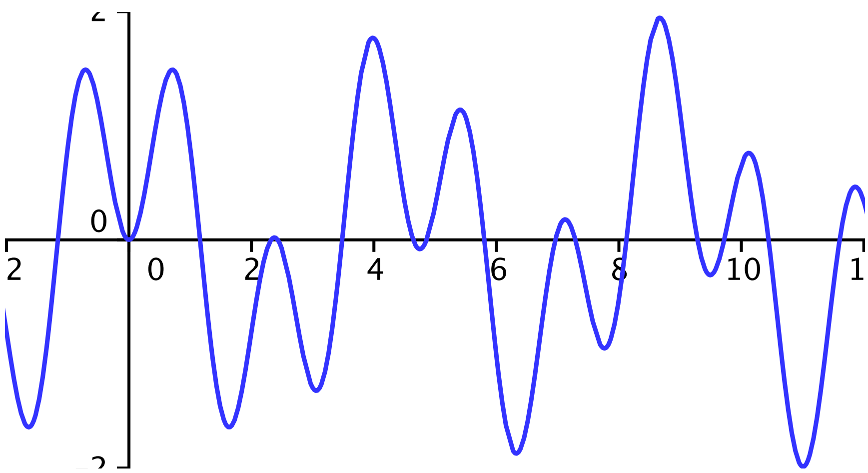

Figura 2.2.2: Frecuencia forzada lejos de la natural no racional, $x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \cos(4t)$

que claramente no se repite nunca de la misma manera.

Ahora suponga que se tiene una frecuencia forzada muy cercana a la frecuencia natural. Definiendo $\omega_0 - \omega \equiv \triangle\omega$ como la diferencia entre las frecuencias se tiene en 2.2.62 que

$$x(t) = \frac{A}{(\triangle\omega)(2\omega_0 - \triangle\omega)}\left(\cos\left((\omega_0 - \Delta\omega)\,t\right) - \cos\left(\omega_0 t\right)\right) \tag{2.2.63}$$

utilizando la identidad

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{2.2.64}$$

se obtiene

$$x(t) = \frac{2A}{\Delta\omega\,(2\omega_0 - \Delta\omega)}\sin\left(\frac{t\Delta\omega}{2}\right)\sin\left(\left(\frac{2\omega_0 - \Delta\omega}{2}\right)t\right) \tag{2.2.65}$$

Observe que el período de la primera onda es $\frac{4\pi}{\triangle\omega}$ mientras que el de la segunda onda es $\frac{4\pi}{2\omega_0 - \triangle\omega}$ lo cual significa que la primera onda cambia mucho más lento comparada con la segunda. De esta forma, se puede interpretar el movimiento es el mismo que el de una onda de período $\frac{4\pi}{2\omega_0 - \triangle\omega}$ modulada por una envolvente

$$g(t) \equiv \frac{2A}{\Delta\omega\,(2\omega_0 - \Delta\omega)}\left|\sin\left(\frac{t\Delta\omega}{2}\right)\right| \tag{2.2.66}$$

en el sentido de que la función oscila entre $-g(t)$ y $g(t)$ rápidamente. Por ejemplo, tomando $\omega_0 = \pi$ y $\triangle\omega = 0{,}1$ y $A = 10$ se obtiene la siguiente gráfica

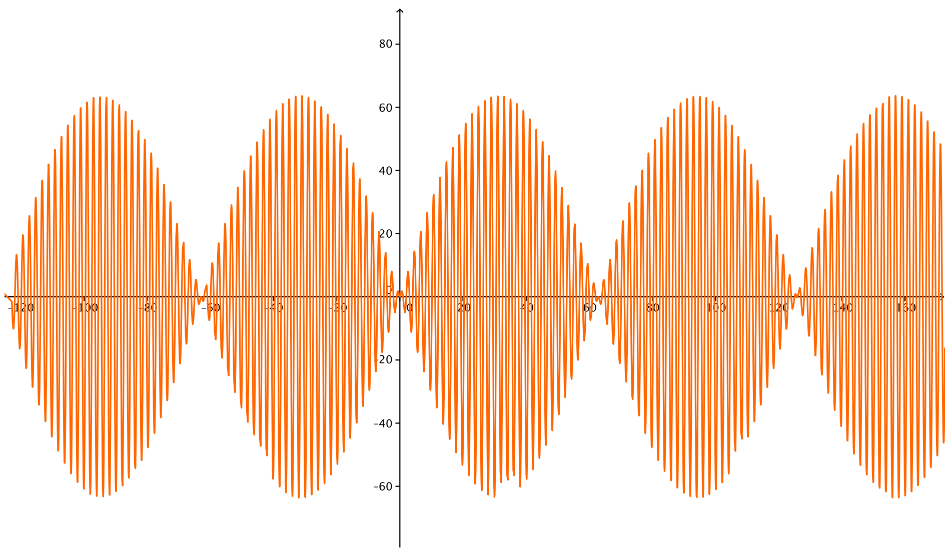

Figura 2.2.3: Gráfica $x(t) = \frac{200}{(2\pi - 0{,}1)}\sin\left(\frac{0{,}1}{2}t\right)\sin\left(\left(\frac{2\pi - 0{,}1}{2}\right)t\right)$

➩ Caso $\omega = \omega_0$: Ahora se toma como solución particular

$$x_p = C_1 t \cos(\omega_0 t) + C_2 t \sin(\omega_0 t) \tag{2.2.67}$$

derivando

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= (C_1 + C_2\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + (C_2 - C_1\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) \\ \ddot{x}_p &= C_2\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 (C_1 + C_2\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) - C_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 (C_2 - C_1\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) \end{aligned} \tag{2.2.68}$$

sustituyendo en 2.2.53 se tiene

$$(2C_2\omega_0)\cos(\omega_0 t) - (2C_1\omega_0)\sin(\omega_0 t) \quad = A\cos(\omega_0 t) \tag{2.2.69}$$

por lo tanto

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{A}{2\omega_0} \tag{2.2.70}$$

luego la solución completa es

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \tag{2.2.71}$$

observe que en este caso el comportamiento es completamente distinto pues conforme $t \longrightarrow \infty$ el primer término va a crecer sin control por el factor de t. Tales fenómeno en el cual la frecuencia de la fuerza sinusoidal coincide con la frecuencia natural y produce amplitudes muy grandes se conoce como resonancia. En la vida real basta con que la frecuencia sea muy parecida a la frecuencia natural.

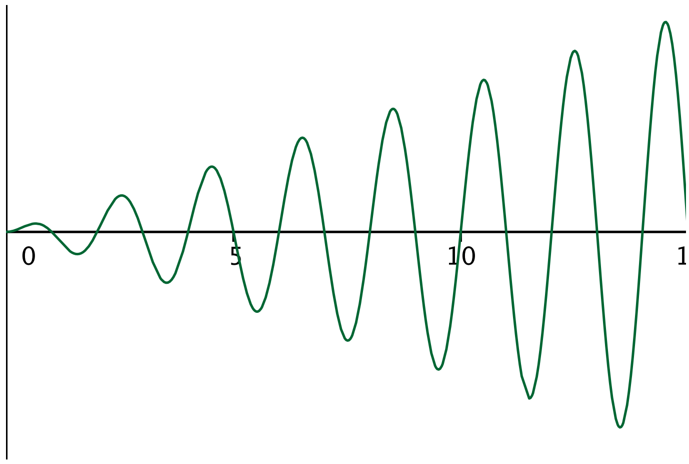

Figura 2.2.4: Resonancia

Ahora se resolverá la ecuación para el circuito en serie con corriente alterna

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t \tag{2.2.72}$$

A diferencia del caso anterior, habría tanto "amortiguamiento" como oscilaciones forzadas por lo que resolver la ecuación con soluciones reales desde el inicio se volvería muy largo. Para simplificar el álgebra, se resolverá 2.2.72 buscando soluciones complejas para una ecuación compleja asociada y se tomará la parte real hasta el final (esto es distinto del Principio de Realidad que solo se utilizó para encontrar soluciones de una ecuación homogénea)

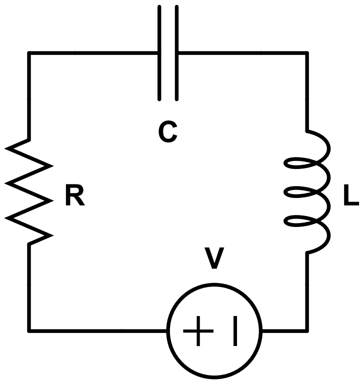

Figura 2.2.5: Cirucito RLC

Primero que todo, la frecuencia (angular) natural del sistema en este caso puede obtenerse a través de la equivalencia formal entre circuitos y sistemas con resortes y es en este caso

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{2.2.73}$$

Luego, por la identidad de Euler

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \tag{2.2.74}$$

2.2.72 se puede escribir como

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right) \tag{2.2.75}$$

luego se buscará resolver la forma compleja de 2.2.75, es decir,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 e^{i\omega t} \tag{2.2.76}$$

y cuando se halle la solución $q(t)$ entonces la parte real será solución de 2.2.72. Generalmente es más importante hallar la corriente $I(t)$ que la carga $q(t)$ por lo que derivando con respecto al tiempo en 2.2.76 y usando que $I = \dot{q}$ se va a resolver

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = i\omega V_0 e^{i\omega t} \tag{2.2.77}$$

obviamente hay que hallar la solución homogénea $I_h(t)$ y una solución particular $I_p(t)$. Sin embargo, lo interesante aquí es hallar la solución particular pues la homogénea se halla igual que siempre, es decir, con la ecuación característica. Para la solución particular se propone una solución de la forma

$$I_p(t) = I_0 e^{i\omega t} \tag{2.2.78}$$

donde I_0 puede ser compleja (como hay amortiguamiento no hay que preocuparse por si $\omega = \omega_0$ o no) . Sustituyendo 2.2.78 en 2.2.77 se obtiene

$$\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right) I_0 e^{i\omega t} = i\omega V_0 e^{i\omega t} \tag{2.2.79}$$

dividiendo a ambos lados por $i\omega e^{i\omega t}$ se llega a

$$\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) I_0 = V_0 \tag{2.2.80}$$

la ecuación 2.2.80 tiene la misma forma que la ley de Ohm $V = IR$ si se identifica

$$Z \equiv R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{2.2.81}$$

como una forma de resistencia compleja. Z se conoce como la impedancia del circuito. La parte real de Z es simplemente la resistencia común mientras que su parte imaginaria se conoce como la reactancia y se denota por X. La reactancia a su vez se divide en la reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y la reactancia capacitiva $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

Luego la solución particular es

$$I_p = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t} \tag{2.2.82}$$

como la impedancia Z es compleja no es útil tenerla en el denominador. Sin embargo, todo número complejo puede escribirse en su forma polar, es decir,

$$Z = |Z|\, e^{i\phi} \tag{2.2.83}$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \tag{2.2.84}$$

Luego,

$$I_p = \frac{V_0}{|Z|\, e^{i\phi}} e^{i\omega t} = \frac{V_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t}}{|Z|} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi)} \tag{2.2.85}$$

como se mencionó antes, lo que interesa es la parte real de la solución anterior, por lo que la solución particular que en verdad importa es (se utiliza el subíndice r para indicar que es real)

$$I_{p,r}(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos\left(\omega t - \phi\right) \tag{2.2.86}$$

para que $I_{p,r}$ tenga las fluctuaciones más grandes posibles (es decir, entre en resonancia) se ocupa que $|Z|$ sea lo más pequeño posible, es decir, se debe aplicar una frecuencia

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.2.87}$$

por lo tanto, la condición de resonancia es la misma con o sin amortiguamiento. La única diferencia es que ahora la solución no crece sin control ya que el término de amortiguamiento (es decir, el término resistivo) se encarga de limitar su crecimiento. Para interpretar ϕ se compara 2.2.86 con la forma de la fem, es decir,

$$I_{p,r}(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi) \qquad V(t) = V_0 \cos(\omega t) \tag{2.2.88}$$

luego, se analizan tres casos comparando $\cos(\omega t - \phi)$ con $\cos(\omega t)$:

1. Caso $\phi > 0$: aquí $\cos(\omega t - \phi)$ alcanza su máximo cuando $t = \frac{\phi}{\omega} + 2\pi n$ con n natural (pues se supone que se comienza a analizar el circuito despúes de $t = 0$) mientras que $\cos(\omega t)$ alcanza su máximo cuando $t = 2\pi n$ lo cual significa que la corriente alcanza su máximo después del voltaje

2. Caso $\phi < 0$: nuevamente los máximos ocurren en los mismos instante solo que ahora como la fase es negativa la corriente alzanza su máximo antes del voltaje

3. Caso $\phi = 0$: cuando la fase la frecuencia es la frecuencia de resonancia y en este caso el voltaje y la corriente están en fase.

2.2.2. Ecuación de Cauchy-Euler

La ecuación de Cauchy-Euler es una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables de la forma

$$a_n t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{2.2.89}$$

donde los a_i son constantes y las potencias de t siempre tienen el mismo grado que el orden de la derivada frente al cual están.

Para resolver la Ecuación de Cauchy Euler

$$a_n t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{2.2.90}$$

se toman dos casos:

- Si se quieren soluciones sobre el intervalo $(0, \infty)$ se realiza el cambio de variable

$$t \equiv e^u \qquad u \equiv \ln t \tag{2.2.91}$$

  y 2.2.90 se convierte en una ecuación de coeficientes constantes. La solución final puede expresarse en términos de potencias de t, senos, cosenos y logaritmos.

- Si se quieren soluciones sobre el intervalo $(-\infty, 0)$ se realiza el cambio de variable

$$\tilde{t} \equiv -t \tag{2.2.92}$$

  y luego se aplica el primer caso.

Ejemplo 30. Resuelva $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} - 4x = 0$ **para** $t > 0$

Se realiza el cambio de variable

$$t = e^u \quad u = \ln t \tag{2.2.93}$$

luego por regla de la cadena

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dx}{du}\frac{1}{t} \tag{2.2.94}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{du}\right)\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{du} = \frac{d^2 x}{du^2}\frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{du} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2 x}{du^2} - \frac{dx}{du}\right) \tag{2.2.95}$$

por lo tanto la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2 x}{du^2} - \frac{dx}{du} - 2\frac{dx}{du} - 4x = 0 \tag{2.2.96}$$

que tiene por ecuación característica

$$m^2 - 3m - 4 = (m-4)(m+1) = 0 \tag{2.2.97}$$

por lo que la solución es

$$x(u) = c_1 e^{4u} + c_2 e^{-u} \tag{2.2.98}$$

como interesa en función de la variable original

$$x(t) = c_1 t^4 + c_2 t^{-1} \tag{2.2.99}$$

Los cambios de variable anteriores pueden aplicarse en cualquier situación por lo que es bueno enunciarlos por aparte:

Bajo el cambio de variable

$$t = e^u \quad u = \ln t \tag{2.2.100}$$

se pueden hacer las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} t\tfrac{dx}{dt} &\longrightarrow \tfrac{dx}{du} \\ t^2\tfrac{d^2x}{dt^2} &\longrightarrow \tfrac{d^2x}{du^2} - \tfrac{dx}{du} \end{aligned} \tag{2.2.101}$$

Ejemplo 31. Resuelva el PVI $\begin{cases} 4t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 17x = 0 \\ x(1) = -1 \\ \dot{x}(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Por 2.2.101 la ecuación diferencial se convierte en

$$4\left(\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du}\right) + 17x = 0 \tag{2.2.102}$$

que tiene por ecuación característica

$$4m^2 - 4m + 17 = \left(m - \left(\frac{1}{2} + 2i\right)\right)\left(m - \left(\frac{1}{2} - 2i\right)\right) = 0 \tag{2.2.103}$$

luego la solución es

$$x(u) = c_1 e^{\frac{1}{2}u}\cos(2u) + c_2 e^{\frac{1}{2}u}\sin(2u) \tag{2.2.104}$$

y en términos de t

$$x(t) = c_1 t^{1/2}\cos(2\ln t) + c_2 t^{1/2}\sin(2\ln t) \tag{2.2.105}$$

Ahora hay que cumplir las condiciones iniciales.

$$-1 = x(1) = c_1 \tag{2.2.106}$$

como

$$\dot{x}(t) = \frac{c_1}{2}t^{-1/2}\cos(2\ln t) - 2c_1 t^{-1/2}\sin(2\ln t) + \frac{c_2}{2}t^{-1/2}\sin(2\ln t) + 2c_2 t^{-1/2}\cos(2\ln t) \tag{2.2.107}$$

aplicando la segunda condición inicial

$$-\frac{1}{2} = \dot{x}(1) = -\frac{1}{2} + 2c_2 \tag{2.2.108}$$

por lo que

$$c_2 = 0 \tag{2.2.109}$$

y la solución es

$$x(t) = -t^{1/2}\cos(2\ln t) \tag{2.2.110}$$

Ejemplo 32. Resuelva $x^2y'' - xy' + y = \ln x$

En este caso el cambio de variable es

$$x = e^u \quad u = \ln x \tag{2.2.111}$$

y aplicando 2.2.101 con el cambio de notación respectivo la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} - \frac{dy}{du} + y = u \tag{2.2.112}$$

la ecuación característica es

$$m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0 \tag{2.2.113}$$

luego la solución homogénea es

$$y_h(u) = c_1e^u + c_2ue^u \tag{2.2.114}$$

Para la particular se toma

$$y_p(u) = C_1u + C_2 \tag{2.2.115}$$

y sustituyendo en 2.2.112 se llega a

$$-2C_1 + C_1u + C_2 = u \tag{2.2.116}$$

o bien

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \tag{2.2.117}$$

por lo tanto la solución general es

$$y(u) = u + 2 + c_1e^u + c_2ue^u \tag{2.2.118}$$

y en términos de x

$$y(x) = \ln x + 2 + c_1x + c_2x\ln x \tag{2.2.119}$$

2.2.3. Reducción de Orden

Para el método de reducción de orden se considera una ODE lineal de segundo orden con coeficientes variables.

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.2.120}$$

En este caso, la ecuación homogénea no puede hallarse con la ecuación característica pues los coeficientes no son constantes por lo que en general no hay una manera algorítmica para resolver la ecuación. Sin embargo, en el caso que se conozca una solución $x_1(t)$ de la solución homogénea

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.2.121}$$

entonces otra solución de la homogénea x_2 puede hallarse suponiendo que es de la forma

$$x_2(t) = x_1(t)u(t) \tag{2.2.122}$$

donde $u(t)$ es una función por determinar. Primero que todo

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 u + x_1 \dot{u} \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 u + 2\dot{x}_1 \dot{u} + x_1 \ddot{u} \end{aligned} \tag{2.2.123}$$

y sustituyendo estas expresiones en 2.2.121 se obtiene que

$$\ddot{x}_1 u + 2\dot{x}_1 \dot{u} + x_1 \ddot{u} + p\left(\dot{x}_1 u + x_1 \dot{u}\right) + q x_1 u = 0 \tag{2.2.124}$$

se agrupan los términos de la siguiente forma

$$u\left(\underbrace{\ddot{x}_1 + p\dot{x}_1 + q x_1}\right) + 2\dot{x}_1 \dot{u} + x_1 \ddot{u} + p x_1 \dot{u} = 0 \tag{2.2.125}$$

el término señalado da cero pues x_1 es solución de la ecuación homogénea por lo que la ecuación se reduce a

$$x_1 \ddot{u} + \left(2\dot{x}_1 + p x_1\right)\dot{u} = 0 \tag{2.2.126}$$

si se hace el cambio de variable

$$v \equiv \dot{u} \tag{2.2.127}$$

la ecuación es lineal de primer orden, es decir

$$x_1 \dot{v} + \left(2\dot{x}_1 + p x_1\right) v = 0 \tag{2.2.128}$$

se divide primero por x_1

$$\dot{v} + \left(2\frac{\dot{x}_1}{x_1} + p\right) v = 0 \tag{2.2.129}$$

y luego como

$$e^{\int \left(2\frac{\dot{x}_1}{x_1} + p\right) dt} = x_1^2 e^{\int p(t) dt} \tag{2.2.130}$$

la ecuación se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2 e^{\int p(t) dt} v\right) = 0 \tag{2.2.131}$$

o bien

$$v = c_1 x_1^{-2} e^{-\int p(t) dt} \tag{2.2.132}$$

como $v = \frac{du}{dt}$ la última ecuación es de variables separables y tiene por solución

$$u = \int c_1 x_1^{-2} e^{-\int p(t) dt} dt + c_2 \tag{2.2.133}$$

de hecho si se toma $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ la solución

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1^2(t)} dt \tag{2.2.134}$$

es solución linealmente independiente con x_1 de la ecuación homogénea asociada. De nuevo recordar la forma de la segunda solución no es necesario, solo es importante saber el cambio de variable.

Suponga que se conoce una solución $x_1(t)$ a la ecuación lineal homogénea

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.2.135}$$

Entonces otra solución $x_2(t)$ puede hallarse tomando

$$x_2(t) = x_1(t)u(t) \tag{2.2.136}$$

y resolver la ecuación lineal que aparece para $\dot{u}(t)$.

Ejemplo 33. Encuentre la solución general de $\left(2t^2+1\right)\ddot{x} - 4t\dot{x} + 4x = 0$ dado que $x_1(t) = t$ es una solución de la ecuación.

Se supone que la segunda solución es

$$x_2 = tu \tag{2.2.137}$$

por lo que

$$\dot{x}_2 = u + t\dot{u} \quad \ddot{x}_2 = 2\dot{u} + t\ddot{u} \tag{2.2.138}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$\left(2t^2+1\right)\left(2\dot{u} + t\ddot{u}\right) - 4t\left(u + t\dot{u}\right) + 4tu = 0 \tag{2.2.139}$$

o bien

$$\left(2t^2+1\right)t\ddot{u} + \left(4t^2 + 2 - 4t^2\right)\dot{u} = 0 \tag{2.2.140}$$

ahora se hace el cambio de variable

$$v = \dot{u} \tag{2.2.141}$$

para resolver

$$\left(2t^3 + t\right)\dot{v} + 2v = 0 \tag{2.2.142}$$

o bien

$$\dot{v} + \frac{2}{t(2t^2+1)}v = 0 \tag{2.2.143}$$

se puede ver como una ecuación lineal o separable

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{v} = \frac{dt}{t(2t^2+1)} \tag{2.2.144}$$

para integrar $\frac{1}{t(t^2+1)}$ se usa fracciones parciales

$$\frac{1}{t(2t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{2t^2+1} \tag{2.2.145}$$

que da

$$A = 1 \quad B = -2 \quad C = 0 \tag{2.2.146}$$

luego integrando 2.2.144

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{t}{2t^2+1}dt \tag{2.2.147}$$

o bien

$$\ln v = -2\ln t + \ln\left(2t^2+1\right) - 2c_1 \tag{2.2.148}$$

exponenciando

$$v = e^{-2c_1}t^{-2}\left(2t^2+1\right) \tag{2.2.149}$$

como $v = \dot{u}$ hay que resolver

$$du = e^{-2c_1}\left(2+t^{-2}\right)dt \tag{2.2.150}$$

integrando a ambos lados

$$u = e^{-2c_1}\left(2t-t^{-1}\right) + c_2 \tag{2.2.151}$$

puede tomarse $c_1 = 0 = c_2$ y se obtiene que $u = 2t - t^{-1}$ por lo que

$$x_2(t) = ux_1 = 2t^2 - 1 \tag{2.2.152}$$

por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 t + c_2\left(2t^2-1\right) \tag{2.2.153}$$

2.2.4. Variación de Parámetros

De todos los métodos que se han visto para resolver ecuaciones lineal, el método de variación de parámetros es el más general para hallar la forma de una solución particular x_p de la ecuación

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.2.154}$$

Primero se supone que se han podido hallar dos soluciones x_1, x_2 de la ecuación homogénea asociada

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.2.155}$$

el método de variación de parámetros consiste en suponer que la solución particular es de la forma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \tag{2.2.156}$$

donde ahora c_1, c_2 son funciones y no constantes. De esta forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{c}_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_p &= \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + c_1 \ddot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2 \dot{x}_2 + c_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \tag{2.2.157}$$

sustituyendo en 2.2.154 se obtiene

$$\begin{gathered} \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + c_1 \ddot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2 \dot{x}_2 + c_2 \ddot{x}_2 + \\ p\left(\dot{c}_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2\right) + q\left(c_1 x_1 + c_2 x_2\right) = f(t) \end{gathered} \tag{2.2.158}$$

que se puede agrupar como

$$\begin{gathered} c_1\left(\ddot{x}_1 + p\dot{x}_1 + q x_1\right) + c_2\left(\ddot{x}_2 + p\dot{x}_2 + q x_2\right) \\ + \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2 \dot{x}_2 + p\left(\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2\right) = f(t) \end{gathered} \tag{2.2.159}$$

las primera línea es cero porque x_1, x_2 satisfacen el sistema homogéneo por lo que hay que resolver la ecuación

$$\ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2 \dot{x}_2 + p\left(\underbrace{\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2}\right) = f(t) \tag{2.2.160}$$

como solo se tiene una ecuación para encontrar dos funciones, hay que imponer alguna otra ecuación que cumplan las ecuaciones. Se va a tomar como ecuación adicional que el coeficiente que multiplica a p sea cero, es decir, se va a pedir que

$$\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \tag{2.2.161}$$

como esta ecuación es cero puede derivarse con respecto a t nuevamente para obtener

$$\ddot{c}_1 x_1 + \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = 0 \tag{2.2.162}$$

sustituyendo las últimas dos ecuaciones en 2.2.160 se obtiene que

$$\dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = f(t) \tag{2.2.163}$$

por lo tanto, hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = f(t) \end{cases} \tag{2.2.164}$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{2.2.165}$$

que por la regla de Cramer tiene solución

$$\dot{c}_1 = -\frac{x_2 f(t)}{W(x_1, x_2)} \quad \dot{c}_2 = \frac{x_1 f(t)}{W(x_1, x_2)} \tag{2.2.166}$$

y luego se integran las ecuaciones anteriores que son de variables separables.

Para resolver

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \tag{2.2.167}$$

conociendo dos soluciones x_1, x_2 de la ecuación homogénea asociada

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2.2.168}$$

se toma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \tag{2.2.169}$$

y se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{2.2.170}$$

que tiene solución

$$\dot{c}_1 = -\frac{x_2 f(t)}{W(x_1, x_2)} \quad \dot{c}_2 = \frac{x_1 f(t)}{W(x_1, x_2)} \tag{2.2.171}$$

luego se integran las dos ecuaciones para obtener c_1, c_2.

Ejemplo 34. Resuelva la ecuación $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = (t+1)e^{2t}$

Primero se resuelve la ecuación homogénea. La ecuación característica es

$$m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0 \tag{2.2.172}$$

por lo que se toman como soluciones de la homogénea

$$x_1(t) = e^{2t} \quad x_2(t) = te^{2t} \tag{2.2.173}$$

luego el Wronskiano de las soluciones es

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}(1 + 2t - 2t) = e^{4t} \tag{2.2.174}$$

por 2.2.171 se tiene

$$\dot{c}_1 = -\frac{te^{2t}(t+1)e^{2t}}{e^{4t}} \quad \dot{c}_2 = \frac{e^{2t}(t+1)e^{2t}}{e^{4t}} \tag{2.2.175}$$

luego hay que resolver

$$\begin{array}{c} \dot{c}_1 = -t^2 - t \longrightarrow c_1 = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \\ \dot{c}_2 = t + 1 \longrightarrow c_2 = \frac{t^2}{2} + t \end{array} \tag{2.2.176}$$

La solución particular es

$$x_p = c_1x_1 + c_2x_2 = \left(-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)te^{2t} = \frac{1}{6}t^3e^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} \tag{2.2.177}$$

y la solución completa es

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3e^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} + c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \tag{2.2.178}$$

Ejemplo 35. Encuentre la solución de $y'' - 3y + 2y = \sin e^{-x}$

En este caso ecuación característica es

$$m^2 - 3m + 2 = (m-2)(m-1) = 0 \tag{2.2.179}$$

por lo que las soluciones de la homogénea son

$$y_1(x) = e^x \qquad y_2(x) = e^{2x} \tag{2.2.180}$$

en este caso el Wronskiano es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \tag{2.2.181}$$

Luego por 2.2.171

$$c_1' = -\frac{e^{2x}\sin e^{-x}}{e^{3x}} \qquad c_2' = \frac{e^x \sin e^{-x}}{e^{3x}} \tag{2.2.182}$$

Para integrar las ecuaciones anteriores se hace el cambio de variable $u = e^{-x}$ en ambos casos, de esta forma

$$\begin{gathered} c_1 = -\int e^{-x}\sin e^{-x}dx = \int \sin u du = -\cos u = -\cos e^{-x} \\ c_2 = \int e^{-2x}\sin e^{-x}dx = -\int u\sin u du = u\cos u - \int \cos u du = e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x} \end{gathered} \tag{2.2.183}$$

Por lo tanto

$$y_p = \left(-\cos e^{-x}\right)e^x + \left(e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x}\right)e^{2x} = -e^{2x}\sin e^{-x} \tag{2.2.184}$$

y la solución general es

$$y(x) = -e^{2x}\sin e^{-x} + c_1e^x + c_2e^{2x} \tag{2.2.185}$$

2.3. Solución de otras ODEs

2.3.1. Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de Bernoulli es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{2.3.1}$$

Si $n = 0, 1$ la ecuación es lineal. De lo contrario se realiza el cambio de variable

$$u = y^{1-n} \tag{2.3.2}$$

que la convierte en una ecuación lineal en u.

Ejemplo 36. Resuelva $y' + xy = xy^{-3}$
En este caso $n = -3$ por lo que se escribe

$$u = y^{1-n} = y^4 \longrightarrow du = 4y^3 dy \tag{2.3.3}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}y^{-3}u' \tag{2.3.4}$$

Por lo tanto la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{4}y^{-3}u' + xy = xy^{-3} \tag{2.3.5}$$

o bien dividiendo por y^{-3}

$$u' + 4xu = 4x \tag{2.3.6}$$

como

$$e^{\int 4x dx} = e^{2x^2} \tag{2.3.7}$$

multiplicando a ambos lados por 2.3.7 se reescribe como

$$\frac{d}{dx}\left(ue^{2x^2}\right) = 4xe^{2x^2} \tag{2.3.8}$$

integrando a ambos lados

$$ue^{2x^2} = e^{2x^2} + c \tag{2.3.9}$$

o bien

$$y^4 = 1 + ce^{-2x^2} \tag{2.3.10}$$

2.3.2. Ecuación de Riccati

Una ecuación de Riccati es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x) \tag{2.3.11}$$

Si $p(x) = 0$ la ecuación es lineal mientras que si $r(x) = 0$ la ecuación es de Bernoulli. En el caso general, se supone que se conoce una ecuación particular y_p y se realiza el cambio de variable

$$y = y_p + \frac{1}{u} \tag{2.3.12}$$

que la convierte en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejemplo 37. Resuelva $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ sabiendo que $y_p(x) = \sec x$ es una solución.

Por 2.3.12 se utiliza el cambio de variable

$$y = \sec x + \frac{1}{u} \tag{2.3.13}$$

derivando con respecto a x

$$y' = \sec x \tan x - \frac{u'}{u^2} \tag{2.3.14}$$

y sustituyendo en la ecuación original

$$\sec x \tan x - \frac{u'}{u^2} = 2\tan x \sec x - \left(\sec x + \frac{1}{u}\right)^2 \sin x \tag{2.3.15}$$

simplificando un poco se obtiene

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2}{u} \sec x \sin x + \frac{1}{u^2} \sin x \tag{2.3.16}$$

multiplicando por u^2

$$u' - 2u \sec x \sin x = \sin x \tag{2.3.17}$$

como

$$e^{-\int 2\sec x \sin x dx} = e^{-2\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ln \cos x} = \cos^2 x \tag{2.3.18}$$

por lo tanto se multiplica por 2.3.18 a ambos lados y se reescribe la ecuación como

$$\frac{d}{dx}\left(u \cos^2 x\right) = \sin x \cos^2 x \tag{2.3.19}$$

como

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x \tag{2.3.20}$$

se obtiene

$$u \cos^2 x = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c \tag{2.3.21}$$

o bien como $u = \frac{1}{y - \sec x}$ se obtiene

$$\frac{1}{y - \sec x} = \frac{-\cos^3 x + 3c}{3\cos^2 x} \tag{2.3.22}$$

o bien

$$y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{-\cos^3 x + 3c} \tag{2.3.23}$$

2.3.3. Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange es una ecuación de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{2.3.24}$$

Para resolver 2.3.24 se deriva con respecto a x la ecuación y se realiza el cambio de variable

$$u \equiv y' \tag{2.3.25}$$

y se obtiene una ecuación lineal en x. La solución queda en forma paramétrica en función de u, es decir, se escribe como $x = x(u)$ y $y = y(u)$

Ejemplo 38. Resuelva la ecuación $y = x(1 + y') + (y')^3$

Primero se deriva la ecuación con respecto a x

$$y' = 1 + y' + xy'' + 3\left(y'\right)^2 y'' \tag{2.3.26}$$

luego se utiliza el cambio de variable

$$u = y' \tag{2.3.27}$$

para obtener

$$0 = 1 + x\frac{du}{dx} + 3u^2\frac{du}{dx} \tag{2.3.28}$$

o bien

$$-\frac{dx}{du} = x + 3u^2 \tag{2.3.29}$$

se escribe en la forma estándar

$$\frac{dx}{du} + x = -3u^2 \tag{2.3.30}$$

el factor de integración es

$$e^{\int 1du} = e^u \tag{2.3.31}$$

multiplicando por e^u a ambos lados

$$e^u\frac{dx}{du} + e^u x = -3u^2e^u \tag{2.3.32}$$

o bien

$$\frac{d}{du}(xe^u) = -3u^2e^u \tag{2.3.33}$$

como

$$\int u^2e^u = u^2e^u - 2\int ue^u = u^2e^u - 2\left(ue^u - e^u\right) \tag{2.3.34}$$

por lo tanto

$$xe^u = -3u^2e^u + 6ue^u - 6e^u + c \tag{2.3.35}$$

la solución paramétrica es

$$x(u) = -3u^2 + 6u - 6 + ce^{-u} \tag{2.3.36}$$

y la ecuación original $y = x(1 + y') + (y')^3$ permite escribir y como función de u según

$$y(u) = x(1+u)+u^3 = \left(-3u^2 + 6u - 6 + ce^{-u}\right)(1+u)+u^3 = -2u^2+3u^2-6+ce^{-u}(1+u) \tag{2.3.37}$$

por lo tanto la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x(u) = -3u^2 + 6u - 6 + ce^{-u} \\ y(u) = -2u^2 + 3u^2 - 6 + ce^{-u}(1+u) \end{cases} \tag{2.3.38}$$

2.3.4. Ecuación de Clairaut

La ecuación de Clairut es un caso particular de la ecuación de Lagrange

$$y = xy' + \psi(y') \tag{2.3.39}$$

Primero se deriva con respecto a x y se resuelve haciendo el cambio de variable

$$u \equiv y' \tag{2.3.40}$$

En este caso la solución puede escribirse en función de x y puede aparecer una solución singular que aparece al eliminar u de las ecuaciones

$$y = xu + \psi(u) \quad x + \psi'(u) = 0 \tag{2.3.41}$$

Ejemplo 39. Resuelva la ecuación $y = xy' + (y')^3$

Se deriva primero la ecuación con respecto a x.

$$y' = y' + xy'' + 3(y')^2y'' \tag{2.3.42}$$

luego haciendo el cambio de variable

$$u = y' \tag{2.3.43}$$

hay que resolver

$$0 = x\frac{du}{dx} + 3u^2\frac{du}{dx} \tag{2.3.44}$$

que se puede escribir como

$$\left(x + 3u^2\right)\frac{du}{dx} = 0 \tag{2.3.45}$$

la solución de la ecuación anterior es (dividiendo por $x + 3u^2$ a ambos lados)

$$u = c_1 \tag{2.3.46}$$

es decir,

$$y' = c_1 \tag{2.3.47}$$

integrando la ecuación se tiene

$$y = c_1 x + c_2 \tag{2.3.48}$$

observe que aquí aparecen dos constantes pues para resolver la ecuación se derivó con respecto a x aumentando su orden. Como se quiere una solución de la ecuación original $y = xy' + (y')^3$ se reemplaza 2.3.48 en la ecuación anterior para obtener

$$c_1 x + c_2 = x c_1 + (c_1)^3 \tag{2.3.49}$$

luego

$$c_2 = (c_1)^3 \tag{2.3.50}$$

por lo que la solución es

$$y(x) = c_1 x + (c_1)^3 \tag{2.3.51}$$

Para obtener la solución singular se resuelven las ecuaciones 2.3.41, es decir,

$$y = xu + u^3 \quad x = -3u^2 \quad u = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}x} \tag{2.3.52}$$

sustituye la segunda ecuación en la primera la solución singular es

$$y_s(x) = \pm x\sqrt{-\frac{1}{3}x} \pm \left(\sqrt{-\frac{1}{3}x}\right)^3 \tag{2.3.53}$$

2.3.5. Otros ejemplos

Los siguientes ejemplos pueden resolverse con las técnicas estudiadas hasta el momento. Algunos de estos ejemplos ilustran la forma en que se resuelven algunos modelos matemáticos sencillos de la vida real que aparecen en distintas aplicaciones.

Ejemplo 40. Suponga que se tiene un tanque que puede contener 100 L y que en un momento dado posee 10 kg de sal disueltos en 60 L de agua. A su vez, se añade una solución de agua y sal que posee una concentración de $0{,}1$ kg de sal por cada litro de la solución y que entra dentro del tanque a una tasa de 5 L por minuto. A su vez, se supone que la solución dentro del tanque se mezcla bien de modo que la concentración de sal en el agua siempre es la misma y se bota del tanque a una razón de 3 L por minuto. ¿Cuánta sal hay en el tanque en el momento en que este está lleno?

Para comenzar a resolver el problema lo más importante es realizar un diagrama de la situación.

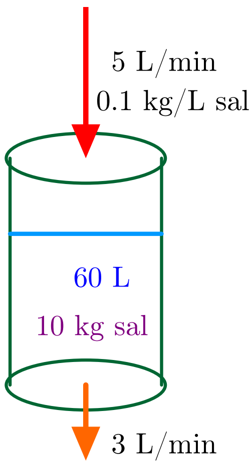

Figura 2.3.1: Tanque y concentración inicial

Para resolver el problema, se toma $m(t)$ como la cantidad de sal en kilogramos en el tanque en tiempo t. Por las condiciones del problema $m(0) = 10$. Si $\triangle t$ es un intervalo de tiempo muy pequeño (medido en minutos) entonces el cambio de sal en el tanque es

$$\begin{gathered}\triangle m \simeq \text{masa que entra} - \text{masa que sale} = \\ (\text{tasa de entrada de mezcla})\,(\text{concentración de sal que entra})\,\triangle t \\ -\,(\text{tasa de salida de mezcla})\,(\text{concentración de sal que sale})\,\triangle t\end{gathered} \tag{2.3.54}$$

Por los datos del problema se tiene (en estos problemas es útil tener presente las unidades de las cantidades físicas)

$$\text{tasa de entrada} = 5\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} \tag{2.3.55}$$

$$\text{concentración de sal que entra} = 0{,}1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{L}} \tag{2.3.56}$$

$$\text{tasa de salida de mezcla} = 3\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} \tag{2.3.57}$$

Falta hallar la concentración de sal que sale que no viene dada directamente a partir de los datos del problema. Primero que todo el volumen de la mezcla $V(t)$ en el tanque en tiempo t es

$$V(t) = 60\mathrm{L} + (5-3)t\mathrm{L} \tag{2.3.58}$$

como la concentración de sal es uniforme dentro del tanque se tiene

$$\text{concentración de sal que sale} = \frac{m(t)}{V(t)} = \frac{m(t)}{60\mathrm{L} + (5-3)t\mathrm{L}} \tag{2.3.59}$$

por lo tanto, tomando $\triangle m \longrightarrow 0$ en 2.3.54 se tiene

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}5\frac{\text{kg}}{\text{min}} - \frac{3m}{60\text{min} + 2t\text{min}} \tag{2.3.60}$$

ignorando las unidades (ya sirvieron sus propósitos) hay que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dm}{dt} + \frac{3m}{60 + 2t} = 0{,}5 \tag{2.3.61}$$

la ecuación es lineal en m y tiene por solución

$$m(t) = \frac{60 + 2t}{10} + c\,(60 + 2t)^{-3/2} \tag{2.3.62}$$

para hallar la constante se utiliza la condición inicial $m(0) = 10$ y se obtiene $c = 4\,(60)^{3/2}$. El tanque está lleno cuando $V(t) = 100$, es decir, $t = 20$. La cantidad de sal en ese instante es entonces

$$m(20) = \frac{60 + 40}{10} + 4\,(60)^{3/2}\,(60 + 40)^{-3/2} \simeq 11{,}86\text{kg} \tag{2.3.63}$$

Ejemplo 41. Suponga que se lanza una partícula verticalmente con velocidad inicial v_0 y la resistencia del aire está presente. Se toma tal resistencia proporcional a la velocidad, es decir, $F_r = -kv$ $(k > 0)$. A su vez, se toma en cuenta el peso de la partícual de masa m, $F_g = -mg$. Halle la altura máxima que alcanza la partícula y el tiempo que toma en alcanzarlo.

Se utiliza la segunda ley de Newton $F = m\frac{dv}{dt}$ donde F representa la fuerza neta. Por lo tanto, hay que resolver la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg \tag{2.3.64}$$

La ecuación anterior es lineal en v y se escribe como

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \tag{2.3.65}$$

el factor de integración es en este caso

$$e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{k}{m}t} \tag{2.3.66}$$

multiplicando por él a ambos lados se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{k}{m}t}v\right) = -ge^{\frac{k}{m}t} \tag{2.3.67}$$

luego

$$e^{\frac{k}{m}t}v = -\frac{gm}{k}e^{\frac{k}{m}t} + c \tag{2.3.68}$$

o bien

$$v(t) = -\frac{gm}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t} \tag{2.3.69}$$

utilizando la condición inicial $v(0) = v_0$ se obtiene

$$v_0 = -\frac{gm}{k} + c \tag{2.3.70}$$

o bien

$$v(t) = -\frac{gm}{k} + \left(\frac{kv_0 + gm}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} \tag{2.3.71}$$

Suponiendo que se utiliza el eje y para medir la altura de la partícula y que $y(0) = 0$ entonces 2.3.71 es a su vez la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{gm}{k} + \left(\frac{kv_0 + mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} \tag{2.3.72}$$

como la ecuación es de variable separables se tiene

$$y(t) = -\frac{gm}{k}t - \left(\frac{kmv_0 + gm^2}{k^2}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + c_1 \tag{2.3.73}$$

con la condición inicial se tiene

$$0 = -\frac{kmv_0 + gm^2}{k^2} + c_1 \tag{2.3.74}$$

por lo que

$$y(t) = -\frac{gm}{k}t + \left(\frac{mkv_0 + gm^2}{k^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{2.3.75}$$

La altura máxima se alcanza cuando $\frac{dy}{dt} = v(t) = 0$, es decir, usando 2.3.71 cuando

$$0 = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mkv_0 + gm^2}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t_m} \tag{2.3.76}$$

por lo tanto

$$\frac{gm}{kv_0 + gm} = e^{-\frac{k}{m}t_m} \tag{2.3.77}$$

tomando el logaritmo natural se tiene que el tiempo de altura máxima es

$$t_m = -\frac{m}{k} \ln\left(\frac{gm}{kv_0 + gm}\right) \tag{2.3.78}$$

Luego la altura máxima ocurre en $y\left(t_m\right)$, es decir,

$$y_m = \frac{gm^2}{k^2} \ln\left(\frac{gm}{kv_0 + gm}\right) + \left(\frac{mkv_0 + gm^2}{k^2}\right)\left(1 - \frac{gm}{kv_0 + gm}\right) = -\frac{gm^2}{k^2} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right) + \frac{mv_0}{k} \tag{2.3.79}$$

A veces una sustancia C se produce a partir de dos sustancias A y B, por ejemplo en las reacciones químicas. Es natural suponer que la producción de la nueva sustancia es proporcional a la cantidad que todavía no ha sido utilizada de cada una de las sustancias originales. Si $s_{A,0}$ y $s_{B,0}$ representan las cantidades iniciales de las sustancias y $x(t)$ representa el número de unidades de la sustancia C en tiempo t entonces las hipótesis anteriores implican que

$$\frac{dx}{dt} = k\left(s_{A,0} - mx\right)\left(s_{B,0} - nx\right) \tag{2.3.80}$$

donde una unidad de C se forman con m unidades de A y n unidades de B.

Ejemplo 42. Suponga que una unidad de una sustancia C se forma al tomar dos unidades de A y dos unidades de B cuyas cantidades iniciales son respectivamente $s_{A,0} = 10$ y $s_{B,0} = 8$. Si la tasa a la que se forma la sustancia C es conjuntamente proporcional a las cantidades remanentes de A y B halle el número de unidades de C en tiempo t si $x(5) = 1$ donde el tiempo se mide en minutos y $x(t)$ es el número de unidades en tiempo t.

Se utiliza 2.3.80 con $s_{A,0} = 10$, $s_{B,0} = 8$, $m = n = 2$.

$$\frac{dx}{dt} = k\left(10 - 2x\right)\left(8 - 2x\right) = 4k\left(5 - x\right)\left(4 - x\right) \tag{2.3.81}$$

Por fracciones parciales

$$\frac{1}{\left(5 - x\right)\left(4 - x\right)} = \frac{1}{4 - x} - \frac{1}{5 - x} \tag{2.3.82}$$

por lo que hay que resolver

$$\left(\frac{1}{4 - x} - \frac{1}{5 - x}\right) dx = 4kdt \tag{2.3.83}$$

integrando a ambos lados (observe que por las condiciones del problema $x < 4$ siempre)

$$-\ln\left(4 - x\right) + \ln\left(5 - x\right) = 4kt + c \tag{2.3.84}$$

que puede escribirse como

$$\frac{5 - x}{4 - x} = e^{c}e^{4kt} \tag{2.3.85}$$

primero que todo, como inicialmente no hay sustancia C, es decir, $x(0) = 0$ se tiene

$$\frac{5}{4} = e^{c} \tag{2.3.86}$$

por lo que

$$\frac{5 - x}{4 - x} = \frac{5}{4}e^{4kt} \tag{2.3.87}$$

usando la condición inicial $x(5) = 1$ se tiene

$$\frac{4}{3} = \frac{5}{4}e^{20k} \tag{2.3.88}$$

o bien

$$k = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{16}{15}\right) \tag{2.3.89}$$

por lo tanto

$$\frac{5-x}{4-x} = \frac{5}{4}e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{16}{15}\right)t} \tag{2.3.90}$$

cuando $t = 10$ un cálculo sencillo muestra que $x = 1{,}63$

Otro modelo sencillo es en el que se disuelve una sustancia en una solución y la tasa en que se disuelve la sustancia es proporcional a la cantidad de substancia que todavía no se ha disuelto y la diferencia entre la concentración de la solución saturada y la concentración actual de la sustancia en la solución.

En este caso se toma $x(t)$ representando la cantidad de sustancia no disuelta en tiempo t, V es el volumen de la solución. Si $x(0) = x_0$ representa la cantidad inicial como $x_0 - x(t)$ representa la cantidad que se ha disuelto en tiempo t y $\frac{x_0 - x(t)}{V}$ la concentración de la sustancia en la solución entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(c - \frac{x_0 - x}{V}\right) \tag{2.3.91}$$

donde c es la concentración de la sustancia en la solución saturada.

Ejemplo 43. Se colocan 5 kilogramos de una sustancia C en dos litros de agua y se encuentra que 1 kg se disuelve en una hora. Suponiendo que la solución saturada corresponde a una concentración de 4 kg por litro, halle: a) la cantidad de C que no se ha disuelto después de dos horas. b) La concentración de la solución después de tres horas y c) cuándo la concentración será de dos kilogramos por litro.

Se utiliza la ecuación 2.3.91. En este caso

$$c = 4\frac{\text{kg}}{\text{L}} \tag{2.3.92}$$

$$x_0 = 5\text{kg} \tag{2.3.93}$$

$$V = 2\text{L} \tag{2.3.94}$$

Luego hay que resolver

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(4 - \frac{5-x}{2}\right) \tag{2.3.95}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2} x\,(3 + x) \tag{2.3.96}$$

la ecuación es de variables separables por lo que se puede escribir como

$$\frac{dx}{x(x+3)} = \frac{k}{2} dt \tag{2.3.97}$$

por fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)} \tag{2.3.98}$$

integrando la ecuación a ambos lados se obtine

$$\ln x - \ln(x+3) = \frac{3}{2} kt + c_1 \tag{2.3.99}$$

o bien

$$\frac{x}{x+3} = e^{c_1} e^{\frac{3}{2}kt} \tag{2.3.100}$$

por lo tanto, la cantidad no disuelta en función del tiempo es

$$x(t) = \frac{3e^{c_1} e^{\frac{3}{2}kt}}{1 - e^{c_1} e^{\frac{3}{2}kt}} \tag{2.3.101}$$

para hallar los valores de las constantes se utilizan las condiciones $x(0) = 5$ y $x(1) = 4$. La primera condición implica que

$$5 = \frac{3e^{c_1}}{1 - e^{c_1}} \tag{2.3.102}$$

por lo que

$$e^{c_1} = \frac{5}{8} \tag{2.3.103}$$

reemplazando en 2.3.101

$$x(t) = \frac{15e^{\frac{3}{2}kt}}{8 - 5e^{\frac{3}{2}kt}} = \frac{15}{8e^{-\frac{3}{2}kt} - 5} \tag{2.3.104}$$

La segunda condición da

$$4 = \frac{15e^{\frac{3}{2}k}}{8 - 5e^{\frac{3}{2}k}} \tag{2.3.105}$$

o bien

$$e^{\frac{3}{2}k} = \frac{32}{35} \tag{2.3.106}$$

por lo tanto

$$k = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{32}{35}\right) \simeq -0{,}05 \tag{2.3.107}$$

luego a) la cantidad no disuelta después de 2 horas es

$$x(2) = \frac{15}{8e^{-2\ln\left(\frac{32}{35}\right)} - 5} \simeq 3{,}28\text{kg} \tag{2.3.108}$$

para b) primero se calcula

$$x(3) = \frac{15}{8e^{-3\ln\left(\frac{32}{35}\right)} - 5} \simeq 2{,}74\text{kg} \tag{2.3.109}$$

por lo tanto la cantidad disuelta en el agua es

$$x(0) - x(3) = 5\text{kg} - 2{,}74\text{kg} = 2{,}25\text{kg} \tag{2.3.110}$$

y la concentración sería

$$\frac{2{,}25}{2}\frac{\text{kg}}{\text{L}} = 1{,}125\frac{\text{kg}}{\text{L}} \tag{2.3.111}$$

para c) si la concentración es de dos kilogramos por litros como hay dos litros de agua eso significa que se han disuelto 4 kilogramos por lo quedaría solo un kilogramo sin disolver. Luego, hay que ver para que tiempo se cumple $1 = x(t)$, es decir,

$$1 = \frac{15}{8e^{-\frac{3}{2}kt} - 5} \tag{2.3.112}$$

o bien

$$e^{-\frac{3}{2}kt} = \frac{20}{8} \tag{2.3.113}$$

tomando logaritmo

$$\frac{3}{2}kt = -\ln\left(\frac{5}{2}\right) \tag{2.3.114}$$

usando el valor de k

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln\left(\frac{32}{35}\right)} \simeq 10{,}22\text{hr} \tag{2.3.115}$$

Muchas veces en una ecuación diferencial de segundo orden no aparece explícitamente la función sino que solo sus derivadas, es decir, se tiene $F(x, y', y'') = 0$. En tal caso para resolver la ecuación primero se utiliza el cambio de variable $u = y'$ y se resuelve para u la ecuación de primer orden que aparece.

Ejemplo 44. Resuelva la ecuación diferencial $xy'' = y'$

Se realiza el cambio de variable $u = y'$ y la ecuación se convierte en

$$xu' = u \tag{2.3.116}$$

esta ecuación es lineal en u

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \tag{2.3.117}$$

y el factor de integración es

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx} = x^{-1} \tag{2.3.118}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right) = 0 \tag{2.3.119}$$

o bien

$$u = c_1 x \tag{2.3.120}$$

luego

$$y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2 \tag{2.3.121}$$

A veces la variable independiente no aparece en una ecuación de segundo orden, es decir, se tiene una ecuación de la forma $F(y, y', y'') = 0$. En tal caso puede utilizarse nuevamente la sustitución $u = y'$ y utilizar y como variable independiente mediante

$$y'' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} \tag{2.3.122}$$

Ejemplo 45. Resuelva la ecuación $yy'' + (y')^3 = 0$

Se utiliza nuevamente el cambio de variable $u = y'$ y como en la ecuación no aparece x explícitamente se utiliza el hecho de que $y'' = u\frac{du}{dy}$. Por lo tanto, la ecuación se convierte en

$$yu\frac{du}{dy} + u^3 = 0 \tag{2.3.123}$$

o bien

$$y\frac{du}{dy} = -u^2 \tag{2.3.124}$$

como es de variables separables se escribe en la forma

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{y} \tag{2.3.125}$$

integrando a ambos lados

$$\frac{1}{u} = \ln y + c_1 \tag{2.3.126}$$

lo cual da

$$\frac{1}{y'} = \ln y + c_1 \tag{2.3.127}$$

se puede resolver implícitamente ya que la ecuación es separable como

$$dx = (\ln y + c_1)\, dy \tag{2.3.128}$$

como

$$\int \ln y dy = y\ln y - y \tag{2.3.129}$$

la solución final es

$$x = y\ln y - y + c_1 y + c_2 \tag{2.3.130}$$

Ejemplo 46. Determine la región del plano xy en la cual la ecuación diferencial $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$. Encuentra la solución singular de la ecuación anterior. Determínela. ¿Afecta la existencia de tal solución la unicidad en el punto anterior?

El problema anterior se puede escribir como $y' = f(x, y)$ donde $f(x, y) = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$. Primero que todo, para que la ecuación tenga sentido se ocupa que $y - 2x + 3 \geq 0$ o bien

$$y \geq 2x - 3 \tag{2.3.131}$$

En segundo lugar, como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - 2x + 3}} \tag{2.3.132}$$

el teorema de existencia y unicidad permite garantizar una solución única cuando $2\sqrt{y - 2x + 3} \neq 0$, es decir, cuando

$$y - 2x + 3 \neq 0 \tag{2.3.133}$$

por lo tanto, la unicidad de la solución del PVI $\begin{cases} y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ está garantizada cuando el punto (x_0, y_0) cumple

$$y_0 > 2x_0 - 3 \tag{2.3.134}$$

Para encontrar la solución singular primero se realiza el cambio de variable

$$u = y - 2x + 3 \tag{2.3.135}$$

derivando la ecuación anterior se obtiene

$$u' = y' - 2 \tag{2.3.136}$$

por lo que la ecuación diferencial original puede escribirse como

$$u' = \sqrt{u} \tag{2.3.137}$$

dado que la ecuación es de variables separables para resolverla hay que dividir por $\sqrt{u}$. Sin embargo, en tal momento aparece la restricción de que la raíz no se anule. La solución singular es precisamente cuando $\sqrt{u} = 0$, es decir, cuando

$$y = 2x - 3 \tag{2.3.138}$$

No se viola el teorema de existencia y unicidad precisamente porque tal ecuación está sobre la región en la que el teorema no es válido.

Ejemplo 47. Halle la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables definida para $x > 0$: $xy'' - (2x-1)y' - (1-x)y = e^x$ conociendo que e^x es la suma de dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea

Por el principio de superposición la suma de dos soluciones de la ecuación homogénea vuelve a ser solución de la ecuación homogénea lo cual significa que e^x es solución de

$$xy'' - (2x-1)y' - (1-x)y = 0 \tag{2.3.139}$$

como puede verificarse fácilmente. Ahora hay que hallar otra solución linealmente independiente para 2.3.139. Se utiliza el método de reducción de orden, es decir, se toma la segunda solución y_2 como

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^x \tag{2.3.140}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} y_2' &= u'e^x + ue^x = (u'+u)e^x \\ y_2'' &= (u''+u')e^x + (u'+u)e^x = (u''+2u'+u)e^x \end{aligned} \tag{2.3.141}$$

y sustituyendo en 2.3.139

$$x(u''+2u'+u)e^x - (2x-1)(u'+u)e^x - (1-x)ue^x = 0 \tag{2.3.142}$$

se puede eliminar e^x de la ecuación y agrupar según las derivadas

$$xu'' + (2x - 2x + 1)\,u' + (x - 2x + 1 - 1 + x)\,u = 0 \tag{2.3.143}$$

haciendo el cambio de variable $v = u'$ hay que resolver

$$xv' + v = 0 \tag{2.3.144}$$

la cual es lineal y puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(xv) = 0 \tag{2.3.145}$$

por lo tanto

$$xv = c_1 \tag{2.3.146}$$

ahora hay que resolver

$$u' = \frac{c_1}{x} \tag{2.3.147}$$

que tiene por solución

$$u = c_1 \ln x + c_2 \tag{2.3.148}$$

por lo tanto

$$y_2(x) = (c_1 \ln x + c_2)\,e^x \tag{2.3.149}$$

como solo se ocupa una solución homogénea se toma $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ para que

$$y_2(x) = e^x \ln x \tag{2.3.150}$$

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea se utiliza el método de coeficientes indeterminados, es decir, las fórmulas 2.2.171 donde primero hay que escribir la ecuación en forma estándar, es decir,

$$y'' - \frac{(2x-1)}{x}y' - \frac{(1-x)}{x}y = \frac{e^x}{x} \tag{2.3.151}$$

para tomar $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\frac{dc_1}{dx} = -\frac{y_2 e^x}{xW(y_1,y_2)} = -\frac{e^{2x}\ln x}{xW(y_1,y_2)} \quad \frac{dc_2}{dx} = \frac{y_1 e^x}{xW(y_1,y_2)} = \frac{e^{2x}}{xW(y_1,y_2)} \tag{2.3.152}$$

Primero hay que calcular el Wronskiano de las soluciones

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^x \ln x \\ e^x & e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = e^{2x}\left(\ln x + \frac{1}{x} - \ln x\right) = \frac{e^{2x}}{x} \tag{2.3.153}$$

Por lo tanto

$$\frac{dc_1}{dx} = -\ln x \tag{2.3.154}$$

por partes se verifica que

$$\int \ln x dx = x\ln x - x \tag{2.3.155}$$

por lo que

$$c_1(x) = x - x\ln x \tag{2.3.156}$$

Para hallar la segunda constante se resuelve

$$\frac{dc_2}{dx} = 1 \tag{2.3.157}$$

por lo tanto

$$c_2(x) = x \tag{2.3.158}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = (x - x\ln x)e^x + xe^x \ln x \tag{2.3.159}$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = xe^x + C_1 e^x + C_2 e^x \ln x \tag{2.3.160}$$

Ejemplo 48. Resuelva el PVI $\begin{cases} (y^2+2y+x^2)y' + 2x = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Primero se escribe la ecuación como

$$2xdx + \left(y^2 + 2y + x^2\right)dy = 0 \tag{2.3.161}$$

como $F_1 = 2x$ y $F_2 = y^2 + 2y + x^2$. Es fácil verificar que la ecuación no es exacta por lo que se va a intentar con un factor integrante $\mu(y)$. En tal caso por 1.3.103

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}{F_1} \tag{2.3.162}$$

o bien

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = 1 \tag{2.3.163}$$

es decir,

$$\ln \mu = y \tag{2.3.164}$$

por lo tanto

$$\mu = e^y \tag{2.3.165}$$

Por lo tanto la ecuación

$$2xe^y dx + \left(y^2 e^y + 2ye^y + x^2 e^y\right) dy = 0 \tag{2.3.166}$$

es exacta y hay que resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 e^y + 2ye^y + x^2 e^y \tag{2.3.167}$$

integrando la primera ecuación

$$f = x^2 e^y + g(y) \tag{2.3.168}$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y + g'(y) \tag{2.3.169}$$

y comparando con 2.3.167

$$g'(y) = 2ye^y + y^2 e^y \tag{2.3.170}$$

integrando la ecuación

$$g(y) = 2\left(y-1\right)e^y + \left(y^2 - 2y + 2\right)e^y + c \tag{2.3.171}$$

por lo tanto la solución de la ecuación es

$$x^2 e^y + 2\left(y-1\right)e^y + \left(y^2 - 2y + 2\right)e^y = C \tag{2.3.172}$$

como debe cumplirse la condición inicial $y(1) = 0$ reemplazando en la ecuación anterior se obtiene $C = 1$ por lo que la solución (implícita) es

$$x^2 e^y + 2\left(y-1\right)e^y + \left(y^2 - 2y + 2\right)e^y = 1 \tag{2.3.173}$$

o simplificando un poco

$$e^y\left(x^2 + y^2\right) = 1 \tag{2.3.174}$$

Ejemplo 49. Un objeto de masa 1kg se encuentra suspendido de un resorte con una constante de restitución de $2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. El objeto está inmerso en un medio viscoso que proporciona un amortiguamiento de $3\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$. En el instante en que el objeto se suelta, éste se encuentra $\frac{1}{4}$m por debajo de su posición de equilibrio. Determine la posición del objeto en cualquier instante.

Primero considere la siguiente figura.

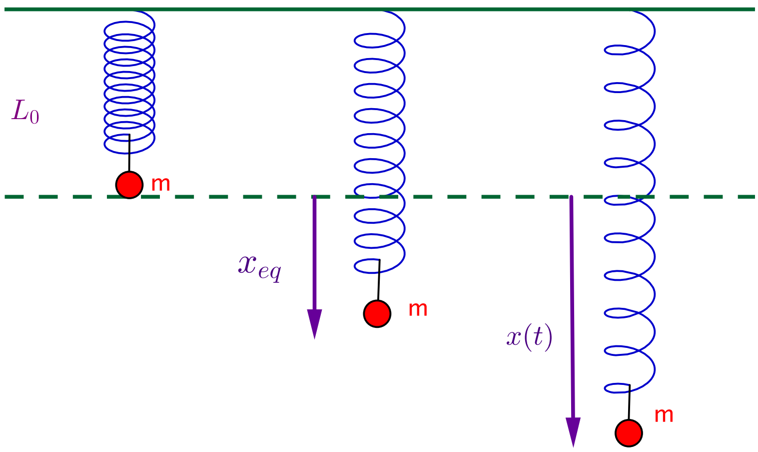

Figura 2.3.2: Resorte y masa suspendida

Se van a medir las posiciones con respecto a la longitud natural del resorte, es decir, la no estirada. En la primera figura el resorte está en su longitud natural L_0 y se acaba de suspender la masa m. Luego, en la segunda figura el resorte y la masa llega a la nueva posición de equilibrio x_{eq} que se caracteriza por la condición de que el peso de la masa se cancela (segunda ley) con la fuerza de restitución, es decir,

$$mg = kx_{eq} \tag{2.3.175}$$

o bien

$$x_{eq} = \frac{mg}{k} = 4{,}9\mathrm{m} \tag{2.3.176}$$

En la tercera imagen la masa ocupa una posición arbitraria $x(t)$. Por la segunda ley de Newton (y la convención de que $x+$ está por debajo del techo)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\frac{dx}{dt} - kx \tag{2.3.177}$$

Por lo tanto, hay que resolver la ecuación diferencial[2]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = mg \tag{2.3.178}$$

[2]dependiendo de donde se escogiera el origen de coordenadas la ecuación puede cambiar ligeramente su forma pero para todos los efectos prácticos es la misma

dividiendo por k y utilizando la ecuación para la posición de equilibrio

$$\frac{m}{k}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{k}\frac{dx}{dt}+x=x_{eq} \tag{2.3.179}$$

sustituyendo con los valores del problema

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}+x=x_{eq} \tag{2.3.180}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=2x_{eq} \tag{2.3.181}$$

la ecuación característica asociada es

$$m^2+3m+2=(m+2)(m+1)=0 \tag{2.3.182}$$

por lo que la solución homogénea es

$$x_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t} \tag{2.3.183}$$

trivialmente se observa que

$$x_p(t)=x_{eq} \tag{2.3.184}$$

es una solución particular de la ecuación (de hecho, esto es claro desde un punto de vista físico) por lo que

$$x(t)=x_{eq}+c_1e^{-2t}+c_2e^{-t} \tag{2.3.185}$$

utilizando las condiciones iniciales $x(0)=x_{eq}+\frac{1}{4}$ y $\dot{x}(0)=0$ hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} x_{eq}+\frac{1}{4}=x_{eq}+c_1+c_2 \\ 0=-2c_1-c_2 \end{cases} \tag{2.3.186}$$

que tiene por solución

$$c_1=-\frac{1}{4} \quad c_2=\frac{1}{2} \tag{2.3.187}$$

por lo que

$$x(t)=4{,}9-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t} \tag{2.3.188}$$

Ejemplo 50. a) Indique el tipo de ecuación que se obtiene al realizar la sustitución $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ a la ecuación diferencial $f'\left(\frac{y}{x}\right)(y'x-y)=2x^2g\left(\frac{x}{y}\right)e^{f\left(\frac{y}{x}\right)}$ donde g es una función continua y f es una función invertible que posee primera derivada continua. b) Resuelva la ecuación diferencial siguiente $x\frac{dy}{dx}-y=2\frac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$

a) Con $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se tiene por regla de la cadena $u' = f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)' = f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right)$ por lo que $f'\left(\frac{y}{x}\right)(y'x-y) = 2x^2 g\left(\frac{y}{x}\right)e^{f\left(\frac{y}{x}\right)}$ se convierte en

$$u' = 2g\left(\frac{y}{x}\right)e^u \tag{2.3.189}$$

luego, como $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ y f es invertible se tiene $\frac{y}{x} = f^{-1}u$ por lo que la ecuación en términos de x, u es

$$u' = 2g\left(f^{-1}(u)\right)e^u \tag{2.3.190}$$

lo cual es una ecuación separable.

b) En este caso se toma

$$f\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \frac{y}{x} \tag{2.3.191}$$

y el cambio de variable sería

$$u \equiv \frac{y}{x} \tag{2.3.192}$$

como $u' = \frac{y'x-y}{x^2}$ la ecuación $xy' - y = 2\frac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$ se convierte en

$$u' = \frac{2}{u}e^u \tag{2.3.193}$$

por lo que

$$ue^{-u}du = 2dx \tag{2.3.194}$$

integrando por partes se tiene

$$(-u-1)\,e^{-u} = x^2 + C \tag{2.3.195}$$

o bien

$$-\left(\frac{y}{x}+1\right)e^{-\frac{y}{x}} = x^2 + C \tag{2.3.196}$$

Ejemplo 51. Muestre que el cambio de variable $y = x\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$ convierte a la ecuación diferencial $x^2y' - xy = y^2 - x^2$ en una ecuación diferencial en variables separables y resuélvala.

Por el cambio de variable y la regla del producto

$$y' = \frac{1+v}{1-v} + x\left(\frac{v'(1-v)-(1+v)(-v')}{(1-v)^2}\right) = \frac{1+v}{1-v} + x\left(\frac{2v'}{(1-v)^2}\right) \tag{2.3.197}$$

como la ecuación original se podía escribir como

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} - 1 \tag{2.3.198}$$

por lo que gracias al cambio de variable puede escribirse como

$$\frac{1+v}{1-v}+x\left(\frac{2v'}{(1-v)^2}\right)-\frac{1+v}{1-v}=\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2-1 \tag{2.3.199}$$

o bien multiplicando a ambos lados por $(1-v)^2$

$$2xv'=(1+v)^2-(1-v)^2=4v \tag{2.3.200}$$

la ecuación que resulta es separable

$$\frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x} \tag{2.3.201}$$

o bien

$$\ln v=2\ln x+C \tag{2.3.202}$$

es decir

$$v=e^Cx^2=C_1x^2 \tag{2.3.203}$$

como $y=x\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$ se tiene

$$\left(\frac{y}{x}\right)(1-v)=1+v \tag{2.3.204}$$

es decir,

$$v=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} \tag{2.3.205}$$

por lo tanto la solución es

$$\frac{y-x}{y+x}=C_1x^2 \tag{2.3.206}$$

Ejemplo 52. Verifique que $x^2=y^4+cy^6$ es la solución general de la ecuación diferencial $xydx+(y^4-3x^2)dy=0$ al realizar un cambio del tipo $y=v^n$

Con el cambio de variable se tiene

$$dy=nv^{n-1}dv \tag{2.3.207}$$

por lo que se obtiene

$$xv^ndx+\left(v^{4n}-3x^2\right)nv^{n-1}dv=0 \tag{2.3.208}$$

de esta forma se puede eliminar v^{n-1} para obtener

$$xvdx+n\left(v^{4n}-3x^2\right)dv=0 \tag{2.3.209}$$

tomando

$$F_1=xv \qquad F_2=n\left(v^{4n}-3x^2\right) \tag{2.3.210}$$

la condición que debe cumplir n para que sea exacta es

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{2.3.211}$$

o bien

$$x = -6nx \tag{2.3.212}$$

es decir

$$n = -\frac{1}{6} \tag{2.3.213}$$

de esta forma la ecuación por resolver es

$$xvdx - \frac{1}{6}\left(v^{-\frac{2}{3}} - 3x^2\right)dv = 0 \tag{2.3.214}$$

la función $f(x,v)$ debe cumplir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = xv \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{6}v^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 \tag{2.3.215}$$

integrando la primera ecuación

$$f = \frac{1}{2}vx^2 + g(v) \tag{2.3.216}$$

por comparación

$$\frac{\partial f}{\partial v} = g'(v) = -\frac{1}{6}v^{-\frac{2}{3}} \tag{2.3.217}$$

o bien

$$g(v) = -\frac{1}{2}v^{\frac{1}{3}} + c \tag{2.3.218}$$

por lo que la solución de la ecuación exacta es

$$\frac{1}{2}vx^2 - \frac{1}{2}v^{\frac{1}{3}} = C \tag{2.3.219}$$

como $y = v^n = v^{-\frac{1}{6}}$ esto significa que $v = y^{-6}$ por lo que la solución general es

$$\frac{1}{2}y^{-6}x^2 - \frac{1}{2}y^{-2} = C \tag{2.3.220}$$

o bien

$$x^2 = y^4 + cy^6 \tag{2.3.221}$$

Ejemplo 53. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

Usando el cambio de variable

$$u = y - 2x + 3 \tag{2.3.222}$$

se tiene

$$u' = y' - 2 \tag{2.3.223}$$

por lo que la ecuación se convierte en

$$u' = \sqrt{u} \tag{2.3.224}$$

que es separable

$$u^{-\frac{1}{2}} du = dx \tag{2.3.225}$$

o bien

$$2\sqrt{u} = x + c \tag{2.3.226}$$

es decir

$$2\sqrt{y - 2x + 3} = x + c \tag{2.3.227}$$

Ejemplo 54. Muestre que el cambio $y = xu$ transforma la ecuación $x\frac{du}{dx} + \frac{1-x^2}{1+x^2}u = \frac{4\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}u^{1/2}$ en una de Bernoulli y resuélva para encontrar la solución de la ecuación original.

Con este cambio $u = \frac{y}{x}$ por lo que

$$u' = \frac{y'x - y}{x^2} \tag{2.3.228}$$

de esta forma la ecuación se convierte en

$$\frac{y'x - y}{x} + \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\frac{y}{x} = \frac{4\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt{1 + x^2}}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \tag{2.3.229}$$

simplificando la ecuación se llega a

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{4\arctan x}{\sqrt{1 + x^2}}\sqrt{y} \tag{2.3.230}$$

claramente es de Bernoulli con $n = \frac{1}{2}$ por lo que se realiza el cambio de variable

$$v = y^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.231}$$

o bien

$$y = v^2 \tag{2.3.232}$$

de esta forma

$$y' = 2vv' \tag{2.3.233}$$

luego la ecuación se convierte en

$$2vv' - \frac{2x}{1+x^2}v^2 = \frac{4\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}v \tag{2.3.234}$$

lo cual es lineal

$$v' - \frac{x}{1+x^2}v = 2\frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.3.235}$$

en este caso se considera

$$e^{-\int \frac{x}{1+x^2}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.3.236}$$

por lo que multiplicando a ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ se llega a

$$\frac{d}{dx}\left(v\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 2\frac{\arctan x}{1+x^2} \tag{2.3.237}$$

integrando a ambos lados

$$\frac{v}{\sqrt{1+x^2}} = (\arctan x)^2 + C \tag{2.3.238}$$

por lo tanto como $v = \sqrt{y}$ se tiene

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} = (\arctan x)^2 + C \tag{2.3.239}$$

y como $y = ux$ la solución en términos de las variables originales es

$$\frac{\sqrt{ux}}{\sqrt{1+x^2}} = (\arctan x)^2 + C \tag{2.3.240}$$

Ejemplo 55. Resuelva $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ sabiendo que $\phi(x) = \sec x$ es una solución

Dado que la ecuación es de Riccati se realiza el cambio de variable

$$y = \sec x + \frac{1}{u} \tag{2.3.241}$$

de esta forma

$$y' = \sec x \tan x - \frac{1}{u^2}u' \tag{2.3.242}$$

por lo que la ecuación diferencial se convierte en

$$\sec x \tan x - \frac{1}{u^2}u' = 2\sec x \tan x - \sin x\left(\sec^2 x + \frac{2\sec x}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \tag{2.3.243}$$

que se simplifica en

$$-\frac{u'}{u^2} = -\frac{2\sin x \sec x}{u} - \frac{\sin x}{u^2} \tag{2.3.244}$$

claramente es lineal y se puede escribir como

$$u' - 2\frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \tag{2.3.245}$$

como

$$e^{-2\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = e^{2\ln\cos x} = \cos^2 x \tag{2.3.246}$$

multiplicando a ambos lados por $\cos^2 x$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(u\cos^2 x\right) = \sin x\cos^2 x \tag{2.3.247}$$

integrando a ambos lados

$$u\cos^2 x = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \tag{2.3.248}$$

como $u = \frac{1}{y+\sec x}$ la solución final es

$$\frac{\cos^2 x}{y+\sec x} = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \tag{2.3.249}$$

Ejemplo 56. Resuelva $\left(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)dx + ydy = 0$ buscando un factor integrante de la forma $\rho = f(ax^2 + by^2)$

La condición para que ρ sea un factor integrante es en este caso que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)f(ax^2 + by^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(yf(ax^2 + by^2)\right) \tag{2.3.250}$$

aplicando la regla de la cadena y la regla del producto se tiene que

$$\left(4x^2y + 4y^3\right)f\left(ax^2 + by^2\right) + \left(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)f'(ax^2+by^2)(2by) = yf'(ax^2+by^2)\left(2ax\right) \tag{2.3.251}$$

llamando

$$t \equiv ax^2 + by^2 \tag{2.3.252}$$

la ecuación anterior puede escribirse como

$$4y\left(x^2 + y^2\right)f\left(t\right) + \left(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)\left(2by\right)\frac{df}{dt} = y\left(2ax\right)\frac{df}{dt} \tag{2.3.253}$$

se puede reescribir como

$$\left(bx + bx^4 + 2bx^2y^2 + by^4 - ax\right)\frac{df}{dt} = -2\left(x^2 + y^2\right)f \tag{2.3.254}$$

para continuar tiene sentido intentar con $a = b = 1$ para escribir la ecuación como

$$\left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right)\frac{df}{dt} = -2tf \tag{2.3.255}$$

finalmente la ecuación es separable y puede escribirse como

$$\frac{df}{f} = -2\frac{dt}{t} \tag{2.3.256}$$

es decir (ignorando la constante)

$$\ln f = -2\ln t \tag{2.3.257}$$

es decir

$$f = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} \tag{2.3.258}$$

Luego se multiplica la ecuación por el factor de integración y ahora hay que resolver

$$\left(\frac{x+x^4+2x^2y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)dx + \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy = 0 \tag{2.3.259}$$

que puede escribirse como

$$\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1\right)dx + \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy = 0 \tag{2.3.260}$$

Ahora se busca una función $g(x,y)$ de modo que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \tag{2.3.261}$$

integrando la primera ecuación se tiene

$$g = -\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)} + x + h(y) \tag{2.3.262}$$

por comparación se tiene que

$$h'(y) = 0 \tag{2.3.263}$$

es decir, la solución de la ecuación diferencial es

$$-\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)} + x = C \tag{2.3.264}$$

Ejemplo 57. Halle una función $N(y)$ tal que $h(x,y) = 3xy^2$ sea un factor integrante de la ecuación $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{xy}\right)dx + N(y)dy = 0$ y resuélvala

Como $3xy^2$ es un factor integrante se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^2\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{xy}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2N(y)\right) \tag{2.3.265}$$

de esta forma se obtiene que

$$-3 = 3y^2 N(y) \tag{2.3.266}$$

esto significa que

$$N(y) = -\frac{1}{y^2} \tag{2.3.267}$$

la ecuación diferencial es

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{xy}\right) dx - \frac{1}{y^2} dy = 0 \tag{2.3.268}$$

multiplicando por el factor integrante hay que resolver

$$3\left(x^2 - y\right) dx - 3x dy = 0 \tag{2.3.269}$$

Luego se busca una función que cumpla

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x \tag{2.3.270}$$

Integrando la segunda ecuación con respecto a y se tiene

$$f = -3xy + g(x) \tag{2.3.271}$$

y por comparación

$$g'(x) = 3x^2 \tag{2.3.272}$$

por lo tanto integrando con respecto a x

$$g = x^3 + c \tag{2.3.273}$$

la solución es

$$-3xy + x^3 = C \tag{2.3.274}$$

Ejemplo 58. Sea $g(x,y)$ una función definida para todo (x,y) con $y \neq 0$ y que además satisface que $\sin(xy)\, dx + g(x,y) dy = 0$ es exacta. Si $g(0,y) = 0$ para todo $y \neq 0$ encuentre $g(x, 2011)$

Como la ecuación es exacta se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x,y)) \tag{2.3.275}$$

es decir

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x\cos(xy) \tag{2.3.276}$$

integrando con respecto a x se tiene

$$g(x,y) = \frac{1}{y^2}\cos(xy) + \frac{x}{y}\sin(xy) + h(y) \tag{2.3.277}$$

por la condición $g(0, y) = 0$ se tiene que

$$0 = \frac{1}{y^2} + h(y) \tag{2.3.278}$$

de esta forma

$$h(y) = -\frac{1}{y^2} \tag{2.3.279}$$

Luego

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} \cos(xy) + \frac{x}{y} \sin(xy) - \frac{1}{y^2} \tag{2.3.280}$$

Finalmente

$$g(x, 2011) = \frac{1}{2011^2} \cos(2011x) + \frac{x}{2011} \sin(2011x) - \frac{1}{2011^2} \tag{2.3.281}$$

Ejemplo 59. Determine la solución de la ecuación diferencial $yy'' = y^2y' + (y')^2$ **que satisface** $y(0) = -\frac{1}{2}$**,** $y'(0) = 1$

Como no aparece explícitamente la x se realiza el cambio

$$u = y' \tag{2.3.282}$$

y de esta forma

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} \tag{2.3.283}$$

de esta forma la ecuación se convierte en

$$yu\frac{du}{dy} = y^2u + u^2 \tag{2.3.284}$$

eliminando una u queda una ecuación lineal en u

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = y \tag{2.3.285}$$

como

$$e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y} \tag{2.3.286}$$

multiplicando por $\frac{1}{y}$ a ambos lados se obtiene

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{u}{y}\right) = 1 \tag{2.3.287}$$

integrando a ambos lados

$$\frac{u}{y} = y + C \tag{2.3.288}$$

por lo que

$$u = y^2 + yC \tag{2.3.289}$$

Observe que como $u = \frac{dy}{dx}$ se tiene una separable

$$\frac{dy}{y^2 + yC} = dx \tag{2.3.290}$$

por fracciones parciales

$$\frac{1}{y^2 + Cy} = \frac{1}{C}\frac{1}{y} - \frac{1}{C}\frac{1}{y + C} \tag{2.3.291}$$

luego

$$\frac{1}{C}\ln|y| - \frac{1}{C}\ln|y + C| = x + c \tag{2.3.292}$$

la primera condición inicial dice que $y(0) = -\frac{1}{2}$, es decir,

$$\frac{1}{C}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{C}\ln\left|-\frac{1}{2} + C\right| = c \tag{2.3.293}$$

para la segunda condición conviene escribir 2.3.290 como

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + yC \tag{2.3.294}$$

y como cuando $x = 0$ se tiene $y = -\frac{1}{2}$ y $y' = 1$ entonces

$$1 = \frac{1}{4} - \frac{C}{2} \tag{2.3.295}$$

de esta forma

$$C = -\frac{3}{2} \tag{2.3.296}$$

luego en 2.3.293

$$-\frac{2}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\ln 2 = c \tag{2.3.297}$$

es decir

$$c = \frac{4\ln 2}{3} \tag{2.3.298}$$

sustituyendo en 2.3.292 se obtiene

$$-\frac{2}{3}\ln|y| + \frac{2}{3}\ln\left|y - \frac{3}{2}\right| = x + \frac{4\ln 2}{3} \tag{2.3.299}$$

como interesa la solución donde $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y(x)$ es negativo cerca de $x = 0$ por lo que

$$-\ln(-y) + \ln\left(\frac{3}{2} - y\right) = \frac{3}{2}x + 2\ln 2 \tag{2.3.300}$$

es decir

$$\frac{\frac{3}{2}-y}{-y}=4e^{\frac{3}{2}x} \tag{2.3.301}$$

de esta forma la solución es

$$y(x)=\frac{3}{2\left(1-4e^{\frac{3x}{2}}\right)} \tag{2.3.302}$$

Ejemplo 60. Resuelva $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

Se realizan los cambios de variable

$$u\equiv x+y \qquad v\equiv x-y \tag{2.3.303}$$

de esta forma

$$du=dx+dy \qquad dv=dx-dy \tag{2.3.304}$$

o bien

$$dx=\frac{du+dv}{2} \qquad dy=\frac{du-dv}{2} \tag{2.3.305}$$

luego la ecuación se convierte en

$$\frac{du-dv}{du+dv}=\frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \tag{2.3.306}$$

o bien

$$\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)(du-dv)=\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)(du+dv) \tag{2.3.307}$$

distribuyendo los productos anteriores

$$\sqrt{u}du-\sqrt{u}dv-\sqrt{v}du+\sqrt{v}dv=\sqrt{u}du+\sqrt{u}dv+\sqrt{v}du+\sqrt{v}dv \tag{2.3.308}$$

por lo tanto se cancelan los factores repetidos

$$-\sqrt{u}dv-\sqrt{v}du=\sqrt{u}dv+\sqrt{v}du \tag{2.3.309}$$

es decir se obtiene una separable

$$-\frac{dv}{\sqrt{v}}=\frac{du}{\sqrt{u}} \tag{2.3.310}$$

integrando a ambos lados

$$-2\sqrt{v}=2\sqrt{u}+C \tag{2.3.311}$$

o bien

$$-2\sqrt{x-y}=2\sqrt{x+y}+C \tag{2.3.312}$$

Ejemplo 61. Resuelva $(y')^2 + 2xy' = e^x - x^2$
La ecuación anterior es cuadrática en y'

$$\left(y'\right)^2 + 2xy' + x^2 - e^x = 0 \tag{2.3.313}$$

o bien

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x^2 - e^x)}}{2} = -x \pm e^{\frac{x}{2}} \tag{2.3.314}$$

luego es separable por lo que

$$y = -x \pm 2e^{\frac{x}{2}} + c \tag{2.3.315}$$

Ejemplo 62. Resuelva $2\left(y'\right)^2 (y - xy') = 1$
La ecuación diferencial anterior es de Clairaut pues puede escribirse como

$$y = xy' + \frac{1}{2\left(y'\right)^2} \tag{2.3.316}$$

derivando con respecto a x se obtiene

$$y' = y' + xy'' - \left(y'\right)^{-3} y'' \tag{2.3.317}$$

haciendo el cambio de variable $u = y'$ se obtiene

$$0 = x\frac{du}{dx} - \frac{1}{u^3}\frac{du}{dx} \tag{2.3.318}$$

en este caso se tiene

$$\left(x - \frac{1}{u^3}\right)\frac{du}{dx} = 0 \tag{2.3.319}$$

una solución es

$$x = \frac{1}{u^3} \tag{2.3.320}$$

y como $y = xy' + \frac{1}{2(y')^2}$ la solución es

$$y(x) = xu + \frac{1}{2u^2} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \tag{2.3.321}$$

La otra opción es que

$$\frac{du}{dx} = 0 \tag{2.3.322}$$

es decir,

$$u = c \tag{2.3.323}$$

o bien

$$y = cx + C \tag{2.3.324}$$

para que sea una solución de la ecuación original se sustituye la solución propuesta en la ecuación para obtener

$$2\,(c)^2\,(cx + C - cx) = 1 \tag{2.3.325}$$

o bien

$$2c^2C = 1 \tag{2.3.326}$$

es decir

$$C = \frac{1}{2c^2} \tag{2.3.327}$$

por lo que la solución es

$$y = cx + \frac{1}{2c^2} \tag{2.3.328}$$

Ejemplo 63. Halle una familia uniparamétrica de curvas tal que, para cada una de dichas curvas, el segmento de la tangente desde el punto de tangencia al eje y es bisecado por el eje x

El siguiente diagrama representa las condiciones del problema anterior (donde se ha utilizado el hecho de que el punto medio entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

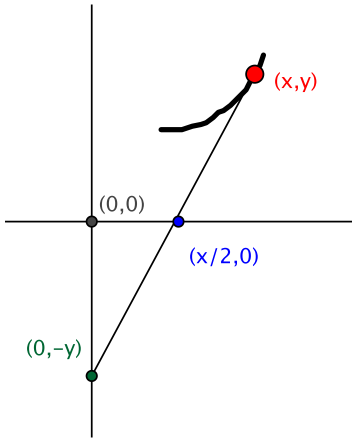

Figura 2.3.3: Segmento bisecado por el eje x

El segmento posee pendiente y' pues es tangente a la curva pero a su vez posee pendiente $\frac{2y}{x}$. De esta forma hay que resolver

$$\frac{2y}{x} = y' \tag{2.3.329}$$

que tiene por solución

$$y = cx^2 \tag{2.3.330}$$

Ejemplo 64. Una curva $y = f(x)$ pasa por el origen. Trazando rectas paralelas a los ejes, por un punto arbitrario de la curva, se forma un rectángulo con dos lados sobre los ejes coordenados. La curva divide a cualquiera de estos rectángulos en dos regiones, una de las cuales tiene un área igual a n veces el área de la otra. Halle la función f

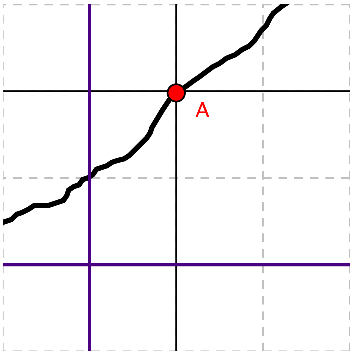

Figura 2.3.4: Problema de áreas de áreas

El área del rectángulo anterior es $xf(x)$ y el área bajo la curva es $\int_0^x f(t)dt$. Luego hay que resolver

$$xf(x) - \int_0^x f(t)dt = n\int_0^x f(t)dt \tag{2.3.331}$$

derivando con respecto a x se tiene

$$f(x) + xf'(x) - f(x) = nf(x) \tag{2.3.332}$$

por lo que hay que resolver

$$y + xy' - y = ny \tag{2.3.333}$$

que es separable

$$\frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x} \tag{2.3.334}$$

que da

$$\ln y = n\ln x + c \tag{2.3.335}$$

es decir

$$y = Cx^n \tag{2.3.336}$$

otra familia posible de soluciones sería resolviendo $xf(x) - \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^x f(t)dt$

$$y = Cx^{\frac{1}{n}} \tag{2.3.337}$$

Ejemplo 65. Halle una ecuación diferencial cuya solución general corresponda a la familia de todas las circunferencias con centro sobre la línea $y = x$

Cualquier círculo centrado sobre la línea $y = x$ tiene ecuación

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2 \tag{2.3.338}$$

donde (a, a) es el centro y r el radio. Dado que hay dos constantes a, r se busca una ecuación diferencial de segundo orden. Derivando a ambos lados se tiene

$$2(x-a) + 2(y-a)y' = 0 \tag{2.3.339}$$

que puede escribirse como

$$x - a + yy' - ay' = 0 \tag{2.3.340}$$

o bien

$$\frac{x + yy'}{1 + y'} = a \tag{2.3.341}$$

derivando nuevamente a ambos lados

$$\frac{\left(1 + (y')^2 + yy''\right)(1 + y') - (x + yy')\,y''}{(1 + y')^2} = 0 \tag{2.3.342}$$

igualando el numerador anterior a cero

$$1 + \left(y'\right)^2 + yy'' + y' + \left(y'\right)^3 + yy'y'' - xy'' - yy'y'' = 0 \tag{2.3.343}$$

de esta forma la ecuación diferencial buscada es

$$1 + \left(y'\right)^2 \left(1 + y'\right) + y''(1 - x) = 0 \tag{2.3.344}$$

Ejemplo 66. Halle una ecuación diferencial cuya solución general corresponda a la familia de todas las circunferencias que pasan por los puntos $(1, 0)$ **y** $(0, 1)$

La ecuación general de un círculo centrado en (a, b) de radio r es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2.3.345}$$

como pasa por $(1, 0)$

$$(1-a)^2 + b^2 = r^2 \tag{2.3.346}$$

como pasa por $(0, 1)$

$$a^2 + (1-b)^2 = r^2 \tag{2.3.347}$$

igualando las ecuaciones anteriores

$$1 - 2a + a^2 + b^2 = a^2 + 1 - 2b + b^2 \tag{2.3.348}$$

o bien

$$a = b \tag{2.3.349}$$

Luego se tiene que la ecuación del círculo es

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = (1-a)^2 + a^2 \tag{2.3.350}$$

Dado que solo hay una constante arbitraria se busca una ecuación de primer orden. Derivando a ambos lados

$$2\,(x-a) + 2\,(y-a)\,y' = 0 \tag{2.3.351}$$

Para eliminar a se tiene de $(x-a)^2 + (y-a)^2 = (1-a)^2 + a^2$ que

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2ay = 1 - 2a \tag{2.3.352}$$

por lo que

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{2\,(x+y-1)} = a \tag{2.3.353}$$

de esta forma la ecuación diferencial es

$$\left(x - \frac{x^2+y^2-1}{2(x+y-1)}\right) + \left(y - \frac{x^2+y^2-1}{2\,(x+y-1)}\right) y' = 0 \tag{2.3.354}$$

Ejemplo 67. La ley de enfriamiento de Newton afirma que la razón a la cual la temperatura de un objeto cambia es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. Después de estar expuesto, durante 10 minutos, en el aire a temperatura de 10 C, un objeto se enfrío de 100 C a 55 C. a) ¿En cuánto tiempo, a partir de este momento, la temperatura del objeto llegará a los 19 C? b) ¿Cuánto le tomará al mismo objeto enfriarse de 500 C a 250 C si se coloca en agua que se mantiene a 0 C?

De 1.1.53 la solución era $T(t) = T_e\left(1 + Ce^{-kt}\right)$. Para a) las condiciones del problema son $T_e = 10$, $T(0) = 100$, $T(10) = 55$. Con tal información se puede encontrar el valor de C y k.

$$100 = 10(1+C) \qquad 55 = 10(1 + Ce^{-10k}) \tag{2.3.355}$$

que da

$$C = 9 \qquad k = 0{,}069 \tag{2.3.356}$$

por lo tanto la temperatura es de 19 C cuando

$$19 = 10\left(1 + 9e^{-0{,}069t}\right) \tag{2.3.357}$$

es decir,

$$t = 33{,}37 \tag{2.3.358}$$

como interesa el tiempo transcurrido desde que llegó a 55 C, la respuesta sería $33{,}37 - 10 = 23{,}37$ minutos.

Para la parte b) se ocupa resolver nuevamente la ecuación diferencial solo que ahora con $T_e = 0$

$$\frac{dT}{dt} = -kT = -0{,}069T \tag{2.3.359}$$

que tiene por solución

$$T(t) = Ce^{-0{,}069t} \tag{2.3.360}$$

con la condición $T(0) = 500$ se obtiene que

$$C = 500 \tag{2.3.361}$$

y para obtener el tiempo necesario para llegar a 250 C se resuelve

$$250 = 500e^{-0{,}069t} \tag{2.3.362}$$

es decir,

$$t = 10{,}04 \tag{2.3.363}$$

Ejemplo 68. Un cultivo de bacterias enfermas crece a una tasa que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número presente. Si inicialmente hay 9 individuos y dos días más tarde 16; ¿cuánto tiempo habrá que esperar para tener 36 individuos?

Por las condiciones del problema

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k}{\sqrt{N}} \tag{2.3.364}$$

donde k es una constante por determinar (que debería ser positiva). Dado que es separable se tiene

$$\frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}} = kt + c \tag{2.3.365}$$

usando que $N(0) = 9$ y $N(2) = 16$ se tiene que

$$18 = c \qquad k = \frac{37}{2} \tag{2.3.366}$$

se busca determinar cuando $N = 36$, es decir,

$$\frac{2}{3}(36)^{\frac{3}{2}} = \frac{37}{2}t + 18 \tag{2.3.367}$$

$$t = \frac{252}{37} = 6{,}81 \tag{2.3.368}$$

Ejemplo 69. Halle la solución general de la ecuación $x^2\,(1-x)\,y''+2x(2-x)y'+2(1+x)y=x^2$, $x>1$ sabiendo que la ecuación homogénea asociada tiene una solución de la forma x^k

Primero hay que determinar el valor de k que funciona de modo que $y=x^k$ sea solución de la ecuación diferencial homogénea. Un cálculo sencillo muestra que

$$k(k-1)x^2(1-x)x^{k-2}+2kx(2-x)x^{k-1}+2(1+x)x^k=0 \tag{2.3.369}$$

simplificando un poco se llega a

$$k^2+3k+2=x\left(k^2+k-2\right) \tag{2.3.370}$$

la única forma en que el valor de k no dependa de x es que

$$k^2+3k+2=0 \qquad k^2+k-2=0 \tag{2.3.371}$$

que resulta en

$$k=-2 \tag{2.3.372}$$

luego una solución de la homogénea es

$$y_1(x)=x^{-2} \tag{2.3.373}$$

Ahora se utiliza la técnica de reducción de orden proponiendo una segunda solución como

$$y_2(x)=u(x)x^{-2} \tag{2.3.374}$$

De esta forma

$$y_2'=u'x^{-2}-2ux^{-3} \tag{2.3.375}$$

$$y_2''=u''x^{-2}-2u'x^{-3}-2u'x^{-3}+6ux^{-4} \tag{2.3.376}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial homogénea asociada

$$x^2\,(1-x)\left(u''x^{-2}-4u'x^{-3}+6ux^{-4}\right)+2x\,(2-x)\left(u'x^{-2}-2ux^{-3}\right)+2(1+x)ux^{-2}=0 \tag{2.3.377}$$

usando el hecho de que x^{-2} es solución se tiene

$$x^2\,(1-x)\left(u''x^{-2}-4u'x^{-3}\right)+2x\,(2-x)\left(u'x^{-2}\right)=0 \tag{2.3.378}$$

si se define $v\equiv u'$ entonces hay que resolver

$$v'+\frac{2}{1-x}v=0 \tag{2.3.379}$$

la cual tiene por solución

$$u'=v=C\,(x-1)^2 \tag{2.3.380}$$

de esta forma

$$u = \frac{C}{3}(x-1)^3 + c \tag{2.3.381}$$

tomando $C = 3$ y $c = 0$ la otra solución sería

$$y_2(x) = x^{-2}(x-1)^3 \tag{2.3.382}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2}(x-1)^3 \tag{2.3.383}$$

Para hallar una solución particular se utiliza variación de parámetros y 2.2.171 con $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y hay que resolver

$$c_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad c_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \tag{2.3.384}$$

como

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-2}(x-1)^3 \\ -2x^{-3} & -2x^{-3}(x-1)^3 + 3x^{-2}(x-1)^2 \end{vmatrix} = -x^{-4}(x-1)^2 \tag{2.3.385}$$

hay que resolver al final

$$c_1' = \frac{x^{-2}(x-1)^3}{(1-x)x^{-4}(x-1)^2} = -x^2 \tag{2.3.386}$$

$$c_2' = \frac{x^{-2}}{(1-x)x^{-4}(x-1)^2} = -\frac{x^2}{(x-1)^3} \tag{2.3.387}$$

la primera ecuación da simplemente (ignorando constantes)

$$c_1 = -\frac{1}{3}x^3 \tag{2.3.388}$$

para integrar la segunda se utiliza un cambio de variable $X = x - 1$ para obtener

$$c_2 = -\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \tag{2.3.389}$$

de esta forma

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 = -\frac{x}{3} + \left(-\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2}\right) x^{-2}(x-1)^3 \tag{2.3.390}$$

Finalmente, la solución general sería

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_p(x) \tag{2.3.391}$$

Ejemplo 70. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $\left(1+x^2\right)y''+p(x)y'+q(x)y=e^x\left(x^3-x^2+x-1\right)$ sabiendo que $y_1(x)=x$ y $y_2(x)=e^x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Aquí se utiliza nuevamente variación de parámetros con

$$f(x)=\frac{e^x\left(x^3-x^2+x-1\right)}{1+x^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=e^x\left(x-1\right) \tag{2.3.392}$$

como

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}=xe^x-x=e^x(x-1) \tag{2.3.393}$$

hay que resolver las ecuaciones 2.2.171

$$c_1'=-\frac{e^xe^x\left(x-1\right)}{e^x\left(x-1\right)}=e^x \tag{2.3.394}$$

$$c_2'=\frac{xe^x\left(x-1\right)}{e^x\left(x-1\right)}=x \tag{2.3.395}$$

las soluciones claramente son

$$c_1=e^x \qquad c_2=\frac{x^2}{2} \tag{2.3.396}$$

por lo que

$$y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)=e^xx+\frac{x^2}{2}e^x \tag{2.3.397}$$

y la solución completa es

$$y(x)=c_1x+c_2e^x+e^xx+\frac{x^2}{2}e^x \tag{2.3.398}$$

Ejemplo 71. Considere la ecuación diferencial $y''+(\tan x-3\cot x)y'+3y\cot^2 x=0$. Determine todas las soluciones de tal ecuación si se sabe que admite dos soluciones una de las cuales es el cubo de la otra.

Suponga que $y_1(x)$ es una solución y $y_2(x)=(y_1(x))^3$ es otra solución. Dado que

$$y_2'=3y_1^2y_1' \tag{2.3.399}$$

$$y_2''=6y_1\left(y_1'\right)^2+3y_1^2y_1'' \tag{2.3.400}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$6y_1\left(y_1'\right)^2+3y_1^2y_1''+(\tan x-3\cot x)\left(3y_1^2y_1'\right)+3y_1^3\cot^2 x=0 \tag{2.3.401}$$

la ecuación anterior puede agruparse como

$$3y_1^2\left(y_1''+(\tan x-3\cot x)y_1'+y_1\cot^2 x\right)+6y_1\left(y_1'\right)^2=0 \tag{2.3.402}$$

como y_1 es solución la ecuación diferencial anterior es

$$y_1^2\left(-3y_1\cot^2 x + y_1\cot^2 x\right) + 2y_1\left(y_1'\right)^2 = 0 \tag{2.3.403}$$

que es equivalente a

$$\left(y_1'\right)^2 - y_1^2\cot^2 x = 0 \tag{2.3.404}$$

por lo que desarrollando la diferencia de cuadrados

$$\left(y_1' - y_1\cot x\right)\left(y_1' + y_1\cot x\right) = 0 \tag{2.3.405}$$

se resuelven por aparte las ecuaciones diferenciales que son aparte de lineales separables. Por ejemplo, para el primer paréntesis se tiene

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1\frac{\cos x}{\sin x} \tag{2.3.406}$$

por lo que integrando a ambos lados

$$\ln y_1 = \ln\sin x + c \tag{2.3.407}$$

puede tomarse como solución

$$y_1(x) = \sin x \tag{2.3.408}$$

Luego la otra solución es

$$y_2(x) = \sin^3 x \tag{2.3.409}$$

Ejemplo 72. Un cuerpo de $\frac{1}{8}$ kg está unido al extremo de un resorte de rigidez $k = 16\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. El cuerpo se desplaza, estirando el resorte $\frac{1}{2}$ m a partir de su posición de equilibrio y se le da una velocidad $\sqrt{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ en la misma dirección. Suponiendo que no actúan fuerzas de amortiguamiento, ni fuerzas externas, determine la posición de dicho cuerpo en cualquier instante. Determine la amplitud (C), el ángulo de fase (φ), la frecuencia angular (ω), el período (T) y la frecuencia natural f. ¿Cuánto tiempo el cuerpo en regresar por primera vez a su posición de equilibrio?

En este caso se puede escribir la solución con ayuda de 2.1.187

$$x(t) = C\cos\left(\omega t - \varphi\right) \tag{2.3.410}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8\sqrt{2}\frac{\mathrm{rad}}{s} \tag{2.3.411}$$

Como la condición inicial es $x(0) = 0{,}5$ y $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$ se obtiene

$$0{,}5 = C\cos\left(\varphi\right) \qquad \sqrt{2} = -C\sin\left(-\varphi\right) \tag{2.3.412}$$

de esta forma

$$\varphi = 70{,}52^\circ = 1{,}23\text{rad} \quad C = \frac{3}{2}\text{m} \tag{2.3.413}$$

finalmente

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}55\text{s} \quad f = 1{,}8\text{s} \tag{2.3.414}$$

Falta determinar cuándo $x = 0$,es decir,

$$\omega t - \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{2.3.415}$$

es decir,

$$t = 0{,}24\text{s} \tag{2.3.416}$$

Considere la ecuación diferencial

$$y' = f\left(\frac{ax + by + h}{dx + cy + k}\right) \tag{2.3.417}$$

a) Si $ac - bd \neq 0$ las rectas $ax + by + h = 0$ y $dx + cy + k = 0$ se intersecan en un único punto (x_0, y_0). En este caso la sustitución $u = x - x_0$ y $v = y - y_0$ transforma la ecuación en una ecuación homogénea en las variables u, v

b) Cuando $ac - bd = 0$ la sustitución $z = ax + by$ da por resultado una ecuación en variables separables

---

Ejemplo 73. Resuelva la ecuación $y' = \left(\frac{6x-2y}{3x-y+1}\right)^2$

En este caso las rectas $3x - y + 1 = 0$ y $6x - 2y = 0$ no se intersecan por lo que puede utilizarse la sustitución

$$z = 6x - 2y \quad z' = 6 - 2y' \tag{2.3.418}$$

luego hay que resolver

$$\frac{6 - z'}{2} = \left(\frac{z}{\frac{z}{2} + 1}\right)^2 \tag{2.3.419}$$

la ecuación por resolver es

$$z' - 6 = -\frac{8z^2}{(z + 2)^2} \tag{2.3.420}$$

que es equivalente a

$$z' = \frac{-2z^2 + 24z + 24}{(z + 2)^2} \tag{2.3.421}$$

la ecuación anterior es separable

$$\left(\frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 - 12z - 12}\right) dz = -2dx \tag{2.3.422}$$

Claramente

$$\frac{z^2+4z+4}{z^2-12z-12}=1+16\left(\frac{z+1}{z^2-12z-12}\right) \tag{2.3.423}$$

Por fracciones parciales

$$\frac{z+1}{z^2-12z-12}=\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\right)\frac{1}{z-6-4\sqrt{3}}+\left(\frac{4\sqrt{3}-7}{8\sqrt{3}}\right)\frac{1}{z-6+4\sqrt{3}} \tag{2.3.424}$$

de esta forma integrando a ambos lados

$$z+16\left(\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\right)\ln\left|z-6-4\sqrt{3}\right|+\left(\frac{4\sqrt{3}-7}{8\sqrt{3}}\right)\ln\left|z-6+4\sqrt{3}\right|\right)=-2x+c \tag{2.3.425}$$

sustituyendo $z=6x-2y$ se obtiene

$$8x-2y+16\left(\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\right)\ln\left|6x-2y-6-4\sqrt{3}\right|+\left(\frac{4\sqrt{3}-7}{8\sqrt{3}}\right)\ln\left|6x-2y-6+4\sqrt{3}\right|\right)=c \tag{2.3.426}$$

Ejemplo 74. Resuelva la ecuación $y'=\left(\frac{x+2y-9}{-x-y+3}\right)^2+\frac{x+2y-9}{-x-y+3}$

Como las rectas $x+2y-9=0$ y $-x-y+3=0$ se intersecan en $x=-3 \quad y=6$ se realiza el cambio de variable

$$u=x+3 \quad v=y-6 \tag{2.3.427}$$

de esta forma

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du} \tag{2.3.428}$$

por lo que hay que resolver

$$\frac{dv}{du}=\left(\frac{u-3+2v+12-9}{3-u-v-6+3}\right)^2+\frac{u-3+2v+12-9}{3-u-v-6+3}=\left(\frac{u+2v}{-u-v}\right)^2+\frac{u+2v}{-u-v} \tag{2.3.429}$$

Para resolver la ecuación anterior se utiliza el hecho de que es homogénea por lo que se realiza el cambio de variable

$$v=tu \tag{2.3.430}$$

de esta forma

$$\frac{dv}{du}=\frac{dt}{du}u+t \tag{2.3.431}$$

la ecuación se convierte en

$$\frac{dt}{du}u+t=\left(\frac{u+2tu}{-u-tu}\right)^2-\frac{u+2v}{u+v}=\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)^2-\frac{2t+1}{t+1} \tag{2.3.432}$$

que puede escribirse como

$$u\frac{dt}{du}=\frac{4t^2+4t+1-(2t+1)(t+1)-t(t+1)^2}{(t+1)^2}=-\frac{t\left(t^2+1\right)}{(t+1)^2} \tag{2.3.433}$$

dado que es separable se obtiene

$$\frac{(t+1)^2}{t(t^2+1)}dt=-\frac{1}{u}du \tag{2.3.434}$$

por fracciones parciales

$$\frac{(t+1)^2}{t\,(t^2+1)}=\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2+1} \tag{2.3.435}$$

integrando a ambos lados

$$\ln|t|+2\arctan t=-\ln|u|+c \tag{2.3.436}$$

sustituyendo t se obtiene

$$\ln\left|\frac{v}{u}\right|+2\arctan\frac{v}{u}=-\ln|u|+c \tag{2.3.437}$$

finalmente, sustituyendo u, v la solución es sustituyendo t se obtiene

$$\ln\left|\frac{y-6}{x+3}\right|+2\arctan\frac{y-6}{x+3}=-\ln|x+3|+c \tag{2.3.438}$$

---

3 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1. Operadores y Eliminación de Incógnitas

Como se mencionó en el tema de las ODEs lineales de orden n, un operador es básicamente un objeto (o mecanismo) que recibe una función (input) y devuelve otra función (output). Básicamente, lo anterior significa que para definir un operador hay que especificar la acción del operador sobre las funciones en las que actúa, es decir, especificar como transforma el input en el output.

Por ejemplo, el operador más sencillo es el diferenciación D. Si alguien no supiera que significa el operador D lo que habría que decir es que D toma una función $x(t)$ y produce su derivada $\frac{dx}{dt}$, es decir,

$$Dx \equiv \frac{dx}{dt} \tag{3.1.1}$$

lo anterior significa además que D no está definida sobre todo las funciones posibles, sino que simplemente aquellas que tengan por lo menos una derivada.

La clase de operadores que se van a estudiar en este tema es el álgebra polinomial generada por D , es decir, si $p(t)$ es un polinomio

$$p(t) \equiv a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \tag{3.1.2}$$

entonces se define el polinomio $p(D)$ como

$$p(D) \equiv a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I \tag{3.1.3}$$

donde I es el operador identidad

$$Ix(t) = x(t) \tag{3.1.4}$$

y si $x(t)$ es una función con al menos n derivadas

$$p(D)x = \left(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I\right) x = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \tag{3.1.5}$$

es usual no escribir explícitamente el operador identidad por lo que 3.1.3 se ve como

$$p(D) \equiv a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \tag{3.1.6}$$

Ejemplo 75. Halle el polinomio $p(D)$ asociado a la ODE $2\ddot{x} - 3x + 5x = 0$ y calcule $p(D)x(t)$ donde $x(t) = \sin t$

Básicamente el polinomio de la ecuación $2\ddot{x}-3x+5x=0$ es el polinomio de la ecuación característica

$$p(m)=2m^2-3m+5 \tag{3.1.7}$$

luego

$$p(D)=2D^2-3D+5 \tag{3.1.8}$$

por lo tanto

$$p(D)x=2\frac{d^2\sin t}{dt^2}-3\frac{d\sin t}{dt}+5\sin t=-2\sin t-3\cos t+5\sin t=3\sin t-3\cos t \tag{3.1.9}$$

Linealidad y distributividad para la suma: Si $p(D)$ y $q(D)$ son dos operadores polinomiales y c_1, c_2 son constantes entonces

- $p(D)(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))=c_1p(D)x_1(t)+c_2p(D)x_2(t)$
- $(p(D)+q(D))\,(c_1x_1(t))=c_1p(D)x_1(t)+c_1q(D)x_1(t)$

Ejemplo 76. Calcule $\left(D^2-3D+5\right)\left(2t^3+e^{2t}+\sin t\right)$

Se usan ambas propiedades de la linealidad y distributividad, por la primera propiedad

$$\begin{gathered}\left(D^2-3D+5\right)\left(2t^3+e^{2t}+\sin t\right)=\\ \left(D^2-3D+5\right)\left(2t^3\right)+\left(D^2-3D+5\right)\left(e^{2t}\right)+\left(D^2-3D+5\right)(\sin t)\end{gathered} \tag{3.1.10}$$

y por la segunda propiedad

$$\begin{gathered}\left(D^2-3D+5\right)\left(2t^3\right)+\left(D^2-3D+5\right)\left(e^{2t}\right)+\left(D^2-3D+5\right)(\sin t)\\ =2D^2t^3-6Dt^3+10t^3+D^2e^{2t}-3De^{2t}+5e^{2t}+D^2\sin t-3D\sin t+5\sin t\end{gathered} \tag{3.1.11}$$

evaluando los operadores

$$=12t-18t^2+10t^3+4e^{2t}-6e^{2t}+5e^{2t}-\sin t-3\cos t+5\sin t \tag{3.1.12}$$

agrupando los términos se llega a

$$10t^3-18t^2+12t+3e^{2t}+4\sin t-3\cos t \tag{3.1.13}$$

La otra operación que es útil realizar entre operadores es la de multiplicación de operadores, básicamente si $p(D)$ y $q(D)$ representan dos operadores polinomiales entonces $p(D)q(D)x(t)$ significa realizar primero $q(D)x(t)$ y luego lo que resulte multiplicarlo por $p(D)$ es decir

$$\underbrace{p(D)\,\underbrace{q(D)x(t)}_{primero}}_{segundo} \tag{3.1.14}$$

por ejemplo, si $p(D) = D^2 - 3$ y $q(D) = D + 5$ y $x(t) = e^t$ entonces

$$\begin{aligned} p(D)q(D)x(t) = p(D)\,(D+5)\,e^t = p(D)\left(e^t + 5e^t\right) = \left(D^2 - 3\right)\left(6e^t\right) \\ = 6\left(e^t - 3e^t\right) = -12e^t \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

por otro lado, si se hubiera realizado la multiplicación de operadores en el orden inverso, es decir, $q(D)p(D)$, se tendría que

$$\begin{aligned} q(D)p(D)x(t) = q(D)\left(D^2 - 3\right)\left(e^t\right) = q(D)\left(e^t - 3e^t\right) = -2\,(D+5)\left(e^t\right) \\ = -2\left(e^t + 5e^t\right) = -12e^t \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

es decir, en este caso $p(D)q(D) = q(D)p(D)$. La pregunta se vuelve en si siempre es posible garantizar que $p(D)q(D) = q(D)p(D)$, es decir, que los operadores conmutan. En general esto no es cierto. Por ejemplo, en la Mecánica Cuántica se representa el momento de una partícula por el operador

$$P = -\hbar i \frac{d}{dx} \tag{3.1.17}$$

donde $\hbar$ es una constante, es decir,

$$P\psi(x) = -\hbar i \frac{d\psi}{dx} \tag{3.1.18}$$

por otro lado, la posición de una partícula se representa por el operador de multiplicación X que cumple

$$X\psi(x) = x\psi(x) \tag{3.1.19}$$

si se realiza XP se tiene

$$XP\psi(x) = X\left(-\hbar i \frac{d}{dx}\right)\psi(x) = -\hbar i X\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right) = -\hbar i x \frac{d\psi(x)}{dx} \tag{3.1.20}$$

por otro lado si se realiza PX se tiene

$$PX\psi(x) = P\left(x\psi(x)\right) = -\hbar i \frac{d}{dx}\left(x\psi(x)\right) = -\hbar i\left(\psi(x) + x\frac{d\psi}{dx}\right) = -\hbar i\psi(x) + XP\psi(x) \tag{3.1.21}$$

es decir, $PX\psi \neq XP\psi$, de hecho, los cálculos anteriores indican que

$$\left(PX - XP\right)\psi = -\hbar i\psi \tag{3.1.22}$$

Ahora bien, ¿cuál es la diferencia entre los dos ejemplos? Básicamente la diferencia radica en que mientras los operadores $p(D), q(D)$ tienen únicamente coeficientes constantes, los operadores P, X tienen coeficientes variables. De hecho, siempre y cuando los polinomios tengan coeficientes constantes, el producto polinomial siempre es conmutativo, es decir, Propiedad del producto de polinomios: Si $p(D)$, $q(D)$, $r(D)$ son tres operadores polinomiales entonces el producto entre ellos es asociativo, es decir,

$$p(D)\left[q(D)r(D)\right] = \left[p(D)q(D)\right]r(D) \tag{3.1.23}$$

Más aún, si $p(D)$ y $q(D)$ son operadores con coeficientes constantes, es decir,

$$\begin{aligned} p(D) &\equiv a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \\ q(D) &\equiv b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

entonces el producto es conmutativo, es decir,

$$p(D)q(D) = q(D)p(D) \tag{3.1.25}$$

Como consecuencia de lo anterior, si un el polinomio $p(t)$ asociado a $p(D)$ puede factorizarse como

$$p(t) = a_n\left(t - r_1\right)\cdots\left(t - r_n\right) \tag{3.1.26}$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son las raíces (no necesariamente distintas) de $p(t)$ entonces el polinomio $p(D)$ puede factorizarse como

$$p(D) = a_n\left(D - r_1\right)\cdots\left(D - r_n\right) \tag{3.1.27}$$

Por ejemplo, como el polinomio $p(t) = t^2 + 5t + 6$ puede factorizarse como $p(t) = (t+2)(t+3)$ entonces $p(D) = D^2 + 5D + 6$ puede factorizarse como $p(D) = (D+2)(D+3)$.

Ahora se va a utilizar la técnica de operadores para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, por ejemplo, una ecuación como

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6 = t^3 \tag{3.1.28}$$

Para resolver 3.1.28 se resuelve primero la ecuación homogénea asociada que tiene por solución

$$x_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \tag{3.1.29}$$

Para terminar de encontrar la solución se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados. Ahora se va a utilizar otro método llamado el método del anulador . Primero se comienza reescribiendo 3.1.28 como

$$\left(D+2\right)\left(D+3\right)x = t^3 \tag{3.1.30}$$

se va a buscar un polinomio anulador, es decir, un polinomio que aplicado a ambos lados anula el input, que en este caso es t^3. Como

$$D^4 t^3 = 0 \tag{3.1.31}$$

se puede aplicar D^4 a ambos lados para obtener

$$D^4\left(D+2\right)\left(D+3\right)x = D^4 t^3 = 0 \tag{3.1.32}$$

luego la ecuación que resulta es una ecuación homogénea, la ecuación

$$\frac{d^6x}{dt^6}+5\frac{d^5x}{dt^5}+6\frac{d^4x}{dt^4}=0 \tag{3.1.33}$$

que tiene por ecuación auxiliar

$$m^6+5m^5+6m^4=m^4(m+2)(m+3)=0 \tag{3.1.34}$$

o bien

$$x_p(t)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+C_4e^{-2t}+C_5e^{-3t} \tag{3.1.35}$$

Ahora bien, una solución particular no puede tener constantes arbitrarias, por lo que para eliminarlas se sustituye x_p en la ecuación original 3.1.28. Como

$$\begin{aligned}\dot{x}_p&=C_1+2C_2t+3C_3t^2-2C_4e^{-2t}-3C_5e^{-3t}\\ \ddot{x}_p&=2C_2+6C_3t+4C_4e^{-2t}+9C_5e^{-3t}\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

reemplazando en 3.1.28

$$\begin{gathered}2C_2+6C_3t+4C_4e^{-2t}+9C_5e^{-3t}+5\left(C_1+2C_2t+3C_3t^2-2C_4e^{-2t}-3C_5e^{-3t}\right)\\ +6\left(C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+C_4e^{-2t}+C_5e^{-3t}\right)=t^3\end{gathered} \tag{3.1.37}$$

o bien

$$\begin{gathered}(2C_2+5C_1+6C_0)+(6C_3+10C_2+6C_1)\,t\\ +(15C_3+6C_2)\,t^2+6C_3t^3=t^3\end{gathered} \tag{3.1.38}$$

que da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}2C_2+5C_1+6C_0=0\\ 6C_3+10C_2+6C_1=0\\ 15C_3+6C_2=0\\ 6C_3=1\end{cases} \tag{3.1.39}$$

que tiene solución

$$C_0=-\tfrac{29}{216}\quad C_1=\tfrac{19}{36}\quad C_2=-\tfrac{5}{12}\quad C_3=\tfrac{1}{6} \tag{3.1.40}$$

las constantes C_4, C_5 quedan sin determinar pero no hay problema con esto pues corresponden a los mismos términos que la solución homogénea. Por lo tanto, la solución completa del problema es

$$x(t)=-\frac{29}{216}+\frac{19}{36}t-\frac{5}{12}t^2+\frac{1}{6}t^3+c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t} \tag{3.1.41}$$

En esencia, el método del anulador consiste en encontrar un polinomio que anule el input de la ecuación de forma que haya que resolver una ecuación homogénea de coeficientes constantes. Para que funcione el método, el input deben ser términos que sean productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos.

- El operador D^n anula a

$$\underbrace{1,\ t,\ t^2, \cdots, t^{n-1}}_{D^n} \tag{3.1.42}$$

- El operador $(D-\alpha)^n$ anula a

$$\underbrace{e^{\alpha t},\ te^{\alpha t},\ t^2e^{\alpha t}, \cdots, t^{n-1}e^{\alpha t}}_{(D-\alpha)^n} \tag{3.1.43}$$

- El operador $\left(D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)^n$ anula a

$$\underbrace{\begin{matrix} e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{n-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{n-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{matrix}}_{(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2))^n} \tag{3.1.44}$$

Ejemplo 77. Resuelva $\ddot{x}-2\dot{x}+x=10e^{-2t}\cos t$

Primero se halla la solución de la ecuación homogénea.

$$m^2-2m+1=(m-1)^2 \tag{3.1.45}$$

que tiene solución homogénea

$$x_h(t)=c_1e^t+c_2te^t \tag{3.1.46}$$

En notación de operadores, la ecuación diferencial se escribe como

$$(D-1)^2x=10e^{-2t}\cos t \tag{3.1.47}$$

eb 3.1.44 se toma $n=1, \alpha=-2, \beta=1$ y se multiplica 3.1.47 por D^2+4D+5, es decir

$$\left(D^2+4D+5\right)(D-1)^2=\left(D^2+4D+5\right)\left(10e^{-2t}\cos t\right)=0 \tag{3.1.48}$$

la ecuación característica de la nueva ecuación homogénea es

$$\left(m^2+4m+5\right)(m-1)^2=(m-(-2+i))(m-(-2-i))(m-1)(m+i) \tag{3.1.49}$$

por lo que

$$x_p=C_1e^{-2t}\cos t+C_2e^{-2t}\sin t+C_3e^t+C_4te^t \tag{3.1.50}$$

Derivando se llega a

$$\begin{aligned}\dot{x}_p&=-2C_1e^{-2t}\cos t-C_1e^{-2t}\sin t-2C_2e^{-2t}\sin t+C_2e^{-2t}\cos t+C_3e^t+C_4e^t+C_4te^t\\&=\left(C_2-2C_1\right)e^{-2t}\cos t+\left(-C_1-2C_2\right)e^{-2t}\sin t+\left(C_4+C_3\right)e^t+C_4te^t\end{aligned} \tag{3.1.51}$$

Derivando nuevamente

$$\begin{aligned}\ddot{x}_p &= -2\left(C_2-2C_1\right)e^{-2t}\cos t-\left(C_2-2C_1\right)e^{-2t}\sin t-2\left(-C_1-2C_2\right)e^{-2t}\sin t\\&\quad+\left(-C_1-2C_2\right)e^{-2t}\cos t+\left(C_4+C_3\right)e^t+C_4e^t+C_4te^t\\&=\left(3C_1-4C_2\right)e^{-2t}\cos t+\left(4C_1+3C_2\right)e^{-2t}\sin t+\left(C_3+2C_4\right)e^t+C_4te^t\end{aligned} \tag{3.1.52}$$

sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{gathered}\left(3C_1-4C_2\right)e^{-2t}\cos t+\left(4C_1+3C_2\right)e^{-2t}\sin t+\left(C_3+2C_4\right)e^t+C_4te^t\\-2\left(\left(C_2-2C_1\right)e^{-2t}\cos t+\left(-C_1-2C_2\right)e^{-2t}\sin t+\left(C_4+C_3\right)e^t+C_4te^t\right)\\+C_1e^{-2t}\cos t+C_2e^{-2t}\sin t+C_3e^t+C_4te^t=10e^{-2t}\cos t\end{gathered} \tag{3.1.53}$$

por lo que se llega al sistema

$$\begin{cases}8C_1-5C_2=10\\7C_1+8C_2=0\end{cases} \tag{3.1.54}$$

que da

$$C_1=\frac{80}{99}\quad C_2=-\frac{70}{99} \tag{3.1.55}$$

por lo tanto la solución general es

$$x(t)=\frac{80}{99}e^{-2t}\cos t-\frac{70}{99}e^{-2t}\sin t+c_1e^t+c_2te^t \tag{3.1.56}$$

El uso de operadores también es útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Como prototipo de un sistema de ecuaciones diferenciales, se tomarán las ecuaciones de movimiento de dos resortes acoplados. Se toman dos partículas con la misma masa m y tres resortes: los del extremo tienen constante k y el del medio tiene constante k_{12}. Luego, si x_1, x_2 representan el desplazamiento de las partículas con respecto a su posición de equilibrio, entonces la segunda ley de Newton establece que

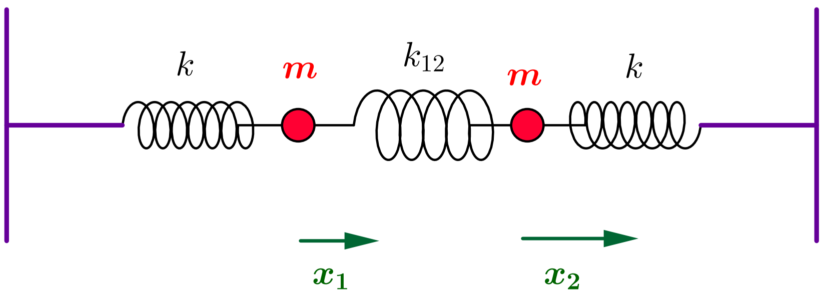

Figura 3.1.1: Osciladores Acoplados

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1=-kx_1+k_{12}\left(x_2-x_1\right)\\m\ddot{x}_2=-kx_2-k_{12}\left(x_2-x_1\right)\end{cases} \tag{3.1.57}$$

más adelante se verá como resolver el sistema de ecuaciones anterior. Algunos sistemas de ecuaciones son lo suficientemente sencillos que pueden resolver utilizando el método de sustitución y el álgebra de operadores.

Ejemplo 78. Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2 - y}{t} \end{cases}$

Primero que todo, hay que observar que se están buscando dos funciones $x(t), y(t)$. Como en el sistema solo aparece una derivada de cada función, en la solución del sistema no deben aparecer más de dos constantes arbitrarias. Como la primera ecuación es separable se puede integrar a ambos lados y se obtiene

$$x = e^{2t} + c_1 \tag{3.1.58}$$

sustituyendo en la segunda ecuación se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\left(e^{2t} + c_1\right)^2 - y}{t} = \frac{e^{4t} + 2e^{2t}c_1 + c_1^2 - y}{t} \tag{3.1.59}$$

la ecuación anterior es lineal y se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{e^{4t} + 2e^{2t}c_1 + c_1^2}{t} \tag{3.1.60}$$

como

$$e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{\ln t} = t \tag{3.1.61}$$

por lo que puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}(yt) = e^{4t} + 2e^{2t}c_1 + c_1^2 \tag{3.1.62}$$

integrando a ambos lados

$$yt = \frac{1}{4}e^{4t} + e^{2t}c_1 + c_1^2 t + c_2 \tag{3.1.63}$$

o bien

$$y = t^{-1}\left(\frac{1}{4}e^{4t} + e^{2t}c_1 + c_1^2 t + c_2\right) \tag{3.1.64}$$

Ejemplo 79. Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + y = 0 \\ 2\frac{dx}{dt} + 2x + 2\frac{dy}{dt} - 2y = t \end{cases}$

Primero se escribe en notación de operadores como

$$\begin{cases} (D-1)\,x + (D+1)\,y = 0 \\ 2(D+1)x + 2(D-1)y = t \end{cases} \tag{3.1.65}$$

La idea es multiplicar por operadores de forma que se llegue a una única ecuación en una variable. Si se multiplica la primera ecuación por $-2(D+1)$ y la segunda por $(D-1)$ para obtener el sistema

$$\begin{cases} -2\left(D^2-1\right)x - 2\left(D^2+2D+1\right)y = 0 \\ 2(D^2-1)x + 2\left(D^2-2D+1\right)y = 1-t \end{cases} \tag{3.1.66}$$

sumando ambas ecuaciones se tiene

$$-8Dy = 1-t \tag{3.1.67}$$

como es separable se obtiene que

$$-8y = t - \frac{t^2}{2} + c_1 \tag{3.1.68}$$

o bien

$$y = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}c_1 \tag{3.1.69}$$

sustituyendo en la primera ecuación de 3.1.65 se obtiene que

$$(D-1)\,x + \left(\frac{t}{8} - \frac{1}{8} + \frac{t^2}{16} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}c_1\right) = 0 \tag{3.1.70}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} - x + \frac{t^2}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}c_1 = 0 \tag{3.1.71}$$

que es una ecuación lineal

$$\frac{dx}{dt} - x = -\frac{t^2}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_1 \tag{3.1.72}$$

como

$$e^{-\int dt} = e^{-t} \tag{3.1.73}$$

la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{-t}\right) = -\frac{t^2}{16}e^{-t} + \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}c_1e^{-t} \tag{3.1.74}$$

como

$$\int t^2e^{-t} = -t^2e^{-t} + 2\int te^{-t} = -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} \tag{3.1.75}$$

la solución de la ecuación es

$$xe^{-t} = -\frac{1}{16}\left(-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\right) - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}c_1e^{-t} + c_2 \tag{3.1.76}$$

o bien

$$x = \frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}c_1 + c_2e^t \tag{3.1.77}$$

podría pensarse que ya se terminó de resolver el sistema, sin embargo, para resolver el sistema se tuvo que aumentar el orden de las ecuaciones diferenciales por lo que puede existir alguna relación entre las constantes. Se sustituyen $x(t)$ y $y(t)$ en la segunda ecuación de 3.1.65 y se tiene

$$\frac{t}{8}+\frac{1}{8}+c_2e^t+\frac{1}{16}t^2+\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}c_1+c_2e^t+\frac{t}{8}-\frac{1}{8}-\frac{t^2}{16}+\frac{t}{8}+\frac{c_1}{8}=\frac{t}{2} \tag{3.1.78}$$

o bien

$$2c_2e^t=0 \tag{3.1.79}$$

por lo tanto

$$c_2=0 \tag{3.1.80}$$

lo cual significa que la solución es

$$x(t)=\frac{1}{16}t^2+\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}c_1 \quad y(t)=y=\frac{t^2}{16}-\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}c_1 \tag{3.1.81}$$

El ejemplo anterior indica que hay que ser cuidadosos con cuántas constantes se pueden esperar al resolver un sistema de ecuaciones lineales. En general se tiene lo siguiente.

El número de constantes arbitrarias en la solución general $x(t)$, $y(t)$ del sistema lineal

$$\begin{cases} p_1(t)x+p_2(t)y=f_1(t) \\ p_3(t)x+p_4(t)y=f_2(t) \end{cases} \tag{3.1.82}$$

donde p_1,p_2,p_3,p_4 son operadores polinomiales con coeficientes constantes es igual al orden de

$$p_1(t)p_4(t)-p_2(t)p_3(t) \tag{3.1.83}$$

siempre que el "determinante" anterior sea distinto de cero. Si es cero, el sistema puede tener ninguna solución o infinitas soluciones.

Comparando con el ejemplo anterior se tiene que

$$p_1=D-1 \quad p_2=D+1 \quad p_3=2(D+1) \quad p_4=2(D-1) \tag{3.1.84}$$

por lo 3.1.83 es

$$2(D-1)^2-2(D+1)^2=-8D \tag{3.1.85}$$

que es un operador de primer orden por lo que solo debería aparecer una constante tal como sucedió.

Ejemplo 80. Resuelva el sistema $\begin{cases} \ddot{x}-4x+\dot{y}=0 \\ -4\dot{x}+\ddot{y}+2y=0 \end{cases}$

En notación de operadores se escribe como

$$\begin{cases} \left(D^2-4\right)x+Dy=0 \\ (-4D)\,x+\left(D^2+2\right)y=0 \end{cases} \tag{3.1.86}$$

que tiene por "discriminante" 3.1.83

$$\left(D^2-4\right)\left(D^2+2\right)+4D^2 \tag{3.1.87}$$

el cual es claramente de orden 4, por lo que tienen que aparecer cuatro constantes. Multiplicando la primera ecuación por $4D$ y la segunda por $\left(D^2-4\right)$ y luego sumando las ecuaciones se obtiene

$$\left(4D^2+\left(D^2-4\right)\left(D^2+2\right)\right)y=0 \tag{3.1.88}$$

o bien

$$\left(D^4+2D^2-8\right)y=0 \tag{3.1.89}$$

que tiene por ecuación característica

$$m^4+2m^2-8=\left(m^2+4\right)\left(m^2-2\right)=(m+2i)\,(m-2i)\left(m+\sqrt{2}\right)\left(m-\sqrt{2}\right) \tag{3.1.90}$$

la solución es

$$y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+c_3e^{-\sqrt{2}t}+c_4e^{\sqrt{2}t} \tag{3.1.91}$$

sustituyendo en la segunda ecuación pues es de primer orden en x

$$\dot{x}=-\frac{1}{2}c_1\cos 2t-\frac{1}{2}c_2\sin 2t+c_3e^{-\sqrt{2}t}+c_4e^{\sqrt{2}t} \tag{3.1.92}$$

por lo tanto

$$x=-\frac{1}{4}c_1\sin 2t+\frac{1}{4}c_2\cos 2t-\frac{c_3}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}+\frac{c_4}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}+c_5 \tag{3.1.93}$$

como aparece una constante adicional, hay que sustituir x,y en la primera ecuación para obtener la condición de consistencia. Reemplazando se tiene que

$$\begin{gathered} c_1\sin 2t-c_2\cos 2t-\sqrt{2}c_3e^{-\sqrt{2}t}+\sqrt{2}c_4e^{\sqrt{2}t}+c_1\sin 2t-c_2\cos 2t+\tfrac{4c_3}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t} \\ -\tfrac{4c_4}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}-4c_5-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t-\sqrt{2}c_3e^{-\sqrt{2}t}+\sqrt{2}c_4e^{\sqrt{2}t}=0 \end{gathered} \tag{3.1.94}$$

que da $c_5=0$ por lo que

$$x=-\frac{1}{4}c_1\sin 2t+\frac{1}{4}c_2\cos 2t-\frac{c_3}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}+\frac{c_4}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t} \tag{3.1.95}$$

3.2. Forma Matricial de un Sistema de Ecuaciones

Cuando se estudió el problema de un resorte con amortiguamiento y forzado, había que considerar la ecuación

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \tag{3.2.1}$$

este sistema es de segundo orden, sin embargo se puede convertir en uno de primer orden si se introducen variables adicionales. Por ejemplo, dado que la velocidad es

$$v \equiv \dot{x} \tag{3.2.2}$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$\dot{v} + 2\beta v + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \tag{3.2.3}$$

que la convierte en una ecuación de primer orden pero dos con dos funciones x, v por hallar. Es decir, resolver 3.2.1 es lo mismo que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = A\cos\omega t - 2\beta v - \omega_0^2 x \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Ahora bien, el sistema anterior puede convertirse a notación matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

Resulta muy conveniente definir

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{3.2.6}$$

que convierte 3.2.5 en

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{3.2.7}$$

donde la derivada de un vector o una matriz consiste en derivar individualmente sus entradas.

De manera análoga, para los resortes acoplados las ecuaciones por resolver son

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{3.2.8}$$

si se define

$$p_1 \equiv m\dot{x}_1 \quad p_2 \equiv m\dot{x}_2 \tag{3.2.9}$$

ambas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ \dot{p}_2 = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{3.2.10}$$

por lo que resolver el sistema original es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{p_1}{m} \\ \dot{p}_1 = (-k - k_{12})\,x_1 + k_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} \\ \dot{p}_2 = k_{12}x_1 + (-k - k_{12})\,x_2 \end{cases} \tag{3.2.11}$$

que se puede escribir en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k - k_{12} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k - k_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{3.2.12}$$

bajo la notación

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k - k_{12} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k - k_{12} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

el sistema 3.2.12 se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{3.2.14}$$

Los ejemplos anteriores motivan la siguiente definición.

La forma normal de un sistema de ecuaciones $n \times n$ de primer orden es un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.2.15}$$

donde

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{3.2.16}$$

Una solución de 3.2.15 consiste en un vector de funciones $\mathbf{x}(t)$ que satisface 3.2.15. El sistema homogéneo asociado a 3.2.15 es el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.2.17}$$

Y el sistema se llama autónomo si $A(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ no dependen de t, es decir, tienen coeficientes constantes.

Muchos resultados para los sistemas de ecuaciones lineales son análogos al de las ecuaciones lineales de orden n, por lo que solo se van a enunciar. Primero que todo, el principio de superposición sigue siendo válido.

Primer Principio de Superposición: Si $\mathbf{x}_{1h}, \mathbf{x}_{2h}$ son dos soluciones al sistema lineal homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.2.18}$$

entonces $c_1\mathbf{x}_{1h} + c_2\mathbf{x}_{2h}$ también es solución del sistema homogéneo.
Segundo Principio de Superposición: Para resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_1(t) + \mathbf{f}_2(t) \tag{3.2.19}$$

basta resolver por aparte los sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_1(t) \quad \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_2(t) \tag{3.2.20}$$

y si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son las soluciones respectivas entonces $\mathbf{x}_3 \equiv \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ es solución del sistema original.

Otra forma de hallar soluciones al sistema homogéneo es tomando la parte real e imaginaria de la solución.

Si $\mathbf{z}(t)$ es una solución del sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z} \tag{3.2.21}$$

donde $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ entonces $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ también son soluciones del sitema homogéneo.

También hay un concepto análogo de independencia lineal de las soluciones de un sistema de ecuaciones y un sistema homogéneo lineal de orden n tiene una base de dimensión n.

Si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_k(t)$ son soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.2.22}$$

entonces se dicen linealmente dependientes si existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_k$ no todas nulas de forma que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots c_k\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{0} \tag{3.2.23}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Aquí $\mathbf{0}$ es el vector nulo. Para verificar si n soluciones $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ son linealmente independientes o no se calcula el Wronskiano

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) \equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & & & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.2.24}$$

donde

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 \equiv \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_n \equiv \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2.25}$$

En tal caso las n soluciones son linealmente independientes si y solo si el wronskiano de las soluciones es distinto de cero.

También, en forma parecida a las ecuaciones lineales un sistema homogéneo lineal de orden n posee n vectores solución linealmente independientes y la solución general del sistema no homogéneo puede descomponerse como un vector particular más uno homogéneo.

Si se tiene n vectores solución $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ linealmente independientes del sistema lineal homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.2.26}$$

entonces cualquier otra solución $\mathbf{x}_h$ del sistema homogéneo puede escribirse como combinación lineal de tales vectores, es decir,

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{3.2.27}$$

De manera similar, si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema lineal no homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.2.28}$$

entonces cualquier otra solución $\mathbf{x}$ del sistema no homogéneo puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h \tag{3.2.29}$$

Para los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones resulta útil representar las soluciones no como varios vectores sino como una matriz, llamada una matriz fundamental [1] . De 3.2.27 se tiene

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{3.2.30}$$

si se representan los vectores como vectores columna la ecuación anterior se puede escribir como

$$\mathbf{x}_h = \Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{3.2.31}$$

donde Φ es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$, es decir,

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \tag{3.2.32}$$

tal matriz se conoce como una matriz fundamental del sistema homogéneo.

Si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ son n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.2.33}$$

entonces la matriz fundamental formada por los vectores $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$, es decir,

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \tag{3.2.34}$$

la matriz fundamental tiene tres propiedades básicas:

- La matriz fundamental es no singular, es decir, siempre es invertible
- La derivada de la matriz fundamental (que se realiza derivando individualmente las componentes de la matriz) cumple

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \tag{3.2.35}$$

- La solución general del sistema homogéneo puede escribirse como

$$\mathbf{x}_h = \Phi(t)\mathbf{c} \tag{3.2.36}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector de constantes.

[1] en general siempre hay varias matrices fundamentales pero todas cumplen el mismo papel

3.3. Solución de Sistemas Autónomos

3.3.1. Solución de Sistemas Homogéneos

Ahora se van a estudiar los sistemas lineales homogéneos autónomos, es decir, sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{3.3.1}$$

donde A es una matriz constante. En analogía con el caso de ecuaciones lineales se buscan inicialmente soluciones de tipo exponencial, dado que ahora las soluciones deben ser vectores, se va a intentar con una solución de la forma

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{v} \tag{3.3.2}$$

donde se toma $\mathbf{v}$ constante. Derivando 3.3.2 se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} \tag{3.3.3}$$

y sustituyendo en 3.3.1 se tiene

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = Ae^{\lambda t}\mathbf{v} \tag{3.3.4}$$

por lo tanto, λ debe cumplir la ecuación

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{3.3.5}$$

es decir, λ debe ser un valor propio de A y $\mathbf{v}$ un vector propio de A. Como se verá más adelante, es necesario considerar valores propios tantos reales como complejos de la matriz A.

Para hallar los valores propios de la matriz A se hallan las raíces del polinomio característico de A, es decir, se resuelve la ecuación

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.3.6}$$

Luego los vectores propios se hallan resolviendo el sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.3.7}$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector propio con valor propio λ entonces

$$\mathbf{x} \equiv e^{\lambda t}\mathbf{v} \tag{3.3.8}$$

es una solución del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{3.3.9}$$

Ejemplo 81. Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

para hallar los valores propios se tiene que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda) \tag{3.3.11}$$

por lo que los valores propios son

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \tag{3.3.12}$$

Para hallar un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ se resuelve el sistema homogéneo

$$(A - I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.3.13}$$

es decir (como es homogéneo no es necesario considerar la matriz aumentada pues solo sería una columna de ceros)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

reduciendo la matriz por Gauss Jordan, por ejemplo, haciendo $-f_1 + f_2$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

y el sistema homogéneo asociado es

$$v_1 + v_2 = 0 \tag{3.3.16}$$

por lo que

$$(v_1, v_2) = (v_1, -v_1) = v_1(1, -1) \tag{3.3.17}$$

De esta forma un vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.3.18}$$

Para hallar un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ se resuelve el sistema homogéneo

$$(A - 3I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.3.19}$$

es decir se considera

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3.20}$$

reduciendo la matriz por Gauss Jordan, por ejemplo, haciendo $f_1 + f_2$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.21}$$

y el sistema homogéneo asociado es

$$v_1 = v_2 \tag{3.3.22}$$

por lo que

$$(v_1, v_2) = (v_1, v_1) = v_1\,(1, 1) \tag{3.3.23}$$

De esta forma un vector propio es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.24}$$

Luego la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.25}$$

También se puede escribir la solución con la ayuda de la matriz fundamental

$$\mathbf{x}_h(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{c} \tag{3.3.26}$$

Las soluciones en 3.3.25 son curvas en el plano xy con parámetro t. Conforme $t \longrightarrow \infty$ las soluciones tienden a alejarse del origen del plano xy lo cual significa que dos soluciones que comienzan cerca del origen con el tiempo van a separarse mucho, de ahí que cuando ambos valores propios son positivos se dice que el origen es un punto de equilibrio inestable o una fuente. (En la figura se representan los dos vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$)

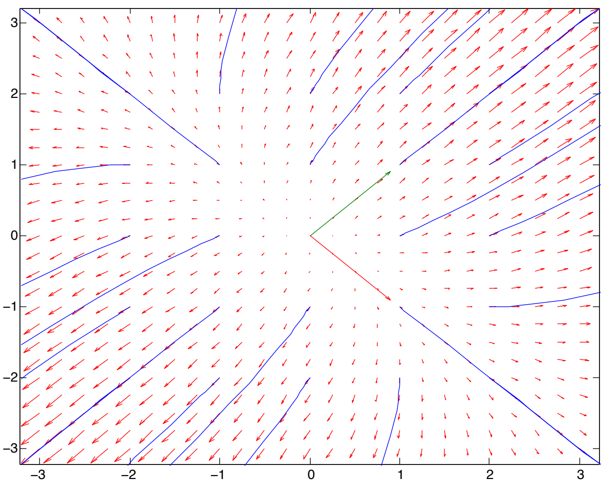

Figura 3.3.1: Soluciones en el plano xy, valores propios positivos

---

Ejemplo 82. Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2y \end{cases}$

En este caso el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.27}$$

Es fácil hallar que los valores y vectores propios son

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 = -3 & \mathbf{v}_1 = (-1, 1) \\ \lambda_2 = -1 & \mathbf{v}_2 = (1, 1) \end{array} \tag{3.3.28}$$

por lo que la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.29}$$

Este caso es el opuesto al del ejemplo anterior ya que cuanto $t \longrightarrow \infty$ todas las soluciones se acercan al origen independientemente de los valores iniciales. De hecho, cuando todos los valores propios son negativos se dice que el origen es un punto de equilibrio estable o un sumidero.

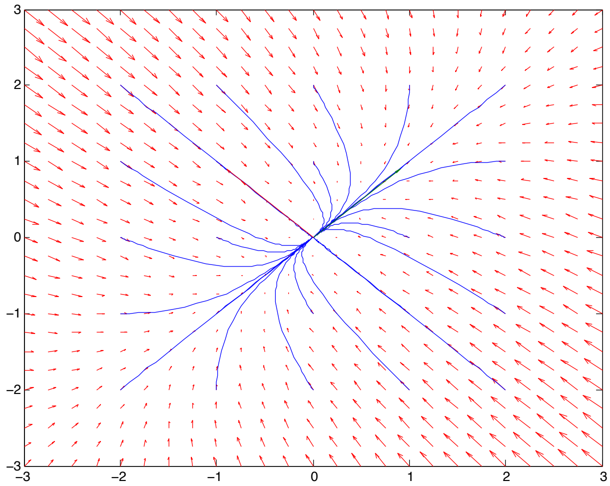

Figura 3.3.2: Soluciones en el plano xy, valores propios negativos

---

Ejemplo 83. Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

La forma matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.30}$$

Los valores propios de la matrices son

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0 \tag{3.3.31}$$

Por lo tanto los valores propios son

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=4 \tag{3.3.32}$$

para hallar un vector propio asociado a $\lambda_1=-1$ se considera la matriz

$$A+I=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3.33}$$

que al reducirla se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.34}$$

por lo que

$$v_2=-v_1 \tag{3.3.35}$$

luego un vector propio es

$$\mathbf{v}_1=(1,-1) \tag{3.3.36}$$

Para un vector propio asociado a $\lambda_2=4$ se considera la matriz

$$A-4I=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \tag{3.3.37}$$

que al reducirla se llega a

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.38}$$

por lo que

$$3v_2=2v_1 \tag{3.3.39}$$

luego un vector propio es

$$\left(v_1,\frac{2}{3}v_1\right)=v_1\left(1,\frac{2}{3}\right) \tag{3.3.40}$$

como cualquier otro múltiplo funciona se toma

$$\mathbf{v}_2=(3,2) \tag{3.3.41}$$

Luego la solución general es

$$\mathbf{x}_h=c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.42}$$

En este caso el comportamiento de la solución depende del valor de c_2. Si $c_2\neq 0$ la solución se aleja del origen cuando $t\longrightarrow\infty$ mientras que si $c_2=0$ la solución se acerca al origen. Se dice que en este caso el origen es un punto de ensilladura cuando los valores propios tienen signos distintos.

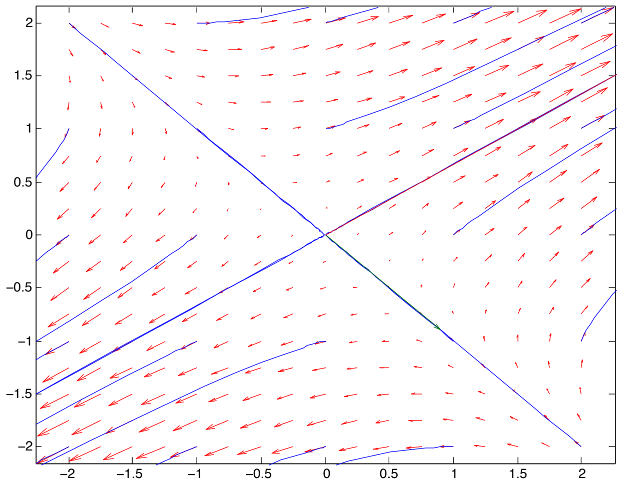

Figura 3.3.3: Soluciones en el plano xy, valores propios signos distintos

---

De álgebra lineal se sabe que un valor propio puede tener asociados distintos vectores propios. En ese caso, mientras la multiplicidad geométrica del valor propio sea la misma que la multiplicidad algebraica del valor propios, es decir, la dimensión del subespacio característico es igual a la multiplicidad con la que aparece el valor propio como raíz del polinomio característico, se puede aplicar la misma construcción que la anterior para encontrar la solución general.

Suponga que se tiene el sistema lineal homogéneo autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{3.3.43}$$

Si la matriz $n \times n$ A posee únicamente valores propios reales y posee n vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ que corresponden a los valores propios (no necesariamente distintos) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ entonces la solución general del sistema homogéneo anterior es

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n \tag{3.3.44}$$

Ejemplo 84. Resuelva el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Se hallan primero los valores propios de la matriz.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \tag{3.3.45}$$

por las propiedades del determinante la operación f_2+f_3 no cambia el valor de este por lo que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{3.3.46}$$

donde también se usó la propiedad de que puede factorizarse un término que está repetido en una misma fila o columna. Luego se realizan las operaciones $2f_3+f_1$ y $-2f_3+f_2$ obteniendo

$$(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{3.3.47}$$

luego se desarrolla el determinante a lo largo de la tercera columna y se obtiene

$$-(1+\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)-8\right) = -(1+\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda-5\right) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) \tag{3.3.48}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=5 \tag{3.3.49}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1=-1$ se calculan con

$$A+I=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3.50}$$

simplificando se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.51}$$

que da el sistema

$$v_2=v_1+v_3 \tag{3.3.52}$$

por lo que

$$(v_1,v_2,v_3)=(v_1,v_1+v_3,v_3)=v_1(1,1,0)+v_3(0,1,1) \tag{3.3.53}$$

y dos vectores propios son

$$\mathbf{v}_1=(1,1,0) \qquad \mathbf{v}_2=(0,1,1) \tag{3.3.54}$$

El vector propio asociado a $\lambda_2 = 5$ se calcula con

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{3.3.55}$$

que se reduce para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.56}$$

que da

$$v_1 = v_3 \quad v_2 = -v_3 \tag{3.3.57}$$

por lo que un vector propio es

$$\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1) \tag{3.3.58}$$

Finalmente, como hay tres vectores propios linealmente independientes la solución homogénea es

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.59}$$

Para el caso de valores propios complejos se utiliza el hecho de que la parte real e imaginaria de una solución compleja vuelve a ser solución del sistema homogéneo.

Ejemplo 85. Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.60}$$

Los valores propios de la matriz son

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = (\lambda - (5+2i))(\lambda - (5-2i)) \tag{3.3.61}$$

Por lo que los valores propios son

$$\lambda_1 = 5 + 2i \qquad \lambda_2 = 5 - 2i \tag{3.3.62}$$

El vector propio del valor propio $\lambda_1 = 5 + 2i$ se halla con

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \tag{3.3.63}$$

reduciéndola se llega a

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.64}$$

o bien

$$v_2 = (1-2i)\, v_1 \tag{3.3.65}$$

por lo que

$$(v_1, v_2) = v_1\,(1, 1-2i) \tag{3.3.66}$$

luego un vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1-2i) \tag{3.3.67}$$

El vector propio del valor propio $\lambda_2 = 5-2i$ se halla con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{pmatrix} \tag{3.3.68}$$

reduciéndola se llega a

$$\begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.69}$$

o bien

$$v_2 = (1+2i)\, v_1 \tag{3.3.70}$$

por lo que

$$(v_1, v_2) = v_1\,(1, 1+2i) \tag{3.3.71}$$

luego un vector propio es

$$\mathbf{v}_2 = (1, 1+2i) \tag{3.3.72}$$

Luego la solución compleja del primer valor propio es

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = e^{(5+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} &= e^{5t}\,(\cos 2t + i\sin 2t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \\ = e^{5t}\left(\cos 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) &+ ie^{5t}\left(\cos 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sin 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ = e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} &+ ie^{5t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3.73}$$

La solución compleja del segundo valor propio es

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = e^{(5-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} &= e^{5t}\,(\cos 2t - i\sin 2t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \\ = e^{5t}\left(\cos 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin 2t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &+ ie^{5t}\left(\cos 2t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ = e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} &+ ie^{5t}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3.74}$$

Es fácil observar que en realidad basta estudiar una de las dos soluciones por lo que si se toma la parte real e imaginaria de $\mathbf{z}_1(t)$ la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} \tag{3.3.75}$$

en este caso cuando $t \longrightarrow \infty$ las soluciones nuevamente se alejan del origen, sin embargo, ahora tienen la particularidad de que lo hace en forma de espiral debido a los cosenos y senos.

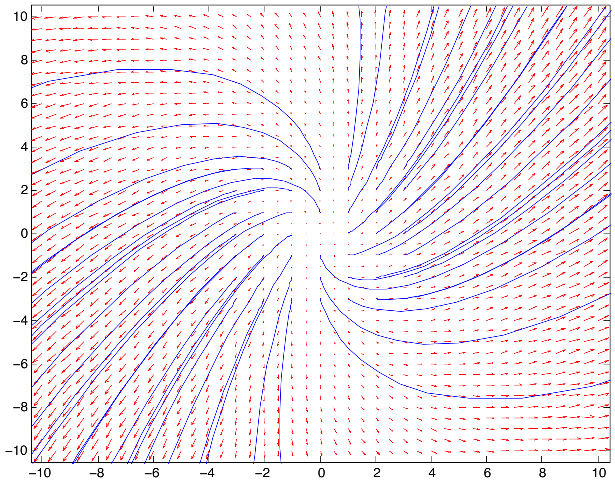

Figura 3.3.4: Soluciones en el plano xy, valores propios complejos

---

Para hallar la solución correspondiente a un valor propio $\lambda = a + ib$ de la matriz A con vector propio $\mathbf{v}$ se toma la parte real e imaginaria de la solución compleja, es decir, se toma

$$c_1 \mathrm{Re}\left(e^{(a+bi)t}\mathbf{v}\right) + c_2 \mathrm{Im}\left(e^{(a+bi)t}\mathbf{v}\right) \tag{3.3.76}$$

Ejemplo 86. Resuelva el sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$

En forma matricial el sistema es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.77}$$

Los valores propios de la matriz son

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) \tag{3.3.78}$$

Basta analizar el valor propio $\lambda = 2i$.

$$A - 2iI = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \tag{3.3.79}$$

que se reduce y da la condición

$$v_2 = 2iv_1 \tag{3.3.80}$$

un vector propio es

$$\mathbf{v} = (1, 2i) \tag{3.3.81}$$

Luego la solución compleja asociada es

$$\begin{aligned} e^{2it}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} &= (\cos 2t + i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3.82}$$

Por lo tanto, la solución homogénea es

$$\mathbf{x}_h = c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} \tag{3.3.83}$$

en este caso en el que los valores propios solo tienen parte imaginaria el movimiento de la solución es de elipses como se observa en la figura.

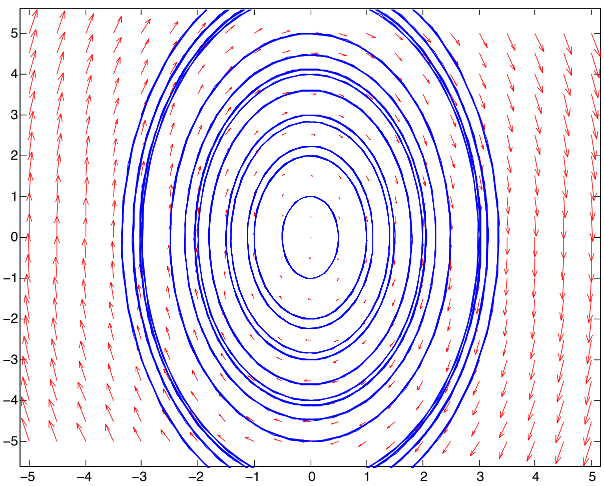

Figura 3.3.5: Soluciones plano xy, valores propios imaginarios

---

Con la teoría desarrollada hasta el momento puede resolverse el problema de los osciladores acoplados 3.2.12

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k-k_{12} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.84}$$

Los valores propios de la matriz se calculan con

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k-k_{12} & -\lambda & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -\lambda \end{vmatrix} \tag{3.3.85}$$

Se desarrolla el determinante a lo largo de la primera fila

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & k_{12} & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{m} \\ 0 & -k-k_{12} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{m} \begin{vmatrix} -k-k_{12} & k_{12} & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{m} \\ k_{12} & -k-k_{12} & -\lambda \end{vmatrix} \tag{3.3.86}$$

luego se desarrollan ambos determinantes a lo largo de la primera columna

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k-k_{12} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{m}\left((-k-k_{12}) \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k-k_{12} & -\lambda \end{vmatrix} + k_{12} \begin{vmatrix} k_{12} & 0 \\ -\lambda & \frac{1}{m} \end{vmatrix}\right) \tag{3.3.87}$$

desarrollando los determinantes da

$$\lambda^2\left(\lambda^2 + \frac{1}{m}(k+k_{12})\right) - \frac{1}{m}\left((-k-k_{12})\left(\lambda^2 + \frac{1}{m}(k+k_{12})\right) + \frac{1}{m}k_{12}^2\right) \tag{3.3.88}$$

Agrupando los términos de acuerdo con la potencia de λ

$$\lambda^4 + \frac{2}{m}(k+k_{12})\lambda^2 - \frac{1}{m^2}\left(k_{12}^2 - (k+k_{12})^2\right) = 0 \tag{3.3.89}$$

multiplicando por m^2 a ambos lados y realizando la diferencia de cuadrados

$$m^2\lambda^4 + 2m(k+k_{12})\lambda^2 + k(k+2k_{12}) = 0 \tag{3.3.90}$$

se puede aplicar la fórmula cuadrática para λ^2 que da como resultado

$$\lambda^2 = \frac{-2m(k+k_{12}) \pm \sqrt{4m^2(k+k_{12})^2 - 4m^2k(k+2k_{12})}}{2m^2} \tag{3.3.91}$$

simplificando un poco

$$\lambda^2 = \frac{-(k+k_{12}) \pm \sqrt{k^2 + 2kk_{12} + k_{12}^2 - k^2 - 2kk_{12}}}{m} = \frac{-(k+k_{12}) \pm k_{12}}{m} \tag{3.3.92}$$

es decir,

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{-k-k_{12} \pm k_{12}}{m}} \tag{3.3.93}$$

por lo que los cuatro valores propios son

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda_3 = i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \quad \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \tag{3.3.94}$$

Todos los valores propios son imaginarios. El vector propio que corresponde a λ_1 se halla considerando el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.95}$$

haciendo la operación $f_4 + f_2$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.96}$$

luego se hace la operación $i\sqrt{\frac{m}{k}}f_1$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & 0 \\ -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.97}$$

luego se hacen las operaciones $kf_1 + f_2$ y $-k_{12}f_1 + f_4$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k}{m}} & \frac{1}{m} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{km}} & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.98}$$

luego se realiza $i\sqrt{\frac{m}{k}}f_3$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{km}} & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.99}$$

haciendo $kf_3 + f_2$ y $(k + k_{12})\, f_3 + f_4$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & ik_{12}\sqrt{\frac{1}{km}} \end{pmatrix} \tag{3.3.100}$$

la última fila se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.101}$$

por lo que es claro que el sistema en forma más reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{1}{km}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{km}} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.102}$$

o bien

$$v_1 = -i\sqrt{\frac{1}{km}}v_4 \quad v_2 = v_4 \quad v_3 = -i\sqrt{\frac{1}{km}} \tag{3.3.103}$$

por lo que

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_4\left(-i\sqrt{\frac{1}{km}}, 1, -i\sqrt{\frac{1}{km}}, 1\right) \tag{3.3.104}$$

luego un vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = \left(-i, \sqrt{km}, -i, \sqrt{km}\right) \tag{3.3.105}$$

y la solución correspondiente se escribe como

$$\mathbf{z}_1 = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{km} \\ -i \\ \sqrt{km} \end{pmatrix} = \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{km} \\ 0 \\ \sqrt{km} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.106}$$

o bien

$$\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ -\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{pmatrix} \tag{3.3.107}$$

Por otro lado, el vector propio que corresponde a λ_3 se halla considerando el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.108}$$

haciendo la operación $f_4 + f_2$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.109}$$

luego se hace la operación $i\sqrt{\frac{m}{k+2k_{12}}}f_1$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & 0 \\ -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} \\ k_{12} & 0 & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.110}$$

luego se hacen las operaciones $kf_1 + f_2$ y $-k_{12}f_1 + f_4$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & 0 \\ 0 & ik\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & \frac{1}{m} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.111}$$

luego se realiza $i\sqrt{\frac{m}{k+2k_{12}}}f_3$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & 0 \\ 0 & ik\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & -k & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & -k-k_{12} & -i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.112}$$

haciendo $kf_3 + f_2$ y $(k+k_{12})\, f_3 + f_4$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & 0 \\ 0 & ik\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} & 0 & ik\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & i(k+k_{12})\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.113}$$

la segunda fila se puede simplificar para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \\ 0 & -ik_{12}\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} & 0 & i(k+k_{12})\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} - i\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \end{pmatrix} \tag{3.3.114}$$

haciendo $ik_{12}\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} f_2 + f_4$ y $-i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} f_2 + f_1$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.115}$$

o bien

$$v_1 = i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} v_4 \quad v_2 = -v_4 \quad v_3 = -i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}} \tag{3.3.116}$$

por lo que

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_4 \left(i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}}, -1, -i\sqrt{\frac{1}{(k+2k_{12})m}}, 1 \right) \tag{3.3.117}$$

luego un vector propio es

$$\mathbf{v}_2 = \left(i, -\sqrt{(k+2k_{12})m}, -i, \ \sqrt{(k+2k_{12})m} \right) \tag{3.3.118}$$

y la solución correspondiente se escribe como

$$\mathbf{z}_2 = \left(\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t + i\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{(k+2k_{12})m} \\ 0 \\ \sqrt{(k+2k_{12})m} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{3.3.119}$$

o bien

$$\mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} -\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\sqrt{(k+2k_{12})m}\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sqrt{(k+2k_{12})m}\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\sqrt{(k+2k_{12})m}\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sqrt{(k+2k_{12})m}\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \end{pmatrix} \tag{3.3.120}$$

por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ -\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \sqrt{km}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{pmatrix} \\ &+ c_3 \begin{pmatrix} -\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\sqrt{(k+2k_{12})m}\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sqrt{(k+2k_{12})m}\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\sqrt{(k+2k_{12})m}\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ -\cos\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \\ \sqrt{(k+2k_{12})m}\sin\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3.121}$$

Si se define

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \quad \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.3.122}$$

y usando el hecho de que $p_1 = mv_1, p_2 = mv_2$ la solución se puede escribir de forma más compacta como

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ x_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sin\omega_2 t \\ \omega_2\cos\omega_2 t \\ \sin\omega_2 t \\ \omega_2\cos\omega_2 t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos\omega_2 t \\ \omega_2\sin\omega_2 t \\ -\cos\omega_2 t \\ \omega_2\sin\omega_2 t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\sin\omega_1 t \\ -\omega_1\cos\omega_1 t \\ \sin\omega_1 t \\ \omega_1\cos\omega_1 t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ -\omega_1\sin\omega_1 t \\ -\cos\omega_1 t \\ \omega_1\sin\omega_1 t \end{pmatrix} \tag{3.3.123}$$

De la solución general es posible extraer dos movimientos llamados los modos normales. Primero que todo, evaluando 3.3.123 en $t = 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ v_1(0) \\ x_2(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.124}$$

Por ejemplo, si se quisiera que las partículas solo oscilaran con frecuencia ω_1 habría que encontrar condiciones iniciales de modo que $c_1 = c_2 = 0$. De 3.3.124 se observa que para garantizar los anterior basta con que

$$x_1(0) = -x_2(0) \qquad v_1(0) = -v_2(0) \tag{3.3.125}$$

lo cual significa que las partículas van realizar movimiento armónico simple con frecuencia ω_1. Tal comportamiento se llama un modo normal y este en particular es el modo antisimétrico.

Por otro lado, si se quiere que las partículas oscilen con frecuencia ω_2 se busca que $c_3 = c_4 = 0$. Para garantizar esto basta poner como condiciones iniciales

$$x_1(0) = x_2(0) \qquad v_1(0) = v_2(0) \tag{3.3.126}$$

lo cual significa que las partículas van realizar movimiento armónico simple con frecuencia ω_2. Tal comportamiento se llama un modo normal y este en particular es el modo simétrico.

Es decir, los modos normales consisten en el caso particular en el cual el movimiento de las partículas se desacopla y cada una se mueve a la misma frecuencia en movimiento armónico simple como si la otra no existiera.

A veces puede ocurrir que la multiplicidad algebraica de un valor propio no sea igual a su multiplicidad geométrica. En tal caso no hay n vectores propios y hay que cambiar un poco la construcción de la solución homogénea. El análogo para las ecuaciones lineales de orden n era que una raíz del polinomio característico tenía una multiplicidad mayor que uno y había que introducir términos de la forma te^{mt}. Se va a intentar algo parecido en esta situación como se verá con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 87. Resuelva el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.127}$$

como es triangular superior los valores propios son los elementos sobre la diagonal, es decir,

$$\lambda = 3 \tag{3.3.128}$$

Para los vectores propios considere

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.129}$$

Luego es fácil ver que un vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0) \tag{3.3.130}$$

y no aparece un segundo vector propio linealmente independiente.

Ahora bien, por notación se va a reescribir el vector propio como

$$\mathbf{v}_{1,1} \equiv (1,0) \tag{3.3.131}$$

Asociado a este valor propio solo hay un vector propio y la solución

$$\mathbf{x}_{1,1} = e^{3t}\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.132}$$

Luego se intentará con una solución de la forma

$$\mathbf{x}_{1,2} \equiv (\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{3t} \tag{3.3.133}$$

donde $\mathbf{v}_{1,2}$ es un vector desconocido, y no tiene que ser un vector propio. Derivando 3.3.133 se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,1}e^{3t} + 3\,(\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{3t} \tag{3.3.134}$$

Como se quiere que $\mathbf{x}_{1,2}$ sea solución, debe cumplirse

$$\dot{\mathbf{x}}_{1,2} = A\mathbf{x}_{1,2} \tag{3.3.135}$$

e igualando con 3.3.134

$$A\,(\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{3t} = \mathbf{v}_{1,1}e^{3t} + 3\,(\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{3t} \tag{3.3.136}$$

como $\mathbf{v}_{1,1}$ es un vector propio de A con valor propio 3 se tiene en la ecuación anterior

$$A\mathbf{v}_{1,2} + 3t\mathbf{v}_{1,1} = \mathbf{v}_{1,1} + 3\mathbf{v}_{1,2} + 3t\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.137}$$

o bien agrupando los términos

$$(A - 3I)\,\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.138}$$

Es decir, hay que resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.3.139}$$

que tiene por solución (en realidad hay infinitas pero se toma la más sencilla)

$$\mathbf{v}_{1,2} = (0,1) \tag{3.3.140}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\mathbf{x}_h = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)e^{3t} = e^{3t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2t \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.141}$$

Ejemplo 88. Resuelva el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 6z \\ \dot{y} = 2y + 5z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3.142}$$

Como es triangular superior, los valores propios son los valores sobre la diagonal, es decir,

$$\lambda = 2 \tag{3.3.143}$$

Luego, para calcular los vectores propios se tiene el sistema homogéneo

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.144}$$

que da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.145}$$

por lo tanto el sistema de ecuaciones es

$$v_2 = v_3 = 0 \tag{3.3.146}$$

y de esta forma un vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0) \tag{3.3.147}$$

Ahora bien, por notación se va a reescribir el vector propio como

$$\mathbf{v}_{1,1} \equiv (1, 0, 0) \tag{3.3.148}$$

Asociado a este valor propio solo hay un vector propio y la solución

$$\mathbf{x}_{1,1} = e^{2t}\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.149}$$

Luego se intentará con una solución de la forma

$$\mathbf{x}_{1,2} \equiv (\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{2t} \tag{3.3.150}$$

donde $\mathbf{v}_{1,2}$ es un vector desconocido, y no tiene que ser un vector propio. Derivando 3.3.150 se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,1}e^{2t} + 2\,(\mathbf{v}_{1,2} + t\mathbf{v}_{1,1})\, e^{2t} \tag{3.3.151}$$

Como se quiere que $\mathbf{x}_{1,2}$ sea solución, debe cumplirse

$$\dot{\mathbf{x}}_{1,2} = A\mathbf{x}_{1,2} \tag{3.3.152}$$

e igualando con 3.3.151

$$A\left(\mathbf{v}_{1,2}+t\mathbf{v}_{1,1}\right)e^{2t}=\mathbf{v}_{1,1}e^{2t}+2\left(\mathbf{v}_{1,2}+t\mathbf{v}_{1,1}\right)e^{2t} \tag{3.3.153}$$

como $\mathbf{v}_{1,1}$ es un vector propio de A con valor propio 2 se tiene en la ecuación anterior

$$A\mathbf{v}_{1,2}+2t\mathbf{v}_{1,1}=\mathbf{v}_{1,1}+2\mathbf{v}_{1,2}+2t\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.154}$$

o bien agrupando los términos

$$\left(A-2I\right)\mathbf{v}_{1,2}=\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.155}$$

Es decir, hay que resolver los sistemas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.3.156}$$

que tiene por solución (de nuevo se toma la más sencilla)

$$\mathbf{v}_{1,2}=(0,1,0) \tag{3.3.157}$$

Con esto la segunda solución es

$$\mathbf{x}_{1,2}=e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.158}$$

Finalmente, se ocupa una tercera solución que se propone de la forma

$$\mathbf{x}_{1,3}=e^{2t}\left(\mathbf{v}_{1,3}+t\mathbf{v}_{1,2}+\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{1,1}\right) \tag{3.3.159}$$

Derivando 3.3.159 y como se quiere que sea solución, es decir, $\dot{\mathbf{x}}_{1,3}=A\mathbf{x}_{1,3}$ se tiene

$$A\mathbf{x}_{1,3}=2e^{2t}\left(\mathbf{v}_{1,3}+t\mathbf{v}_{1,2}+\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{1,1}\right)+e^{2t}\left(\mathbf{v}_{1,2}+t\mathbf{v}_{1,1}\right) \tag{3.3.160}$$

usando 3.3.159 nuevamente en el lado izquierdo

$$A\left(\mathbf{v}_{1,3}+t\mathbf{v}_{1,2}+\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{1,1}\right)=2\left(\mathbf{v}_{1,3}+t\mathbf{v}_{1,2}+\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{1,1}\right)+\left(\mathbf{v}_{1,2}+t\mathbf{v}_{1,1}\right) \tag{3.3.161}$$

agrupando los términos se puede escribir como

$$\left(A-2I\right)\mathbf{v}_{1,3}+t\left(A-2I\right)\mathbf{v}_{1,2}+\frac{t^2}{2}\left(A-2I\right)\mathbf{v}_{1,1}=\mathbf{v}_{1,2}+t\mathbf{v}_{1,1} \tag{3.3.162}$$

por las definición de $\mathbf{v}_{1,2}$ y como $\mathbf{v}_{1,1}$ es un vector propio se llega a que

$$\left(A-2I\right)\mathbf{v}_{1,3}=\mathbf{v}_{1,2} \tag{3.3.163}$$

Es decir, hay que resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.3.164}$$

que da (de nuevo, tomando la solución más simple)

$$\mathbf{v}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{3.3.165}$$

Por lo tanto, la tercera solución linealmente independiente es

$$\mathbf{x}_{1,3} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.166}$$

De esta forma, la solución general es

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + c_3 e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.167}$$

De los ejemplos anteriores, se concluye que el método para hallar las soluciones cuando la multiplicidad geométrica es menor que la algebraica es el siguiente.

Si para el sistema lineal homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{3.3.168}$$

el valor propio λ_i tiene multiplicidad algebraica r_i (es decir, aparece como $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ en el polinomio característico de A) y su multiplicidad geométrica es 1, es decir, la dimensión del subespacio característico de λ_i es uno, entonces si $\mathbf{v}_{i,1}$ es un vector propio de λ_i se buscan vectores $\mathbf{v}_{i,2}, \mathbf{v}_{i,3}, \cdots, \mathbf{v}_{i,r_i}$

$$\begin{gathered}
(A - \lambda_i I)\,\mathbf{v}_{i,2} = \mathbf{v}_{i,1} \\
(A - \lambda_i I)\,\mathbf{v}_{i,3} = \mathbf{v}_{i,2} \\
\vdots \\
(A - \lambda_i I)\,\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}_{i,j-1} \\
\vdots \\
(A - \lambda_i I)\,\mathbf{v}_{i,r_i} = \mathbf{v}_{i,r_i}
\end{gathered} \tag{3.3.169}$$

La solución correspondiente es combinación lineal de

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_{i,1} = e^{\lambda_i t}\mathbf{v}_{i,1} \\
\mathbf{x}_{i,2} = e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{v}_{i,2} + t\mathbf{v}_{i,1}\right) \\
\mathbf{x}_{i,3} = e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{v}_{i,3} + t\mathbf{v}_{i,2} + \tfrac{t^2}{2}\mathbf{v}_{i,1}\right) \\
\vdots \\
\mathbf{x}_{i,j} = e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{v}_{i,j} + t\mathbf{v}_{i,j-1} + \cdots + \tfrac{t^{j-1}}{(j-2)!}\mathbf{v}_{i,2} + \tfrac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{v}_{i,1}\right) \\
\vdots \\
\mathbf{x}_{i,r_i} = e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{v}_{i,r_i} + t\mathbf{v}_{i,r_i-1} + \cdots + \tfrac{t^{r_i-1}}{(r_i-2)!}\mathbf{v}_{i,2} + \tfrac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\mathbf{v}_{i,1}\right)
\end{gathered} \tag{3.3.170}$$

3.3.2. Exponencial de una Matriz

Como se ha visto, la forma de resolver un sistema de ecuaciones depende de si la multiplicidad geométrica es igual o no a la multiplicidad algebraica. Hay otra forma alternativa de resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales que no ocupa tomar en cuenta esta diferencia aunque en la práctica puede ser más complicada de utilizar que lo estudiado hasta el momento. Como analogía, para un sistema de una única ecuación diferencial habría que resolver

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad x(0) = x_0 \tag{3.3.171}$$

Es fácil ver que la solución del “sistema” anterior es simplemente

$$x(t) = e^{at}x_0 \tag{3.3.172}$$

Por lo tanto, sería perfecto que para resolver el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.3.173}$$

la solución fuera a través de una "matriz exponencial" e^{tA} de forma que

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 \tag{3.3.174}$$

Afortunadamente, ¡es posible definir una matriz exponencial de forma que la solución anterior sea válida!

La solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.3.175}$$

tiene por solución

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 \tag{3.3.176}$$

La matriz exponencial es una matriz fundamental por lo que la solución del problema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{3.3.177}$$

es simplemente

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} \tag{3.3.178}$$

Ahora la única pregunta es cómo calcular (y definir) la matriz exponencial. Si A es una matriz cuadrada, siempre tiene sentido multiplicar la matriz consigo misma, es decir, formar las matrices A, A^2, A^3,... Ahora bien, la exponencial de un número viene dada por el desarrollo de Taylor

$$e^{ta} = 1 + (ta) + \frac{(ta)^2}{2} + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ta)^n}{n!} \tag{3.3.179}$$

por lo tanto, tiene sentido definir la matriz exponencial como su serie de Taylor

$$e^{tA} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \tag{3.3.180}$$

El problema con la definición anterior consiste en definir que significa una serie de matrices. Si bien es cierto es posible dar sentido a tal concepto, se evitará hacer esto porque se requeriría más teoría de la que se cuenta. De hecho, el cálculo de matrices exponenciales "a fuerza bruta" puede ser muy difícil por lo que se darán algunas propiedades básicas y luego se comentarán algunas formas explícitas para matrices exponenciales de tamaño 2×2.

Si A es una matriz $n \times n$ su matriz exponencial e^A se define como

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{3.3.181}$$

Algunas propiedades de la matriz exponencial son:

- $e^{0_n} = 1_n$ donde 0_n es la matriz nula e 1_n la matriz identidad
- la matriz exponencial conmuta con la matriz que la genera, es decir, $Ae^A = e^A A$
- Si dos matrices conmutan, es decir, $AB = BA$ entonces $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$
- Si A es la matriz diagonal $A = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, es decir, los elementos sobre la diagonal son $d_1, d_2, \cdots, d_n$ entonces la matriz exponencial es diagonal y nada más la exponencial de los elementos individuales sobre la diagonal, es decir, $e^A = \text{diag}\left(e^{d_1}, e^{d_2}, \cdots, e^{d_n}\right)$

Nuevamente, solo se van a mencionar algunas matrices exponenciales cuando la matriz es de cierta forma particular.

- Si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ entonces $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces $e^A = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$

Ejemplo 89. Resuelva el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$

Este sistema se resolvió anteriormente. En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.182}$$

por lo que la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.3.183}$$

usando 3.3.178 la solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.184}$$

por el cuadro anterior

$$e^{\begin{pmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \tag{3.3.185}$$

por lo que la solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.186}$$

que coincide con la solución hallada anteriormente. Observe que aquí no fue importante encontrar ni los valores ni vectores propios o saber la multiplicidad de estos.

3.3.3. Variación de Parámetros

Afortunadamente, es posible dar una fórmula general para resolver el sistema lineal no homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.3.187}$$

Primero que todo, la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h \tag{3.3.188}$$

y la solución homogénea puede escribirse a través de una matriz fundamental como

$$\mathbf{x}_h = \Phi(t)\mathbf{c} \tag{3.3.189}$$

En analogía con la ecuación diferencial lineal de orden n, en el método de variación de parámetros se supone que la solución particular es de la forma

$$\mathbf{x}_p \equiv \Phi(t)\mathbf{c}(t) \tag{3.3.190}$$

donde ahora el vector $\mathbf{c}(t)$ es variable. Derivando 3.3.190

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \dot{\Phi}\mathbf{c} + \Phi\dot{\mathbf{c}} \tag{3.3.191}$$

y sustituyendo en 3.3.187

$$\dot{\Phi}\mathbf{c} + \Phi\dot{\mathbf{c}} = A(t)\Phi\mathbf{c} + \mathbf{f}(t) \tag{3.3.192}$$

como Φ es una matriz fundamental,

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi \tag{3.3.193}$$

y sustituyendo en 3.3.192

$$A(t)\Phi\mathbf{c} + \Phi\dot{\mathbf{c}} = A(t)\Phi\mathbf{c} + \mathbf{f}(t) \tag{3.3.194}$$

por lo que usando el hecho de que la matriz fundamental es invertible $\dot{\mathbf{c}}$ debe cumplir

$$\dot{\mathbf{c}} = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) \tag{3.3.195}$$

o bien

$$\mathbf{c} = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt \tag{3.3.196}$$

Por lo tanto, la solución general del problema no homogéneo es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt + \Phi(t)\mathbf{c} \tag{3.3.197}$$

Una solución particular al sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.3.198}$$

es

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt \tag{3.3.199}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental al sistema homogéneo asociado

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{3.3.200}$$

es decir,

$$\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t)\mathbf{c} \tag{3.3.201}$$

Por lo tanto, la solución general al problema no homogéneo es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt + \Phi(t)\mathbf{c} \tag{3.3.202}$$

Ejemplo 90. Resuelva el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

Primero hay que resolver el sistema homogéneo asociado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{3.3.203}$$

El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 12 - 2 = (\lambda+2)(\lambda+5) \tag{3.3.204}$$

por lo que los valores propios asociados son

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -5 \tag{3.3.205}$$

Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.3.206}$$

Luego la solución homogénea es

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.207}$$

En este caso la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \tag{3.3.208}$$

usando la fórmula para la inversa de una matriz dos por dos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{3.3.209}$$

por lo que

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{-7t}} \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \tag{3.3.210}$$

en este caso

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \tag{3.3.211}$$

comparando con 3.3.202 se tiene primero que

$$\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} \tag{3.3.212}$$

por 3.3.199 la solución particular es

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{-4t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \tag{3.3.213}$$

por lo tanto, la solución general es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} + c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.3.214}$$

Ejemplo 91. Considere dos recipientes A, B como el de la figura siguiente. Suponga que el recipiente A contiene 50 litros de agua en los que hay disueltos 25 kilogramos de sal y que en el recipiente B hay 50 litros de agua pura. A los recipientes ingresan líquidos como se indica la figura, se supone que los líquidos están bien mezclazdos en todo instante. Determine el número de kilogramos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en los recipientes en todo instante.

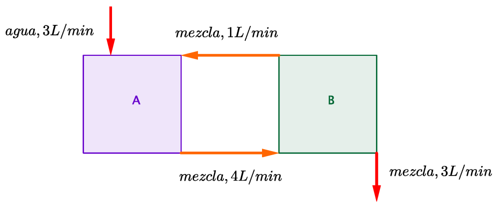

Figura 3.3.6: Mezclas químicas

En este caso el volumen neto en cada recipiente es constante. De esta forma, es claro que

$$\frac{dx_1}{dt} = \underbrace{\left(\frac{3\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{0\text{kg}}{\text{L}}\right) + \left(\frac{1\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_2}{50\text{L}}\right)}_{\text{entrada}} - \underbrace{\left(\frac{4\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_1}{50\text{L}}\right)}_{\text{salida}} = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \tag{3.3.215}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \underbrace{\left(\frac{4\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_1}{50\text{L}}\right)}_{\text{entrada}} - \underbrace{\left(\frac{1\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_2}{50\text{L}}\right) - \left(\frac{3\text{L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_2}{50\text{L}}\right)}_{\text{salida}} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2 \tag{3.3.216}$$

Luego debe resolverse el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2 \end{cases} \tag{3.3.217}$$

que puede resolverse o bien con el método matricial o con el método de operadores. Se puede verificar que la solución general es

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-\frac{t}{25}} + c_2 e^{-\frac{3t}{25}} \\ x_2(t) = 2c_1 e^{-\frac{t}{25}} - 2c_2 e^{-\frac{3t}{25}} \end{cases} \tag{3.3.218}$$

Ejemplo 92. Resuelva el sistema $\begin{cases} x' - 4x + y'' = t^2 \\ x' + x + y'' = 0 \end{cases}$

En notación de operadores se tiene el sistema

$$\begin{cases} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ (D+1)x + Dy = 0 \end{cases} \tag{3.3.219}$$

se multiplica la primera ecuación por $D+1$ y la segunda por $(D-4)$ para obtener

$$\begin{cases} (D+1)(D-4)x + (D+1)D^2 y = (D+1)t^2 \\ (D-4)(D+1)x + (D-4)Dy = 0 \end{cases} \tag{3.3.220}$$

luego se restan las ecuaciones y se tiene

$$(D+1)D^2 y - (D-4)Dy = (D+1)t^2 \tag{3.3.221}$$

o bien

$$\left(D^3 + 4D\right) y = 2t + t^2 \tag{3.3.222}$$

la ecuación característica es $m^3 + 4m = 0$ o bien $m(m^2+4) = m(m+2i)(m-2i) = 0$. Luego la solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) \tag{3.3.223}$$

Para la particular se propone $y_p(t) = t\left(At^2 + Bt + C\right)$ y puede verificarse que $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{8}$. Luego

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t \tag{3.3.224}$$

Ahora podría sustituirse y en la segunda ecuación original para resolver

$$\dot{x} + x = -\left(-2c_2 \sin(2t) + 2c_3 \cos(2t) + \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) \tag{3.3.225}$$

En este caso la ecuación es lineal pero como puede observarse el cálculo se volvería muy tedioso debido a la forma del input. La otra alternativa es volver a eliminar las ecuaciones. Por ejemplo, multiplicando la segunda ecuación original por D se tiene

$$\begin{cases} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ D(D+1)x + DDy = 0 \end{cases} \tag{3.3.226}$$

y restando las ecuaciones habría que resolver

$$(D^2+4)x=-t^2 \tag{3.3.227}$$

que tiene por solución homogénea

$$x_h(t)=c_4\cos(2t)+c_5\sin(2t) \tag{3.3.228}$$

para la particular se toma $x_p(t)=At^2+Bt+C$ y se llega a

$$x(t)=c_4\cos(2t)+c_5\sin(2t)-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8} \tag{3.3.229}$$

Dado que se esperan tres constantes arbitrarias, se sustituyen $x(t)$, $y(t)$ en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, la segunda y se llega a que

$$(c_5-2c_4-2c_2)\sin(2t)+(2c_5+c_4+2c_3)\cos(2t)=0 \tag{3.3.230}$$

de aquí se puede tomar $c_4=-\frac{1}{5}(4c_2+2c_3)$ y $c_5=\frac{1}{5}(2c_2-4c_3)$ y la solución es

$$x(t)=-\frac{1}{5}(4c_2+2c_3)\cos(2t)+\frac{1}{5}(2c_2-4c_3)\sin(2t)-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8} \tag{3.3.231}$$

$$y(t)=c_1+c_2\cos(2t)+c_3\sin(2t)+\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t \tag{3.3.232}$$

Ejemplo 93. Resuelva el siguiente sistema de resortes acoplados que se indica en la figura bajo las suposiciones de $k_1=6$, $k_2=4$, $m_1=m_2=1$ y $x_1(0)=0$, $\dot{x}_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=-1$

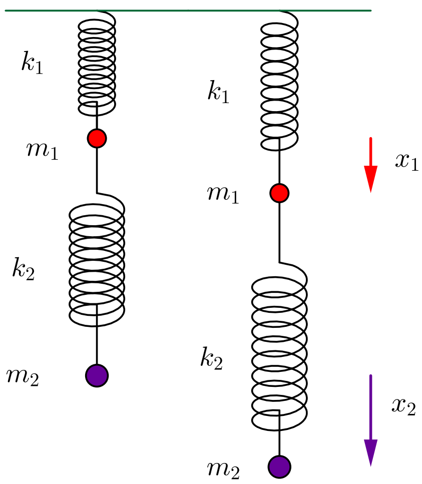

Figura 3.3.7: Resortes verticales acoplados

Si se toma el sistema de referencia desde la posición de equilibrio donde el peso compensa las fuerzas de los resortes pueden plantearse las ecuaciones de movimiento ignorando el peso y tomando x_1, x_2 como las posiciones con respecto a tal equilibrio. Hay que resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{3.3.233}$$

En este caso debe resolverse

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -6x_1 + 4(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 = -4(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{3.3.234}$$

que en notación de operadores puede escribirse como

$$\begin{cases} (D^2 + 10)x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + (D^2 + 4)x_2 = 0 \end{cases} \tag{3.3.235}$$

multiplicando la primera ecuación por 4 y la segunda por $D^2 + 10$ se tiene

$$\begin{cases} 4(D^2 + 10)x_1 - 16x_2 = 0 \\ -4(D^2 + 10)x_1 + (D^2 + 10)(D^2 + 4)x_2 = 0 \end{cases} \tag{3.3.236}$$

sumando las ecuaciones se obiene

$$\left(D^2 + 10\right)(D^2 + 4)x_2 - 16x_2 = 0 \tag{3.3.237}$$

que tiene ecuación característica

$$\left(m^2 + 10\right)\left(m^2 + 4\right) - 16 = m^4 + 14m^2 + 24 = (m^2 + 2)(m^2 + 12) = 0 \tag{3.3.238}$$

luego las raíces son

$$m_1 = -\sqrt{2}i \quad m_2 = \sqrt{2}i \quad m_3 = -2\sqrt{3}i \quad m_4 = 2\sqrt{3}i \tag{3.3.239}$$

De esta forma

$$x_2(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + c_3 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) + c_4 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.240}$$

Para hallar x_1 se multiplica la primera ecuación por $\left(D^2 + 4\right)$ y la segunda por 4 para obtener

$$\begin{cases} (D^2 + 10)(D^2 + 4)x_1 - 4(D^2 + 4)x_2 = 0 \\ -16x_1 + 4(D^2 + 4)x_2 = 0 \end{cases} \tag{3.3.241}$$

sumando se obtiene

$$\left(D^2 + 10\right)(D^2 + 4)x_1 - 16x_1 = 0 \tag{3.3.242}$$

claramente la solución es

$$x_1(t) = c_5 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_6 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + c_7 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) + c_8 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.243}$$

Como solo pueden haber cuatro constantes arbitrarias, se reemplaza en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, en la primera se tiene

$$\begin{array}{c} -2c_5 \cos\left(\sqrt{2}t\right) - 2c_6 \sin\left(\sqrt{2}t\right) - 12c_7 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) - 12c_8 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \\ +10c_5 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + 10c_6 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + 10c_7 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) + 10c_8 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \\ -4c_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) - 4c_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right) - 4c_3 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) - 4c_4 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) = 0 \end{array} \tag{3.3.244}$$

esto da el sistema de ecuaciones

$$c_1 = 2c_5 \quad c_2 = 2c_6 \quad c_7 = -2c_3 \quad c_8 = -2c_4 \tag{3.3.245}$$

por lo que

$$x_1(t) = c_5 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_6 \sin\left(\sqrt{2}t\right) - 2c_3 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) - 2c_4 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.246}$$

$$x_2(t) = 2c_5 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + 2c_6 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + c_3 \cos\left(2\sqrt{3}t\right) + c_4 \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.247}$$

Las condiciones iniciales se traducen en el sistema

$$\begin{cases} c_5 - 2c_3 = 0 \\ \sqrt{2}c_6 - 4\sqrt{3}c_4 = 1 \\ 2c_5 + c_3 = 0 \\ 2\sqrt{2}c_6 + 2\sqrt{3}c_4 = -1 \end{cases} \tag{3.3.248}$$

el sistema puede reescribirse como

$$\begin{cases} c_5 = 2c_3 \\ \sqrt{2}c_6 = 1 + 4\sqrt{3}c_4 \\ 5c_3 = 0 \\ 2 + 8\sqrt{3}c_4 + 2\sqrt{3}c_4 = -1 \end{cases} \tag{3.3.249}$$

luego $c_3 = c_5 = 0$ y $c_4 = -\frac{3}{10\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{10}$ por lo que $c_6 = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. De esta forma

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10} \sin\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{5} \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.250}$$

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5} \sin\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{10} \sin\left(2\sqrt{3}t\right) \tag{3.3.251}$$

4 Solución de Ecuaciones Diferenciales por Medio de Series

4.1. Puntos Ordinarios

Hasta el momento la mayor parte de los esfuerzos se han enfocado en resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. La solución de tales ecuaciones puede describirse como la suma de una solución particular y otra homogénea. Para hallar la homogénea, si la ecuación es de coeficientes constantes o de Euler hay un método efectivo para resolverlas, sin embargo, la mayor partes de las ecuaciones no cumplen esta condición. Sin embargo, siempre y cuando los coeficientes de la ecuación sean analíticos, es posible encontrar soluciones "explícitas". Antes de seguir, es importante recordar que una función $f(x)$ es analítica si es posible representarla como una serie de potencias, es decir, se puede escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{4.1.1}$$

donde en tal caso se dice que el desarrollo de potencias es alrededor del punto x_0 y los coeficientes c_k son los coeficientes de la serie de Taylor

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{4.1.2}$$

Las propiedades más importantes de una serie de potencias son las siguientes.

Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{4.1.3}$$

define una serie de potencia centrada en x_0 entonces:

- Una serie de potencias siempre converge al menos en un punto que es x_0. En general, la convergencia de una serie de potencias siempre ocurre en un intervalo de la forma $(x_0 - R, x_0 + R)$ donde R es el radio de convergencia y puede hallarse de distintas formas. Por ejemplo, si se utiliza el criterio de la razón primero se calcula

$$L \equiv \lim_{k \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1} (x - x_0)^{k+1}}{c_k (x - x_0)^k} \right| = \lim_{k \longrightarrow \infty} |x - x_0| \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \tag{4.1.4}$$

  Si $L > 1$ la serie diverge, si $L < 1$ la serie converge y el radio es $R = \frac{1}{L}$ y si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

- Una serie de potencias puede derivarse término a término un número ilimitado de veces, por ejemplo,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x - x_0)^{k-1} \tag{4.1.5}$$

- Una serie de potencias puede integrarse término a término un número ilimitado de veces, por ejemplo,

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \tag{4.1.6}$$

- Si una serie de potencias es idénticamente cero dentro del intervalo de convergencia, es decir,

$$\forall x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = 0 \tag{4.1.7}$$

  entonces cada coeficiente debe ser cero, es decir,

$$\forall k, \quad c_k = 0 \tag{4.1.8}$$

- El índice de sumatoria de una serie de potencias es mudo, es decir, da lo mismo usar otra letra o símbolo en vez de k, por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (x - x_0)^l = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{4.1.9}$$

Como se dijo antes, para el caso en que una ecuación diferencial lineal posee coeficientes analíticos es posible hallar una solución lo suficientemenete explícita, para ser más precisos, es posible hallar una solución analítica, que si bien no está dada necesariamente en términos de funciones elementales como senos, cosenos, exponenciales, etc, por lo menos siempre puede expresarse por una serie de potencias.

Suponga que se tiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden en forma estándar

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.1.10}$$

y que x_0 es un punto ordinario , es decir, un punto para el cual $p(x), q(x)$ son analíticas en un intervalo I centrado en x_0. Entonces existen dos soluciones analíticas linealmente independientes que pueden representarse como serie de potencias alrededor de x_0, es decir, de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{4.1.11}$$

De forma más general, si se tiene la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{4.1.12}$$

y las funciones $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), \cdots, a_0(x), f(x)$ son analíticas en un intervalo I centrado en x_0 entonces existe una única solución $y(x)$ al problema de valor inicial

$$y(x_0) = a_0 \quad y'(x_0) = a_1 \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \tag{4.1.13}$$

Más aún, tal solución es analítica y puede representarse como una serie de potencias centrada en x_0.

Ejemplo 94. Resuelva la ecuación de Airy $y'' + xy = 0$

Si no se indica lo contrario en todos los ejemplos se supone que $x_0 = 0$. Como los coeficientes son funciones analíticas sobre toda la recta la solución que se encuentre es válida en todo $\mathbb{R}$. Luego se propone la solución como una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{4.1.14}$$

derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{4.1.15}$$

Se sustituye en la ecuación diferencial original para obtener

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}}_{(2)} = 0 \tag{4.1.16}$$

La primera potencia de x en (1) es x^0 mientras que la primera potencia en (2) es x^1. Por lo tanto, se reescriben las sumas como

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}}_{n=k-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k \qquad (4.1.17)$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}}_{n=k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \qquad (4.1.18)$$

Sustituyendo en 4.1.16 se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0 \qquad (4.1.19)$$

o bien

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+2)\,(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}\right)x^k = 0 \qquad (4.1.20)$$

igualando los coeficientes respectivos a cero

$$\begin{gathered} 2c_2 = 0 \\ (k+2)\,(k+1)c_{k+2} + c_{k-1} = 0 \quad k \geq 1 \end{gathered} \qquad (4.1.21)$$

las relaciones anteriores pueden escribirse como

$$\begin{gathered} c_2 = 0 \\ c_{k+2} = -\tfrac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \quad k \geq 1 \end{gathered} \qquad (4.1.22)$$

Para hallar una forma explícita de los c_k se prueban con algunos valores la relación de recurrencia anterior.

$$\begin{gathered} c_3 = -\tfrac{c_0}{2\cdot 3} \\ c_4 = -\tfrac{c_1}{3\cdot 4} \\ c_5 = -\tfrac{c_2}{4\cdot 5} = 0 \\ c_6 = -\tfrac{c_3}{5\cdot 6} = \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}c_0 \\ c_7 = -\tfrac{c_4}{6\cdot 7} = \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}c_1 \\ c_8 = -\tfrac{c_5}{7\cdot 8} = 0 \\ \vdots \\ c_{3n} = (-1)^n \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3n-1)(3n)}c_0 = (-1)^n \tfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j-1)(3j)}c_0 \\ c_{3n+1} = (-1)^n \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots(3n)(3n+1)}c_1 = (-1)^n \tfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j)(3j+1)}c_1 \\ c_{3n+2} = 0 \end{gathered} \qquad (4.1.23)$$

De esta forma la solución general se escribe como

$$\begin{aligned} y(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k x^k \\ &= c_0 + c_1 x + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{3n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n+1} x^{3n+1} \\ &= c_0 \left[1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j-1)(3j)} x^{3n}\right] + c_1 \left[x + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j)(3j+1)} x^{3n+1}\right] \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

por lo tanto, la solución general puede escribirse como

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \tag{4.1.25}$$

donde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j-1)(3j)} x^{3n} \quad y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(3j)(3j+1)} x^{3n+1} \tag{4.1.26}$$

Ejemplo 95. Resuelva $\left(x^2+1\right) y'' + xy' - y = 0$

En su forma estándar la ecuación se escribe como

$$y'' + \frac{x}{x^2+1} y' - \frac{1}{x^2+1} y = 0 \tag{4.1.27}$$

Se puede ver que el término $\frac{1}{x^2+1}$ se indefine solo cuando $x = \pm i$ lo cual significa que la convergencia alrededor de cero puede garantizarse cuando $|x| < 1$. Se propone la solución como una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{4.1.28}$$

derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{4.1.29}$$

Luego se sustituye en la ecuación diferencial original por lo que

$$\left(x^2+1\right) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \tag{4.1.30}$$

Realizando los productos se tiene

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k}_{(3)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}_{(4)} = 0 \tag{4.1.31}$$

ahora se agrupan los términos según la potencia de x. La primera potencia de x en (1) es x^2, la primera potencia en (2) es x^0 , la primera potencia en (3) es x y la primera potencia en (4) es x^0. Por lo tanto, todas las series comparten potencias a partir de x^2. Antes de agruparlas, se utiliza el hecho de que los índices son mudos en (2) para escribir

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}}_{n\equiv k-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k \tag{4.1.32}$$

sustituyendo en 4.1.31 se tiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \tag{4.1.33}$$

o bien agrupando según la potencia de x

$$(2c_2 - c_0)\, x^0 + (6c_3 + c_1 - c_1)\, x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k\right) x^k = 0 \tag{4.1.34}$$

Cada coeficiente por aparte debe ser cero, lo cual implica

$$\begin{gathered} c_2 = \tfrac{1}{2}c_0 \\ c_3 = 0 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} + (k-1)(k+1)c_k = 0 \end{gathered} \tag{4.1.35}$$

es decir se tienen las relaciones

$$\begin{gathered} c_2 = \tfrac{1}{2}c_0 \\ c_3 = 0 \\ c_{k+2} = \tfrac{1-k}{k+2}c_k \quad k \geq 2 \end{gathered} \tag{4.1.36}$$

En general no es posible hallar explícitamente una expresión para los coeficientes y más bien quedan en función de una relación recursiva como $c_{k+2} = \frac{1-k}{k+2}c_k$. Sin embargo, en este caso hay una expresión explícita. Por ejemplo,

$$\begin{gathered} c_4 = -\tfrac{1}{4}c_2 = -\tfrac{1}{2^2 2!}c_0 \\ c_5 = -\tfrac{2}{5}c_3 = 0 \\ c_6 = -\tfrac{3}{6}c_4 = \tfrac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0 \\ c_7 = -\tfrac{4}{7}c_5 = 0 \\ c_8 = -\tfrac{5}{8}c_6 = -\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0 \\ \vdots \\ c_{2n} = (-1)^{n+1}\tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}c_0 \qquad n \geq 2 \\ c_{2n+1} = 0 \end{gathered} \tag{4.1.37}$$

Por lo tanto reemplazando en 4.1.28 se tiene

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \sum_{k=4}^{\infty} c_k x^k \\ &= c_0 + c_1 x + \tfrac{1}{2} c_0 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n} x^{2n} \\ &= c_0 \left[1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!} x^{2n}\right] + c_1 [x] \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

Por lo tanto la solución general puede escribirse como

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \tag{4.1.39}$$

donde c_0, c_1 son constantes arbitrarias y

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!} x^{2n} \qquad y_2(x) = x \tag{4.1.40}$$

4.2. Puntos Singulares y el Método de Frobenius

Los ejemplos anteriores demostraron como la clase de ecuaciones que pueden resolverse ha aumentado significativamente. Sin embargo, una ecuación como

$$(x-1)\, y'' + \frac{1}{x} y' - 2y = 0 \tag{4.2.1}$$

no podría resolverse con el método anterior alrededor de cero puesto que la función $\frac{1}{x}$ no es analítica en tal punto. A su vez, no podría resolverse alrededor de uno pues al escribirla en su forma estándar la función $\frac{1}{x-1}$ no es analítica alrededor de uno. Sin embargo, tales coeficientes no difieren mucho de ser analíticos, en el sentido de que si se multiplican por ciertos polinomios, se convierten en funciones analíticas. El método de Frobenius caracteriza aquellos puntos que aunque no son ordinarios una leve modificación del método de serie de potencias funciona para resolver la ecuación de ese punto.

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{4.2.2}$$

Si en el punto x_0 la función alguna o ambas de las funciones $p(x), q(x)$ no son analíticas, se dice que x_0 es un punto singular.
En el caso particular en que las funciones

$$P(x) \equiv (x - x_0)\, p(x) \qquad Q(x) \equiv (x - x_0)^2 q(x) \tag{4.2.3}$$

son analíticas alrededor de x_0, se dice que el punto x_0 es un punto singular regular. De lo contrario es un punto singular irregular. .

El Teorema de Frobenius permite hallar al menos una solución en forma de serie de potencias para la ecuación 4.2.2 alrededor de x_0 cuando el punto es un punto singular regular.

Teorema de Frobenius: Suponga que x_0 es un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.2.4}$$

Entonces la ecuación 4.2.4 posee al menos una solución de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{4.2.5}$$

donde m es un número por determinar. Tal serie converge en el intervalo común de convergencia de

$$P(x) \equiv (x - x_0)\, p(x) \qquad Q(x) \equiv (x - x_0)^2 q(x) \tag{4.2.6}$$

excepto quizás en el punto $x = x_0$.

Sin pérdida de generalidad, puede tomarse $x_0 = 0$ pues siempre puede realizarse un cambio de variable o traslación para centrar el problema alrededor del origen. En tal caso, para resolver 4.2.4 primero se escribe en función de 4.2.6 como

$$y'' + \frac{P(x)}{x} y' + \frac{Q(x)}{x^2} y = 0 \tag{4.2.7}$$

luego puede multiplicarse por x^2 a ambos lados para obtener la ecuación

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.2.8}$$

Luego, como $P(x), Q(x)$ son analíticas alrededor de cero puede escribirse

$$P(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad Q(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{4.2.9}$$

y sustituyendo en 4.2.8 se escribe

$$x^2 y'' + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} y' + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k y = 0 \tag{4.2.10}$$

Por el Teorema de Frobenius se busca una solución de la forma

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left(c_0 x^m + c_1 x^{m+1} + c_2 x^{m+2} + \cdots + \right) \tag{4.2.11}$$

sin pérdida de generalidad puede tomarse $c_0 \neq 0$ pues de lo contrario puede factorizarse un x en la serie y escribir x^{m+1} en vez de x^m. Sustituyendo 4.2.11 en 4.2.10 se obtiene

$$\begin{gathered} x^2\left(m(m-1)c_0x^{m-2} + (m+1)mc_1x^{m-1} + (m+2)(m+1)c_2x^m + \cdots +\right) \\ + \left(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots +\right)\left(mc_0x^{m-1} + (m+1)c_1x^m + (m+2)c_2x^{m+1} + \cdots +\right) \\ + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots\right)\left(c_0x^m + c_1x^{m+1} + c_2x^{m+2} + \cdots +\right) = 0 \end{gathered} \tag{4.2.12}$$

se puede observar que la menor potencia de x que aparece al realizar los productos respectivos es x^m, de hecho si se agrupan los términos según la potencia de x, el coeficiente que multiplica a x^m es

$$m(m-1)c_0 + ma_0c_0 + b_0c_0 \tag{4.2.13}$$

dado que $c_0 \neq 0$ y la serie de potencias está igualada a cero, cada coeficiente que multiplica a cada potencia de x debe ser cero, en particular, el coeficiente que multiplica a x^m debe ser cero, lo cual significa que m debe cumplir la ecuación

$$m(m-1) + ma_0 + b_0 = 0 \tag{4.2.14}$$

La ecuación 4.2.14 se llama la ecuación indicial. Dado que es una ecuación cuadrática, en general hay dos raíces m_1, m_2. Dependiendo de tales raíces, el método de Frobenius garantiza una segunda solución como se verá a continuación

4.2.1. Casos Especiales

4.2.1.1. Raíces con Diferencia no Entera

Si m_1, m_2 son las raíces de 4.2.14 y $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$ entonces el método de Frobenius

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{4.2.15}$$

genera dos soluciones linealmente independientes para la ecuación 4.2.4

$$y_1(x) = x^{m_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad y_2(x) = x^{m_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{4.2.16}$$

Ejemplo 96. Resuelva $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

Escribiendo la ecuación en forma estándar se tiene

$$y'' + \frac{1+x}{2x}y' + \frac{1}{2x}y = 0 \tag{4.2.17}$$

en este caso

$$p(x) = \frac{1+x}{2x} \quad q(x) = \frac{1}{2x} \tag{4.2.18}$$

como las funciones

$$P(x) = xp(x) = \frac{1+x}{2} \quad Q(x) = x^2 q(x) = \frac{x}{2} \tag{4.2.19}$$

son analíticas siempre entonces el método de Frobenius garantiza al menos una solución de la forma

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} \tag{4.2.20}$$

Derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m-1} \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m-2} \tag{4.2.21}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$2x \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m-2} + (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} = 0 \tag{4.2.22}$$

realizando los productos

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} = 0 \tag{4.2.23}$$

Las primeras dos series se reescriben como

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m-1}}_{n=k-1} &= \textstyle\sum_{n=-1}^{\infty} 2(n+1+m)(n+m) c_{n+1} x^{n+m} \\ &= \textstyle\sum_{k=-1}^{\infty} 2(k+1+m)(k+m) c_{k+1} x^{k+m} \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m-1}}_{n=k-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1+m) c_{n+1} x^{n+m} = \sum_{k=-1}^{\infty} (k+1+m) c_{k+1} x^{k+m} \tag{4.2.25}$$

sustituyendo en 4.2.23 se tiene

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{k=-1}^{\infty} 2(k+1+m)(k+m) c_{k+1} x^{k+m} + \sum_{k=-1}^{\infty} (k+1+m) c_{k+1} x^{k+m} + \\ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.26}$$

agrupando los términos según la potencia de x se tiene

$$\begin{gathered} \left(2m(m-1)c_0 + mc_0\right) x^{-1+m} + \\ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(2(k+1+m)(k+m) c_{k+1} + (k+1+m) c_{k+1} + (k+m) c_k + c_k\right) x^{k+m} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.27}$$

Igualando cada coeficiente a cero se tiene

$$\begin{gathered} 2m(m-1)c_0 + mc_0 = 0 \\ 2(k+1+m)(k+m)c_{k+1} + (k+1+m)c_{k+1} + (k+m)c_k + c_k = 0 \end{gathered} \tag{4.2.28}$$

simplificando los términos las ecuaciones anteriores se vuelven

$$\begin{gathered} m(2m-1) = 0 \\ (k+m+1)\,(2(k+m)+1)\,c_{k+1} + (k+m+1)\,c_k = 0 \end{gathered} \tag{4.2.29}$$

La primera ecuación es la ecuación indicial que da como valores

$$m_1 = \frac{1}{2} \qquad m_2 = 0 \tag{4.2.30}$$

Como la diferencia entre las raíces no es un entero, el método de Frobenius garantiza dos soluciones como series. La segunda ecuación da la relación de recurrencia que puede escribirse como

$$c_{k+1} = -\frac{c_k}{2(k+m)+1} \qquad k \geq 0 \tag{4.2.31}$$

Dependiendo del valor de m la forma explícita de los c_k cambia. Para valores pequeños se tiene la siguiente tabla

$$\begin{array}{cc} m = \frac{1}{2}, c_{k+1} = -\frac{c_k}{2(k+1)} & m = 0, c_{k+1} = -\frac{c_k}{2k+1} \\ c_1 = -\frac{c_0}{2\cdot 1} & c_1 = -\frac{c_0}{1} \\ c_2 = -\frac{c_1}{2\cdot 2} = \frac{c_0}{2^2\cdot 2!} & c_2 = -\frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{1\cdot 3} \\ c_3 = -\frac{c_2}{2\cdot 3} = -\frac{c_0}{2^3\cdot 3!} & c_3 = -\frac{c_2}{5} = -\frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5} \\ c_4 = -\frac{c_3}{2\cdot 4} = \frac{c_0}{2^4\cdot 4!} & c_4 = -\frac{c_3}{7} = \frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \\ \vdots & \vdots \\ c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!} & c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \end{array} \tag{4.2.32}$$

De esta forma, la solución asociada con $m = \frac{1}{2}$ es

$$x^{1/2}\left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 x^n}{2^n n!}\right) = c_0 x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}\right) \tag{4.2.33}$$

o bien ignorando la constante c_0

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}\right) \tag{4.2.34}$$

La solución asociada con $m = 0$ es

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} x^n = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} x^n\right) \tag{4.2.35}$$

ignorando la constante c_0

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \tag{4.2.36}$$

4.2.1.2. Raíces Distintas con Diferencia Entera

Si m_1, m_2 son las raíces de 4.2.14 y si $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$ suponga que $m_1 > m_2$. Defina

$$N \equiv m_1 - m_2 \tag{4.2.37}$$

1. Si después de expandir 4.2.8 en series de potencias se llega a que el coeficiente que multiplica a x^{m_2+N} es automáticamente cero entonces usando la raíz más pequeña se pueden hallar dos soluciones en series de Frobenius.

2. Si después de expandir 4.2.8 en series de potencias se llega a que el coeficiente que multiplica a x^{m_2+N} no es automáticamente cero entonces usando la raíz más grande hay una solución en serie de la forma

$$y_1(x) = x^{m_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{4.2.38}$$

   y la segunda solución es de la forma

$$y_2 = -b_N y_1(x) \ln x + x^{m_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{4.2.39}$$

Ejemplo 97. Encuentre una solución general de $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$
Se propone una solución de la forma

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} \tag{4.2.40}$$

derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m-1} \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m-2} \tag{4.2.41}$$

sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_k x^{k+m} \\ \textstyle + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} = 0\end{gathered} \tag{4.2.42}$$

Antes de continuar se reindexa la tercera serie

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2}}_{n=k+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+m} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+m} \tag{4.2.43}$$

Sustituyendo en 4.2.42 se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_kx^{k+m}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_kx^{k+m}+\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}x^{k+m}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+m}=0 \tag{4.2.44}$$

agrupando según las potencias

$$\begin{gathered}\left(m\left(m-1\right)c_0+mc_0-\tfrac{1}{4}c_0\right)x^m+\left(\left(m+1\right)mc_1+(m+1)c_1-\tfrac{1}{4}c_1\right)x^{m+1}+\\ \textstyle\sum_{k=2}^{\infty}\left((k+m)(k+m-1)c_k+(k+m)c_k+c_{k-2}-\tfrac{1}{4}c_k\right)x^{k+m}=0\end{gathered} \tag{4.2.45}$$

igualando los coeficientes a cero se tiene

$$\begin{gathered}m(m-1)+m-\tfrac{1}{4}=0\\ \left(m+1\right)mc_1+(m+1)c_1-\tfrac{1}{4}c_1=0\\ (k+m)(k+m-1)c_k+(k+m)c_k+c_{k-2}-\tfrac{1}{4}c_k=0\end{gathered} \tag{4.2.46}$$

que se pueden simplificar como

$$\begin{gathered}m^2-\tfrac{1}{4}=0\\ c_1\left((m+1)^2-\tfrac{1}{4}\right)=0\\ c_k=-\tfrac{c_{k-2}}{(k+m)^2-\frac{1}{4}}\quad k\geq 2\end{gathered} \tag{4.2.47}$$

la ecuación indicial da

$$m_1=\frac{1}{2}\quad m_2=-\frac{1}{2} \tag{4.2.48}$$

en este caso la diferencia entre las raíces es

$$N=m_1-m_2=1 \tag{4.2.49}$$

según lo indicado anteriormente, hay que considerar el coeficiente que multiplica a $x^{N+m_2}=x^{1/2}$, el cual es $\left(m+1\right)mc_1+(m+1)c_1-\frac{1}{4}c_1$. Usando $m=-\frac{1}{2}$ este se anula automáticamente independientemente del valor de c_1 por lo que se está en el primer caso, lo cual significa que se pueden encontrar dos soluciones linealmente independientes con la raíz más pequeña. Sustituyendo $m=-\frac{1}{2}$ en la tercera línea de 4.2.47 se tiene

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{(k-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{c_{k-2}}{k(k-1)}\quad k\geq 2 \tag{4.2.50}$$

Para valores pequeños la relación de recurrencia da

$$\begin{gathered}c_2=-\tfrac{c_0}{2}\\ c_3=-\tfrac{c_1}{3\cdot 2}\\ c_4=-\tfrac{c_2}{4\cdot 3}=\tfrac{c_0}{4\cdot 3\cdot 2}\\ c_5=-\tfrac{c_3}{5\cdot 4}=\tfrac{c_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ \vdots\\ c_{2n}=(-1)^n\tfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)}\\ c_{2n+1}=(-1)^n\tfrac{c_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)(2n+1)}\end{gathered} \tag{4.2.51}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la expresión para la solución se tiene que la solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-1/2}\left[c_0 + c_1 x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{c_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1}\right] \\ &= c_0 x^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)}x^{2n}\right] + c_1 x^{-1/2}\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1}\right] \end{aligned} \tag{4.2.52}$$

Ejemplo 98. Encuentre una solución general de $x^2y'' - x(2-x)y' + (2+x^2)y = 0$

Es fácil verificar que el origen es un punto regular singular por lo que se propone una solución de la forma

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} \tag{4.2.53}$$

derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m-1} \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m-2} \tag{4.2.54}$$

sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m+1} \\ +2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.55}$$

se reindexa la tercera serie como

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m+1}}_{n=k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+m)c_{n-1}x^{n+m} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1+m)c_{k-1}x^{k+m} \tag{4.2.56}$$

también se reindexa la última serie

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2}}_{n=k+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n+m} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+m} \tag{4.2.57}$$

sustituyendo en 4.2.55

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m} + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1+m)c_{k-1}x^{k+m} \\ +2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+m} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

agrupando según la potencia de x

$$\begin{aligned} (m(m-1)c_0 - 2mc_0 + 2c_0)\,x^m + ((m+1)mc_1 - 2(m+1)c_1 + mc_0 + 2c_1)\,x^{m+1} \\ +\sum_{k=2}^{\infty}((k+m)(k+m-1)c_k - 2(k+m)c_k + (k-1+m)c_{k-1} + 2c_k + c_{k-2})\,x^{k+m} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

igualando los coeficientes a cero se obtienen las ecuaciones

$$\begin{gathered} m(m-1)c_0 - 2mc_0 + 2c_0 = 0 \\ (m+1)mc_1 - 2(m+1)c_1 + mc_0 + 2c_1 = 0 \\ (k+m)(k+m-1)c_k - 2(k+m)c_k + (k-1+m)c_{k-1} + 2c_k + c_{k-2} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.60}$$

que simplificando se convierte en

$$\begin{gathered} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ \left(m^2 - m\right) c_1 = -mc_0 \\ \left((k+m)(k+m-3) + 2\right) c_k = -(k-1+m)c_{k-1} - c_{k-2} \end{gathered} \tag{4.2.61}$$

la ecuación indicial dice que

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 1 \tag{4.2.62}$$

por lo que

$$N = 1 \tag{4.2.63}$$

luego el coeficiente que multiplica a $x^{m_2+N} = x^2$ es $(m+1)mc_1 - 2(m+1)c_1 + mc_0 + 2c_1$ el cual no se anula automáticamente cuando $m = 1$ por lo que va a existir una solución en serie usando la raíz $m_1 = 2$. Sustituyendo tal valor de la raíz en 4.2.61 se obtiene

$$\begin{gathered} c_1 = -c_0 \\ k(k+1)c_k = -(k+1)c_{k-1} - c_{k-2} \quad k \geq 2 \end{gathered} \tag{4.2.64}$$

La relación de recurrencia da

$$\begin{gathered} 6c_2 = -3c_1 - c_0 \longrightarrow c_2 = \tfrac{c_0}{3} \\ 12c_3 = -4c_2 - c_1 \longrightarrow c_3 = -\tfrac{c_0}{36} \\ 20c_4 = -5c_3 - c_2 \longrightarrow c_4 = -\tfrac{7}{20\cdot 36}c_0 \\ \vdots \end{gathered} \tag{4.2.65}$$

en este caso no hay un patrón claro por lo que se plantea la solución como

$$y_1(x) = x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{36} + \cdots +\right) = \left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{36} + \cdots +\right) \tag{4.2.66}$$

La segunda solución es de la forma

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = Cy_1(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} \tag{4.2.67}$$

donde $C = -b_N = -b_1$. Derivando dos veces

$$\begin{gathered} y_2' = Cy_1' \ln x + \tfrac{Cy_1}{x} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(k+1)x^k \\ y_2'' = Cy_1'' \ln x + \tfrac{2Cy_1'}{x} - \tfrac{Cy_1}{x^2} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k(k+1)kx^{k-1} \end{gathered} \tag{4.2.68}$$

reemplazando en la ecuación original

$$\begin{array}{c} Cy_1''x^2\ln x + 2Cy_1'x - Cy_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(k+1)kx^{k+1} \\ -x(2-x)Cy_1'\ln x - (2-x)Cy_1 - (2-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_k(k+1)x^{k+1}+ \\ (2+x^2)\left(Cy_1(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1}\right) = 0 \end{array} \tag{4.2.69}$$

agrupando los términos con logaritmo

$$\begin{array}{c} \left(Cy_1''x^2 - x(2-x)Cy_1' + (2+x^2)Cy_1(x)\right)\ln x \\ +2Cy_1'x - Cy_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(k+1)kx^{k+1} \\ -(2-x)Cy_1 - (2-x)\sum_{k=0}^{\infty} b_k(k+1)x^{k+1} + (2+x^2)\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = 0 \end{array} \tag{4.2.70}$$

como y_1 es solución la primera línea da cero por lo que hay que resolver

$$\begin{array}{c} 2Cy_1'x - 3Cy_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(k+1)kx^{k+1} + xCy_1 \\ -2\sum_{k=0}^{\infty} b_k(k+1)x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k(k+1)x^{k+2}+ \\ +2\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+3} = 0 \end{array} \tag{4.2.71}$$

Dado que no se encontró una forma explícita para los coeficientes de y_1, solo se van a encontrar los primeros coeficientes b_k para dar una idea general del método. Por 4.2.66

$$y_1 = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{36} + \cdots + \qquad y'(x) = 2x - 3x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{36}x^4 + \cdots \tag{4.2.72}$$

sustituyendo en 4.2.71 y solo indicando las potencias hasta x^4 se tiene

$$\begin{array}{c} 2C\left(2x^2 - 3x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots\right) - 3C\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{3} +\right) \\ +\left(2b_1x^2 + 6b_2x^3 + 12b_3x^4 + \cdots +\right) + C\left(x^3 - x^4\right) \\ -2\left(b_0x + 2b_1x^2 + 3b_2x^3 + 4b_3x^4 + \cdots +\right) - \left(b_0x^2 + 2b_1x^3 + 3b_2x^4 + \cdots +\right) \\ +2\left(b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4 + \cdots +\right) + \left(b_0x^3 + b_1x^4 + \cdots +\right) = 0 \end{array} \tag{4.2.73}$$

agrupando de acuerdo con las potencias de x y usando el hecho de que $C = -b_1$

$$\begin{array}{c} \left(-b_1 + 2b_1 - 4b_1 - b_0 + 2b_1\right)x^2+ \\ \left(8b_1 + 6b_2 - 6b_2 - 2b_1 + 2b_2 + b_0\right)x^3+ \\ +\left(-\frac{2}{3}b_1 + 12b_3 - 8b_3 - 3b_2 + 2b_3 + b_1\right)x^4 + \cdots + = 0 \end{array} \tag{4.2.74}$$

igualando cada coeficiente a cero se llega al sistema

$$\begin{array}{c} b_1 = -b_0 \\ b_2 = -3b_1 - \frac{b_0}{2} \\ b_3 = -\frac{1}{18}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ \vdots \end{array} \tag{4.2.75}$$

4.2.1.3. Raíces Repetidas

Si $m_1 = m_2$ en 4.2.14 las soluciones son de la forma

$$y_1(x) = x^{m_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{m_1}\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \tag{4.2.76}$$

Ejemplo 99. Resuelva $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

La forma estándar de la ecuación es

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \tag{4.2.77}$$

es fácil verificar que el origen es un punto singular regular por lo que se intenta

$$y(x) = x^m\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m} \tag{4.2.78}$$

derivando dos veces

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m-1} \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m-2} \tag{4.2.79}$$

y sustituyendo en la ecuación original

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2} = 0 \tag{4.2.80}$$

la tercera serie se reescribe como

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m+2}}_{n=k+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+m} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+m} \tag{4.2.81}$$

Sustituyendo en 4.2.80

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)c_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)c_k x^{k+m} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+m} = 0 \tag{4.2.82}$$

agrupando según la potencia de x se tiene

$$\begin{aligned}&(m(m-1)c_0 + mc_0)\, x^k + ((1+m)\, mc_1 + (1+m)\, c_1)\, x^{1+m} + \\ &\textstyle\sum_{k=2}^{\infty}((k+m)(k+m-1)c_k + (k+m)c_k + c_{k-2})\, x^{k+m} = 0\end{aligned} \tag{4.2.83}$$

igualando los coeficientes a cero se tiene

$$\begin{gathered} m(m-1)c_0 + mc_0 = 0 \\ (1+m)\,mc_1 + (1+m)\,c_1 = 0 \\ (k+m)(k+m-1)c_k + (k+m)c_k + c_{k-2} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.84}$$

simplificando las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\begin{gathered} m = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_k = -\tfrac{c_{k-2}}{(k+m)^2} \end{gathered} \tag{4.2.85}$$

como solo hay una raíz se puede escribir

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2} \quad k \geq 2 \tag{4.2.86}$$

Algunos valores de los coeficientes son

$$\begin{gathered} c_2 = -\tfrac{1}{2^2}c_0 \\ c_3 = -\tfrac{c_1}{3^2} = 0 \\ c_4 = -\tfrac{c_2}{4^2} = \tfrac{1}{2^2 \cdot 4^2}c_0 \\ c_5 = -\tfrac{c_3}{5^2} = 0 \\ c_6 = -\tfrac{c_4}{6^2} = -\tfrac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}c_0 \\ \vdots \\ c_{2n} = \tfrac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2}c_0 \\ c_{2n+1} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.87}$$

la solución en serie es

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} x^{2n} \tag{4.2.88}$$

Por 4.2.76 la segunda solución se escribe como

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \tag{4.2.89}$$

derivando dos veces

$$\begin{gathered} y_2'(x) = y_1' \ln x + \tfrac{y_1}{x} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k k x^{k-1} \\ y_2''(x) = y_1'' \ln x + 2\tfrac{y_1'}{x} - \tfrac{y_1}{x^2} + \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1) x^{k-2} \end{gathered} \tag{4.2.90}$$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene

$$\begin{gathered} y_1'' x^2 \ln x + 2xy_1' - y_1 + \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1)x^k + y_1' x \ln x + y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k k x^k \\ + y_1 x^2 \ln x + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k+2} = 0 \end{gathered} \tag{4.2.91}$$

se agrupan los términos con logaritmo

$$\begin{array}{c}\left(x^2y_1''+xy_1'+x^2y_1\right)\ln x+2xy_1'-y_1+\sum_{k=2}^{\infty}b_kk(k-1)x^k\\+y_1+\sum_{k=1}^{\infty}b_kkx^k+\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^{k+2}=0\end{array}\tag{4.2.92}$$

como y_1 es solución se elimina el término con el logaritmo y la ecuación por resolver es

$$2xy_1'+\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}b_kk(k-1)x^k}_{(1)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}b_kkx^k}_{(2)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^{k+2}}_{(3)}=0\tag{4.2.93}$$

primero que todo

$$2xy_1'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4n}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}x^{2n}\tag{4.2.94}$$

luego se separan las demás series en potencias impares y pares. Para (1)

$$\sum_{k=2}^{\infty}b_kk(k-1)x^k=\sum_{\substack{n=1\\k=2n}}^{\infty}b_{2n}2n(2n-1)x^{2n}+\sum_{\substack{n=1\\k=2n+1}}^{\infty}b_{2n+1}(2n+1)(2n)x^{2n+1}\tag{4.2.95}$$

Para la serie (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_kkx^k=\sum_{\substack{n=1\\k=2n}}^{\infty}b_{2n}2nx^{2n}+\sum_{\substack{n=0\\k=2n+1}}^{\infty}b_{2n+1}(2n+1)x^{2n+1}\tag{4.2.96}$$

Para la serie (3) primero se cambian los índices

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^{k+2}}_{n=k+2}=\sum_{n=3}^{\infty}b_{n-2}x^n=\sum_{k=3}^{\infty}b_{k-2}x^k\tag{4.2.97}$$

luego se separa la serie en pares e impares

$$\sum_{k=3}^{\infty}b_{k-2}x^k=\sum_{\substack{n=2\\k=2n}}^{\infty}b_{2n-2}x^{2n}+\sum_{\substack{n=1\\k=2n+1}}^{\infty}b_{2n-1}x^{2n+1}\tag{4.2.98}$$

Sustituyendo todas estas relaciones 4.2.94, 4.2.95, 4.2.96, 4.2.98 en 4.2.93 se llega a

$$\begin{array}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4n}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}2n(2n-1)x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}(2n+1)(2n)x^{2n+1}\\+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}2nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}(2n+1)x^{2n+1}\\+\sum_{n=2}^{\infty}b_{2n-2}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}x^{2n+1}=0\end{array}\tag{4.2.99}$$

Agrupando según la potencia de x se tiene

$$\begin{aligned} b_1 x + \textstyle\sum_{n=1}^{\imath} \left(b_{2n+1}(2n+1)(2n) + b_{2n+1}(2n+1) + b_{2n-1}\right) x^{2n+1} \\ + \left(-\tfrac{4}{4} + 2b_2 + 2b_2\right) + \\ \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 4n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} + b_{2n} 2n(2n-1) + b_{2n} 2n + b_{2n-2}\right) x^{2n} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.100}$$

igualando cada uno de los coeficientes a cero se tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 = 0 \\ b_2 = \tfrac{1}{4} \\ b_{2n+1} = -\tfrac{b_{2n-1}}{(2n+1)^2} \quad n \geq 1 \\ (2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = \tfrac{(-1)^{n+1} 4n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{4.2.101}$$

Como $b_1 = 0$ todos los coeficientes impares se anulan y solo quedan los coeficientes pares. Algunos valores de los coeficientes pares son

$$\begin{aligned} b_2 = \tfrac{1}{2^2} \\ 4^2 b_4 + \tfrac{1}{2^2} = -\tfrac{8}{2^2 \cdot 4^2} \longrightarrow b_4 = -\tfrac{1+\frac{1}{2}}{2^2 \cdot 4^2} \\ 6^2 b_{6n} + b_4 = \tfrac{12}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \longrightarrow b_6 = \tfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \\ \vdots \\ b_{2n} = (-1)^{n+1} \tfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2n)^2} = (-1)^{n+1} \tfrac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}{\prod_{j=1}^{n} (2j)^2} \end{aligned} \tag{4.2.102}$$

De esta forma, la segunda solución es

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}{\prod_{j=1}^{n} (2j)^2} x^{2n} \tag{4.2.103}$$

Ejemplo 100. Encuentre la solución de $y''' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ con condiciones iniciales $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ y $y''(1) = 1$.

Observe que en este caso dado que las condiciones iniciales son cerca de $x = 1$ tendría sentido realizar la expansión en series de potencias alrededor de 1, es decir, proponer $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k$. De forma alternativa, se puede realizar el cambio de variable $u = x - 1$ por lo que se puede resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{du^3} + \frac{1}{u+1} \frac{dy}{du} - \frac{1}{(u+1)^2} y = 0 \tag{4.2.104}$$

o de forma equivalente

$$(u^2 + 2u + 1) \frac{d^3 y}{du^3} + (u+1) \frac{dy}{du} - y = 0 \tag{4.2.105}$$

Ahora se propone una serie centrada en cero, es decir,

$$y(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k \tag{4.2.106}$$

donde se escribe b_k para que no se piense que serían los mismos coeficientes que los c_k. En tal caso

$$y'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k u^{k-1} \quad y''(u) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k u^{k-2} \quad y'''(u) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k u^{k-3} \tag{4.2.107}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y distribuyendo se tiene

$$\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k u^{k-1}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} 2k(k-1)(k-2) b_k u^{k-2}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k u^{k-3}}_{(3)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k u^k}_{(4)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k u^{k-1}}_{(5)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k}_{(6)} = 0 \tag{4.2.108}$$

se trabaja cada serie por aparte

$$(1): \quad \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k u^{k-1}}_{n=k-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)n(n-1) b_{n+1} u^n \tag{4.2.109}$$

$$(2): \quad \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} 2k(k-1)(k-2) b_k u^{k-2}}_{n=k-2} = 12 b_3 u + \sum_{n=2}^{\infty} 2(n+2)(n+1)(n) b_{n+2} u^n \tag{4.2.110}$$

$$(3): \quad \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k u^{k-3}}_{n=k-3} = 6 b_3 + 24 b_4 u + \sum_{n=2}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) b_{n+3} u^n \tag{4.2.111}$$

$$(4): \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k u^k}_{n=k} = b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n b_n u^n \tag{4.2.112}$$

$$(5): \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k u^{k-1}}_{n=k-1} = b_1 + 2 b_2 u + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) b_{n+1} u^n \tag{4.2.113}$$

$$(6): \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k}_{n=k} = b_0 + b_1 u + \sum_{n=2}^{\infty} b_n u^n \tag{4.2.114}$$

Agrupando por potencias se tienen las ecuaciones

$$6b_3 + b_1 + b_1 - b_0 = 0 \tag{4.2.115}$$

$$12b_3 + 24b_4 + 2b_2 - b_1 = 0 \tag{4.2.116}$$

$$\begin{gathered}(n+1)n(n-1)b_{n+1} + 2(n+2)(n+1)(n)b_{n+2} + (n+3)(n+2)(n+1)b_{n+3} \\ +nb_n + (n+1)b_{n+1} - b_n = 0 \qquad n \geq 2\end{gathered} \tag{4.2.117}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$b_3 = \frac{b_0 - 2b_1}{6} \tag{4.2.118}$$

$$b_4 = \frac{b_1 - 2b_2 - 12b_3}{24} \tag{4.2.119}$$

$$b_{n+3} = -\frac{b_n + (n^2 - n + 1)b_{n+1} + 2(n+2)nb_{n+2}}{(n+3)(n+2)} \quad n \geq 2 \tag{4.2.120}$$

Antes de continuar se van a aplicar las condiciones iniciales. Primero que todo la serie puede escribirse como

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-1)^k \tag{4.2.121}$$

De $y(1) = 1$ se tiene $b_0 = 1$. De $y'(1) = 0$ se tiene $b_1 = 0$ y de $y''(1) = 1$ se tiene $b_2 = \frac{1}{2}$. Luego se puede sustituir en los sistemas para los coeficientes para obtener

$$b_3 = \frac{1}{6} \quad b_4 = -\frac{1}{8} \quad b_5 = \frac{1}{15} \quad \cdots \tag{4.2.122}$$

de esta forma

$$y(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} - \frac{(x-1)^4}{8} + \frac{(x-1)^5}{15} + \cdots + \tag{4.2.123}$$

5 La Transformada de Laplace

5.1. Funciones Generalizadas

Suponga que se tiene un resorte que realiza movimiento armónico simple, es decir, que es modelado por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5.1.1}$$

Para ser más precisos, suponga que antes de $t = 0$ el resorte está quieto y no realiza ningún movimiento, entre $t = 0$ y $t = \triangle t$ se aplica una fuerza constante de magnitud F y después de $t = \triangle t$ la fuerza "se apaga" y el resorte no es perturbado más pero ahora va a estar en movimiento debido a su interacción en el pasado con la fuerza. Es decir, el problema consiste en resolver la ecuación diferencial [1]

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & t < 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = F & 0 < t < \triangle t \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & \triangle t < t \end{cases} \tag{5.1.2}$$

es importante notar que no se intenta indicar cual es la ecuación diferencial sobre $t = 0$ y $t = \triangle t$, de hecho, a lo largo de todo el tema de la Transformada de Laplace hay que estar dispuestos a que puedan ocurrir comportamientos extraños con las ecuaciones y las funciones, aún cuando tal comportamiento ocurra solo sobre un punto o un número finito de puntos.

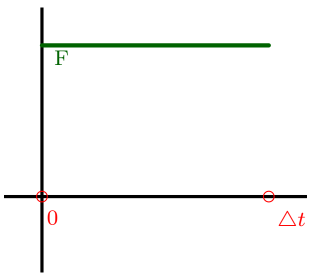

Figura 5.1.1: Fuerza escalonada

Como antes de $t = 0$ el resorte estaba quieto tiene sentido que la solución en tal caso sea

$$x(t) = 0 \quad t < \triangle t \tag{5.1.3}$$

[1] en realidad F representa la fuerza dividida por la masa m de la partícula, pero se puede ignorar este detalle para seguir diciendo fuerza en vez de fuerza sobre masa.

Para resolver la ecuación entre 0 y $\triangle t$ la solución homogénea es

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{5.1.4}$$

y luego es fácil ver que una solución particular es

$$x_p(t) = \frac{F}{\omega_0^2} \tag{5.1.5}$$

por lo que

$$x(t) = \frac{F}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad 0 < t < \triangle t \tag{5.1.6}$$

finalmente, para $t > \triangle t$ la solución es simplemente

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) \quad t > \triangle t \tag{5.1.7}$$

observe que la solución anterior posee cuatro constantes arbitrarias A, B, C, D que hay que eliminar de alguna forma. La primera condición que es bastante natural es pedir que $x(t)$ es una función continua, es decir, que la partícula no da saltos abruptos. De tal forma, por la continuidad entre 5.1.3 y 5.1.6 se tiene que

$$0 = \frac{F}{\omega_0^2} + A \longrightarrow A = -\frac{F}{\omega_0^2} \tag{5.1.8}$$

por otro lado, de la continuidad entre 5.1.6 y 5.1.7 se tiene que

$$\frac{F}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 \triangle t) + B\sin(\omega_0 \triangle t) = C\cos(\omega_0 \triangle t) + D\sin(\omega_0 \triangle t) \tag{5.1.9}$$

o bien

$$\frac{F}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 \triangle t) + B\sin(\omega_0 \triangle t) = C\cos(\omega_0 \triangle t) + D\sin(\omega_0 \triangle t) \tag{5.1.10}$$

obviamente se tiene una ecuación para hallar tres constantes B, C, D por lo que el problema no puede resolverse a menos que se introduzcan suposiciones adicionales. Por ejemplo, tiene sentido pedir continuidad en la velocidad. Bajo tal condición se tendría por la continuidad de la velocidad en $t = 0$ que

$$B = 0 \tag{5.1.11}$$

por lo que la solución entre 0 y $\triangle t$ se puede escribir como

$$x(t) = \frac{F}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) \quad 0 < t < \triangle t \tag{5.1.12}$$

y 5.1.10 se convierte en

$$\frac{F}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 \triangle t) = C\cos(\omega_0 \triangle t) + D\sin(\omega_0 \triangle t) \tag{5.1.13}$$

la condición de continuidad de la velocidad en $t = \triangle t$ da a su vez la condición

$$\frac{F}{\omega_0}\sin(\omega_0\triangle t) = -C\omega_0\sin(\omega_0\triangle t) + D\omega_0\cos(\omega_0\triangle t) \tag{5.1.14}$$

es decir, C, D deben cumplir el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_0\triangle t) & \sin(\omega_0\triangle t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0\triangle t) & \omega_0\cos(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2}\cos(\omega_0\triangle t) \\ \frac{F}{\omega_0}\sin(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix} \tag{5.1.15}$$

como

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_0\triangle t) & \sin(\omega_0\triangle t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0\triangle t) & \omega_0\cos(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\omega_0}\begin{pmatrix} \omega_0\cos(\omega_0\triangle t) & -\sin(\omega_0\triangle t) \\ \omega_0\sin(\omega_0\triangle t) & \cos(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix} \tag{5.1.16}$$

la solución del sistema es

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{\omega_0}\begin{pmatrix} \omega_0\cos(\omega_0\triangle t) & -\sin(\omega_0\triangle t) \\ \omega_0\sin(\omega_0\triangle t) & \cos(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{F}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2}\cos(\omega_0\triangle t) \\ \frac{F}{\omega_0}\sin(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{F}{\omega_0^2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0\triangle t) - 1 \\ \sin(\omega_0\triangle t) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Por lo tanto

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{F}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)) & 0 < t < \triangle t \\ \frac{F}{\omega_0^2}((\cos(\omega_0\triangle t) - 1)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0\triangle t)\sin(\omega_0 t)) & \triangle t < t \end{cases} \tag{5.1.18}$$

Ahora bien, ¿qué pasa en el caso de que se aplica una fuerza $F(t)$ que es variable y que cumple $F(t) = 0$ para $t < 0$ y $t > T$? Una forma de atacar el problema anterior es dividir el intervalo $(0, T)$ en n subintervalos de la misma longitud $\triangle t$, es decir,

$$\triangle t \equiv \frac{T}{n} \tag{5.1.19}$$

luego se considera la fuerza $F(t)$ sobre los intervalos $(0, \triangle t)$, $(\triangle t, 2\triangle t)$, $(2\triangle t, 3\triangle t)$, $\cdots$, $((n-2)\triangle t, (n-1)\triangle t)$, $((n-1)\triangle t, T)$ y aproximar la fuerza sobre cada subintervalo por una fuerza constante.

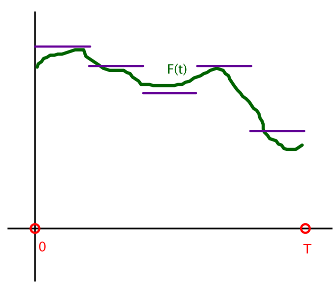

Figura 5.1.2: Descomposición de una Fuerza

Por ejemplo, si I_i representa el intervalo

$$I_i = (T_i, T_{i+1}) \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{5.1.20}$$

donde

$$T_i \equiv i \triangle t \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{5.1.21}$$

se puede tomar

$$F(t) \simeq F(T_i) \quad \text{sobre } I_i \tag{5.1.22}$$

Por lo tanto, en vez de resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & t < 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) & 0 < t < T \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & T < t \end{cases} \tag{5.1.23}$$

se resuelven las ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & t < 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = F(T_i) & T_i < t < T_{i+1} \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & T < t \end{cases} \tag{5.1.24}$$

Una forma más compacta de escribir el sistema de ecuaciones anteriores es con la ayuda de la función de Heaviside . La función de Heaviside $H(t)$ se define como[2]

$$H(t) \equiv \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{5.1.25}$$

nuevamente, no es importante el valor de la función en $t = 0$ por lo que se deja indefinido.

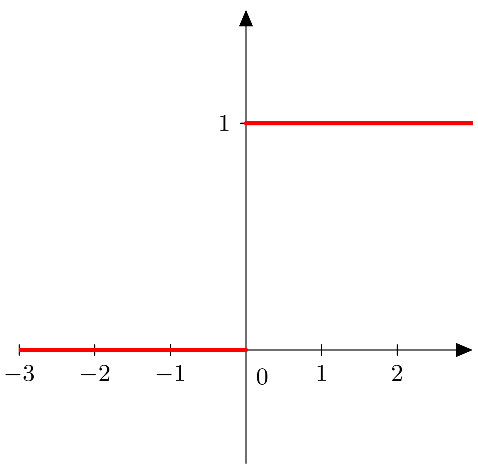

Figura 5.1.3: Función de Heaviside

[2]otra notación para la función de Heaviside muy común es $\mathcal{U}(t)$

Para saber cual es la gráfica de $H(t-a)$ donde a es una constante basta recordar que

El gráfico de la función $f(t-a)$ es el gráfico de la función $f(t)$ trasladado a unidades a la derecha del origen.

En el caso de la función de Heaviside esto significa que

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \tag{5.1.26}$$

La utilidad de la función de Heaviside radica en que se utiliza para encender o apagar funciones o señales, es decir, si $f(t)$ es una función cualquiera entonces

$$f(t)H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t) & t > a \end{cases} \tag{5.1.27}$$

por lo tanto,

la función

$$H(t-a) \tag{5.1.28}$$

la enciende la señal después de $t = a$.

Ahora bien, en la práctica la mayoría de las señales solo duran un tiempo finitio, es decir, puede querer encenderse una señal en $t = a$ y apagarse la señal en $t = b$. Como $f(t)H(t-a)$ enciende la señal en $t = a$ para apagarla lo que hay que hacer es encender la señal $-f(t)$ en $t = b$, es decir, tomar $-f(t)H(t-b)$. De esta forma,

Para encender una señal o fuerza $f(t)$ en $t = a$ y apagarla en $t = b$ se utiliza la función

$$f(t)H(t-a) - f(t)H(t-b) = f(t)(H(t-a) - H(t-b)) \tag{5.1.29}$$

Ejemplo 101. Escriba la función

$$f(t) = \begin{cases} t^3 & 0 < t < 2 \\ 5 & 2 < t < 20 \\ e^{-t} & 20 < t \end{cases} \tag{5.1.30}$$

con ayuda de la función de Heaviside.

La función anterior puede considerarse como tres señales distintas que se encienden y apagan en tiempos tiempos distintos. Como t^3 se enciende en $t = 0$ y se apaga en $t = 2$ por 5.1.29 se considera

$$t^3\left(H(t-0) - H(t-2)\right) \tag{5.1.31}$$

como la señal constante 5 se enciende en $t = 2$ y se apaga en $t = 20$ por 5.1.29 se considera

$$5\,(H(t-2) - H(t-20)) \tag{5.1.32}$$

finalmente la señal e^{-t} se enciende en $t = 20$ y nunca se apaga por lo que usando 5.1.28 se utiliza

$$e^{-t}H(t-20) \tag{5.1.33}$$

finalmente, la señal o fuerza completa $f(t)$ puede escribirse como la suma de las tres señales, es decir,

$$f(t) = t^3\,(H(t) - H(t-2)) + 5\,(H(t-2) - H(t-20)) + e^{-t}H(t-20) \tag{5.1.34}$$

Con la ayuda de la función de Heaviside puede reescribirse 5.1.24 de la siguiente forma. Como se está aproximando la fuerza por una sucesión de fuerzas escalonadas constantes, puede pensarse que cada subintervalo I_i en el que se toma la fuerza $F(T_i)$ es una señal que existe solo en el intervalo I_i, es decir, se enciende en $t = i\triangle t$ y se apaga en $t = (i+1)\triangle t$. Gracias a 5.1.29 lo anterior se representa como

$$F(i\triangle t)\,(H(t - i\triangle t) - H(t - (i+1)\triangle t) \tag{5.1.35}$$

Luego en vez de resolver el sistema 5.1.24 se resuelve el sistema equivalente

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & t < 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{i=0}^{n-1} F(i\triangle t)\,(H(t - i\triangle t) - H(t-(i+1)\triangle t) & 0 < t < T \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 & T < t \end{cases} \tag{5.1.36}$$

Al igual que en el caso en que solo se consideró una fuerza F en el intervalo $(0, \triangle t)$, se resuelve la ecuación diferencial sobre cada intervalo I_i y luego imponiendo la condición de continuidad de la posición y la velocidad habría que resolver un sistema lineal para encontrar los valores de las constantes que aparecen al escribir la solución sobre cada subintervalo. Luego habría que tomar un límite cuando $\triangle t \longrightarrow 0$ para encontrar la solución en que la fuerza $F(t)$ es arbitraria. La estrategia anterior se vuelve muy complicada pues habría que aplicar la regla de Cramer para una matriz $n \times n$ y luego ser cuidadosos en la forma en que se tomaría el límite cuando $\triangle t \longrightarrow 0$. Afortunadamente, hay una mejor manera de resolver el problema anterior, que es a través de la delta de Dirac y la teoría de funciones generalizadas.

Debido a que la teoría de las funciones generalizadas[3] requiere mucha teoría matemática para que pueda desarrollarse en forma completamente consistente la siguiente descripción no es más que para motivar la idea detrás de las funciones generalizadas y no puede considerarse completamente adecuada. La idea detrás del concepto de una función generalizada es la siguiente: cuando se realiza un experimento y se quiere medir el valor de una función en un punto, por ejemplo, medir el valor $f(0)$, en realidad no es

[3] el nombre de distribución se tomará como sinónimo de función generalizada

posible medir con completa precisión el valor de la función en el punto, sino que más bien se miden los promedios del valor de f alrededor del punto. Conforme la medida sea cada vez más precisa, los valores promedios se vuelven más cercanos al valor puntal de la función $f(0)$ y de esta forma, en vez de conocer todos los valores $f(t)$ de una función, podría intentar conocerse todos los valores promedios de $f(t)$ para recuperar la función. Ahora bien, en teoría de probabilidad si se quiere medir una cantidad u y se realizan N mediciones $u_1, u_2, \cdots, u_N$ entonces el promedio del valor de la cantidad x es

$$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i \tag{5.1.37}$$

Ahora bien, los u_i no tienen que ser necesariamente distintos. Por ejemplo, de las N mediciones puede ocurrir que u_1 se midiera dos veces ya que $u_1 = u_5$. En tal caso, es mejor nombrar los valores medidos distintos como $u_1, u_2, \cdots, u_n$ y la frecuencia que se midió cada valor distinto u_i como f_i (en el ejemplo anterior la frecuencia de u_1 es dos, es decir, $f_1 = 2$). Ahora la fórmula del promedio toma la forma

$$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{N}\right) u_i = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \tag{5.1.38}$$

donde se ha definido

$$p_i \equiv \frac{f_i}{N} \tag{5.1.39}$$

los coeficientes p_i son muy importantes por las siguientes razones. Primero que todo, de las condiciones del experimento $0 \leq f_i \leq N$ por lo que

$$0 \leq p_i \leq 1 \tag{5.1.40}$$

es decir, cada coeficiente p_i está entre cero y uno. Por otro lado

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{N}N = 1 \tag{5.1.41}$$

lo cual significa que los coeficientes p_i son números que suman 1. Como las mediciones de los distintos valores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ son excluyentes, tiene sentido interpretar los coeficientes p_i como la probabilidad de medir el valor x_i. Ahora bien, la fórmula

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \tag{5.1.42}$$

se generaliza fácilmente al caso continuo en que los valores medidos de la cantidad u no son discretos sino que pueden tomar un continuo de valores. Por ejemplo, si $u = u(x)$ es una función del tiempo o la posición y Si $p(x)dx$ representa la probabilidad de medir el valor $u(x)$ entre $x - dx$ y $x + dx$ entonces el promedio de la cantidad u es

$$\bar{u} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x)p(x)dx \tag{5.1.43}$$

donde $p(x)dx$ se conoce como una densidad de probabilidad y tiene la propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad p(x) \geq 0 \tag{5.1.44}$$

Es importante notar que el promedio de una cantidad depende de la densidad de probabilidad que se escoja. Por ejemplo, para conocer el valor $f(0)$ de una función se define una sucesión de densidades de probabilidad alrededor de cero que servirán para aproximar el valor de la función en el origen ya que si la densidad de probabilidad está concentrada en el origen el valor de la función no diferirá mucho del valor promedio. Tales densidades se denotarán $\delta_n(t)$ y se definen como

$$\delta_n(t) \equiv \frac{n}{2}\left(H\left(t+\frac{1}{n}\right) - H\left(t-\frac{1}{n}\right)\right) \tag{5.1.45}$$

es decir, las densidades δ_n se encienden en $t = -\frac{1}{n}$ y se apagan en $t = \frac{1}{n}$. Otra forma de escribir las densidades es

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < t \end{cases} \tag{5.1.46}$$

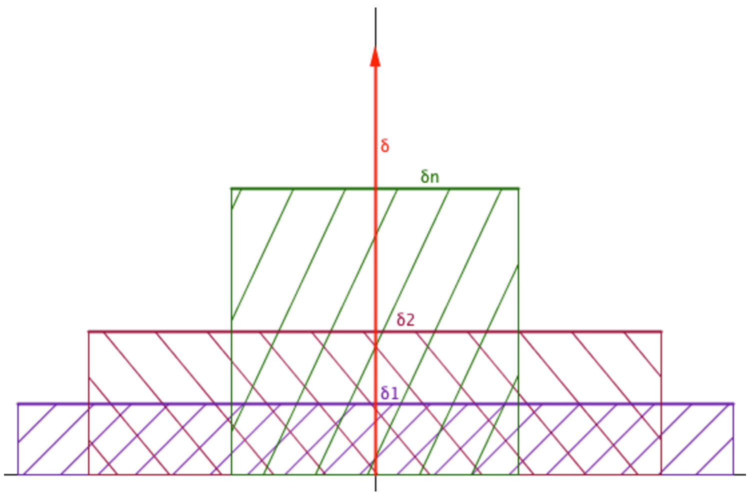

Figura 5.1.4: Funciones δ_n y sus integrales

Tales funciones δ_n sirven como densidades pues siempre son positivas y sus integrales dan siempre 1, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(t)dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2}dt = 1 \tag{5.1.47}$$

Intuitivamente, se piensa en la Delta de Dirac δ como el límite de las densidades δ_n, es decir

$$\delta(t) \text{'}=\text{'} \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) \tag{5.1.48}$$

donde se ha escrito la igualdad entre comillas pues si se toma el límite literalmente se tendría que concluir que

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \tag{5.1.49}$$

sin embargo, la idea detrás de la delta de Dirac y mucho del tratamiento de las funciones generalizadas es que los valores en un punto no es lo más importante de una función sino sus promedios, es decir, cómo se comportan bajo el signo integral. Una idea más cercana a la definición de la Delta de Dirac es a través de la idea del límite distribucional, que es distinto al límite ordinario del cálculo.

Se define la delta de Dirac como

$$\delta \equiv \overset{d}{\lim_{n \longrightarrow \infty}} \delta_n \tag{5.1.50}$$

donde la notación anterior significa el límite distribucional y significa que la "función" de Dirac cumple la propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(t) dt \tag{5.1.51}$$

para cualquier función $f(t)$ que sea suficientemente bien portada, es decir, que cumpla con propiedades como continuidad, derivabilidad, etc.
De manera más general, se dice que la función generalizada g es el límite distribucional de las funciones g_n

$$g = \overset{d}{\lim_{n \longrightarrow \infty}} g_n \tag{5.1.52}$$

si se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t) f(t) dt \tag{5.1.53}$$

para cualquier función $f(t)$ suficientemente bien portada.
Finalmente, dos funciones generalizadas g, h son iguales en el sentido distribucional, escrito como

$$g =^d h \tag{5.1.54}$$

si se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t) dt \tag{5.1.55}$$

para cualquier función $f(t)$ suficientemente bien portada. Lo anterior significa que las funciones generalizadas (distribuciones) se definen a través de su comportamiento bajo el signo integral.

Con las definiciones anteriores se puede derivar la propiedad más importante de la delta de Dirac, que muchas veces se toman como la definición de la misma. El lado derecho de 5.1.51 puede escribirse como[4]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(t)dt\right) \tag{5.1.56}$$

para calcular el límite anterior, si f es continua entonces alcanza un máximo $f_{M,n}$ y un mínimo $f_{m,n}$ sobre el intervalo $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ por lo que

$$f_{m,n}\leq f(t)\leq f_{M,n} \quad t\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \tag{5.1.57}$$

por lo tanto

$$\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f_{m,n}dt\leq\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(t)dt\leq\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f_{M,n}dt \tag{5.1.58}$$

o bien como $f_{M,n}$ y $f_{m,n}$ son constantes

$$f_{m,n}\leq\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(t)dt\leq f_{M,n} \tag{5.1.59}$$

luego se toman el límite a ambos lados y como f es continua

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}f_{m,n}=f(0)=\lim_{n\longrightarrow\infty}f_{M,n} \tag{5.1.60}$$

por el Teorema del Sandwich se concluye que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)f(t)dt=f(0) \tag{5.1.61}$$

con lo cual se deduce la propiedad más importante de la Delta de Dirac

Si $f(t)$ es una funcióm continua entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0) \tag{5.1.62}$$

De manera análoga, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0) \tag{5.1.63}$$

$$\int_a^b\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)\text{ si }t_0\in(a,b) \qquad \int_a^b\delta(t-t_0)f(t)dt=0\text{ si }t_0\notin(a,b) \tag{5.1.64}$$

Por lo tanto, la delta de Dirac tiene la propiedad de localizar el valor de la función en un punto específico.

[4]De hecho hay varias escogencias de las densidades δ_n que sirven para definir la delta de Dirac pero esta es quizás la más sencilla

Otra idea importante de las funciones generalizadas es que permiten “derivar” funciones en los puntos de discontinuidad. La idea es usar la integración por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)f(t)dt = (g(t)f(t))|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f'(t) \tag{5.1.65}$$

ahora bien, si se consideran únicamente funciones $f(t), g(t)$ que se anulan en el infinito, es decir,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = \lim_{t\longrightarrow-\infty} f(t) = 0 \quad \lim_{t\longrightarrow\infty} g(t) = \lim_{t\longrightarrow-\infty} g(t) = 0 \tag{5.1.66}$$

en tal caso, la regla de integración por partes es simplemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f'(t) \tag{5.1.67}$$

lo importante de 5.1.67 es que en el lado derecho no aparece $g'(t)$ lo cual significa que si alguien no supiera que significa la derivada de la función g podría usar el lado derecho de 5.1.67 como la definición de la condición que debe cumplir la derivada $g'(t)$. Por lo tanto se define,

Si $g(t)$ es una función generalizada su derivada distribucional $g'(t)$ se define a través de la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f'(t) \tag{5.1.68}$$

donde $f(t)$ es cualquier función derivable que se anula en el infinito. Es decir, se define la derivada distribucional a partir de su comportamiento bajo el signo integral.

Por ejemplo, la derivada distribucional de la función de Heaviside $H(t)$ cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)f'(t)dt = -\int_{0}^{\infty} f'(t)dt \tag{5.1.69}$$

por el teorema fundamental del cálculo y como $f(t)$ se anula en el infinito

$$-\int_{0}^{\infty} f'(t)dt = -f(t)|_{t=0}^{t=\infty} = f(0) \tag{5.1.70}$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(t)f(t)dt = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt \tag{5.1.71}$$

lo anterior significa que

$$H' =^{d} \delta \tag{5.1.72}$$

o bien

La derivada distribucional de la función de Heaviside es la delta de Dirac.

Con la ayuda de la delta de Dirac es posible resolver el problema original de encontrar la respuesta del resorte a una fuerza $f(t)$. Primero que todo hay que recordar la definición de los límites por la izquierda y por la derecha de una función en el punto a, que se denotarán respectivamente como

$$f(a^-) \equiv \lim_{t\to a^-} f(t) \quad f(a^+) \equiv \lim_{t\to a^+} f(t) \tag{5.1.73}$$

Por ejemplo, una función es continua en a si y solo si $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$. Ahora bien, se busca resolver la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{5.1.74}$$

El problema se reduce a hallar una solución particular pues la homogénea es

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{5.1.75}$$

por las propiedades de la delta de Dirac la ecuación anterior puede escribirse como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau - t)d\tau \tag{5.1.76}$$

dado que la integral es en cierto sentido una suma infinita y por el segundo principio de superposición para resolver una ecuación diferencial en el caso en que el input es la suma de dos input se puede resolver las ecuación para cada input por separado y luego sumar las respuestas se va a intentar resolver primero que todo la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \delta(\tau - t) \tag{5.1.77}$$

y luego superponer la respuesta que se encuentre. Es importante notar que en este caso para la ecuación 5.1.77 τ se está tratando como una constante. Dado que la delta de Dirac $\delta(\tau - t)$ puede pensarse intuitivamente que es cero excepto en $t = \tau$ e infinito en ese punto, la ecuación 5.1.77 puede interpretarse como la respuesta del sistema a una fuerza muy grande que ocurre en un instante. De ahí que la solución de 5.1.77 se llame la función respuesta a impulso o función de Green. El método que se va a presentar va a servir para encontrar una solución particular.

Primero que todo, dado que la delta de Dirac es cero excepto en $t = \tau$ se tiene al igual que en el caso de una fuerza constante la solución (se toma el argumento en el seno y coseno de esa forma para facilitar las condiciones de continuidad)

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ A\cos(\omega_0(t-\tau)) + B\sin(\omega_0(t-\tau)) & \tau < t \end{cases} \tag{5.1.78}$$

Por lo tanto, el problema estaría resuelto en el momento que se conozca los valores de A y B. A diferencia del caso de la fuerza constante, no se exigirá la continuidad de la velocidad pues el impulso aplicado en este caso fue "infinito" pero sí se seguirá exigiendo la contuidad de la posición. Aquí se puede observar nuevamente la filosofía de que se permitirán comportamientos anómalos en una cantidad finita de puntos. De hecho por la continuidad de la posición puede tomarse de una vez que la solución debe ser

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ B\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) & \tau < t \end{cases} \tag{5.1.79}$$

Ahora bien, para encontrar B la solución $x_\tau(t)$ al problema 5.1.77 debe cumplir que

$$\frac{d^2x_\tau(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_\tau(t) = \delta(\tau - t) \tag{5.1.80}$$

integrando la ecuación anterior de $\tau - \triangle t$ a $\tau + \triangle t$ se tiene

$$\int_{\tau-\Delta t}^{\tau+\Delta t} \frac{d^2x_\tau(t)}{dt^2}dt + \omega_0^2 \int_{\tau-\Delta t}^{\tau+\Delta t} x_\tau(t)dt = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau+\Delta t} \delta(\tau - t)dt \tag{5.1.81}$$

Ahora bien haciendo el cambio de variable $u = \tau - t$ y suponiendo que las reglas usuales del cálculo siguen siendo válidas para la delta de Dirac se tiene que

$$\int_{\tau-\triangle t}^{\tau+\triangle t} \delta(\tau - t)dt = -\int_{\triangle t}^{-\triangle t} \delta(u)du = -\int_{\triangle t}^{-\triangle t} \frac{dH}{du}du = -\left(H(-\triangle t) - H(\triangle t)\right) = 1 \tag{5.1.82}$$

Por lo tanto, se tiene en 5.1.81 que

$$\left.\frac{dx_\tau(t)}{dt}\right|_{t=\tau-\triangle t}^{t=\tau+\Delta t} + \omega_0^2 \int_{\tau-\triangle t}^{\tau+\triangle t} x_\tau(t)dt = 1 \tag{5.1.83}$$

de hecho como la posición es una función continua tomando $\triangle t \longrightarrow 0$ se tiene que

$$\dot{x}_\tau\left(\tau+\right) - \dot{x}_\tau(\tau-) = 1 \tag{5.1.84}$$

como $\dot{x}(\tau-) = 0$ la condición que se estaba buscando es

$$\dot{x}\left(\tau+\right) = 1 \tag{5.1.85}$$

de 5.1.79 se observa que

$$\dot{x}(\tau+) = \omega_0 B \tag{5.1.86}$$

por lo que

$$B = \frac{1}{\omega_0} \tag{5.1.87}$$

y la solución buscada es

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) & \tau < t \end{cases} = \frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)H(t-\tau) \tag{5.1.88}$$

de esta forma, se propone como solución particular del problema general 5.1.74 (se va a suponer que $f(t) = 0$ para $t < 0$)

$$x_p(t) = \int_0^\infty f(\tau)x_\tau(t)d\tau = \int_0^t f(\tau)\frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau \tag{5.1.89}$$

Es decir, la solución particular es

$$x_p(t) = \int_0^t f(\tau)\frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau \tag{5.1.90}$$

y la general es

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \int_0^t f(\tau)\frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau \tag{5.1.91}$$

La solución particular tiene varias propiedades interesantes que vale la pena resaltar.

1. El procedimiento utilizado para hallar 5.1.90 fue el siguiente. Primero se halló la respuesta (output) de la ecuación cuando la fuerza (input o bien señal) era una delta de Dirac. Tal respuesta, llamada función de Green es independiente de la función f. Luego se "superponen" las funciones de Green en cada instante con la fuerza para hallar la solución particular, es decir, independientemente de la fuerza, siempre se utilizan las mismas funciones de Green, de ahí el poder del método anterior pues no hay que estar calculando para cada fuerza específica funciones de Green particulares.

2. La respuesta final en 5.1.90 no involucra a la delta de Dirac por lo que aún cuando el método para llegar a la solución sea dudoso, una vez que se tiene la solución no importa cómo llegó a ella sino que simplemente funcione.

3. Si $x_0(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)$ representa la respuesta en $\tau = 0$ el integrando de la solución particular consiste en el producto de la fuerza con las traslaciones de tal respuesta original. Tales integrales aparecen frecuentemente y se llaman convoluciones . Por lo tanto, la solución particular consiste en la convolución de la fuerza (input) con la función respuesta a impulso.

Si $f(t)$, $g(t)$ son dos funciones definidas en $[0,\infty)$ se define la convolución de f con g como la función $f*g$

$$f*g(t) \equiv \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{5.1.92}$$

En el caso en que alguna de las dos funciones sea una función generalizada se toma el límite inferior como 0^-, es decir,

$$f*g(t) \equiv \int_{0^-}^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{5.1.93}$$

esto se hace para poder seguir manipulando las funciones generalizadas como si fueran funciones ordinarias.
Algunas propiedades de la convolución son:

1. Asociatividad:
$$(f*g)*h(t) = f*(g*h)(t) \tag{5.1.94}$$

2. Conmutatividad:
$$(f*g)(t) = (g*f)(t) \tag{5.1.95}$$

3. Convolver con una delta de Dirac traslada la función: si δ_a denota la delta de Dirac trasladada a unidades
$$\delta_a(t) \equiv \delta(t-a) \tag{5.1.96}$$
con $a>0$ entonces
$$(\delta_a * f)(t) = f(t-a) \tag{5.1.97}$$
siempre que $a<t$.

5.2. Definición de la Transformada de Laplace

Hasta el momento se han estudiado cuatro clases de objetos matemáticos. El primer objeto son los números, por ejemplo, números naturales, reales o complejos, y se pueden considerar como la estructura básica para el resto de objetos que se han estudiado. El segundo objeto son las funciones, que se pueden interpretar como "máquinas" o "algoritmos" que toman números y producen números. El tercer objeto estudiado son los operadores, que son una generalización de las funciones y al igual que ellas pueden interpretarse como una máquina o algoritmo, solo que en este caso toman una función y producen otra función. El cuarto objeto son las funciones generalizadas, que son en cierto sentido objetos que aparecen dentro de las integrales y que pueden tener singularidades, es decir, valer infinito en un punto o varios puntos.

Ahora se va a introducir un nuevo tipo de objeto matemático, llamados transformadas, que lo que hacen es tomar un objeto definido sobre cierto espacio y enviarlo a un objeto definido sobre otro espacio. La Transformada de Laplace es un tipo particular de transformada, que se interpreta generalmente como un cambio del espacio de tiempo al espacio de frecuencia compleja, aunque luego se estudiará con más detalle lo que esto significa.

Primero que todo, es importante señalar que en cierto sentido ya se conocen algunos ejemplos de transformadas. Por ejemplo, suponiendo que $f(x)$ es una función analítica, entonces $f(x)$ puede expanderse en una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.2.1}$$

Ahora bien, lo usual siempre es pensar que uno comienza con la función y luego halla la serie de potencias (serie de Taylor), sin embargo, invirtiendo este razonamiento se puede apreciar el concepto de transformada.

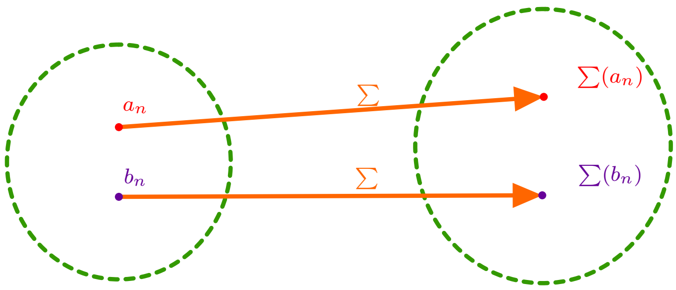

Figura 5.2.1: Transformada $\sum$ serie de potencias

Por ejemplo, suponga que alguien le da a uno una sucesión, digamos

$$a_n = \frac{1}{n!} \tag{5.2.2}$$

entonces se podría pensar que la transformada $\sum$ toma la sucesión anterior y con ella produce una función $f(x)$ definida según

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{5.2.3}$$

Lo anterior puede denotarse bajo el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & \sum & & \\ & & \downarrow & & \\ a_n & \longrightarrow & [\sum(a_n)] & \longrightarrow & f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ & & & & \\ & & \sum & & \\ & & \downarrow & & \\ \frac{1}{n!} & \longrightarrow & \left[\sum\left(\frac{1}{n!}\right)\right] & \longrightarrow & f(x) = e^x \end{array} \tag{5.2.4}$$

lo importante es que del lado izquierdo se comienza con una sucesión a_n, es decir, un objeto que depende de n, mientras que del lado derecho se termina con una función depende de x, es decir, al sumar sobre todos los n posibles se ha "borrado" la dependencia en n y se termina con algo que depende solo de la posición. Es en este sentido que puede pensarse en la serie $\sum$ como una transformada que pasa del espacio de números naturales (pues las sucesiones están indexadas por números naturales) al espacio de posición (pues la función es una función del posición). Ahora bien, dependiendo de la sucesión la función que se produce puede existir en distintos intervalos. Por ejemplo, si se toma

$$a_n = n! \tag{5.2.5}$$

entonces $\sum(a_n)$ solo está bien definida para $x = 0$ mientras que si se toma

$$a_n = 1 \tag{5.2.6}$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{5.2.7}$$

está bien definida únicamente para $|x| < 1$. De hecho, lo interesante de pensar en la serie como una transformada es que sería una transformada lineal (puede suponerse por el momento que las sucesiones definen funciones sobre toda la recta real), es decir, si c es una constante y a_n, b_n son sucesiones entonces

$$\sum((a_n) + c(b_n)) = \sum(a_n) + c\sum(b_n) \tag{5.2.8}$$

Lo más interesante es que la transformada $\sum$ es invertible[5] en el sentido de que es posible recuperar la sucesión a través de la función. Esto ocurre gracias a la fórmula de Taylor

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{5.2.9}$$

[5]como esta discusión es simplemente motivacional no se entrarán en los detalles del significado preciso de invertir la transformada $\sum$

La siguiente propiedad para series es la que servirá como motivación para la Transformada de Laplace. Suponga que se tiene una sucesión a_n y asociada a ella una función $f(x)$, es decir, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \sum & & \\ & & \downarrow & & \\ a_n & \longrightarrow & [\sum(a_n)] & \longrightarrow & f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array} \tag{5.2.10}$$

Ahora se define la sucesión

$$b_n \equiv n a_n \tag{5.2.11}$$

es decir, b_n consiste en multiplicar por n. ¿Cuál es la función $g(x)$ que le corresponde a b_n?

$$\begin{array}{ccccc} & & \sum & & \\ & & \downarrow & & \\ b_n & \longrightarrow & [\sum(n a_n)] & \longrightarrow & g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \end{array} \tag{5.2.12}$$

Dado que las series de potencias pueden derivarse término a término, se tiene que

$$x f'(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = g(x) \tag{5.2.13}$$

Es decir, multiplicar por n en el espacio de números se traduce en multiplicar por x la derivada de la función original, o en términos más visuales, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} a_n & \xrightarrow{\sum} & f(x) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ n a_n & \xrightarrow{\sum} & x f'(x) \end{array} \tag{5.2.14}$$

Es decir, hay una relación estrecha entre la multiplicación en un espacio y la derivación sobre el otro espacio. La Transformada de Laplace buscará tomar ventaja de este fenómeno, solo que ahora con funciones en vez de sucesiones y series de potencias.

Primero que todo, para hallar la Transformada de Laplace, el análogo continuo de una serie es una integral y como se buscan estudiar problemas donde se aplica los inputs a un sistema a partir de $t = 0$ lo anterior sugiere en probar con algo como

$$F(s) \equiv \int_0^{\infty} K(s,t) f(t) dt \tag{5.2.15}$$

donde se han realizado las siguientes "sustituciones"

$$\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \longrightarrow \int_0^{\infty} \\ x^n \longrightarrow K(s,t) \\ a_n \longrightarrow f(t) \\ f(x) \longrightarrow F(s) \end{array} \tag{5.2.16}$$

Las transformadas de la forma 5.2.15 se conocen como transformadas integrales y pueden interpretarse diciendo que se está pasando del espacio t al espacio s pues al integrar sobre t se pierde explícitamente la dependencia de tal variable. La función $K(s,t)$ se llama el kernel de la transformada . La transformada de Laplace $\mathscr{L}$ que se está buscando es bastante especial y se va a caracterizar por la propiedad de que convertirá la derivada con respecto al tiempo en una multiplicación por s. Es decir, se busca el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{L} & & \\ & & \downarrow & & \\ f(t) & \longrightarrow & [\mathscr{L}f] & \longrightarrow & F(s)=\mathscr{L}f=\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt \\ & & & & \\ & & \mathscr{L} & & \\ & & \downarrow & & \\ \frac{df}{dt} & \longrightarrow & \left[\mathscr{L}\frac{df}{dt}\right] & \longrightarrow & sF(s)=\mathscr{L}\frac{df}{dt}=\int_0^\infty K(s,t)\frac{df}{dt}dt \end{array} \tag{5.2.17}$$

Antes de seguir, es importante señalar que no es claro si se va a tener éxito en encontrar una transformada que cumpla una propiedad tan particular. Es claro que la transformada se encontrará en el momento en que se conozca su kernel, y por el diagrama lo que se está pidiendo básicamente es que si

$$F(s)=\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt \tag{5.2.18}$$

entonces

$$sF(s)=\int_0^\infty K(s,t)\frac{df}{dt}dt \tag{5.2.19}$$

Para la derivación que sigue se supondrá que el kernel es derivable en ambas variables. De esta forma se puede aplicar la integración por partes al lado derecho de 5.2.19 para obtener

$$sF(s)=\int_0^\infty K(s,t)\frac{df}{dt}dt=\left(K(s,t)f(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^\infty \frac{\partial K(s,t)}{\partial t}f(t)dt \tag{5.2.20}$$

también puede multiplicarse 5.2.18 por s para obtener

$$sF(s)=\int_0^\infty sK(s,t)f(t)dt \tag{5.2.21}$$

comparando con 5.2.20 se tiene que

$$\int_0^\infty sK(s,t)f(t)dt=\left(K(s,t)f(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^\infty \frac{\partial K(s,t)}{\partial t}f(t)dt \tag{5.2.22}$$

o bien

$$\int_0^\infty \left(sK(s,t)+\frac{\partial K(s,t)}{\partial t}\right)f(t)dt=\left(K(s,t)f(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty} \tag{5.2.23}$$

claramente no se quiere que el kernel dependa de la función $f(t)$ que se haya elegido por lo que se ignorará deliberadamente el término derecho y se resolverá un nuevo problema, el de encontrar una función $K(s,t)$ que cumpla

$$\int_0^\infty \left(sK(s,t) + \frac{\partial K(s,t)}{\partial t} \right) f(t)dt = 0 \tag{5.2.24}$$

para cualquier función $f(t)$ suficientemente bien portada. Nuevamente, para garantizar esto es suficiente que

$$\frac{\partial K}{\partial t} + sK = 0 \tag{5.2.25}$$

la ecuación anterior es una ecuación difercncial lineal homogénea en t y tiene por solución

$$K(s,t) = e^{-st} \tag{5.2.26}$$

Lo anterior conduce a la siguiente definición

Si $f(t)$ es una función definida en $[0,t)$ su transformada de Laplace $F = \mathscr{L}f$ es la función

$$F(s) \equiv \mathscr{L}(f(t)) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.2.27}$$

si f es una función generalizada entonces se toma

$$F(s) \equiv \int_{0^-}^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.2.28}$$

Lo que hay que responder ahora es:

1. ¿Sobre cuáles funciones está definida la transformada de Laplace?
2. ¿Qué propiedades posee la transformada de Laplace?
3. ¿Convierte la transformada de Laplace derivadas en multiplicación tal como se estaba buscando?
4. ¿Es la transformada de Laplace invertible?
5. ¿Por qué se interpreta la transformada como un cambio del dominio temporal al domino de frecuencia (complejo)?
6. ¿Cómo ayuda la transformada de Laplace a encontrar funciones de Green (funciones respuesta a impulso)?

5.3. Propiedades de la Transformada de Laplace

Generalmente se escribirán las funciones en minúscula cuando son funciones del tiempo, es decir, $f(t)$. Por otro lado, salvo la delta de Dirac y la función de Heaviside, las funciones en mayúscula representan las funciones como función de s (dominio de frecuencia), por ejemplo, $F(s) = \mathscr{L}f(t)$. También es importante señalar que la variable s en 5.2.27 puede ser compleja, es decir, $s = \sigma + i\omega$, sin embargo, la mayor parte del tiempo se harán los cálculos suponiendo que s es real y cuando sea útil se mencionará que sucede en el caso en que s toma valores complejos

La primera pregunta por responder es la clase de funciones en las que está definida la transformada de Laplace. Primero que todo como la función exponencial es continua y por lo tanto integrable. Para garantizar que la función $e^{-st}f(t)$ vaya a ser integrable es suficiente pedir dos condiciones: la primera es que $f(t)$ sea continua por partes , es decir, que la función $f(t)$ tenga a lo sumo un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo de longitud finita (esta condición permite que la función vista sobre toda la recta tenga un número infinito de discontinuidades, solo que deben estar separadas en el sentido anterior). La segunda condición es que la función $f(t)$ sea de orden exponencial, ,es decir, que existan constantes $M > 0$, $c > 0$ y $T > 0$ de forma que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$. Intuitivamente, una función es de orden exponencial si eventualmente su crecimiento es menor que el de cierta exponencial. En tal caso, se tiene que

Si $f(t)$ es una función continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, es decir, que existan constantes $M > 0$, $c > 0$ y $T > 0$ de forma que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$, entonces la transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}f(t)$ existe cuando $s > c$

En la práctica se supondrá que las funciones con las que se trabajan poseen transformadas de Laplace, además, como incluso se tomarán las transformadas de Laplace de funciones generalizadas no se enfatizará mucho el problema de garantizar la existencia de la transformada ni tampoco los valores de s para los cuales está definido excepto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 102. Calcule $\mathscr{L}f(t)$ para $f(t) = 1$

Aplicando la definición 5.2.27

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s} \qquad s > 0 \tag{5.3.1}$$

es decir,

$$\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s} \quad s > 0 \tag{5.3.2}$$

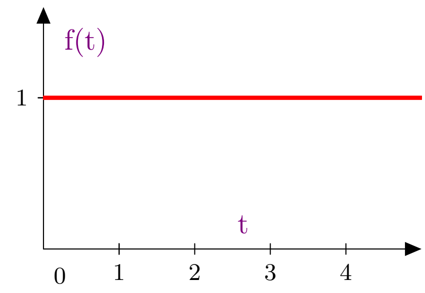

Figura 5.3.1: $f(t) = 1$

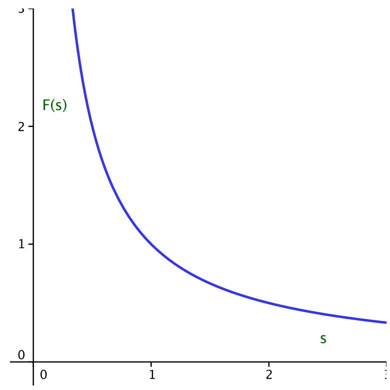

Figura 5.3.2: $F(s) = \frac{1}{s}$

Ejemplo 103. Calcule $\mathscr{L} f(t)$ para $f(t) = t$

Aplicando la definición e integración por partes

$$F(s) = \int_0^{\infty} te^{-st}dt = -\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} \quad s > 0 \tag{5.3.3}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}\,(t) = \frac{1}{s^2} \quad s > 0 \tag{5.3.4}$$

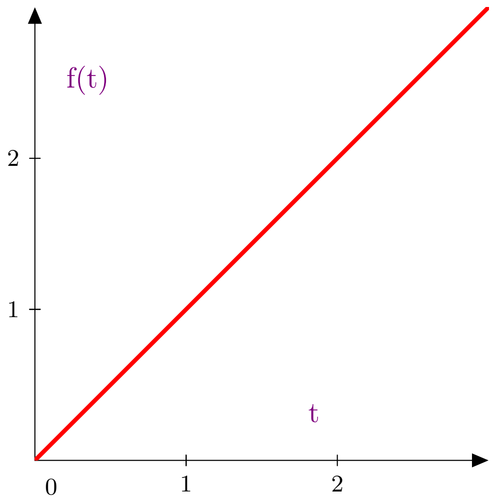

Figura 5.3.3: $f(t) = t$

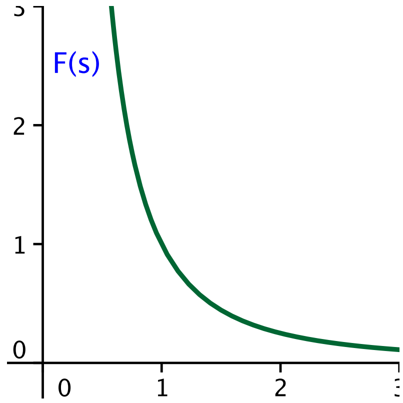

Figura 5.3.4: $F(s) = \frac{1}{s^2}$

Ejemplo 104. Calcule la transformada $\mathscr{L} f(t)$ de Laplace de $f(t) = e^t$
Usando la definición 5.2.27

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t dt = \int_0^\infty e^{(-s+1)t} dt = \left. \frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-1} \quad s > 1 \tag{5.3.5}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}\left(e^t\right) = \frac{1}{s-1} \quad s > 1 \tag{5.3.6}$$

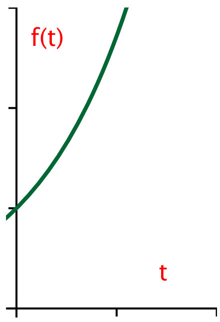

Figura 5.3.5: $f(t) = e^t$

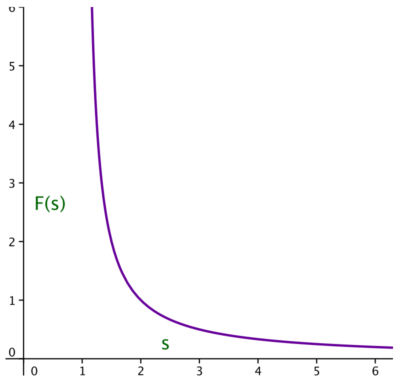

Figura 5.3.6: $F(s) = \frac{1}{s-1}$

Ejemplo 105. Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = \cos t$

Aquí se realiza la integración por partes dos veces.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt = -\frac{e^{-st}}{s} \cos t \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{s} \int_0^\infty \sin t e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \sin t \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} F(s) \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

por lo tanto

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} \tag{5.3.8}$$

o bien

$$\mathscr{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1} \tag{5.3.9}$$

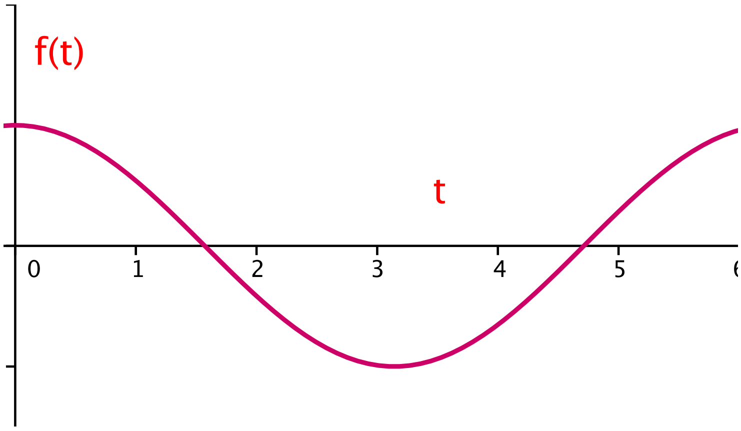

Figura 5.3.7: $f(t) = \cos t$

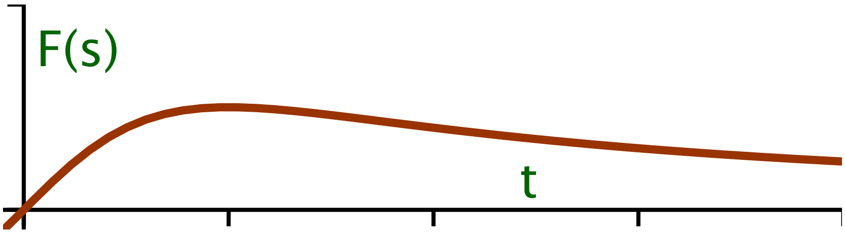

Figura 5.3.8: $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$

Ejemplo 106. Calcule la transforma de Laplace $f(t) = \sin t$

Nuevamente se integra por partes dos veces:

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t dt = -\frac{e^{-st}\sin t}{s}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt \\ = \frac{1}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin t e^{-st} dt\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}F(s) \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

por lo tanto

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \tag{5.3.11}$$

o bien

$$\mathscr{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1} \tag{5.3.12}$$

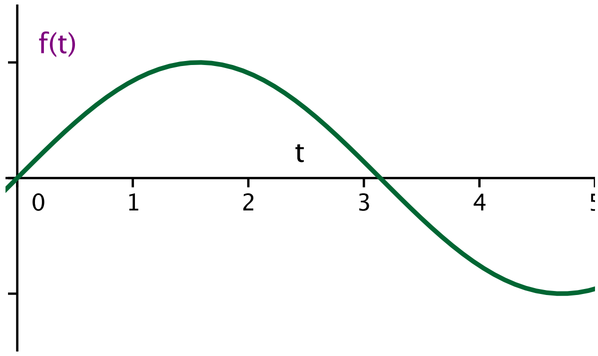

Figura 5.3.9: $f(t) = \sin t$

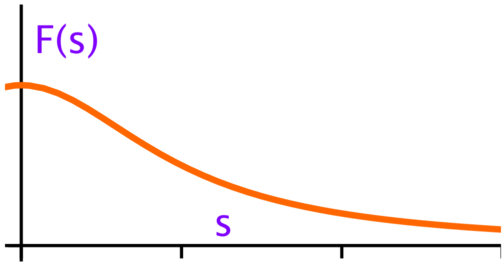

Figura 5.3.10: $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

Ejemplo 107. Calcule la transformada de Laplace de la delta de Dirac $\delta(t)$
Como la delta de Dirac es una función generalizada se toma 5.2.28

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = e^{-s\cdot 0} = 1 \tag{5.3.13}$$

Es decir,

$$\mathscr{L}(\delta) = 1 \tag{5.3.14}$$

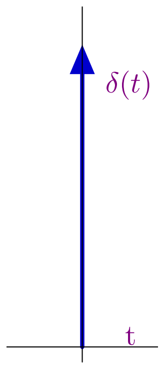

Figura 5.3.11: $f(t) = \delta(t)$

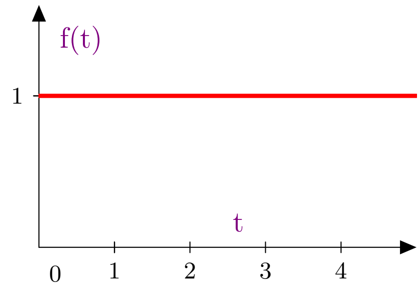

Figura 5.3.12: $F(s) = 1$

La siguiente es una tabla con algunas de las Transformadas de Laplace más importantes.

$f(t)$	$\mathscr{L}f(t)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

De los gráficos anteriores se puede observar que cuando $s \longrightarrow \infty$ entonces $F(s) \longrightarrow 0$ (la excepción a esto es la delta de Dirac pero hay que recordar que esta es una función generalizada y no una función normal). De hecho, si $f(t)$ es una función de orden exponencial entonces

$$
\begin{aligned}
|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| &\leq \int_0^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt = \int_0^T e^{-st}\,|f(t)|\,dt + \int_T^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt \\
&\leq \left(\text{máx}_{0\leq t\leq T}\,|f(t)|\right)\int_0^T e^{-st}dt + M\int_T^\infty e^{(c-s)t}dt \\
&= \left(\text{máx}_{0\leq t\leq T}\,|f(t)|\right)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=0}^{T}\right) + M\,\frac{e^{(c-s)t}}{c-s}\Big|_{t=T}^{t=\infty}
\end{aligned}
\tag{5.3.15}
$$

Por lo tanto

$$
|F(s)| \leq \left(\max_{0\leq t\leq T}|f(t)|\right)\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right) - M\frac{e^{(c-s)T}}{c-s} \tag{5.3.16}
$$

tomando $s \longrightarrow \infty$ se obtiene que

$$
\lim_{s\longrightarrow\infty} F(s) = 0 \tag{5.3.17}
$$

Si f es continua por partes en $(0,\infty)$ y de orden exponencial entonces

$$
\lim_{s\longrightarrow\infty} F(s) = 0 \tag{5.3.18}
$$

Otra propiedad que no se ha mencionado pero que es fundamental es el hecho de que la Transforma de Laplace es lineal.

Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones con transformadas de Laplace $\mathscr{L}f(t)$ y $\mathscr{L}g(t)$ entonces la transformada de Laplace de $f(t)+cg(t)$ donde c es una constante es

$$
\mathscr{L}\left(f(t)+cg(t)\right) = \mathscr{L}f(t) + c\mathscr{L}g(t) \tag{5.3.19}
$$

Con la linealidad de la transformada es posible derivar varias transformadas sin la necesidad de estar recordando muchas propiedades. Por ejemplo, como

$$
\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \tag{5.3.20}
$$

tomando la transformada a ambos lados

$$
\mathscr{L}\cos\omega t = \frac{\mathscr{L}e^{i\omega t}+\mathscr{L}e^{-i\omega t}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{s-i\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{5.3.21}
$$

Ahora se puede determinar la relación entre la Transformada de Laplace y la derivada, que fue la razón principal por la que se construyó. Nuevamente, suponga que $f(t)$ tiene transformada $F(s)$, es decir,

$$
F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.3.22}
$$

Si $G(s)$ es la transformada de Laplace de $\frac{df}{dt}$ entonces

$$
G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt \tag{5.3.23}
$$

usando integración por partes

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt = e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = sF(s) - f(0) \tag{5.3.24}$$

El cálculo anterior significa que la transformada de la derivada se convierte en multiplicación por s excepto por un término $f(0)$ que debe restarse. Sin embargo, la aparición del término anterior va a ser una gran ventaja pues significa que para las ecuaciones diferenciales la transformada de Laplace incorporará automáticamente las condiciones iniciales en $t = 0$.

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces la transformada de Laplace de $\frac{df}{dt}$ es $sF(s) - f(0)$, es decir,

$$\mathscr{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0) \tag{5.3.25}$$

se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{df}{dt} & \xrightarrow{\mathscr{L}} & sF(s) - f(0) \end{array} \tag{5.3.26}$$

Análogamente, se tienen las siguientes relaciones

$$\mathscr{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.3.27}$$

que se puede obtener con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{df}{dt} & \xrightarrow{\mathscr{L}} & sF(s) - f(0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{d^2 f}{dt^2} & \xrightarrow{\mathscr{L}} & s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) \end{array} \tag{5.3.28}$$

En general se tiene que

$$\mathscr{L}\left(\frac{d^3 f}{dt^3}\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{5.3.29}$$

$$\mathscr{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{5.3.30}$$

Un fenómeno que ocurre con frecuencia al utilizar transformadas es el fenómeno de dualidad, es decir, la similitud entre las distintas propiedades de una función al cambiar de un espacio al otro. Por ejemplo, el resultado anterior dice que diferenciar con respecto al tiempo es igual a multiplicar con respecto al dominio de frecuencia. Ahora bien, ¿qué pasa si se deriva con respecto a la frecuencia? Es decir, dado que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{5.3.31}$$

se tiene que

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right) dt = -\int_0^\infty t e^{-st} f(t) dt = \mathscr{L}\left(-t f(t)\right) \tag{5.3.32}$$

es decir, ¡derivar con respecto a la frecuencia corresponde a multiplicar la función original en el dominio temporal! Esto es una manifestación del fenómeno de dualidad que acaba de mencionarse.

Dualidad diferenciación-multiplicación:
Si $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(\tfrac{df}{dt}\right) &= sF(s) - f(0) \\ \tfrac{dF(s)}{ds} &= -\mathscr{L}\left(t f(t)\right) \end{aligned} \tag{5.3.33}$$

Es decir, se tienen los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \frac{df}{dt} \arrow[r, "\mathscr{L}"] & sF(s) - f(0) \end{tikzcd} \tag{5.3.34}$$

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ -t f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{dF}{ds} \end{tikzcd} \tag{5.3.35}$$

Más aún, se tiene que

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2F}{ds^2} &= \mathscr{L}\left(t^2 f(t)\right) \\ &\vdots \\ \tfrac{d^nF}{ds^n} &= \mathscr{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right) \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

Por ejemplo, con la propiedad anterior se sigue que

$$\mathscr{L}\left(t \sin \omega t\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \tag{5.3.37}$$

En las aplicaciones es frecuente encontrar que las señales (inputs) están definidos por partes, para tales funciones definidas por partes se puede utilizar la función de Heaviside para escribirla como una sola. A su vez, dado que la definición de la transformada de Laplace involucra una exponencial también es útil saber el efecto de multiplicar una función por una exponencial. Por ejemplo, si $f(t)$ tiene transformada $F(s)$ entonces la transformada de $H(t-a)f(t-a)$ (con $a > 0$) es

$$\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a) f(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \tag{5.3.38}$$

haciendo el cambio de variable

$$\tau = t - a \tag{5.3.39}$$

se tiene

$$\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)d\tau = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-as}F(s) \tag{5.3.40}$$

es decir,

$$\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) = e^{-as}F(s) \tag{5.3.41}$$

la ecuación 5.3.41 se interpreta como sigue: si se traslada temporalmente la señal a unidades y se activa en $t = a$ entonces la transformada de Laplace de tal señal corresponde a la transformada de Laplace de la señal original multiplicada por una exponencial.

A su vez, la transformada de Laplace de $e^{at}f(t)$ es (aquí a es cualquier número real)

$$\mathscr{L}\left(e^{at}f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a) \tag{5.3.42}$$

es decir, multiplicar una señal por una exponencial traslada en el domino s la transformada a unidades a la derecha. Se pueden resumir los dos resultados anteriores con los siguientes diagramas. Nuevamente, estos dos resultados son una muestra más de dualidad:

Dualidad traslación-multiplicación exponencial:
Traslación en el eje t: Si $F(s) = \mathscr{L}f(t)$ y $a > 0$ entonces trasladar una señal en el dominio temporal equivale a multiplicarla por una exponencial en el dominio de frecuencia

$$\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) = e^{-as}F(s) \tag{5.3.43}$$

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ H(t-a)f(t-a) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & e^{-as}F(s) \end{tikzcd} \tag{5.3.44}$$

Traslación en el eje s: Si $F(s) = \mathscr{L}f(t)$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces multiplicar una señal en el dominio temporal por una exponencial corresponde a trasladarla en el dominio de frecuencia.

$$\mathscr{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a) \tag{5.3.45}$$

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ e^{at}f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & F(s-a) \end{tikzcd} \tag{5.3.46}$$

Ejemplo 108. Calcule $\mathscr{L}\left(e^{5t}t^3\right)$, $\mathscr{L}\left(H(t-\pi)\cos t\right)$,
Como

$$\mathscr{L}\left(t^3\right) = \frac{3!}{s^4} = G(s) \tag{5.3.47}$$

por 5.3.45 se tiene

$$\mathscr{L}\left(e^{5t}t^3\right) = G(s-5) = \frac{6}{(s-5)^4} \tag{5.3.48}$$

Como

$$\mathscr{L}\left(\cos t\right) = \frac{1}{s^2+1} = F(s) \tag{5.3.49}$$

No se puede aplicar directamente 5.3.43, sin embargo,

$$\cos t = \cos\left(t-\pi+\pi\right) = \cos\left(t-\pi\right)\cos\pi - \sin\left(t-\pi\right)\sin\left(\pi\right) = -\cos\left(t-\pi\right) \tag{5.3.50}$$

por lo tanto usando 5.3.43

$$\mathscr{L}\left(H(t-\pi)\cos t\right) = -\mathscr{L}\left(H(t-\pi)\cos\left(t-\pi\right)\right) = -e^{-\pi s}F(s) = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s} \tag{5.3.51}$$

Otra alternativa hubiera sido derivar a partir de la definición $\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t)\right)$y aplicarlo a este caso particular. Si se hubiera hecho esto se hubiera obtenido que

$$\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t)\right) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a)) \tag{5.3.52}$$

Con las propiedades de la traslación la tabla de transformadas de Laplace se puede ampliar.

$f(t)$	$\mathscr{L}f(t)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega t}{(s^2+\omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$H(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$

Siguiendo con la investigación de la transformada de Laplace, al igual que en el álgebra lineal algunas transformaciones lineales eran invertibles y otras no, se puede preguntar si la transformada de Laplace es invertible o no lo es. Para darle una respuesta satisfactoria a la pregunta anterior, se requeriría desarrollar muchas más teoría de la que se posee en este momento, por lo que el problema de invertibilidad o no de la transformada de Laplace se planteara en los siguientes términos: si dos funciones poseen la misma transformada de Laplace, $\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(g(t))$ ¿puede concluirse que son la misma función, es decir, $f(t) = g(t)$? El siguiente resultado caracteriza la situación anterior.

Transformada Inversa de Laplace: Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones con la misma transformada de Laplace, es decir

$$\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(g(t)) \tag{5.3.53}$$

entonces para todo $a \in [0, \infty)$ se tiene que f y g coinciden en cuanto los límites laterales, es decir,

$$f(a^+) = g(a^+) \qquad f(a^-) = g(a^-) \tag{5.3.54}$$

en el caso de que f y g son funciones continuas, entonces se tiene que las funciones son iguales, $f = g$.

En cualquiera de los dos casos, f y g son para todos los efectos prácticos iguales por lo que se define la transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}$ como la transformada que cumple la siguiente propiedad:

$$F(s) = \mathscr{L} f(t) \longrightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1} F(s) \tag{5.3.55}$$

De hecho, la transformada inversa es una transformada del dominio de frecuencia en el dominio temporal. Al igual que la transformada de Laplace, la transformada inversa es una transformación lineal, es decir,

$$\mathscr{L}^{-1}\left(F(s) + cG(s)\right) = \mathscr{L}^{-1} F(s) + c\mathscr{L}^{-1} G(s) \tag{5.3.56}$$

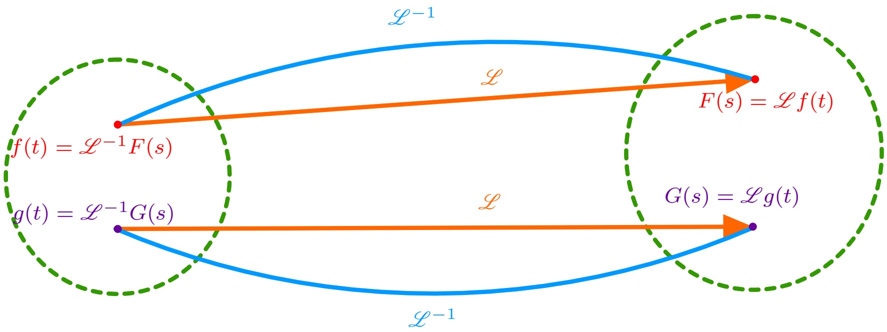

Figura 5.3.13: Transforma de Laplace y la Transformada Inversa de Laplace

A partir de la tabla de la Transformada de Laplace, puede construirse una tabla para la Transformada Inversa de Laplace

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}F(s)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\sin\omega t$
$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\sin\omega t$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh\omega t$
1	$\delta(t)$
e^{-st_0}	$\delta(t-t_0)$
$\frac{e^{-st_0}}{s}$	$H(t-t_0)$

Ejemplo 109. Halle $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2+s+1}{s^3+s}\right)$

Primero que todo se utiliza el método de fracciones parciales.

$$\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{5.3.57}$$

o bien

$$s^2 + s + 1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)s \tag{5.3.58}$$

tomando $s = 0$ en 5.3.58 se tiene

$$A = 1 \tag{5.3.59}$$

tomando $s = 1$ y $s = -1$ en 5.3.58 se tiene

$$3 = 2 + B + C \quad 1 = 2 + B - C \tag{5.3.60}$$

que da

$$B = 0 \quad C = 1 \tag{5.3.61}$$

Por lo tanto

$$\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} \tag{5.3.62}$$

Luego revisando la tabla de transformadas

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = 1 + \sin t \tag{5.3.63}$$

Ejemplo 110. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)$

Para encontrar la transformada inversa adecuada primero se completan los cuadrados en el denominador.

$$s^2 + 4s + 8 = (s + 2)^2 + 4 = (s + 2)^2 + 2^2 \tag{5.3.64}$$

Luego se utiliza el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ e^{at} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & F(s - a) \end{tikzcd} \tag{5.3.65}$$

que en este caso se ve como

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[d] & \frac{1}{s^2+2^2} \arrow[l, "\mathscr{L}^{-1}"'] \\ e^{at} f(t) & \frac{1}{(s+2)^2+2^2} \arrow[u] \arrow[l, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \end{tikzcd} \quad a = -2 \tag{5.3.66}$$

donde las flechas se han ajustado un poco para indicar la estrategia del problema. Como

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}\sin(2t) \tag{5.3.67}$$

se puede completar el diagrama para obtener

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{2}\sin(2t) \arrow[d] & \frac{1}{s^2+2^2} \arrow[l, "\mathscr{L}^{-1}"'] & \\
\frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t) & \frac{1}{(s+2)^2+2^2} \arrow[l, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \arrow[u] & a=-2
\end{tikzcd} \tag{5.3.68}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t) \tag{5.3.69}$$

Otra forma alternativa de lograr el resultado es con la ayuda de números complejos. Como

$$s^2+4s+8=(s+2+2i)\,(s+2-2i)) \tag{5.3.70}$$

se puede utilizar fracciones parciales

$$\frac{1}{s^2+4s+8}=\frac{A}{s+2+2i}+\frac{B}{s+2-2i} \tag{5.3.71}$$

o bien

$$1=A(s+2-2i)+B(s+2+2i) \tag{5.3.72}$$

tomando $s=-2+2i$ se tiene

$$\frac{1}{4i}=B \tag{5.3.73}$$

tomando $s=-2-2i$ se tiene

$$-\frac{1}{4i}=A \tag{5.3.74}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)=-\frac{1}{4i}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-2-2i)}\right)+\frac{1}{4i}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-2+2i)}\right) \tag{5.3.75}$$

y en este caso las transformadas inversas se obtienen directamente de una tabla

$$\begin{gathered}=-\tfrac{1}{4i}e^{(-2-2i)t}+\tfrac{1}{4i}e^{(-2+2i)t}=\tfrac{e^{-2t}}{4i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\\ =\tfrac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t)\end{gathered} \tag{5.3.76}$$

que coincide con lo que se halló con el otro método.

Ejemplo 111. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$

Este cálculo se ve más complicado puesto que en la tabla de la transformada no aparece el logaritmo por ninguna parte. Sin embargo, si se deriva el logaritmo se tiene

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)=\frac{d}{ds}\left(2\ln s-\ln\left(s^2+1\right)\right)=\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1} \tag{5.3.77}$$

y ciertamente esto último sí es conocido. Tomando el diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ -tf(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{dF}{ds} \end{tikzcd} \tag{5.3.78}$$

ajustado al problema se tiene

$$\begin{tikzcd} f(t) & \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) \arrow[l, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \arrow[d] \\ -tf(t) \arrow[u] & \frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1} \arrow[l, "\mathscr{L}^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.3.79}$$

Dado que

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\right)=2\left(\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s}-\mathscr{L}^{-1}\frac{s}{s^2+1}\right)=2\left(1-\cos t\right) \tag{5.3.80}$$

por lo tanto, comparando con el diagrama se obtiene

$$-\,tf(t)=2\left(1-\cos t\right) \tag{5.3.81}$$

o bien

$$f(t)=\frac{2\left(\cos t-1\right)}{t} \tag{5.3.82}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{2(\cos t-1)}{t} & \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) \arrow[l, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \arrow[d] \\ 2(1-\cos t) \arrow[u] & \frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1} \arrow[l, "\mathscr{L}^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.3.83}$$

de aquí se deduce que

$$\mathscr{L}^{-1}\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)=\frac{2\left(\cos t-1\right)}{t} \tag{5.3.84}$$

Como se vio cuando se analizó el comportamiento de un resorte a una fuerza arbitraria, la convolución aparece naturalmente en la forma de encontrar una solución particular a la ecuación diferencial que describe al resorte con movimiento forzado. Dado que se quiere utilizar la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, es natural preguntar que sucede con la transformada de Laplace de una convolución de funciones. Primero que todo, la convolución de f con g se había definido como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5.3.85}$$

Por lo tanto, la transformada de la convolución viene dada como

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f * g)(t) &= \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \left(e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt \end{aligned} \tag{5.3.86}$$

para continuar se invierte el orden de integración.

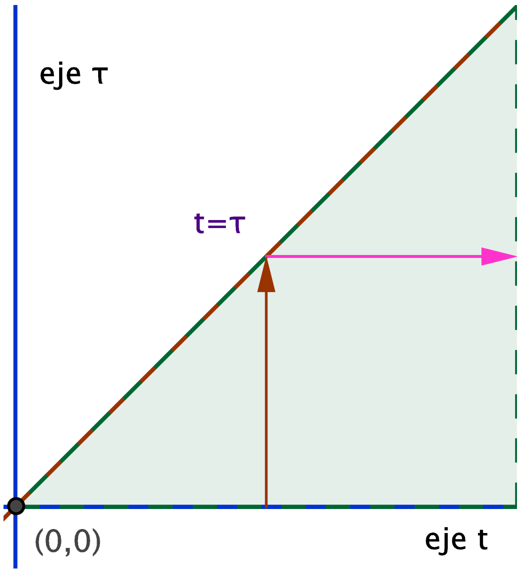

Figura 5.3.14: Región de Integración

En 5.3.86 los límites están determinados con el vector vertical, pues primero se deja correr la variable t libremente de 0 a ∞ y luego τ toma los límites que indica el vector vertical, es decir, de $\tau = 0$ hasta $\tau = t$. Si se quiere invertir el orden se utiliza el vector horizontal. Ahora τ viaja libremente de 0 a ∞ mientras que t va desde $t = \tau$ a $t = \infty$. Por lo tanto, 5.3.86 se convierte en

$$\int_0^\infty \int_0^t \left(e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \int_0^\infty \underbrace{\int_\tau^\infty \left(e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)dt\right)}_{(1)} d\tau \tag{5.3.87}$$

Ahora se realiza la sustitución $u = t - \tau$ para la integral (1). Con respecto a esta integral, τ es constante por lo que 5.3.87 se transforma en

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(\tau) g(u) du \right) d\tau = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^\infty e^{-su} g(u) du \right) = F(s)G(s) \tag{5.3.88}$$

es decir, ¡la Transformada de Laplace transforma la convolución en multiplicación!

Dualidad convolución-multiplicación de funciones: Si $F(s) = \mathscr{L} f(t)$ y $G(s) = \mathscr{L} g(t)$ la transformada de la convolución es el producto de las transformadas, es decir,

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\left(f * g\right)(t) = F(s)G(s) \\ f * g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right) \end{gathered} \tag{5.3.89}$$

es decir, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ (f*g)(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & F(s)G(s) \\ g(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[u] & G(s) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.3.90}$$

Dualidad integración-división: Tomando $g(t) = 1$ en 5.3.89 se tiene que

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \\ \int_0^t f(\tau) d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) \end{gathered} \tag{5.3.91}$$

es decir, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \int_0^t f(\tau) d\tau \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{F(s)}{s} \end{tikzcd} \tag{5.3.92}$$

Lo anterior significa que la transformada de Laplace convierte la integración en el dominio temporal en división en el dominio de frencuencia.

Ejemplo 112. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-1)}\right)$

Una opción sería utilizar el método de fracciones parciales, sin embargo se va a utilizar el diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \int_0^t f(\tau)d\tau \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{F(s)}{s} \end{tikzcd} \tag{5.3.93}$$

para obtener la respuesta. Hay que aplicar el diagrama dos veces de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} e^t \arrow[d] & & \frac{1}{s-1} \arrow[ll, "\mathscr{L}^{-1}"'] \\ \int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1 \arrow[d] & & \frac{1}{s(s-1)} \arrow[u] \\ \int_0^t (e^\tau - 1)\, d\tau = e^t - t - 1 & & \frac{1}{s^2(s-1)} \arrow[u] \arrow[ll, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.3.94}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-1)}\right) = e^t - t - 1 \tag{5.3.95}$$

Ejemplo 113. Encuentre $\mathscr{L}\left(\int_0^t \tau e^\tau \cos\tau d\tau\right)$

Se usa el mismo diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F(s) \arrow[d] \\ \int_0^t f(\tau)d\tau \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{F(s)}{s} \end{tikzcd} \tag{5.3.96}$$

junto con el diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & F(s) \arrow[d] \\ e^{at} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & F(s-a) \end{tikzcd} \tag{5.3.97}$$

y la tabla de transformadas.

$$
\begin{tikzcd}
t\cos t \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \arrow[d] \\
te^t\cos t \arrow[u] \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & \frac{(s-1)^2-1}{\left((s-1)^2+1\right)^2} = \frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2} \arrow[d] \\
\int_0^t \tau e^\tau \cos\tau d\tau \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\mathscr{L}"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & \frac{1}{s}\frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2} = \frac{s-2}{(s^2-2s+2)^2}
\end{tikzcd}
\tag{5.3.98}
$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t \tau e^\tau \cos\tau d\tau\right) = \frac{s-2}{(s^2-2s+2)^2} \tag{5.3.99}$$

En las aplicaciones es muy importante encontrar la respuesta (output) de un sistema cuando la señal (input) es una función periódica, es decir, $f(t) = f(t+T)$. De hecho, como se verá en el siguiente tema, tales señales periódicas pueden estudiarse mediante su desarrollo de Fourier, sin embargo, por el momento solo interesa la Transformada de Laplace de tales funciones.

Si $f(t)$ es periódica, se tiene que

$$\mathscr{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{5.3.100}$$

realizando el cambio de variable $\tau = t - T$ para la segunda integral se obtiene usando la periodicidad de f

$$\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+T)}f(\tau+T)d\tau = e^{-sT}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-sT}\mathscr{L}f(t) \tag{5.3.101}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}f(t) = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + e^{-sT}\mathscr{L}f(t) \tag{5.3.102}$$

con lo cual se ha hallado el siguiente resultado

Si $f(t)$ es una función periódica de período T entonces

$$F(s) = \mathscr{L}f(t) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \tag{5.3.103}$$

Ejemplo 114. Calcule la transformada de la Laplace de la onda cuadrada de período 2, $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$

Se utiliza 5.3.103

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \tag{5.3.104}$$

por lo tanto

$$F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \tag{5.3.105}$$

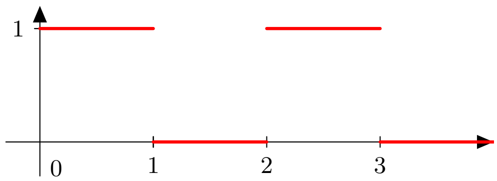

Figura 5.3.15: Onda cuadrada en el dominio temporal

Antes de resolver ecuaciones diferenciales con la Transformada de Laplace, se va a mencionar brevemente la Transformada de Laplace vista desde el plano complejo. Primero que todo, hay que justificar por qué se ha dicho que la Transformada de Laplace pasa del dominio temporal al dominio de frecuencia. Se dice que toma una señal temporal porque se ha estado interpretando t como el tiempo (obviamente nada obliga en pensar que la variable debe ser el tiempo, y conforme se interprete de distintas formas, s también cambiaría su interpretación). Luego, en la definición de la transformada de Laplace aparece la exponencial e^{-st}. La exponencial, al igual que las funciones trigonométricas y el logaritmo, no pueden tener un argumento con dimensiones, lo cual significa que st debe ser adimensional, es decir, s debe tener unidades de tiempo^{-1}, es decir, de frecuencia.

De hecho, como se comentó al inicio, aunque se considera en su mayoría s como una variable real, en la práctica lo más útil es tomar $s = \sigma + i\omega$ como una frecuencia compleja, por lo tanto, la transformada de Laplace puede interpretarse como una transformada del dominio temporal en el que el input y el output son funciones del tiempo al dominio de frecuencia (dominio s) donde los inputs y outputs son funciones de la frecuencia angular compleja.

Esto significa que el verdadero potencial de la Transformada de Laplace es cuando se toman números complejos, sin embargo, no se discutió la teoría en esta forma pues se requeriría desarrollar la teoría de integración en el plano complejo. Sin embargo, la idea de representar la transformada de Laplace en el plano complejo es para estudiar cualitativamente el comportamiento de una señal a través de su diagrama de polos y ceros (zero-pole diagram en inglés). Se va a utilizar un ejemplo sencillo para explicar en que consiste la idea (al menos el análisis de los polos).

La transformada de Laplace (en el plano complejo) de

$$f(t) = e^{at}\cos bt \quad g(t) = e^{at}\sin bt \tag{5.3.106}$$

son respectivamente

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad G(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \tag{5.3.107}$$

donde ahora $s = \sigma + i\omega$. Primero que todo, las funciones anteriores son importantes porque en la solución homogénea de una ecuación diferencial lineal aparecen frecuentemente. Las funciones $F(s)$ y $G(s)$ tienen una forma particularmente importante y se conocen como funciones racionales (básicamente son de la misma forma que las funciones para las cuales se usa el método de fracciones parciales). Si se considerara s real los denominadores nunca se anularían, pero como ahora s es complejo de hecho se van a anular en dos puntos. De forma más general, los puntos donde se anula el denominador de una función racional se denominan los polos de la función racional. Para 5.3.107 los polos de ambas funciones ocurren cuando

$$(s-a)^2 + b^2 = 0 \tag{5.3.108}$$

o bien en

$$s = a \pm ib \tag{5.3.109}$$

El diagrama de polos consiste en representar los polos de la transformada con una $\times$ en el plano complejo como en la siguiente figura (aquí se supone que $a, b > 0$)

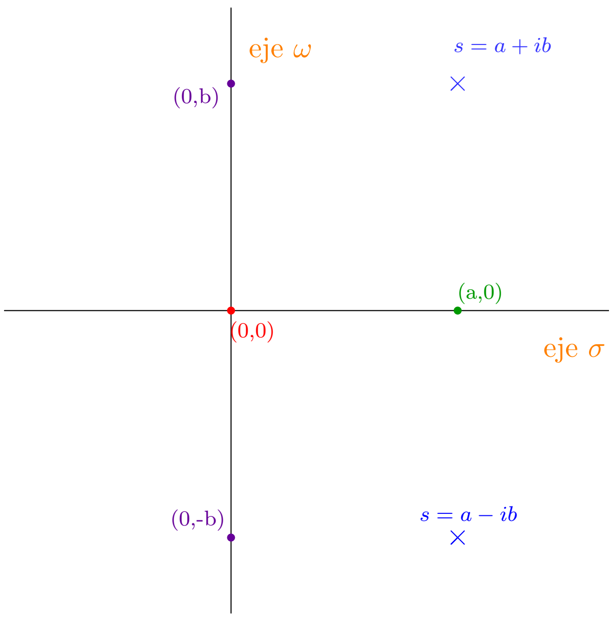

Figura 5.3.16: Diagrama de Polos

De un diagrama tan simple es posible inferir ciertas propiedades que siguen siendo válidas para diagramas más complejos.

- Los polos se encuentran localizados en forma simétrica con respecto al eje σ. Esto es cierto siempre que $f(t)$ sea una función real como ocurre en casi todas las aplicaciones

- Para los polos $s = a \pm ib$ se tiene que $\text{Re}s = a$ y $\text{Im}s = \pm b$. Ahora bien, para las funciones 5.3.106 es claro que el comportamiento cuando $t \longrightarrow \infty$ tiene que ver únicamente con el término exponencial por lo que la parte real de los polos determinan el decaimiento o no de la señal. Por otro lado, la parte imaginaria de los polos está relacionada con la frecuencia angular de oscilación para tiempos grandes. Es decir, el diagrama de polos sirve para estudiar el comportamiento para tiempos grandes de una señal, no tanto así su comportamiento para escalas de tiempo pequeño.

- Dado que la parte real de un polo determina el decaimiento o no de la señal, el polo más a la derecha en el plano, es decir, el polo con mayor parte real, es el que domina el comportamiento en escalas de tiempo grandes. De hecho, si todos los polos tienen parte real negativa entonces la señal decaerá exponencialmente conforme $t \longrightarrow \infty$

Con la tranformada de Laplace también es poder hallar una generalización del factorial, es decir, intentar definir algo como $\sqrt{2}!$. Primero que todo, de la tabla de transformadas se tiene que

$$\mathscr{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{5.3.110}$$

Por lo tanto, si se define

$$F_n\left(s\right) \equiv \mathscr{L}(t^{n-1}) = \int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.3.111}$$

entonces por 5.3.110 (recordando que $0! = 1$)

$$F_n(s) = \frac{(n-1)!}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.3.112}$$

evaluando para $s = 1$

$$F_n(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt = (n-1)! \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.3.113}$$

De hecho, como el lado derecho de 5.3.111 se puede calcular incluso cuando n no es entero 5.3.113 sugiere definir la función

$$\Gamma(x) \equiv F_x(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad x > 0 \tag{5.3.114}$$

La función 5.3.114 se conoce como la función Gamma y representa una generalización del factorial ya que por 5.3.113

$$\Gamma(n) = F_n(1) = (n-1)! \tag{5.3.115}$$

dicho de otra forma,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{5.3.116}$$

Tal como está definida la función gamma solo tiene sentido para $x > 0$. Sin embargo, es posible extender la definición con la ayuda del siguiente truco. Primero que todo se observa usando integración por partes que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = -e^{-t}t^x\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty xe^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x) \tag{5.3.117}$$

es decir, la función Gamma cuenta con la importante propiedad de que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0 \tag{5.3.118}$$

Para definir la función de Gamma para $x < 0$ se utiliza 5.3.118. Por ejemplo, para hallar $\Gamma(-\frac{1}{2})$ se usa

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{5.3.119}$$

por lo que el valor de $\Gamma(-\frac{1}{2})$ se sabrá en el momento que se sepa el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, el cual sí se puede calcular con 5.3.114. De hecho, con tal estrategia, la función Gamma está definida sobre toda la recta excepto en $x = 0, -1, -2, -3, \cdots$. (la siguiente imagen fue tomada de http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Gamma_plot.svg)

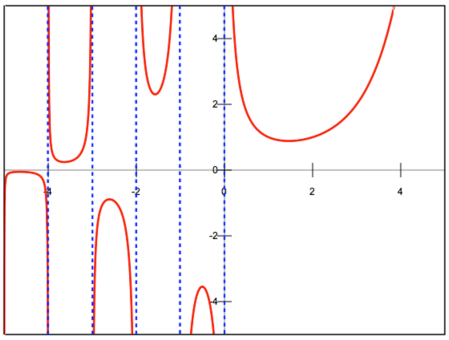

Figura 5.3.17: Función Gamma $\Gamma(x)$

Se define la función Gamma

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad x > 0 \tag{5.3.120}$$

Cumple las siguientes propiedades:

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- Se puede definir la función Gamma sobre toda la recta excepto en $x = 0, -1, -2, -3, \cdots$. usando $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Algunos valores importantes de la función Gamma son

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{5.3.121}$$

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L} f(t)$
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
$t^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} s^{-(n+\frac{1}{2})} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad n > -1$
$t^{-\frac{1}{2}} e^{at}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-a}}$
$t^{n-\frac{1}{2}} e^{at}$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} (s-a)^{-(n+\frac{1}{2})} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad n > -1$

5.4. Solución de ODEs Lineales con Laplace

La Transformada de Laplace es un método muy poderoso para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (se llaman a tales sistemas LTI por sus siglas en inglés *linear time invariant systems*). Antes de dar la teoría general para tales sistemas, se resolverá un ejemplo para dar una idea de cómo funciona el método.

Ejemplo 115. Resuelva la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 1$ **con** $x(0) = 2$ **y** $\dot{x}(0) = -2$

Esta ecuación podría resolverse primero encontrando la solución general y luego una solución particular. Sin embargo, dado que la ecuación diferencial es un PVI pues ya indica las condiciones iniciales la idea es usar la Transformada de Laplace que incorpora naturalmente las condiciones iniciales en 5.3.30. Como la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 1 \tag{5.4.1}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados y usando la linealidad de ella se obtiene

$$\mathscr{L}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mathscr{L}\frac{dx}{dt} + \mathscr{L}x = \mathscr{L}1 \tag{5.4.2}$$

y por 5.3.30 se tiene

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2\left(sX(s) - x(0)\right) + X(s) = \frac{1}{s} \tag{5.4.3}$$

utilizando las condiciones iniciales

$$s^2X(s) - 2s + 2 + 2(sX(s) - 2) + X(s) = \frac{1}{s} \tag{5.4.4}$$

o bien

$$s^2X(s) + 2sX(s) + X(s) - 2s - 2 = \frac{1}{s} \tag{5.4.5}$$

es decir, ¡la Transformada de Laplace ha transformado el problema de resolver una ecuación diferencial en el problema de resolver una ecuación algebraica! De hecho, factorizando $X(s)$ en 5.4.5 se tiene

$$\left(s^2 + 2s + 1\right)X(s) = \frac{1}{s} + 2(s+1) \tag{5.4.6}$$

o bien

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} \tag{5.4.7}$$

Para obtener la solución del problema original, se toma ahora la transformada inversa de Laplace a ambos lados y se utiliza la linealidad de la misma.

$$\mathscr{L}^{-1}X(s) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) + 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \tag{5.4.8}$$

o bien

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) + 2e^{-t} \tag{5.4.9}$$

Para hallar $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right)$ se puede utilizar fracciones parciales o el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_0^t f(\tau)d\tau & \xrightarrow{\mathscr{L}} & \frac{F(s)}{s} \end{array} \tag{5.4.10}$$

y el hecho (que se obtiene revisando cualquier tabla) de que $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = te^{-t}$. En este caso el diagrama conmutativo se ve como

$$\begin{tikzcd} te^{-t} \arrow[d] & \frac{1}{(s+1)^2} \arrow[l, "\mathscr{L}^{-1}"'] \\ \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t} - te^{-t} & \frac{1}{s(s+1)^2} \arrow[l, dashed, "\mathscr{L}^{-1}"'] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.4.11}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \tag{5.4.12}$$

y la respuesta final es

$$x(t) = 1 + e^{-t} - te^{-t} \tag{5.4.13}$$

La estrategia de la solución del ejemplo anterior puede resumirse de la siguiente forma:

1. Se tiene un problema de valor inicial que quiere resolverse en el dominio temporal pero a primera vista es muy complicado.
2. Se toma la transformada de Laplace al PVI anterior para pasar al dominio de frecuencia.
3. Con respecto al dominio de frecuencia, el problema se ha convertido en un problema algebraico, es decir, en vez de resolver una ecuación diferencial hay que resolver una ecuación algebraica. Más aún, la Transformada toma en cuenta automáticamente las condiciones iniciales
4. Una vez resuelto el problema en el dominio de frecuencia, como interesa la solución en el dominio temporal se toma la transformada inversa de Laplace para encontrar la solución buscada.

Ejemplo 116. Resuelva el PVI $y' + y = f(t)$ **con** $y(0) = 5$ **y** $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ 3\cos t & t \geq \pi \end{cases}$

Primero que todo hay que escribir $f(t)$ con la ayuda de la función de Heaviside. Básicamente, $f(t)$ es una señal que se enciende en $t = \pi$ y nunca se vuelve a apagar por lo que la ecuación es

$$y' + y = 3H(t - \pi)\cos t \tag{5.4.14}$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados

$$\mathscr{L}y' + \mathscr{L}y = 3\mathscr{L}\left(H(t - \pi)\cos t\right) \tag{5.4.15}$$

en un ejemplo anterior se halló que $\mathscr{L}\left(H(t-\pi)\cos t\right) = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$ por lo tanto la ecuación en el domino de frecuencia es

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = -\frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s} \tag{5.4.16}$$

o bien

$$(s+1)Y(s) = 5 - 3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s} \tag{5.4.17}$$

por lo tanto

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - 3\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s} \tag{5.4.18}$$

tomando la transformada inversa

$$y(t) = 5\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 3\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s}\right) \tag{5.4.19}$$

Para hallar $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s}\right)$ se utiliza primero fracciones parciales

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right) \tag{5.4.20}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}e^{-\pi s}\right) = \frac{1}{2}\left(-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s+1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right)\right) \tag{5.4.21}$$

usando la fórmula $\mathscr{L}\left(f(t-a)H(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$ se tiene en 5.4.21 que

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s+1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right)\right) = \\ \frac{1}{2}\left(-e^{-(t-\pi)}H(t-\pi) + \cos\left(t-\pi\right)H(t-\pi) + \sin\left(t-\pi\right)H(t-\pi)\right)\end{gathered} \tag{5.4.22}$$

por lo tanto

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}H(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)} + \cos t + \sin t\right) \tag{5.4.23}$$

La transforma de Laplace también es útil para resolver ecuaciones integrodiferenciales, es decir, ecuaciones en las que aparecen tanto las derivadas de una incógnita como su integral. Por ejemplo, en un circuito en serie RLC

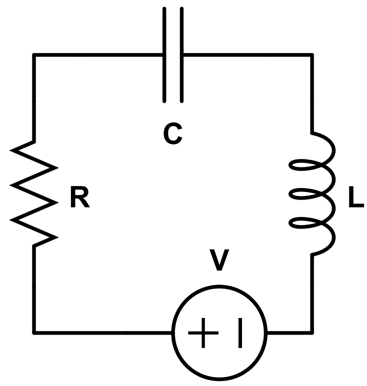

Figura 5.4.1: Cirucito RLC

se había hallado a través de la Ley de Kirchhoff la ecuación

$$L\frac{dq^2}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=v(t) \tag{5.4.24}$$

sin embargo, si se quiere estudiar la ecuación diractamente con la corriente en vez de la carga se llega a la ecuación integrodiferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\left(\tau\right)d\tau=v(t) \tag{5.4.25}$$

Ejemplo 117. Resuelva la ecuación 5.4.25 para $L=0{,}1$, $R=2$, $C=0{,}1$, $i(0)=0$ y $v(t)=120t-120H(t-1)t$

Primero se va a resolver simbólicamente y luego se reemplazarán los valores. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de 5.4.25 se obtiene

$$L\mathscr{L}\left(\frac{di}{dt}\right)+R\mathscr{L}i+\frac{1}{C}\mathscr{L}\left(\int_0^t i(\tau)d\tau\right)=\mathscr{L}v(t) \tag{5.4.26}$$

o bien

$$L\left(sI(s)-i(0)\right)+RI(s)+\frac{I(s)}{Cs}=V(s) \tag{5.4.27}$$

factorizando $I(s)$ se obtiene

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)=V(s)+Li(0) \tag{5.4.28}$$

o bien

$$I(s)=\frac{V(s)+Li(0)}{Ls+R+\frac{1}{Cs}} \tag{5.4.29}$$

sustituyendo los valores en 5.4.29 se tiene

$$I(s)=\frac{V(s)}{\frac{1}{10}s+2+\frac{10}{s}}=\frac{10sV(s)}{s^2+20s+100}=\frac{10sV(s)}{(s+10)^2} \tag{5.4.30}$$

solo queda determinar $V(s)$.

$$V(s) = 120\mathscr{L}t - 120\mathscr{L}\left(H(t-1)t\right) \tag{5.4.31}$$

usando la propiedad $\mathscr{L}\left(f(t)H(t-a)\right) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$ se obtiene

$$V(s) = \frac{120}{s^2} - 120e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \tag{5.4.32}$$

por lo tanto

$$I(s) = 1200\left(\frac{1}{s(s+10)^2} - \frac{e^{-s}}{s(s+10)^2} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right) \tag{5.4.33}$$

usando fracciones parciales

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{100s} - \frac{1}{100(s+10)} - \frac{1}{10(s+10)^2} - \frac{e^{-s}}{100s} + \frac{e^{-s}}{100(s+10)} + \frac{e^{-s}}{10(s+10)^2} - \frac{e^{-s}}{(s+10)^2}\right] \tag{5.4.34}$$

usando la forma inversa de $\mathscr{L}\left(f(t-a)H(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$ se obtiene

$$\begin{aligned} i(t) = 12\left[1 - H(t-1)\right] - 12\left[e^{-10t} - e^{-10(t-1)}H(t-1)\right] \\ -120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}H(t-1) \end{aligned} \tag{5.4.35}$$

Ahora que se ha desarrollado lo suficiente la Transformada de Laplace, puede resolverse el problema original que inició toda la discusión

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{5.4.36}$$

De hecho, para mayor generalidad, se comentará el problema

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \tag{5.4.37}$$

donde se supondrán condiciones iniciales de reposo, es decir, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Nuevamente es importante recordar que tales ecuaciones se pueden ver como un operador diferencial actuando sobre el output para producir el input

$$\left(\underbrace{a\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c}_{\text{operador}}\right)\underbrace{x(t)}_{\text{output}} = \underbrace{f(t)}_{\text{input}} \tag{5.4.38}$$

tomando la transformada de Laplace a ambos lados y utilizando las condiciones iniciales de reposo se tiene

$$\left(as^2 + bs + c\right)X(s) = F(s) \tag{5.4.39}$$

por lo tanto la función en el dominio de frecuencia

$$W(s) \equiv \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c} \tag{5.4.40}$$

depende únicamente de los coeficientes de la ecuación diferencial y caracteriza al sistema intrínsecamente. Tal función se llama la función de transferencia del sistema.

Por ejemplo, la función de transferencia de 5.4.36 es

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \tag{5.4.41}$$

Ahora bien, la función de transferencia se está describiendo con respecto al dominio de frecuencia, pero ¿cómo se ve con respecto al dominio temporal? Utilizando 5.4.40 se tiene

$$as^2W(s) + bsW(s) + cW(s) = 1 \tag{5.4.42}$$

y tomando la transformada inversa de Laplace

$$a\ddot{w}(t) + b\dot{w}(t) + cw(t) = \delta(t) \tag{5.4.43}$$

es decir, ¡la función de transferencia en el dominio temporal no es más que la función respuesta a impulso, es decir la solución a la ecuación 5.4.38 cuando el input es la delta de Dirac!

Ahora bien, regresando a la solución del problema de 5.4.40 se puede escribir

$$X(s) = F(s)W(s) \tag{5.4.44}$$

y ahora tomando la transformada inversa de Laplace y utilizando el teorema de convolución

$$x(t) = f(t) * w(t) = \int_0^t f(t)w(t-\tau)d\tau \tag{5.4.45}$$

es decir, para hallar la solución del problema 5.4.38 con condiciones iniciales nulas se toma la convolución del input con la función respuesta a impulso (llamada también función de Green). El resultado anterior se conoce como el Teorema de Convolución. [6]

De esta forma, la transformada de Laplace justifica la observación inicial del capítulo de que es suficiente hallar la función respuesta a impulso y luego aplicar 5.4.45 para obtener cualquier el output al input que se quiera.

En el caso de que las condiciones iniciales no sean nulas hay que resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{5.4.46}$$

[6] Es importante notar que para hallar la función de Green o función respuesta a impulso habría que hacer algo similar a como se hizo al inicio del capítulo, pues la delta de Dirac sí introduce discontinuidades en las condiciones iniciales, es decir, las condiciones iniciales apropiadas para hallar la función de Green serían $x(0^-) = \dot{x}(0^-) = 0$ en vez de $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Tales condiciones se llaman a veces pre-initial conditions.

Por el principio de superposición es fácil verificar que esto es equivalente a resolver por aparte los PVI

$$(1)\begin{cases} a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=f(t)\\ x(0)=0\\ \dot{x}(0)=0\end{cases} \qquad (2)\begin{cases} a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0\\ x(0)=x_0\\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0\end{cases} \tag{5.4.47}$$

La respuesta del primer sistema (1) es la que se acaba de hallar y es la que comúnmente se conoce como la respuesta de estado cero del sistema (pues las condiciones iniciales son nulas o cero, en inglés *zero state response*). Por lo tanto si x_1 es la solución del sistema (1) por 5.4.45

$$x_1(t)=\int_0^t f(t)w(t-\tau)d\tau \tag{5.4.48}$$

o bien en el espacio de frecuencia

$$X_1(s)=F(s)W(s) \tag{5.4.49}$$

Para resolver el sistema (2) se toma la transformada de Laplace y hay que resolver

$$a(s^2X_2(s)-sx(0)-\dot{x}(0))+b(sX_2(s)-x(0))+cX_2(s)=0 \tag{5.4.50}$$

o bien

$$(as^2+bs+c)X_2(s)=asx_0+a\dot{x}_0+bx_0 \tag{5.4.51}$$

por lo tanto

$$X_2(s)=(asx_0+a\dot{x}_0+bx_0)\,W(s) \tag{5.4.52}$$

la solución

$$x_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left((asx_0+a\dot{x}_0+bx_0)\,W(s)\right) \tag{5.4.53}$$

se conoce como la respuesta de entrada cero (*zero input response* en inglés) y por el principio de superposición la solución superpuesta

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t) \tag{5.4.54}$$

resuelve el PVI original.

Ejemplo 118. Considere la siguiente función definida a trozos: $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1\\ 2-t & 1<t<2\\ 0 & 2<t\end{cases}$

Calcule $\mathscr{L}f(t)$ **y** $\mathscr{L}\left(\int_0^t\int_0^u v^2 f(u-v)dvdu\right)$

Primero se escribe $f(t)$ en términos de la función de Heaviside como

$$f(t)=t\,(H(t)-H(t-1))+(2-t)\,(H(t-1)-H(t-2)) \tag{5.4.55}$$

se escribe $f(t)$ como

$$f(t) = tH(t) - tH(t-1) - (t-2)H(t-1) + (t-2)H(t-2) \tag{5.4.56}$$

Ahora se utiliza la propiedad de traslación 5.3.43 $\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$

$$\mathscr{L}tH(t) = \frac{1}{s^2} \tag{5.4.57}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}tH(t-1) &= \mathscr{L}(t-1)H(t-1) + \mathscr{L}H(t-1) \\ &= e^{-s}\tfrac{1}{s^2} + e^{-s}\tfrac{1}{s} \end{aligned} \tag{5.4.58}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(t-2)H(t-1) &= \mathscr{L}(t-1)H(t-1) - \mathscr{L}H(t-1) \\ &= e^{-s}\tfrac{1}{s^2} - e^{-s}\tfrac{1}{s} \end{aligned} \tag{5.4.59}$$

$$\mathscr{L}(t-2)H(t-2) = e^{-2s}\frac{1}{s^2} \tag{5.4.60}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}f(t) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2} = \left(\frac{e^{-s}-1}{s}\right)^2 \tag{5.4.61}$$

Para hallar $\mathscr{L}\left(\int_0^t \int_0^u v^2 f(u-v)dvdu\right)$ se va a utilizar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \int_0^t f(\tau)d\tau \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{F(s)}{s} \end{tikzcd} \tag{5.4.62}$$

en este caso hay que adaptar un poco la notación. Se define

$$g(u) \equiv \int_0^u v^2 f(u-v)dv \tag{5.4.63}$$

por lo tanto

$$\int_0^t \int_0^u v^2 f(u-v)dvdu = \int_0^t g(u)du \tag{5.4.64}$$

luego el diagrama en este caso es

$$\begin{tikzcd} g(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & G(s) \arrow[d] \\ \int_0^t \int_0^u v^2 f(u-v)dvdu = \int_0^t g(u)du \arrow[r, dashed, "\mathscr{L}"] & \frac{G(s)}{s} \end{tikzcd} \tag{5.4.65}$$

por lo tanto el problema se reduce en hallar $G(s)$, es decir, hallar

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t v^2 f(t-v)dv\right) \tag{5.4.66}$$

pero esto no es más que la convolución ya que

$$\int_0^t v^2 f(t-v)dv = h(t) * f(t) \tag{5.4.67}$$

donde

$$h(t) = t^2 \tag{5.4.68}$$

como la transformada envía convolución en producto

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t v^2 f(t-v)dv\right) = H(s)F(s) = \frac{2}{s^3}\left(\frac{e^{-s}-1}{s}\right)^2 \tag{5.4.69}$$

Luego

$$G(s) = \frac{2}{s^3}\left(\frac{e^{-s}-1}{s}\right)^2 \tag{5.4.70}$$

y por el diagrama

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t \int_0^u v^2 f(u-v)dvdu\right) = \frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s^4}\left(\frac{e^{-s}-1}{s}\right)^2 \tag{5.4.71}$$

Ejemplo 119. Utilice la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 10x = 120 - 120H(t-2) \\ -2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \\ x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \end{cases}$

Se aplica la transformada de Laplace a cada ecuación para obtener el sistema algebraico (utilizando de una vez las condiciones iniciales)

$$\begin{cases} sX(s) + sY(s) + 10X(s) = \frac{120}{s} - 120\frac{e^{-2s}}{s} \\ -2sX(s) + sY(s) + Y(s) = 0 \end{cases} \tag{5.4.72}$$

agrupando $X(s)$ y $Y(s)$

$$\begin{cases} \left(s^2 + 10s\right)X + s^2Y = 120 - 120e^{-2s} \\ -2sX + (s+1)Y = 0 \end{cases} \tag{5.4.73}$$

se puede escribir en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} s^2 + 10s & s^2 \\ -2s & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 - 120e^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4.74}$$

el determinante de la matriz es

$$s\,(s+10)\,(s+1)+2s^3=3s^3+11s^2+10s \tag{5.4.75}$$

y por la regla de Cramer

$$\begin{aligned} X &= \frac{\begin{vmatrix} 120-120e^{-2s} & s^2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}}{s(3s^2+11s+10)} = \frac{120\left(1-e^{-2s}\right)(s+1)}{s(3s^2+11s+10)} = \frac{120(s+1)}{s(3s^2+11s+10)} - e^{-2s}\frac{120(s+1)}{s(3s^2+11s+10)} \\ Y &= \frac{\begin{vmatrix} s^2+10s & 120-120e^{-2s} \\ -2s & 0 \end{vmatrix}}{s(3s^2+11s+10)} = \frac{240s(1-e^{-2s})}{s(3s^2+11s+10)} = \frac{240}{3s^2+11s+10} - e^{-2s}\frac{240}{3s^2+11s+10} \end{aligned} \tag{5.4.76}$$

dado que

$$3s^2+11s+10=(3s+5)\,(s+2) \tag{5.4.77}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{120}{(3s+5)(s+2)} + \tfrac{120}{s(3s+5)(s+2)} - e^{-2s}\tfrac{120}{(3s+5)(s+2)} - e^{-2s}\tfrac{120}{s(3s+5)(s+2)} \\ Y &= \tfrac{240}{(3s+5)(s+2)} - e^{-2s}\tfrac{240}{(3s+5)(s+2)} \end{aligned} \tag{5.4.78}$$

por lo tanto, hay que desarrollar por fracciones parciales $\frac{1}{s(3s+5)(s+2)}$ y $\frac{1}{(3s+5)(s+2)}$. Para la primera es fácil verificar que

$$\frac{1}{s(3s+5)(s+2)} = \frac{1}{10s} - \frac{9}{5(3s+5)} + \frac{1}{2(s+2)} \tag{5.4.79}$$

para la segunda

$$\frac{1}{(3s+5)(s+2)} = \frac{3}{(3s+5)} - \frac{1}{s+2} \tag{5.4.80}$$

como $\mathscr{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right)=e^{-as}F(s)$ y

$$\begin{aligned} X &= 120\left(\tfrac{1}{\left(s+\frac{5}{3}\right)} - \tfrac{1}{s+2}\right) + 120\left(\tfrac{1}{10s} - \tfrac{3}{5\left(s+\frac{5}{3}\right)} + \tfrac{1}{2(s+2)}\right) \\ -120&\left(e^{-2s}\tfrac{1}{\left(s+\frac{5}{3}\right)} - e^{-2s}\tfrac{1}{s+2}\right) - 120\left(e^{-2s}\tfrac{1}{10s} - e^{-2s}\tfrac{3}{5\left(s+\frac{5}{3}\right)} + e^{-2s}\tfrac{1}{2(s+2)}\right) \end{aligned} \tag{5.4.81}$$

por lo tanto tomando la transformada inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= 120e^{-\frac{5}{3}t} - 120e^{-2t} + 12 - 72e^{-\frac{5}{3}t} + 60e^{-2t} \\ &-120H(t-2)e^{-\frac{5}{3}(t-2)} - 120H(t-2)e^{-2(t-2)} - 12H(t-2) - 72H(t-2)e^{-\frac{5}{3}(t-2)} + 60H(t-2)e^{-2(t-2)} \end{aligned} \tag{5.4.82}$$

para $Y(s)$

$$Y = 240\left(\tfrac{1}{\left(s+\frac{5}{3}\right)} - \tfrac{1}{s+2}\right) - 240\left(e^{-2s}\tfrac{1}{\left(s+\frac{5}{3}\right)} - e^{-2s}\tfrac{1}{s+2}\right) \tag{5.4.83}$$

por lo que

$$y(t) = 240e^{-\frac{5}{3}t} - 240e^{-2t} - 240H(t-2)e^{-\frac{5}{3}(t-2)} - 240H(t-2)e^{-2(t-2)} \tag{5.4.84}$$

Ejemplo 120. Determine la función $f(t)$ si $\int_0^t u^2\delta(u-\pi)f(t-u)du = e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi)+\int_0^t \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz$ y la transformada de Laplace de $e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi)$, $\int_0^t \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz$ y $\int_0^t u^2\delta(u-\pi)f(t-u)du$

Primero se van a hallar las transformadas de los términos. Si se define

$$g(u) \equiv u^2\delta(u-\pi) \tag{5.4.85}$$

entonces

$$\int_0^t u^2\delta(u-\pi)f(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g*f)(t) \tag{5.4.86}$$

por lo tanto,

$$\mathscr{L}\int_0^t u^2\delta(u-\pi)f(t-u)du = G(s)F(s) \tag{5.4.87}$$

para hallar $G(s)$ se puede utilizar la definición

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^2\delta(t-\pi)\,dt = e^{-\pi s}\pi^2 \tag{5.4.88}$$

Ahora hay que hallar $\mathscr{L}e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi)$ usando la propiedad $\mathscr{L}f(t-a)H(t-a) = e^{-as}F(s)$. Para aplicarla se observa que

$$e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi) = e^{-2\pi}e^{-2(t-\pi)}\cos(2(t-\pi))\,H(t-\pi) \tag{5.4.89}$$

luego

$$\begin{aligned}\mathscr{L}e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi) &= e^{-2\pi}\mathscr{L}e^{-2(t-\pi)}\cos(2(t-\pi))\,H(t-\pi)\\ &= e^{-2\pi}e^{-\pi s}\mathscr{L}e^{-2t}\cos 2t = e^{-2\pi}e^{-\pi s}\tfrac{s+2}{(s+2)^2+4}\end{aligned} \tag{5.4.90}$$

Solo falta determinar $\mathscr{L}\int_0^t \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz$. Si se define

$$x(z) \equiv \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}} \tag{5.4.91}$$

entonces

$$\mathscr{L}\int_0^t \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz = \mathscr{L}\int_0^t x(z)dz = \frac{X(s)}{s} \tag{5.4.92}$$

Por lo tanto, hay que hallar

$$\mathscr{L}\left(\frac{H(t-\pi)}{\sqrt{t-\pi}}\right) = e^{-\pi s}\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{5.4.93}$$

si se tiene buena memoria se observa que

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \tag{5.4.94}$$

que sale gracias a la función Gamma. De lo contrario, se utiliza la definición.

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{dt}{\sqrt{t}} \tag{5.4.95}$$

bajo el cambio de variable $u = \sqrt{t}$ se tiene $u^2 = t$ o bien $2udu = dt$ por lo que se necesita calcular

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} e^{-su^2}\frac{2udu}{u} = 2\int_0^{\infty} e^{-su^2}du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \tag{5.4.96}$$

Para hallar la función $f(t)$ se puede definir la función

$$y(t) \equiv e^{-2t}\cos(2t)\,H(t-\pi) + \int_0^t \frac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz \tag{5.4.97}$$

por lo tanto la ecuación original se puede escribir como

$$\int_0^t u^2\delta(u-\pi)f(t-u)du = y(t) \tag{5.4.98}$$

tomando la transformada a ambos lados y por los resultados anteriores

$$e^{-\pi s}\pi^2 F(s) = Y(s) \tag{5.4.99}$$

o bien

$$F(s) = \frac{1}{\pi^2}e^{\pi s}Y(s) \tag{5.4.100}$$

volviendo a usar $\mathscr{L}f(t-a)H(t-a) = e^{-as}F(s)$ se tiene que tomando la transformada inversa

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{\pi^2}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{\pi s}Y(s)\right) = \tfrac{1}{\pi^2}H(t+\pi)y(t+\pi) \\ &= \tfrac{1}{\pi^2}H(t+\pi)\left(e^{-2(t+\pi)}\cos(2(t+\pi))\,H(t) + \int_0^{t+\pi}\tfrac{H(z-\pi)}{\sqrt{z-\pi}}dz\right) \end{aligned} \tag{5.4.101}$$

como $t \geq 0$ se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(e^{-2(t+\pi)}\cos(2(t+\pi)) + \int_{\pi}^{t+\pi}\frac{1}{\sqrt{z-\pi}}dz\right) \tag{5.4.102}$$

observe que para obtener $f(t)$ no es necesario haber calculado las transformadas de Laplace de los términos a la derecha sin embargo era un buen ejercicio hacerlo.

Ejemplo 121. Halle el sistema de ecuaciones diferenciales para el siguiente circuito

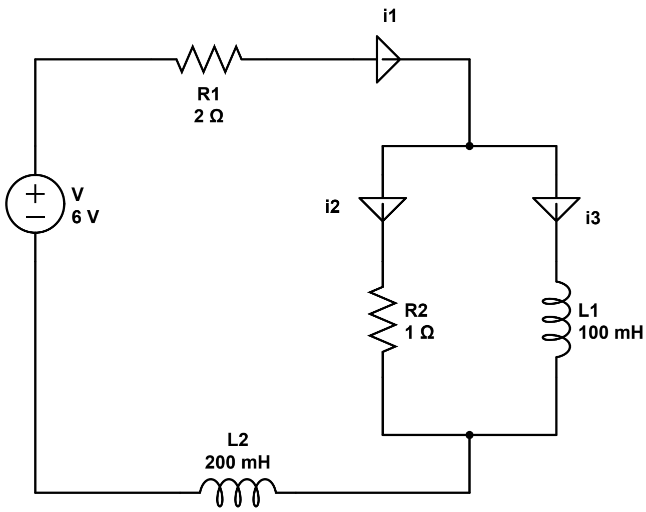

Figura 5.4.2: circuito

Como se conserva la corriente eléctrica se tiene

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{5.4.103}$$

Aplicando Kirchhoff a la primera malla, es decir, la que incluye las corrientes i_1, i_2 se tiene (aquí es importante observar que las unidades deben estar en V, Ω y H por lo que se usa 0,2H en vez de 200mH)

$$6 - 2i_1 - i_2 - 0{,}2\frac{di_1}{dt} = 0 \tag{5.4.104}$$

Aplicando Kirchhoff a la malla pequeña se tiene

$$-0{,}1\frac{di_3}{dt} + i_2 = 0 \tag{5.4.105}$$

por lo tanto debe resolverse el sistema

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 6 - 2i_1 - i_2 - 0{,}2\frac{di_1}{dt} = 0 \\ -0{,}1\frac{di_3}{dt} + i_2 = 0 \end{cases} \tag{5.4.106}$$

Ejemplo 122. Plantea un sistema de ecuaciones diferenciales para el siguiente circuito donde aparezca únicamente i_2 e i_3 y sus derivadas

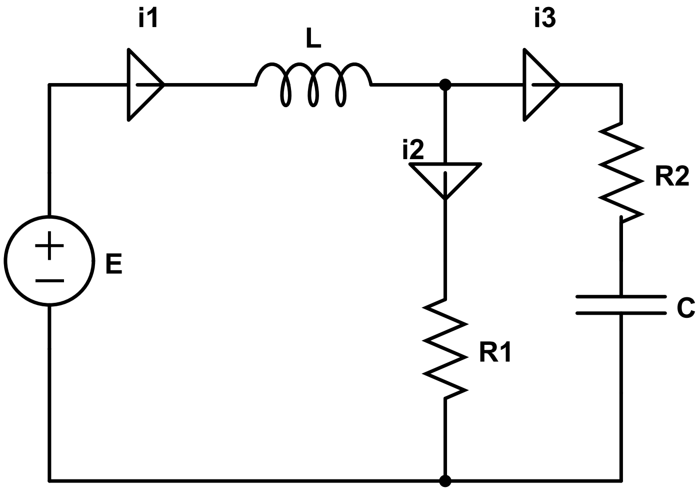

Figura 5.4.3: circuito

Como la corriente se conserva se tiene que

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{5.4.107}$$

a su vez, aplicando las reglas de Kirchhoff de a la primera malla se tiene que

$$E - L\frac{di_1}{dt} - i_2 R_1 = 0 \tag{5.4.108}$$

aplicando las reglas de Kirchhoff a la segunda malla se tiene que

$$-i_3 R_2 - \frac{1}{C}\int_0^t i_3(\tau)d\tau + i_2 R_1 = 0 \tag{5.4.109}$$

sustituyendo la primera ecuación en la segunda y derivando la tercera se llega al sistema

$$\begin{cases} L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E \\ R_1\frac{di_2}{dt} - R_2\frac{di_3}{dt} - \frac{i_3}{C} = 0 \end{cases} \tag{5.4.110}$$

6 Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

6.1. Funciones Ortogonales y Series de Fourier

En Álgebra Lineal se estudió el producto punto entre vectores en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, para $n = 3$, si $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $u = (x_2, y_2, z_2)$ entonces

$$v \cdot u = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{6.1.1}$$

El producto punto era importante por varias razones: primero se puede escribir la norma de un vector a través del producto punto

$$\|v\|^2 = v \cdot v \tag{6.1.2}$$

Segundo, el ángulo entre dos vectores se podía calcular con la ayuda del producto punto como

$$\cos\theta = \frac{v \cdot u}{\|v\| \, \|u\|} \tag{6.1.3}$$

Finalmente, y esta va a ser la propiedad más importante del producto punto para lo que sigue, el producto punto permitía hallar un vector como combinación lineal de una base fácilmente siempre y cuando la base fuera ortogonal. Por ejemplo, si v_1, v_2, v_3 es una base de vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces v puede escribirse como combinación lineal de los vectores base

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \tag{6.1.4}$$

Si los vectores son ortogonales entre sí, es decir, si

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \quad v_1 \cdot v_3 = 0 \quad v_2 \cdot v_3 = 0 \tag{6.1.5}$$

entonces para hallar c_1, c_2, c_3 simplemente se toma el producto punto en 6.1.4. Por ejemplo, para hallar c_1 se toma el producto punto con v_1 en 6.1.4

$$v \cdot v_1 = c_1 v_1 \cdot v_1 + c_2 v_2 \cdot v_1 + c_3 v_3 \cdot v_1 = c_1 \|v_1\|^2 \tag{6.1.6}$$

es decir

$$c_1 = \frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} \tag{6.1.7}$$

de forma análoga se hallaría lis coeficientes c_2, c_3

$$c_1 = \frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} \quad c_2 = \frac{v \cdot v_2}{\|v_2\|^2} \quad c_3 = \frac{v \cdot v_3}{\|v_3\|^2} \tag{6.1.8}$$

Lo más sorprendente del producto punto es que hay una generalización natural para las funciones de modo que lo anterior siga siendo válido. Para ver cual debe ser esa generalización suponga primero que los vectores son vectores infinitos, es decir, que

$$\begin{aligned} v &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_{100}, \cdots) \\ u &= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \cdots, y_{100}, \cdots) \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

para tales vectores infinitos (de hecho son sucesiones) es natural definir el producto punto como

$$v \cdot u \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{100} y_{100} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{6.1.10}$$

Claramente, como en este caso el producto punto es una serie no necesariamente converge por lo que deben imponerse ciertas restricciones sobre los vectores para los cuales puede realizarse el producto punto anterior.[1]

Ahora bien, una función $f(t)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede considerarse en cierto sentido como un vector infinito. Por ejemplo, si el intervalo fuera $[0, 1]$ la función $f(t)$ sería el vector con entradas $f(0)$, $f(1)$,$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f\left(\frac{1}{10}\right)$, etc. La diferencia con el caso anterior es que como el intervalo es un continuo no se pueden indicar las entradas en forma ordenada ya que en un intervalo entre dos puntos cualquiera siempre aparece otro punto por lo que hay que buscar una versión continua de la serie 6.1.10. La integral puede verse como la versión continua de una serie por lo que tiene sentido definir el producto punto entre $f(t)$ y $g(t)$ como

$$f(t) \cdot g(t) \equiv \int_a^b f(t) g(t) dt \tag{6.1.11}$$

La definición anterior es la adecuada para generalizar el producto punto, sin embargo, es usual hacer unos cambios notacionales. Primero que todo, en vez de producto punto se utiliza el nombre de producto interior y como la notación $\cdot$ puede confundirse con el producto ordinario de funciones se modifca la notación a la notación bra-ket de Dirac. Básicamente, la notación bra-ket consiste en "adornar" las funciones para indicar que se va a realizar un producto interior entre ellas. De esta forma, se escribe una función $f(t)$ como $|f(t)\rangle$ donde los símbolos alrededor de la función no sirven más que para recordar que se tiene la intención de tomar un producto interior. Por lo tanto, si se quiere realizar el producto interior entre $|f(t)\rangle$ y $|g(t)\rangle$ se le da "vuelta" a una de los funciones, por ejemplo, se cambia $|f(t)\rangle$ por $\langle f(t)|$ y de esta forma 6.1.11 se ve como

$$\langle f(t) \mid g(t) \rangle \equiv \int_a^b f(t) g(t) dt \tag{6.1.12}$$

esta notación da una mejor explicación al nombre producto interior pues las funciones $f(t), g(t)$ quedan dentro (en el interior) de $\langle\rangle$. Bajo esta nueva notación, las propiedades usuales del producto punto se siguen cumpliendo.

[1] No se seguirá en más detalle este tema porque no se van a estudiar a fondo las sucesiones, solo se mencionan para motivar el producto punto entre funciones

Si $|f(t)\rangle$, $|g(t)\rangle$ son dos funciones definidas sobre $[a,b]$ el producto interior de $|f(t)\rangle$ con $|g(t)\rangle$ se define como

$$\langle f(t) \mid g(t)\rangle \equiv \int_a^b f(t)g(t)dt \tag{6.1.13}$$

Algunas propiedades del producto interior son:

➩ Conmutatividad:

$$\langle f(t) \mid g(t)\rangle = \langle g(t) \mid f(t)\rangle \tag{6.1.14}$$

➩ Linealidad: si $|h(t)\rangle$ es otra función y c una constante entonces si se representa $g(t)+ch(t)$ como $|g(t)+ch(t)\rangle$

$$\langle f(t) \mid g(t)+ch(t)\rangle = \langle f(t) \mid g(t)\rangle + c\,\langle f(t) \mid h(t)\rangle \tag{6.1.15}$$

➩ Norma de una función: La norma de una función $|f(t)\rangle$ se define como

$$\|f(t)\|^2 \equiv \langle f(t) \mid f(t)\rangle = \int_a^b f^2(t)dt \tag{6.1.16}$$

➩ Ángulo entre funciones: El ángulo entre dos funciones $|f(t)\rangle\,, |g(t)\rangle$ se define como

$$\cos\theta \equiv \frac{\langle f(t) \mid g(t)\rangle}{\|f(t)\|\,\|g(t)\|} \tag{6.1.17}$$

➩ Ortogonalidad de funciones: Las funciones $|f(t)\rangle\,, |g(t)\rangle$ son ortogonales si su producto interior es cero, es decir,

$$\langle f(t) \mid g(t)\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = 0 \tag{6.1.18}$$

En la teoría de funciones hay muchas familias de funciones ortogonales. Sin embargo, para la teoría de Fourier hay una familia particularmente importante, que es la familia de funciones sinusoidales, es decir, la familia de senos y cosenos cuya frecuencia es un múltiplo de una frecuencia fundamental. Antes de ver que tal familia es ortogonal, se va a recordar el concepto de función periódica.

Una función $f(t)$ es periódica de período $T>0$ si para todo t se tiene

$$f(t+T) = f(t) \tag{6.1.19}$$

Algunas funciones conocidas que son períodicas son senos, cosenos (que son de período 2π) y como caso límite las funciones constantes (que serían funciones con cualquier período). Otra propiedad de una función períodica es que si T es un período para la función entonces $2T, 3T, \cdots$ también funcionan como períodos según la definición por lo que el período no es único. Sin embargo, el menor T que cumpla 6.1.19 se llama generalmente el período fundamental. Una propiedad inmediata de la interpretación de la integral como el área bajo la curva o simplemente a partir de un cambio de variable es que la integral de una función sobre intervalos de longitud T siempre da lo mismo, es decir,

Si $f(t)$ es una función con período T entonces para cualquier a, b se tiene

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt \tag{6.1.20}$$

Esto significa que si $f(t)$ es una función definida sobre toda la recta real con período T entonces se puede estudiar la función alrededor de un intervalo simétrico con respecto al origen, por ejemplo, el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Más aún, por el momento es suficiente pensar que las funciones son de período 2π pues de lo contrario puede hacerse un reescalamiento para que sea de período 2π. Por ejemplo, si $f(t)$ es de período T se puede definir

$$g(t) \equiv f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) \tag{6.1.21}$$

y $g(t)$ es de período 2π porque

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}+T\right) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = g(t) \tag{6.1.22}$$

Es decir,

Si $f(t)$ es una función de período T entonces

$$g(t) \equiv f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) \tag{6.1.23}$$

es una función de período 2π.

Por lo tanto, se puede estudiar sin pérdida de generalidad las funciones de período 2π. Como se dijo antes, las funciones más importantes para las series de Fourier son las funciones sinusoidales, es decir, expresiones de la forma

$$\sin(\omega t) \qquad \cos(\omega t) \tag{6.1.24}$$

donde ω es la frecuencia angular y el período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6.1.25}$$

La idea de una serie de Fourier es que cualquier función periódica (que cumpla ciertas condiciones matemáticas) puede descomponerse como una serie infinita de senos y cosenos. Para dar una idea general antes de entrar en detalle, suponga que se tiene la función $f(t) = t$ definida sobre $[-\pi, \pi]$ y luego se extiende periódicamente tal como se indica en la siguiente figura. La idea de las series de Fourier es aproximar la función por sumas de senos y cosenos. Por ejemplo, pronto se verá que la serie de Fourier para la función anterior es

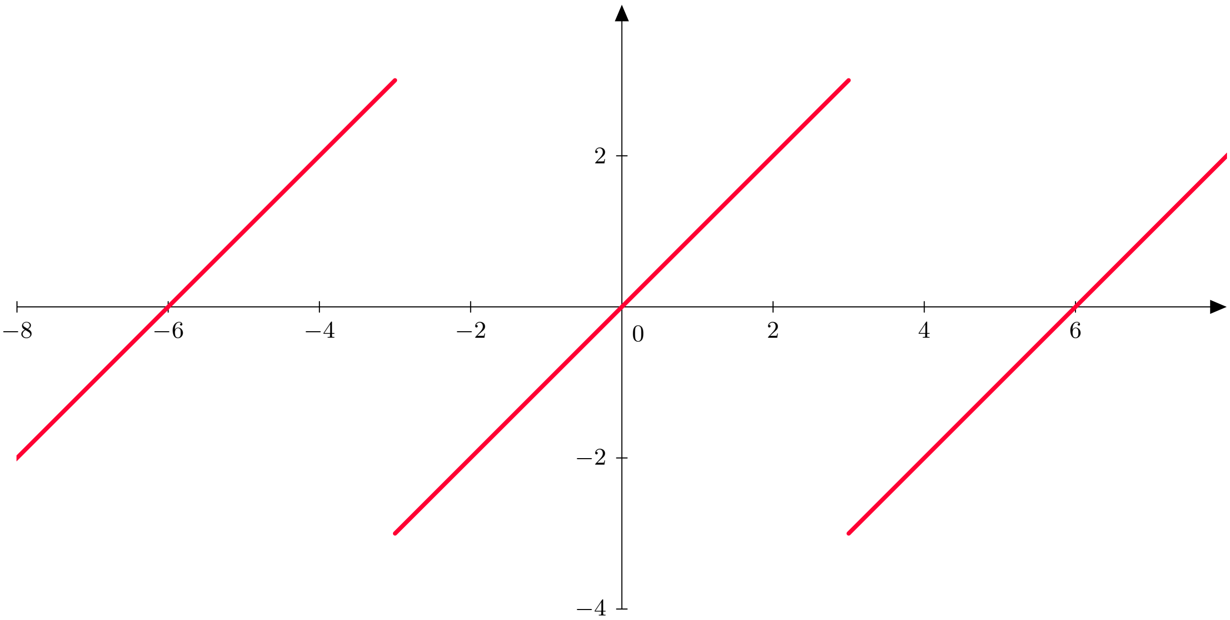

Figura 6.1.1: Función Diente de Sierra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \tag{6.1.26}$$

Las siguientes figuras ilustran la función $f(t)$ junto con las primeras sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \tag{6.1.27}$$

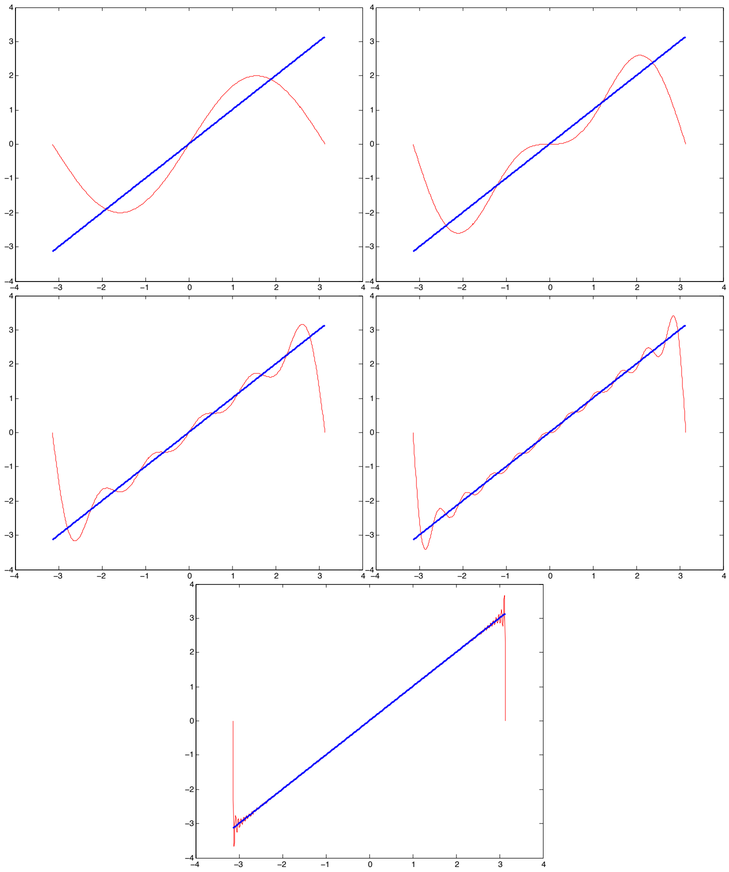

Figura 6.1.2: $f(t) = t$ y S_1 , S_2 , S_5 , S_{10} y S_{100}

Se puede observar como a medida de que se aumenta los términos en las sumas parciales la aproximación es cada vez mejor a la función original, sin embargo, en los extremos de la función, que corresponden a los puntos en que es discontinua, pareciera que la serie de Fourier no se aproxima bien a la función original. Tal fenómeno se conoce como el fenómeno de Gibbs y aunque no se estudiará es bueno saber que ocurre cerca de los puntos de discontinuidad de la función. Otra información útil de la señal se puede obtener a partir del espectro de la función. Básicamente, el espectro consiste en las frecuencias de los armónicos (que es otro nombre que se utilzan para los senos y cosenos) que componen la señal. Por ejemplo, como la serie de la función (señal) anterior es

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \tag{6.1.28}$$

el espectro consistiría en el conjunto de frecuencias de los armónicos, si se mide el dominio temporal en segundos entonces como la señal era de período 2π entonces su frecuencia sería $\frac{1}{2\pi}$Hz y los períodos de los armónicos en 6.1.28 son $\frac{2\pi}{1}$, $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, ..., $\frac{2\pi}{n}$,... por lo que tienen frecuencias respectivas de $\frac{1}{2\pi}$ Hz, $\frac{1}{\pi}$ Hz, $\frac{3}{2\pi}$ Hz, ..., $\frac{n}{2\pi}$Hz, ..., . En el gráfico de amplitud de la señal se grafica los valores absolutos de los coeficientes $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ contra la frecuencia angular (para eliminar los factores de 2π). Por ejemplo, el gráfico de amplitud de la señal anterior es

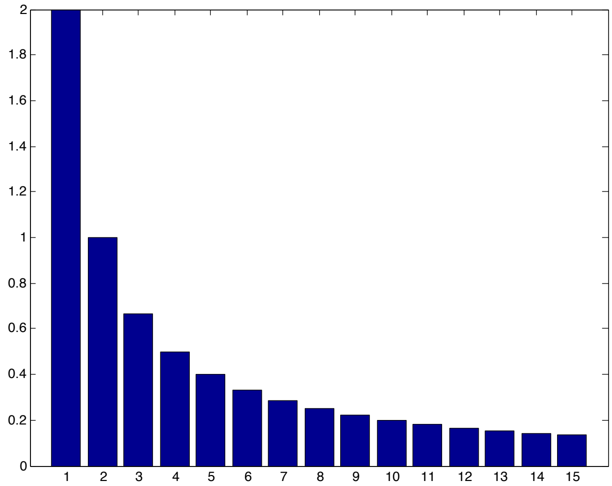

Figura 6.1.3: Gráfica de amplitud

De hecho, del espectro se puede observar que todas las frecuencias son múltiplos de una misma frecuencia, llamado el primer armónico. Las demás frecuencias se llaman respectivamente segundo armónico, tercer armónico, etc.

Regresando al tema de la ortogonalidad, se va a probar que las funciones $|1\rangle$ (es decir la función constante igual a 1), $|\cos(nt)\rangle$, $|\sin(nt)\rangle$ son ortogonales sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Primero que todo, se van a calcular las normas de cada una de las funciones.

$$\|1\|^2 = \langle 1 \mid 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt = 2\pi \tag{6.1.29}$$

Para calcular las normas de los senos y cosenos se usan las identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned} \|\cos(nt)\|^2 &= \langle \cos(nt) \mid \cos(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\tfrac{1+\cos(2nt)}{2} \right) dt = \pi + \tfrac{\sin(2nt)}{4n} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \pi \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

$$\begin{aligned} \|\sin(nt)\|^2 &= \langle \sin(nt) \mid \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \cos^2(nt)\right) dt = 2\pi - \pi = \pi \end{aligned} \tag{6.1.31}$$

La ortogonalidad de $|1\rangle$ con $|\cos(nt)\rangle$, $|\sin(nt)\rangle$ es clara de la interpretación de la integral como el área bajo la curva.

$$\langle 1 \mid \cos(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, dt = \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0 \tag{6.1.32}$$

$$\langle 1 \mid \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, dt = -\frac{\cos(nt)}{n}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0 \tag{6.1.33}$$

Para la ortogonalidad del senos con los cosenos se pueden utilizar la respresentación compleja.

$$\begin{aligned} \langle \cos(nt) \mid \cos(mt) \rangle &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}\right)\left(\frac{e^{imt}+e^{-imt}}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(n+m)t} + e^{i(n-m)t} + e^{-i(n-m)t} + e^{-i(n+m)t}\right) dt \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m) + \cos(n-m))\, dt = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)}{n+m} + \frac{\sin(n-m)}{n-m}\right)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0 \end{aligned} \tag{6.1.34}$$

de manera análoga se demuestra:

$$\langle \sin(nt) \mid \sin(mt) \rangle = 0 \quad \langle \sin(nt) \mid \cos(mt) \rangle = 0 \quad \langle \sin(nt) \mid \cos(nt) \rangle = 0 \tag{6.1.35}$$

El conjunto de funciones $|1\rangle$, $|\cos(nt)\rangle$, $|\sin(nt)\rangle$ para $n \in \mathbb{N}$ son ortogonales sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir,

$$\begin{gathered} \langle 1 \mid \cos(nt) \rangle = 0 \quad \langle 1 \mid \sin(nt) \rangle = 0 \\ \langle \sin(nt) \mid \sin(mt) \rangle = 0 \quad \langle \cos(nt) \mid \cos(mt) \rangle = 0 \quad n \neq m \\ \langle \sin(nt) \mid \cos(mt) \rangle = 0 \end{gathered} \tag{6.1.36}$$

Más aún, las normas de las funciones anteriores son:

$$\begin{gathered} \|1\|^2 = \langle 1 \mid 1 \rangle = 2\pi \\ \|\cos(nt)\|^2 = \pi \\ \|\sin(nt)\|^2 = \pi \end{gathered} \tag{6.1.37}$$

Nuevamente, la idea de las series de Fourier es que las funciones anteriores forman una base para las funciones periódicas, es decir, si $f(t)$ es una función periódica de período 2π entonces $f(t)$ se puede expandir como

$$|f(t)\rangle = \frac{a_0}{2}|1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n |\cos(nt)\rangle + b_n |\sin(nt)\rangle\right) \tag{6.1.38}$$

donde a_0, a_n, b_n son coeficientes por determinar (el $\frac{1}{2}$ frente a a_0 es una convención usual). Para hallar los coeficientes se utiliza la ortogonalidad de las funciones[2]

Por ejemplo, para hallar a_0 se aplica $\langle 1|$ a ambos lados de 6.1.38 y se tiene

$$\langle 1 | f(t) \rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1 | 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \langle 1 | \cos(nt) \rangle + b_n \langle 1 | \sin(nt) \rangle\right) \tag{6.1.39}$$

[2]la siguiente justificación es heurística porque omite varios detalles técnicos pero es suficiente para lo que sigue

por 6.1.36 solo sobrevive el coeficiente a_0 y por 6.1.38 se tiene

$$\langle 1 \mid f(t)\rangle = \pi a_0 \tag{6.1.40}$$

o bien

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle 1 \mid f(t)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \tag{6.1.41}$$

Para hallar a_m se aplica $\langle \cos(mt)|$ a ambos lados de 6.1.38 [3]

$$\langle \cos(mt)\,|f(t)\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1\,|1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_m\langle \cos(mt)\,|\cos(nt)\rangle + b_n\langle \cos(mt)\,|\sin(nt)\rangle\right) \tag{6.1.42}$$

nuevamente por 6.1.36 solo sobrevive a_m y por 6.1.37

$$\langle \cos(mt)\,|f(t)\rangle = a_m\langle \cos(mt)\,|\cos(mt)\rangle = \pi a_m \tag{6.1.43}$$

o bien utilizando de nuevo la letra n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\langle \cos(nt)\,|f(t)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,f(t)dt \tag{6.1.44}$$

De forma análoga se tiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle \sin(nt)\,|f(t)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\,f(t)dt \tag{6.1.45}$$

Lo anterior justifica la siguiente definición.

[3] se utiliza una m pues la n se está utilizando el índice de suma por lo que debería cambiarse de letra para que no halla confusión

Si $f(t)$ es una función definida sobre $[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier asociada es la serie

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right) \tag{6.1.46}$$

donde

$$a_0=\frac{1}{\pi}\langle 1\mid f(t)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt \tag{6.1.47}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\langle\cos(nt)\,|f(t)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,f(t)dt \tag{6.1.48}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\langle\sin(nt)\,|f(t)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\,f(t)dt \tag{6.1.49}$$

Se utiliza la notación

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right) \tag{6.1.50}$$

para indicar que la serie de la derecha es la serie de Fourier asociada a $f(t)$, aunque no necesariamente la función sea igual en todos los puntos.

Ejemplo 123. Calcule la serie de Fourier asociada a la función $f(t)=t$ sobre $[-\pi,\pi]$

Nada más hay que calcular los coeficientes a_0, a_n, b_n. Para hallar a_0 se utiliza 6.1.47

$$a_0=\frac{1}{\pi}\langle 1\mid t\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tdt=\left.\frac{t^2}{2\pi}\right|_{t=-\pi}^{t=\pi}=0 \tag{6.1.51}$$

Para hallar a_n se utiliza 6.1.48

$$\begin{gathered}a_n=\tfrac{1}{\pi}\langle\cos(nt)\mid t\rangle=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cos(nt)\,dt=\\ \tfrac{1}{\pi}\left(\left.\tfrac{t\sin(nt)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{\sin(nt)}{n}dt\right)=0\end{gathered} \tag{6.1.52}$$

Finalmente, para b_n se utiliza 6.1.49

$$\begin{gathered}b_n=\tfrac{1}{\pi}\langle\sin(nt)\mid t\rangle=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\sin(nt)=\\ \tfrac{1}{\pi}\left(-\left.\tfrac{t\cos(nt)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+\tfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right)=-\tfrac{2\cos(n\pi)}{n}=\tfrac{2(-1)^{n+1}}{n}\end{gathered} \tag{6.1.53}$$

por lo tanto, la serie de Fourier para $f(t)=t$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt) \tag{6.1.54}$$

tal como se mencionó antes.

Antes de seguir, es importante tener presente las condiciones matemáticas que garantizan que una función sea igual a su serie de Fourier asociada (el teorema es exactamente igual sobre cualquier intervalo, por lo que se presenta únicamente sobre $(-\pi, \pi)$

Suponga que $f(t)$ es derivable y $f(t)$, $\frac{df}{dt}$ son funciones continuas por partes. Entonces la serie de Fourier asociada a f converge a $f(t)$ en todo punto de continuidad de f. En un punto de discontinuidad la serie converge al promedio, es decir, a

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} \tag{6.1.55}$$

Ejemplo 124. Calcule la serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Primero que todo hay una discontinuidad en el origen por lo que en ese punto la serie de Fourier debe converger a

$$\frac{f(0+)-f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{6.1.56}$$

En este caso la variable x juega el papel de t. Por 6.1.47

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle 1 \mid f(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{\pi^2}{2}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \tag{6.1.57}$$

Por 6.1.48

$$\begin{gathered} a_n = \tfrac{1}{\pi}\langle \cos(nx) \mid f(x)\rangle = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \\ \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx = \tfrac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\,\tfrac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \tfrac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] \\ = -\tfrac{1}{n\pi}\,\tfrac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = \tfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \end{gathered} \tag{6.1.58}$$

Finalmente usando 6.1.49 se tiene en forma parecida

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle \sin(nx) \mid f(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n} \tag{6.1.59}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)\right) \tag{6.1.60}$$

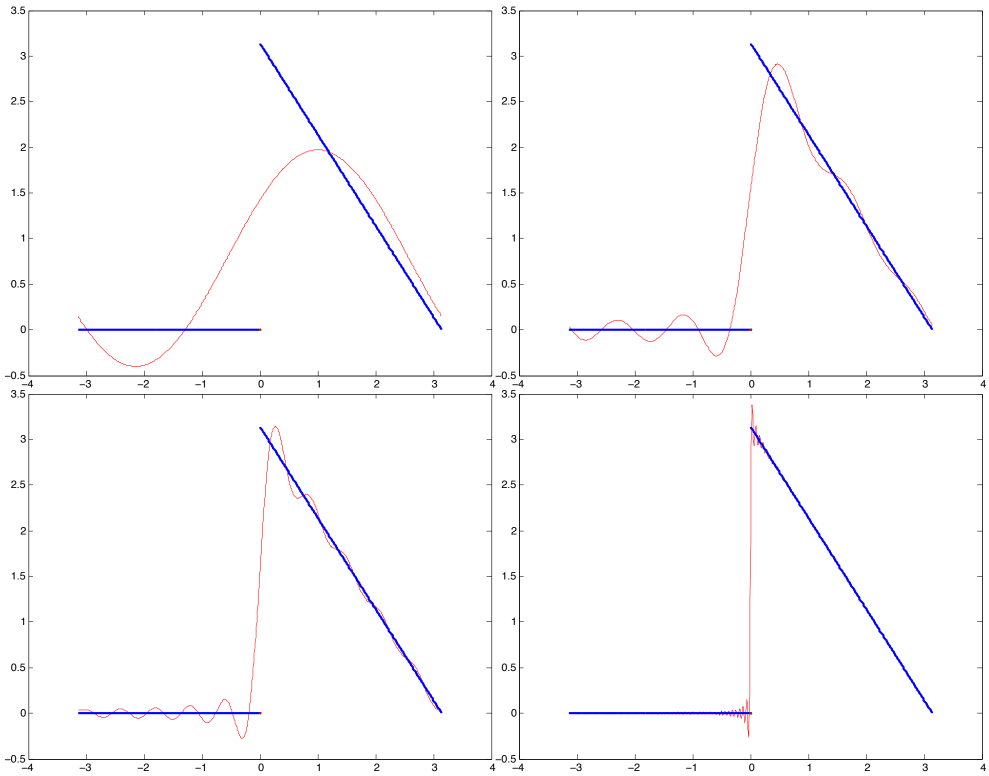

Figura 6.1.4: $f(x)$ y $S_1, S_5, S_{10}, S_{100}$

Ejemplo 125. Desarrolle $f(t) = |t|$ para $-1 < t \leq 1$ en una serie de Fourier

Aquí el intervalo no es de $-\pi$ a π y más bien el período es $T = 2$. Usando 6.1.23 se define

$$g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = f\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{|t|}{\pi} \tag{6.1.61}$$

Se calcula la serie de Fourier sobre $g(t)$. Por 6.1.47 y el hecho de que la función es par

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\langle 1 \mid g(t)\rangle = \tfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t| = \tfrac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} t dt = 1 \tag{6.1.62}$$

Para a_n se utiliza 6.1.48 y el hecho de que el integrando es par

$$\begin{gathered} a_n = \tfrac{1}{\pi}\langle \cos(nt) \mid g(t)\rangle = \tfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos(nt)\,dt \\ = \tfrac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \tfrac{2}{\pi^2}\left(\left.\frac{t\sin(nt)}{n}\right|_0^{\pi} - \tfrac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right) = \\ = \tfrac{2}{\pi^2 n^2}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \tfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{gathered} \tag{6.1.63}$$

Para b_n se utiliza 6.1.49 y el hecho de que el integrando es impar

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle \sin(nt) \mid g(t)\rangle = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sin(nt)\,dt = 0 \tag{6.1.64}$$

Por lo tanto

$$f\left(\frac{t}{\pi}\right) = g(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nt) \tag{6.1.65}$$

como sobreviven los términos impares se toma $n = 2k+1$

$$f\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)t) \tag{6.1.66}$$

finalmente se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi t) \tag{6.1.67}$$

Las primeras aproximaciones son tan similares a la función original que solamente se van a graficar las sumas parciales.

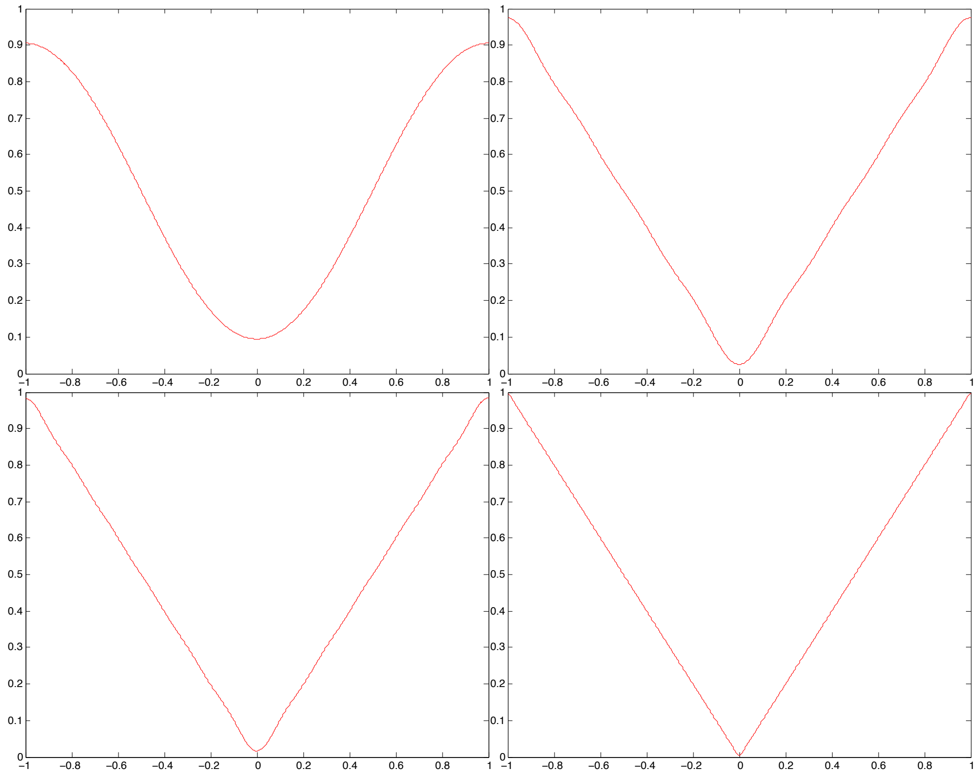

Figura 6.1.5: Sumas parciales $k = 0$, $k = 3$, $k = 5$, $k = 20$

No es necesario definir una función auxiliar para hallar la serie de Fourier, se puede desarrollar directamente a partir de la función original. Si $f(t)$ tiene período T su semiperíodo es $p = \frac{T}{2}$.

La serie de Fourier de una función definida en el intervalo $(-p, p)$ es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p} t\right) \right) \tag{6.1.68}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \cos\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt \\ b_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt \end{aligned} \tag{6.1.69}$$

En el caso en que la función sea par o impar los coeficientes toman una forma más sencilla todavía.

Una función es par si $f(t) = f(-t)$, es decir, su gráfica posee simetría con respecto al eje y. Una función es impar si $f(t) = -f(-t)$ o bien su gráfica es simétrica con respecto al origen. Las funciones pares e impares poseen las siguientes propiedades:

- el producto de dos funciones pares es par
- el producto de dos funciones impares es par
- el producto de una función par y una función impar es impar
- si $f(t)$ es par, $\int_{-p}^{p} f(t)dt = 2\int_{0}^{p} f(t)dt$
- si $f(t)$ es impar, $\int_{-p}^{p} f(t)dt = 0$

Por ejemplo, si $f(t)$ es par entonces los coeficientes de Fourier toman la forma

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t)dt = \tfrac{2}{p} \int_{0}^{p} f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \cos\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt = \tfrac{2}{p} \int_{0}^{p} f(t) \cos\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt \\ b_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt = 0 \end{aligned} \tag{6.1.70}$$

por otro lado, si $f(t)$ es impar entonces los coeficientes de Fourier toman la forma

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t)dt = 0 \\ a_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \cos\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt = 0 \\ b_n &= \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt = \tfrac{2}{p} \int_{0}^{p} f(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{p} t\right) dt \end{aligned} \tag{6.1.71}$$

En los casos anteriores la serie de Fourier se llama respectivamente la serie de cosenos y serie de senos respectivamente.

Si $f(t)$ es una función par su serie de Fourier se llama la serie de cosenos y viene dada por

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \tag{6.1.72}$$

donde

$$\begin{array}{c} a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt \\ a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right)dt \end{array} \tag{6.1.73}$$

En el caso de que $p=\pi$ la serie se simplifica en

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt) \tag{6.1.74}$$

donde

$$\begin{array}{c} a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt \\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt \end{array} \tag{6.1.75}$$

Si $f(t)$ es una función impar su serie de Fourier se llama la serie de senos y viene dada por

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \tag{6.1.76}$$

donde

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)dt \tag{6.1.77}$$

en el caso en que $p=\pi$ la serie se simplifica como

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt) \tag{6.1.78}$$

donde

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt \tag{6.1.79}$$

A veces se quiere desarrollar una función que está definida únicamente sobre $[0,\pi]$ (o en el caso más general $[0,p]$) como una serie de Fourier. Una estrategia es extender la función *arbitrariamente* sobre todo el intervalo $[-\pi,\pi]$ (o bien $[-p,p]$) para obtener la serie de Fourier de la extensión. Obviamente, no todas las extensiones son igualmente útiles, en particular hay tres extensiones distintas que resultan igualmente útiles.

- Extensión par de la función: se refleja $f(t)$ con respecto al eje y la función. Generalmente la extensión periódica se denota nuevamente como $f(t)$ por lo que se tiene el desarrollo de cosenos

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \tag{6.1.80}$$

donde

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{2}{p}\int_0^p f(t)dt \\
a_n &= \tfrac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\tfrac{n\pi}{p}t\right)dt
\end{aligned}
\tag{6.1.81}
$$

como se ve del cálculo de coeficientes, en la práctica la integral solo tiene que calcularse sobre el intervalo en el que está definida inicialmente la función por lo que no es necesario escribir la extensión explícitamente.

Figura 6.1.6: Extensión par de la función

➪ Extensión impar de la función: se refleja la función $f(t)$ con respecto al origen. En este caso se tiene el desarrollo de senos de la función

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \tag{6.1.82}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)dt \tag{6.1.83}$$

Figura 6.1.7: Extensión impar de la función

➯ Extensión periódica de la función: Ahora se extiende la función de modo que tenga período p, es decir, $f(t+p)=f(t)$. En este caso la función tiene semiperíodo $\frac{p}{2}$ por lo que se puede usar 6.1.68 y 6.1.69 con el cuidado de que se reemplaza p por $\frac{p}{2}$, es decir,

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)\right) \tag{6.1.84}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)dt = \tfrac{2}{p}\int_0^p f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cos\left(\tfrac{2n\pi}{p}t\right)dt = \tfrac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\tfrac{2n\pi}{p}t\right)dt \\ b_n &= \tfrac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\sin\left(\tfrac{2n\pi}{p}t\right)dt = \tfrac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\tfrac{2n\pi}{p}t\right)dt \end{aligned} \tag{6.1.85}$$

donde para la última igualdad se usó la propiedad de que la integral de una función periódica sobre intervalos de la misma longitud es igual.

Figura 6.1.8: Extensión periódica de la función

Ejemplo 126. Desarrolle $f(t) = t^2$ para $0 < t < \pi$ en una serie de cosenos, una serie de senos y una serie de Fourier

Para la serie de cosenos se realiza la extensión par de la función. Usando 6.1.80 y 6.1.81 con $p = \pi$ se tiene

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2 \tag{6.1.86}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} \tag{6.1.87}$$

por lo tanto la representación como serie de cosenos de la función es

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \tag{6.1.88}$$

Como cálculo interesante puede tomarse $t = \pi$ para obtener

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) \tag{6.1.89}$$

o bien

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6.1.90}$$

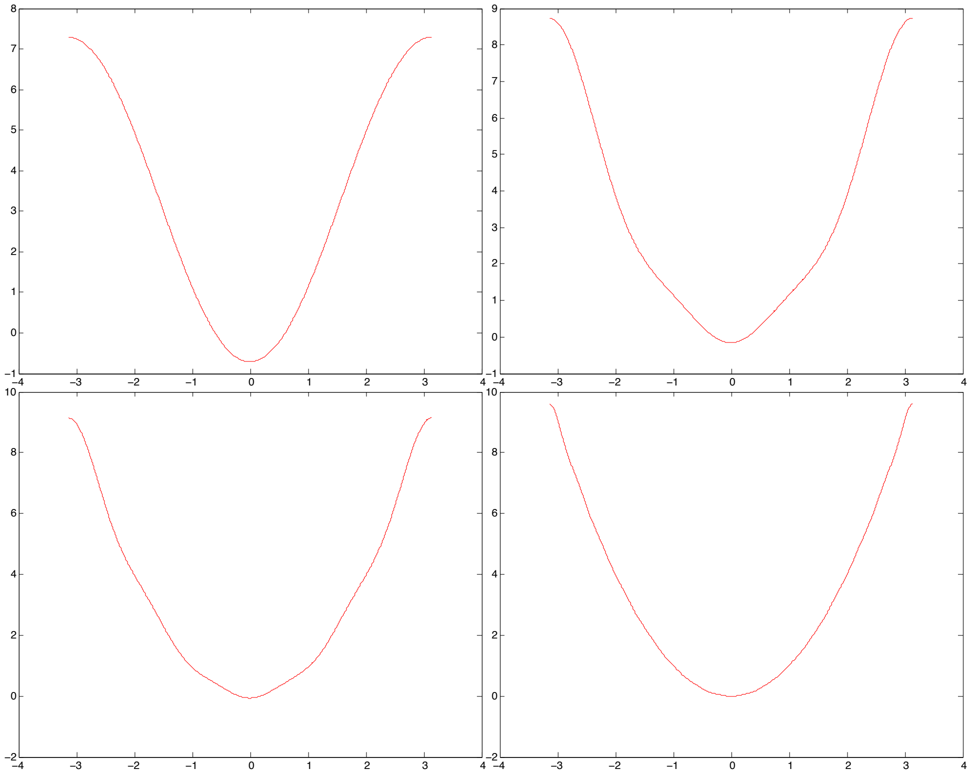

Figura 6.1.9: Serie de cosenos para $N = 1, 3, 5, 15$

Para la serie de senos se utiliza la extensión impar de la función y las fórmulas 6.1.82, 6.1.83 con $p = \pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \sin(nt)\, dt = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] \tag{6.1.91}$$

por lo tanto

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right)\sin(nt) \tag{6.1.92}$$

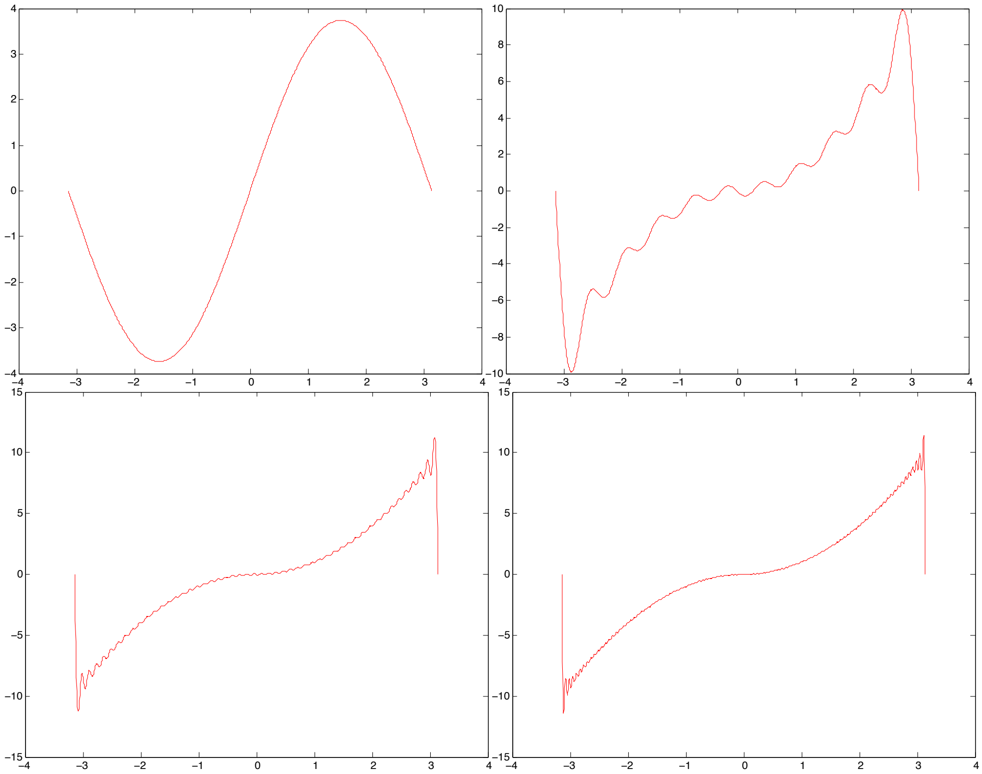

Figura 6.1.10: Serie de senos para $N = 1, 10, 50, 100$

Aquí se puede notar como se necesitan un mayor número de iteraciones para que la gráfica se asemeje más a la gráfica de la función.

Para la serie de Fourir se utiliza la extensión periódica y 6.1.84, 6.1.85

$$\begin{array}{c} a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2 \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \cos(2nt)\, dt = \frac{1}{n^2} \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \sin(2nt)\, dt = -\frac{\pi}{n} \end{array} \tag{6.1.93}$$

por lo tanto

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos(2nt) - \frac{\pi}{n}\sin(2nt)\right) \tag{6.1.94}$$

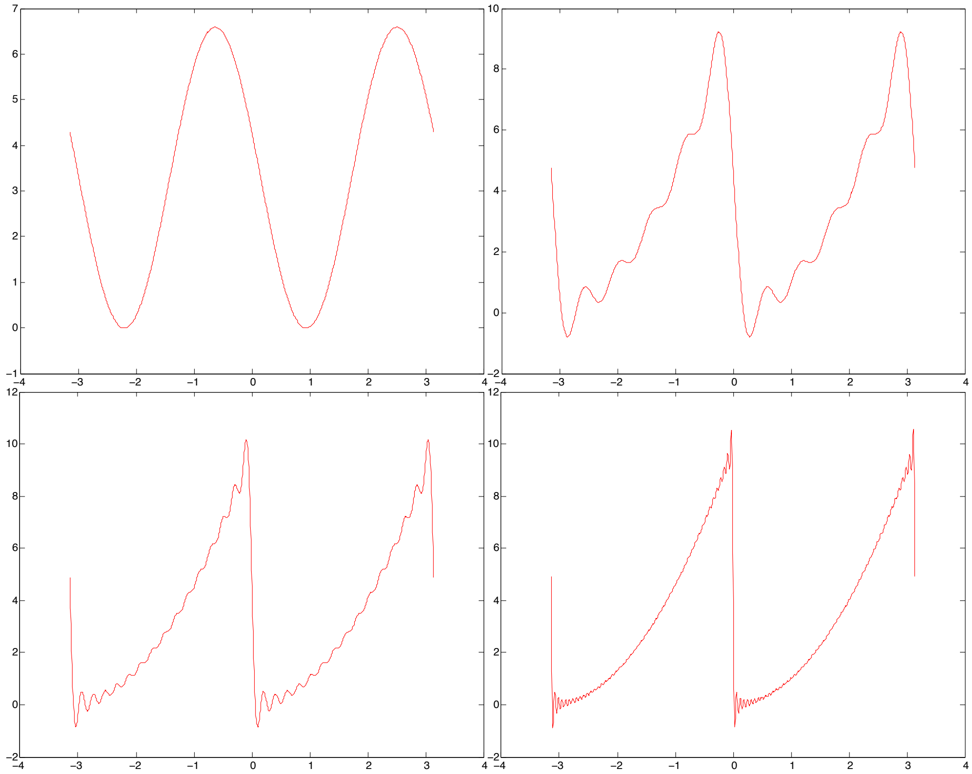

Figura 6.1.11: Extensión periódica, $N = 1, 5, 15, 50$

6.2. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales o PDEs por sus siglas en inglés es la familia más importante de ecuaciones diferenciales pues permiten que una función dependa de más de una variable al mismo tiempo. Sin embargo, esto a su vez trae como consecuencia que sea mucho más difícil caracterizar un método general para resolver las PDEs, de hecho, en la práctica lo que se hace es resolver problemas específicos que tengan intéres físico y ver que condiciones matemáticas son necesitadas para garantizar la unicidad del problema. A continuación se presenta una de las cuantas PDEs importantes en aplicaciones.

Nombre	Ecuación Diferencial
Transporte	$u_x + u_y = 0$
Burger	$u_t + uu_x = 0$
Laplace	$u_{xx} + u_{yy} = 0$
Onda	$u_{tt} - u_{xx} = 0$
Calor	$u_t - u_{xx} = 0$
KdV	$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
Barra Vibrando	$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$
Telégrafo	$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$
Schrödinger	$iu_t - u_{xx} = 0$

Cuadro 6.1: Algunas Ecuaciones Diferenciales Parciales

Por simplicidad, se resolverán ecuaciones parciales cuando dependen del menor número de variables posibles, es decir dos, y se hará utilizando el método de separación de variables , que reduce el problema de resolver una PDE al problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria (de hecho infinitas de ellas). De hecho, algunos de los métodos más comunes para resolver PDEs son los siguientes:

1. Separación de Variables
2. Transformadas Integrales
3. Cambios de Variable
4. Métodos Numéricos
5. Métodos Perturbativos
6. Funciones de Green
7. Ecuaciones Integrales
8. Métodos Variacionales
9. Expansión en vectores propios

A su vez, muchos de los conceptos de ODEs se pueden traducir a las PDEs. Por ejemplo, el orden de una PDE es el orden de la mayor derivada que aparezca en la ecuación diferencial. Comparando con la tabla anterior, la ecuación de Laplace y del Calor serían de segundo orden, mientras que la de la barra sería de cuarto orden y la de transporte de primer orden.

La PDE se llama lineal homogénea si es posible escribir la ecuación en la forma $Lu = 0$ donde L es un operador lineal, es decir, $L(u_1 + cu_2) = Lu_1 + cLu_2$. Por ejemplo, la ecuación de Laplace se puede escribir como $Lu = 0$ donde $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ mientras que la ecuación de Burger no es lineal. Si la ecuación se escribe en la forma $Lu = g$ donde g es una función de las variables independientes la PDE se llama lineal no homogénea. En esta parte se estudiarán únicamente las ecuaciones lineal homogéneas por lo que no enfatizará más este aspecto.

De hecho, se estudiarán las ecuaciones de la forma

$$Au_{vw} + Bu_{vw} + Cu_{ww} + Du_v + Eu_w + Fu = 0 \tag{6.2.1}$$

donde A, B, C, D, E, F son constantes y v, w son variables que generalmente significarán las variables de posición o de tiempo. Las ecuaciones anteriores se clasifican en tres tipos según el signo del discriminante $B^2 - 4AC$:

1. Parabólica: $B^2 - 4AC = 0$
2. Hiperbólica: $B^2 - 4AC > 0$
3. Elíptica: $B^2 - 4AC < 0$

A su vez, si se intenta hablar de una solución general de una PDE, entonces en vez de constantes arbitrarias aparecen funciones arbitrarias. Por ejemplo, la solución general de $u_{xy} = 0$ es $u(x, y) = G(x) + F(y)$ donde G, F son funciones arbitrarias.

Dado que se quieren resolver problemas específicos, hay que estudiar el tipo de condiciones que hay que imponer para garantizar la unicidad de la solución. Como solo se van a estudiar tres tipos de ecuaciones, se van a discutir por separado el tipo de condiciones:

- Ecuación del Calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$: En este caso se trabajará con un problema unidimensional, es decir, la transmisión del calor a lo largo de una barra de longitud L. Para que el problema tenga solución es de esperar que hay que especificar la distribución inicial de temperatura de la barra, es decir, hay que dar una función $\phi(x)$ de modo que

$$u(x, 0) = \phi(x) \qquad \text{distribución inicial temperatura} \tag{6.2.2}$$

en analogía con las ODEs tiene sentido llamar tal condición una condición inicial. A su vez, como la barra tiene una longitud finita, hay que especificar la interacción de los extremos de la barra con el medio ambiente. Tales condiciones se conocen como condiciones de frontera. Para los problemas de una dimensión hay tres tipos de condiciones de frontera usuales, aunque solo se estudiarán las primeras dos en lo que sigue.

1. Condición de Dirichlet: Consiste en especificar la temperatura en los extremos de la barra en todo instante, es decir, dar dos funciones $f(t)$, $g(t)$ de modo que

$$u(0, t) = f(t) \qquad u(L, t) = g(t) \quad \text{condiciones Dirichlet} \tag{6.2.3}$$

2. Condición de Neumann: Consiste en especificar la derivada de la temperatura en los extremos de la barra, es decir, especificar el flujo de calor en los extremos de la barra

$$u_x(0, t) = f(t) \qquad u_x(L, t) = g(t) \quad \text{condiciones Neumann} \tag{6.2.4}$$

3. Condición de Robin: Consiste en especificar una combinación de u y u_x en los extremos de la barra.

➩ Ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$: Se puede interpretar como la ecuación de un potencial electrostático sobre una región del plano xy o bien la distribución de temperatura en el caso estacionario para una placa o una región del plano xy. En este caso no hay que especificar condiciones iniciales pues la función no depende del tiempo. Se estudiarán dos tipos de condiciones

1. Condición de Dirichlet: Si se trabaja sobre una lámina rectangular $0 < x < a$ y $0 < y < b$ las condiciones de Dirichlet consisten en especificar los valores de la temperatura (o el potencial) sobre todos los lados, es decir,

$$\begin{array}{cc} u(0,y) = f_1(y) & u(a,y) = f_2(y) \\ u(x,0) = g_1(x) & u(x,b) = g_2(x) \end{array} \tag{6.2.5}$$

2. Condiciones Mixtas: Para los lados de la placa se toman dos de las condiciones de Dirichlet y las otras dos de Neumann, por ejemplo

$$\begin{array}{cc} u_y(0,y) = f_1(y) & u_y(a,y) = f_2(y) \\ u(x,0) = g_1(x) & u(x,b) = g_2(x) \end{array} \tag{6.2.6}$$

➩ Ecuación de Onda $u_{tt} = v^2 u_{xx}$: En este caso se considera una cuerda de longitud L. Como la ecuación es de segundo orden en el tiempo, tiene sentido esperar que haya que especificar la posición inicial de la cuerda así como su velocidad inicial, es decir, dar

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{condiciones iniciales} \tag{6.2.7}$$

a su vez, hay que especificar como se relaciona la cuerda con su frontera y nuevamente se van a estudiar las condiciones de Dirichlet y de Neumann.

1. Condición de Dirichlet: Se especifica la posición de los extremos de la cuerda, es decir s

$$u(0,t) = f(t) \quad u(L,t) = g(t) \tag{6.2.8}$$

2. Condición de Neumann: Se especifica la forma en que se están "jalando" los extremos de la cuerda, es decir,

$$u_x(0,t) = f(t) \quad u_x(L,t) = g(t) \tag{6.2.9}$$

Como se verá en los ejemplos siguientes, el método de separación de variables consiste en suponer que la solución depende como un producto de funciones, cada una de las cuales depende exclusivamente de una de las variables independientes. Para que tenga éxito el método, se ocupará que varias de las condiciones de frontera estén igualadas a cero, de forma que se utilicen para restringir las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen.

Luego, dado que las ecuaciones son lineales se propone por el principio de superposición una combinación lineal (de hecho una serie en la mayoría de los casos) de tales soluciones y las constantes que aparecen se hallan tomando el desarrollo de Fourier de las otras condiciones iniciales o de frontera que todavía no se han utilizado.

6.2.1. Ecuación del Calor

6.2.1.1. Derivación de la Ecuación del Calor

Suponga que se tiene un cilindro delgado de longitud L como el de la siguiente figura.

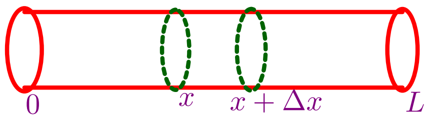

Figura 6.2.1: Cilindro

Se van a hacer las siguiente suposiciones:

1. el cilindro está hecho de un material homogéneo (misma conductividad térmica)

2. el cilindro está aislado lateralmente, es decir, el calor "escapa" únicamente por las tapas

3. la temperatura sobre cada sección transversal es constante

4. la energía térmica (calor) que contiene un cuerpo con masa m y temperatura u es $Q = cmu$ donde c es el calor específico. Estrictamente, como la temperatura no es constante se escribe
$$dQ = cu(x,t)dm \tag{6.2.10}$$
donde $u(x,t)$ es la temperatura como función de la posición y el tiempo y dm es el pequeño diferencial de masa que contiene el calor dq

5. La ley de Fourier de transferencia de calor: la tasa de transferencia de calor por unidad de área es proporcional al negativo del gradiente de temperatura, es decir,
$$\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = -K_0\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.2.11}$$
donde K_0 es la conductividad térmica y A es el área transversal.

6. hay conservación de la energía

Por la conservación de energía el cambio en energía térmica dentro de la sección entre x y $x+\triangle x$ es igual al calor que entra o sale por las tapas de tal cilindro pequeño más el calor que sea producido dentro de tal región (sin embargo para lo que sigue se supondrá que no hay tal producción de calor).

Primero que todo, la cantidad calor (energía térmica) dentro del cilindro entre x y $x+\triangle x$ es por 6.2.10

$$Q(x,x+\triangle x) = \int_x^{x+\triangle x} dq = cA\rho \int_x^{x+\triangle x} u(s,t)ds \tag{6.2.12}$$

donde ρ es la densidad (constante) del cilindro.

El calor que escapa por la tapa x es por 6.2.11

$$\left.\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}\right|_x = -\left.K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \tag{6.2.13}$$

el calor que escapara por la tapa $x+\triangle x$ es por 6.2.11

$$\left.\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}\right|_{x+\triangle x} = -\left.K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\triangle x} \tag{6.2.14}$$

Luego la conservación de energía significa que (para ver que signos utilizar se analizan los casos extremos)

$$\frac{dQ(x+\triangle x)}{dt} = -\left(-\left.AK_0\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\triangle x}\right) - \left.AK_0\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \tag{6.2.15}$$

por 6.2.12 y la regla de derivación bajo el signo integral se tiene

$$cA\rho\int_x^{x+\triangle x}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}ds = AK_0\frac{\partial u(x+\triangle x,t)}{\partial x} - AK_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{6.2.16}$$

definiendo la difusividad térmica como (se define con el cuadrado para enfatizar que es positiva)

$$\alpha^2 \equiv \frac{K_0}{c\rho} \tag{6.2.17}$$

la ecuación anterior puede escribirse como

$$\int_x^{x+\triangle x}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}ds = \alpha^2\left(\frac{\partial u(x+\triangle x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \tag{6.2.18}$$

sobre el intervalo $(x,x+\triangle x)$ $\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}$ alcanza un máximo y un mínimo, es decir,

$$m(x,x+\triangle x) \leq \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} \leq M(x,x+\triangle x) \tag{6.2.19}$$

por lo que

$$\triangle x m(x, x+\triangle x) \leq \int_{x}^{x+\triangle x} \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} ds \leq \triangle x M(x, x+\triangle x) \tag{6.2.20}$$

por lo tanto, en 6.2.18

$$m(x, x+\triangle x) \leq \frac{1}{\triangle x}\alpha^2 \left(\frac{\partial u(x+\triangle x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \leq M(x, x+\triangle x) \tag{6.2.21}$$

tomando el límite cuando $\triangle x \longrightarrow 0$ y usando la continuidad de $\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}$, es decir,

$$\lim_{\triangle x \longrightarrow 0} m(x, x+\triangle x) = \lim_{\triangle x \longrightarrow 0} M(x, x+\triangle x) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{6.2.22}$$

se llega a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.23}$$

6.2.1.2. Separación de Variables para la Ecuación de Calor

Para resolver 6.2.23 se intentará únicamente el método de separación de variables, es decir, se propone

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{6.2.24}$$

sustituyendo 6.2.24 en 6.2.23 se obtiene

$$X\dot{T} = \alpha^2 T X'' \tag{6.2.25}$$

o bien

$$\frac{\dot{T}}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{6.2.26}$$

como el lado izquierdo depende únicamente de t y el lado derecho depende únicamente de x, deben estar igualadas a una constante, que se denota por conveniencia como $-\lambda$, es decir,

$$\frac{\dot{T}}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{6.2.27}$$

de lo que se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{T} + \lambda \alpha^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases} \tag{6.2.28}$$

6.2.1.3. Condiciones de Dirichlet en la Ecuación de Calor

En este caso se considera el problema de una varilla con longitud L y cuyos extremos poseen una temperatura fijada (en este caso de cero por comodidad matemática)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.29}$$

Por el método de separación de variables se observó en 6.2.28 que T satisface una ecuación lineal por lo que tiene sentido suponer $T(t) \neq 0$ siempre. De esta forma el problema de Dirichlet se ha sustituido por

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x)T(t) \\ \dot{T} + \lambda\alpha^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \\ X(x)T(0) = f(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{6.2.30}$$

Las soluciones de la ecuación $X'' + \lambda X = 0$ son de la forma

$$\begin{cases} X(x) = c_1 + c_2 x & \lambda = 0 \\ X(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} & \lambda = -a^2 \\ X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) & \lambda = a^2 \end{cases} \tag{6.2.31}$$

sin embargo, por las condiciones iniciales únicamente la tercera posibilidad produce una solución no trivial. De hecho, trabajando con $X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$ y $X(0) = 0$ se obtiene

$$c_1 = 0 \tag{6.2.32}$$

mientras que usando $X(L) = 0$ se obtiene

$$c_2 \sin(aL) = 0 \tag{6.2.33}$$

para obtener una solución no trivial se requiere que

$$aL = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{6.2.34}$$

Sin embargo, para no contar dos veces la misma solución se toma n positivo, es decir,

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \tag{6.2.35}$$

De esta forma la solución en T es

$$T(t) = c_3 e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.36}$$

y la solución asociada a tal n se escribe como

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.37}$$

por el principio de superposición la solución que se propone es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.38}$$

falta garantizar una condición inicial, aquella en la cual $u(x,0) = f(x)$ o bien

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.39}$$

pero esto es equivalente a encontrar el desarrollo en series de senos de $f(x)$ que tiene por solución

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.2.40}$$

de esta forma la solución al problema de Dirichlet es

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.41}$$

Por ejemplo, tomando $L = 1$, $\alpha^2 = 0{,}003$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y $u(x,0) = 50x(1-x)$ se puede verificar que la solución es

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left((2n+1)\pi x\right) e^{-0{,}003(2n+1)^2\pi^2 t} \tag{6.2.42}$$

que se ve de la siguiente forma

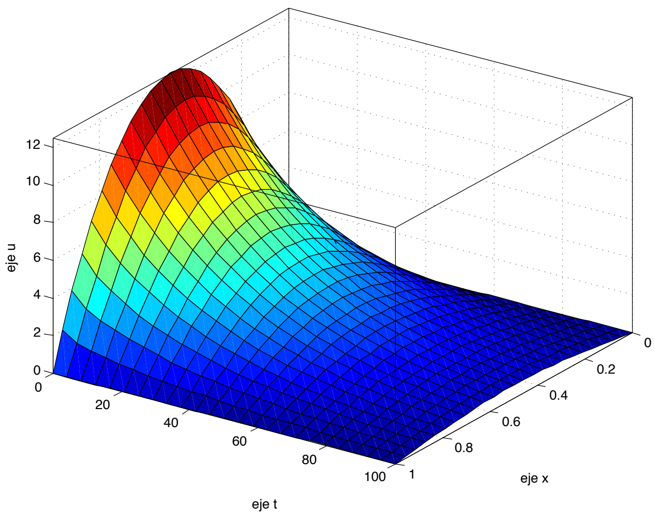

Figura 6.2.2: Solución Ecuación del Calor Condiciones Dirichlet

6.2.1.4. Condiciones de Neumann en la Ecuación de Calor

En este caso se considera el problema de una varilla con longitud L y cuyos extremos están aislados

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.43}$$

Por el método de separación de variables se observó en 6.2.28 que T satisface una ecuación lineal por lo que tiene sentido suponer $T(t) \neq 0$ siempre. De esta forma el problema de Dirichlet se ha sustituido por

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x)T(t) \\ \dot{T} + \lambda\alpha^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \\ X(x)T(0) = f(x) \\ X_x(0) = X_x(L) = 0 \end{cases} \tag{6.2.44}$$

Las soluciones de la ecuación $X'' + \lambda X = 0$ son de la forma

$$\begin{cases} X(x) = c_1 + c_2 x & \lambda = 0 \\ X(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} & \lambda = -a^2 \\ X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) & \lambda = a^2 \end{cases} \tag{6.2.45}$$

Para la primera posibilidad funciona se toma

$$X(x) = c_1 \tag{6.2.46}$$

en tal caso T satisface la ecuación diferencial $\dot{T} = 0$ o bien

$$T(t) = c_3 \tag{6.2.47}$$

y se escribe la solución asociada como

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}a_0 \tag{6.2.48}$$

La segunda posibilidad solo produce la solución nula. La tercera posibilidad produce una solución no trivial. De hecho, trabajando con $X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$ y $X_x(0) = 0$ se obtiene

$$c_2 = 0 \tag{6.2.49}$$

mientras que usando $X_x(L) = 0$ se obtiene

$$c_1 \sin(aL) = 0 \tag{6.2.50}$$

para obtener una solución no trivial se requiere que

$$aL = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{6.2.51}$$

Sin embargo, para no contar dos veces la misma solución se toma n positivo, es decir,

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \tag{6.2.52}$$

De esta forma la solución en T es

$$T(t) = c_3 e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.53}$$

y la solución asociada a tal n se escribe como

$$u_n(x,t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.54}$$

por el principio de superposición la solución que se propone es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t} \tag{6.2.55}$$

falta garantizar una condición inicial, aquella en la cual $u(x,0) = f(x)$ o bien

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.56}$$

pero esto es equivalente a encontrar el desarrollo en series de cosenos de $f(x)$ que tiene por solución

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.2.57}$$

de esta forma la solución al problema de Neumann es

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\left(\left(\int_0^L f(x)dx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}\right) \tag{6.2.58}$$

Por ejemplo,tomando $L = 1$, $\alpha^2 = 0{,}003$, $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ y $u(x,0) = 50x(1-x)$ se puede verificar que la solución es

$$u(x,t) = \frac{25}{3} - \frac{50}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi x)\, e^{-0{,}003(2n)^2\pi^2 t} \tag{6.2.59}$$

que se ve de la siguiente forma

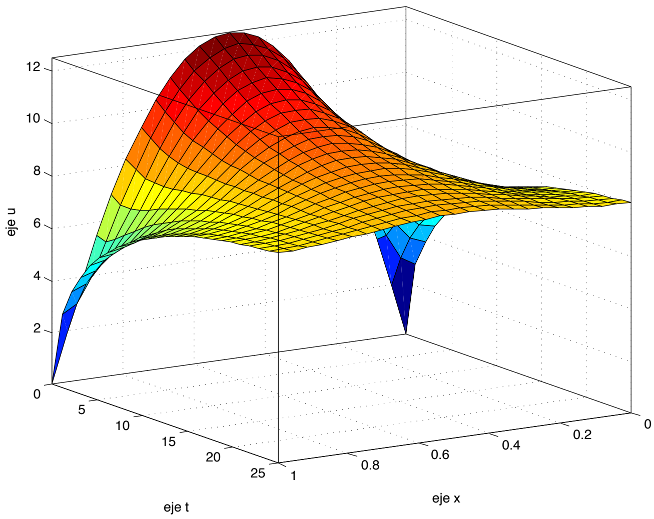

Figura 6.2.3: Solución Ecuación del Calor Condiciones de Neumann

---

6.2.2. Ecuación de Laplace

6.2.2.1. Derivación de la ecuación de Laplace

La forma más rápida de llegar a la ecuación de Laplace es a partir de leyes de la física conocidas. Por ejemplo, la ecuación del calor en dos dimensiones espaciales es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{6.2.60}$$

en el estado estacionario la temperatura no depende explícitamente del tiempo, es decir, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. En tal caso la temperatura satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.2.61}$$

Otra forma por la cual es importante resolver la ecuación de Laplce es por la ley de Gauss en el electromagnetismo. La ley de Gauss establece que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie es igual a la carga eléctrica dentro del volumen encerrado por tal superficie, es decir,

$$\int\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = Q \tag{6.2.62}$$

en el caso en que no haya carga eléctrica neta encerrada la ley de Gauss dice

$$\int\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \tag{6.2.63}$$

aplicando el teorema de la divergencia

$$\int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}dV = 0 \tag{6.2.64}$$

como tal relación es válida sobre volúmenes de tamaño arbitrario el integrando debe ser cero, es decir, se obtiene la forma diferencial de la ley de Gauss,

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{6.2.65}$$

en el caso en que no haya presencia de un campo magnético (o este sea constante) puede escribirse el campo eléctrico como el gradiente de un potencial, es decir,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{6.2.66}$$

en tal caso la forma diferencial de la ley de Gauss es simplemente

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = 0 \tag{6.2.67}$$

o bien

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{6.2.68}$$

donde ∇^2 es el Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6.2.69}$$

por lo tanto, la ecuación de Laplace en tres dimensiones es simplemente

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6.2.70}$$

6.2.2.2. Separación de Variables Ecuación de Laplace

En este caso se plantea en 6.2.61 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ y por el método de separación de palabras se debe resolver

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \tag{6.2.71}$$

o bien

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases} \tag{6.2.72}$$

donde ' representa la derivada con respecto la variable independiente respectiva.

6.2.2.3. Problema de Dirichlet para la Ecuación de Laplace

En este caso se considera el problema de una placa rectangular cuyos extremos laterales se encuentran a temperaturas conocidas, es decir,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = 0 \quad u(a, y) = 0 \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f(x) \quad u(x, b) = g(x) \quad 0 < x < a \end{cases} \tag{6.2.73}$$

Por el método de separación de variables se considera el problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \\ X(0) = 0 \quad X(a) = 0 \\ X(x)Y(0) = f(x) \quad X(x)Y(b) = g(x) \end{cases} \tag{6.2.74}$$

En la primera ecuación después de analizar los casos se tiene que la única opción viable es

$$X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) \quad \lambda = \alpha^2 \tag{6.2.75}$$

y por las condiciones de frontera se tiene que la solución es de la forma

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.2.76}$$

Luego hay que resolver la segunda ecuación que tiene solución

$$Y(y) = c_3 e^{\frac{n\pi}{a}y} + c_4 e^{-\frac{n\pi}{a}y} \tag{6.2.77}$$

Luego la solución que se propone es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.2.78}$$

de la condición $u(x, 0) = f(x)$ se tiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.2.79}$$

y al ser el desarrollo de senos para $f(x)$ se obtiene

$$A_n + B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{6.2.80}$$

De manera similar

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}b}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.2.81}$$

y al ser el desarrollo de senos para $g(x)$ se obtiene

$$A_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \tag{6.2.82}$$

De las dos ecuaciones anteriores pueden despejarse los coeficientes A_n, B_n, de hecho,

$$A_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\left(\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx - e^{-\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right) \tag{6.2.83}$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\left(e^{\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx - \int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right) \tag{6.2.84}$$

Por ejemplo, si se toma $a = b = \pi$ y $f(x) = \pi, g(x) = 0$ la solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\sin\left((2n-1)x\right)\left(\frac{\sinh\left((2n-1)(\pi-y)\right)}{\sinh\left((2n-1)\pi\right)}\right) \tag{6.2.85}$$

que se ve como la siguiente figura

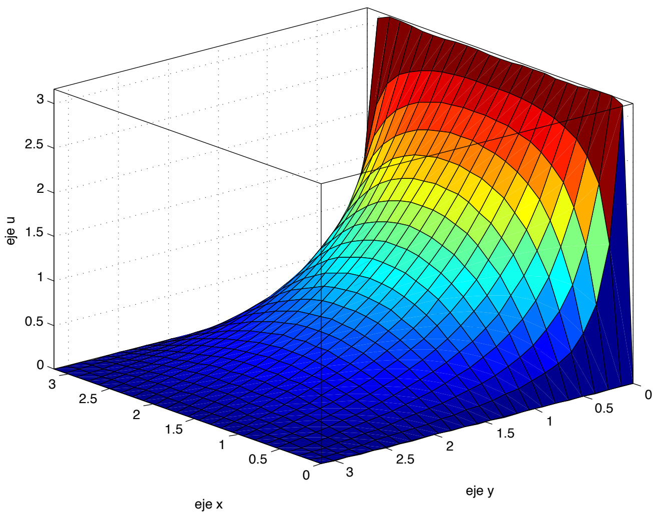

Figura 6.2.4: Ecuación de Laplace Condiciones de Dirichlet

6.2.2.4. Problema de Neumann para la Ecuación de Laplace

En este caso se considera el problema de una placa rectangular cuyas aristas verticales se encuentran aisladas, es decir,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u_x(0,y) = 0 \quad u_x(a,y) = 0 & 0 < y < b \\ u(x,0) = f(x) \quad u(x,b) = g(x) & 0 < x < a \end{cases} \tag{6.2.86}$$

Por el método de separación de variables se considera el problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \\ X_x(0) = 0 \quad X_x(a) = 0 \\ X(x)Y(0) = f(x) \quad X(x)Y(b) = g(x) \end{cases} \tag{6.2.87}$$

Una opción es

$$X(x) = c_1 + c_2 x \quad \lambda = 0 \tag{6.2.88}$$

que por las condiciones de frontera se reduce a

$$X(x) = c_1 \tag{6.2.89}$$

y

$$Y(y) = c_3 + c_4 y \tag{6.2.90}$$

Otra opción es

$$X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) \quad \lambda = \alpha^2 \tag{6.2.91}$$

y por las condiciones de frontera se tiene que la solución es de la forma

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \tag{6.2.92}$$

Luego hay que resolver la segunda ecuación que tiene solución

$$Y(y) = c_3 e^{\frac{n\pi}{a} y} + c_4 e^{-\frac{n\pi}{a} y} \tag{6.2.93}$$

y que puede reescribirse como

$$Y(y) = c_3 \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + c_4 \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \tag{6.2.94}$$

Luego la solución que se propone es

$$u(x,y) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \tag{6.2.95}$$

de la condición $u(x,0) = f(x)$ se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \tag{6.2.96}$$

y al ser el desarrollo de cosenos para $f(x)$ se obtiene

$$A_0 = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) dx \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \tag{6.2.97}$$

De manera similar

$$g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.2.98}$$

y al ser el desarrollo de cosenos para $g(x)$ se obtiene

$$A_0 + B_0 b = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)dx \quad A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \tag{6.2.99}$$

De las dos ecuaciones anteriores pueden despejarse los coeficientes A_n, B_n y obtener la solución a la ecuación diferencial.

6.2.3. Ecuación de Onda

6.2.3.1. Derivación de la Ecuación de Onda

Suponga que se tiene una cuerda de longitud L elástica que se somete a desplazamientos verticales pequeños. Se considera un pequeño fragmento de cuerda como en la siguiente figura

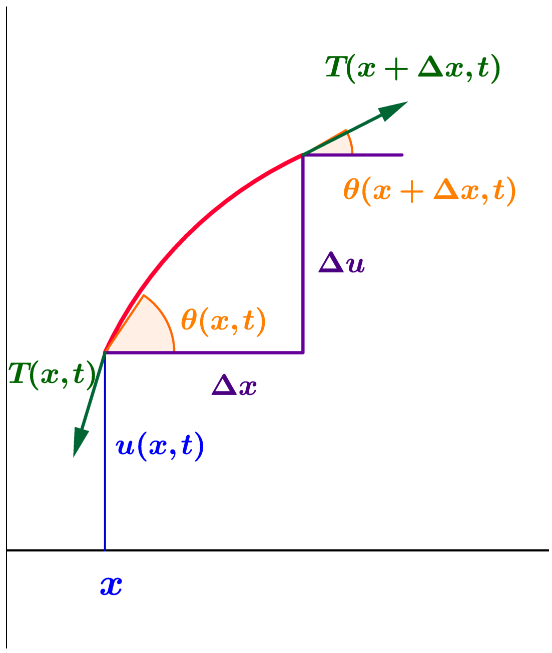

Figura 6.2.5: Cuerda

Aquí $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda a una distancia x del origen en el tiempo t. $\theta(x,t)$ es el ángulo con la horizontal (eje x), $T(x,t)$ es la tensión y ρ

va a ser la densidad que se tomará constante. Las fuerzas que actúan sobre este segmento de pequeño de cuerda incluyen las tensiones en ambos extremos y fuerzas externas como la gravedad que por el momento se ignoran. A su vez, se supone que pueden despreciarse los desplazamientos horizontales. Por lo tanto, aproximando de la masa de ese segmento por $\rho\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle u)^2}$ y aplicando la segunda ley de Newtona a la componente vertical de las fuerzas se tiene

$$\rho\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle u)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T(x+\triangle x,t)\sin\theta\,(x+\triangle x,t)-T(x,t)\sin\,(\theta,t) \tag{6.2.100}$$

dividiendo la ecuación anterior por $\triangle x$

$$\rho\sqrt{1+\left(\frac{\triangle u}{\triangle x}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T(x+\triangle x,t)\sin\theta\,(x+\triangle x,t)-T(x,t)\sin\,(\theta,t)}{\triangle x} \tag{6.2.101}$$

tomando el límite cuando $\triangle x\longrightarrow 0$ se tiene

$$\rho\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\sin\theta(x,t)\right) \tag{6.2.102}$$

y aplicando la regla del producto al lado derecho

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\sin\theta(x,t)\right)=\frac{\partial T}{\partial x}\sin\theta+T\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{6.2.103}$$

por lo tanto

$$\rho\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial x}\sin\theta+T\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{6.2.104}$$

de la figura es claro que

$$\tan\theta=\lim_{\triangle x\longrightarrow 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.2.105}$$

como se quiere pequeños desplazamientos se utiliza la aproximación para $\theta\simeq 0$, o bien, se pueden ignoran los términos en las expansiones de Taylor de orden θ^2 o superior. Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\simeq 0\quad \sin\theta\simeq\theta\simeq\tan\theta\quad \cos\theta\simeq 1 \tag{6.2.106}$$

a su vez de 6.2.105

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\simeq\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\simeq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.107}$$

sustituyendo estas aproximaciones en 6.2.104 se obtiene

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.108}$$

para eliminar la contribución de la tensión se utiliza la segunda ley para las componentes horizantales de la fuerza, es decir,

$$T(x+\triangle x,t)\cos\theta\,(x+\triangle x,t)-T(x,t)\cos\theta\,(x,t)=0 \tag{6.2.109}$$

que al dividir por $\triangle x$ y tomar el límite puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\cos\theta(x,t)\right)=0 \tag{6.2.110}$$

o bien

$$\frac{\partial T}{\partial x}\cos\theta=T\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{6.2.111}$$

por las aproximaciones anteriores

$$\frac{\partial T}{\partial x}\simeq T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.112}$$

pero en 6.2.108 aparecería el término $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ que se está ignorando por lo que se obtiene la ecuación de onda

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.113}$$

como $\frac{T}{\rho}$ tiene unidades de velocidad al cuadrado se define

$$v^2\equiv\frac{T}{\rho} \tag{6.2.114}$$

por lo que se llega a la forma usual de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2.115}$$

al resolver la ecuación de onda, se interpretará en que consiste esa velocidad.

6.2.3.2. Separación de Variables en la Ecuación de Onda

Se propone una solución para 6.2.115 de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$. Luego de manera similar a las ecuaciones anteriores se llega a plantear el sistema

$$\frac{X''}{X}=\frac{\ddot{T}}{v^2T}=-\lambda \tag{6.2.116}$$

o bien el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \ddot{T}+v^2\lambda T=0 \end{cases} \tag{6.2.117}$$

6.2.3.3. Condiciones de Dirichlet para la Ecuación de Onda

En este caso se considere el caso de una cuerda de longitud L con extremos fijos

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.118}$$

por el método de separación de variables se resuelve en cambio

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \ddot{T} + v^2 \lambda T = 0 \\ X(x)T(0) = f(x) \quad X(x)T_t(0) = g(x) \\ X(0)T(t) = 0 \quad X(L)T(t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.119}$$

para que la última ecuación sea válida siempre se toma $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Resolviendo la primera ecuación se tiene de forma similar a las ecuaciones anteriores que la única opción viable es

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \qquad \lambda = -a^2 \tag{6.2.120}$$

de las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se llega a que

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.2.121}$$

Para T se resuelve la ecuación diferencial

$$\ddot{T} + \frac{v^2 n^2 \pi^2}{L^2} T = 0 \tag{6.2.122}$$

que tiene solución

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) \tag{6.2.123}$$

y se propone como solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.124}$$

usando que $u(x,0) = f(x)$ se tiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.125}$$

que es la expansión como serie de senos para $f(x)$, es decir,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{6.2.126}$$

Derivando $u(x,t)$ se tiene

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \left(\frac{vn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + B_n \left(\frac{vn\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.2.127)$$

usando la condición $g(x) = u_t(x,0)$ hay que resolver

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{vn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.2.128)$$

que es una serie de senos para $g(x)$ con solución

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (6.2.129)$$

De esta forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + \left(\frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) \sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.2.130)$$

Por ejemplo, si $v = 1$, $f(x) = \begin{cases} 0{,}1x & 0 \le x \le 1 \\ 0{,}1(2-x) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$, $g(x) = 0$ y $L = 2$ se obtiene

$$u(x,t) = \frac{0{,}8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \quad (6.2.131)$$

y la solución se ve como la figura siguiente

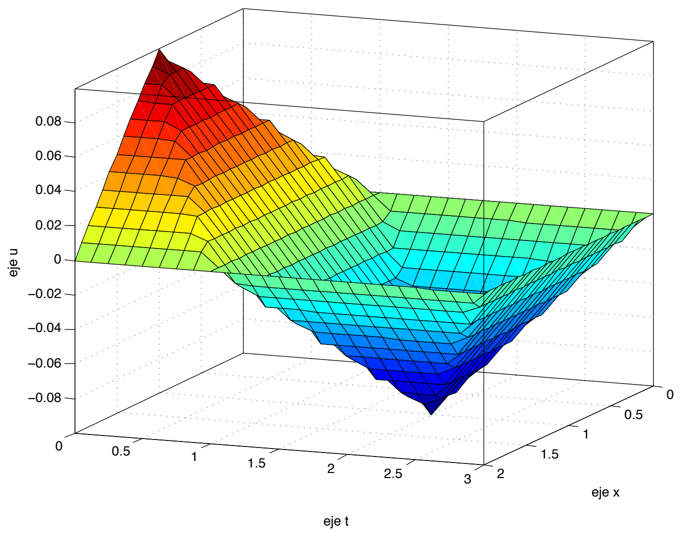

Figura 6.2.6: Ecuación de Onda Condiciones Dirichlet

6.2.3.4. Condiciones de Neumann para la Ecuación de Onda

En este caso se considere el caso de una cuerda de longitud L con extremos libres

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \\ u_x(0,t) = 0 \quad u_x(L,t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.132}$$

por el método de separación de variables se resuelve en cambio

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \ddot{T} + v^2 \lambda T = 0 \\ X(x)T(0) = f(x) \quad X(x)T_t(0) = g(x) \\ X'(0)T(t) = 0 \quad X'(L)T(t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.133}$$

para que la última ecuación sea válida siempre se toma $X'(0) = 0$ y $X'(L) = 0$. Resolviendo la primera ecuación se tiene de forma similar a las ecuaciones anteriores que una opción viable es

$$X(x) = c_1 + c_2 x \quad \lambda = 0 \tag{6.2.134}$$

pero por las condiciones de frontera solo sirve

$$X(x) = c_1 \tag{6.2.135}$$

Luego la ecuación para T tiene solución

$$T(t) = c_3 + c_4 t \tag{6.2.136}$$

y la solución correspondiente a este caso es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t \tag{6.2.137}$$

La otra solución que puede funcionar es

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \quad \lambda = -a^2 \tag{6.2.138}$$

de las condiciones $X'(0) = 0$ y $X'(L) = 0$ se llega a que

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.2.139}$$

Para T se resuelve la ecuación diferencial

$$\ddot{T} + \frac{v^2 n^2 \pi^2}{L^2} T = 0 \tag{6.2.140}$$

que tiene solución

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) \tag{6.2.141}$$

y se propone como solución completa

$$u(x,t)=\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{2}B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)+B_n\sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.142}$$

usando que $u(x,0)=f(x)$ se tiene

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.143}$$

que es la expansión como serie de cosenos para $f(x)$, es decir,

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{6.2.144}$$

Derivando $u(x,t)$ se tiene

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\left(\frac{vn\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)+B_n\left(\frac{vn\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.145}$$

usando la condición $g(x)=u_t(x,0)$ hay que resolver

$$g(x)=\frac{1}{2}B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\frac{vn\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.146}$$

que es una serie de cosenos para $g(x)$ con solución

$$B_0=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)dx \quad B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{6.2.147}$$

De esta forma

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx+\left(\frac{1}{L}\int_0^L g(x)dx\right)t\\+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)+\left(\frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\sin\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{gathered} \tag{6.2.148}$$

Por ejemplo, si se toma $L=\pi$, $v=1$, $f(x)=\frac{\pi x^2}{2}-x^3$ y $g(x)=0$ la solución se convierte en

$$u(x,t)=\frac{\pi^3}{12}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos\left((2n-1)t\right)\cos\left((2n-1)x\right) \tag{6.2.149}$$

y la solución se ve como la figura siguiente

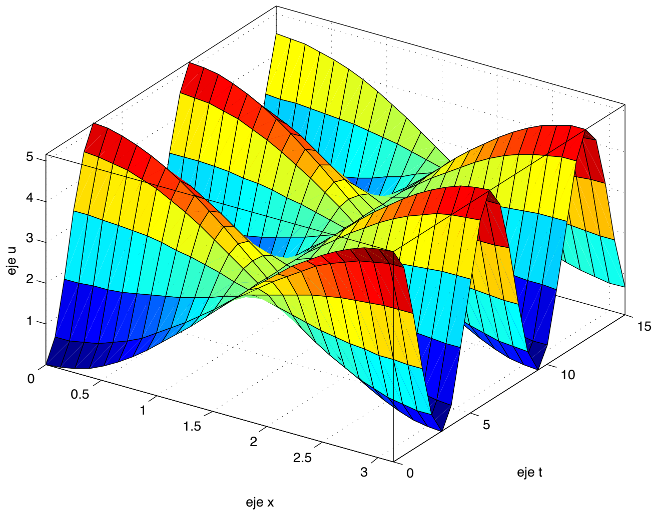

Figura 6.2.7: Ecuación de Onda Condiciones de Neumann

6.2.4. Ejercicios Adicionales

Ejemplo 127. Considere la función $f(x) = |\sin x \cos x|$. a) Pruebe que la serie de Fourier de $f(x)$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ viene dada por $\frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{(1-n^2)\pi} \cos(2nx)$. Puede usar que $2\sin(ax)\cos(by) = \sin(ax - by) + \sin(ax + by)$. b) Use lo anterior para calcular el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2}$

a) Es fácil observar que $f(x) = f(-x)$ debido a la presencia del valor absoluto. En este caso $p = \frac{\pi}{2}$ y por la fórmula para la serie de cosenos se tiene que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) \tag{6.2.150}$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \cos x|\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\, dx = \frac{2}{\pi} \tag{6.2.151}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\cos(2nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(2x)\cos(2nx)\, dx \tag{6.2.152}$$

utilizando la identidad $2\sin(ax)\cos(by) = \sin(ax - by) + \sin(ax + by)$ se obtiene

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x - 2nx) + \sin(2x + 2nx)\, dx\right] \tag{6.2.153}$$

Si $n = 1$ lo anterior es

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x)\, dx\right] = -\frac{1}{4\pi}\cos(4x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{6.2.154}$$

Si $n \neq 1$ se tiene

$$-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2x(1-n))}{2(1-n)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos(2x(1+n))}{2(1+n)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \tag{6.2.155}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(\pi(n-1))}{2(1-n)} - \frac{1}{2(1-n)} + \frac{\cos(\pi(n+1))}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right] \tag{6.2.156}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-n+n+1}{2(1-n^2)} - \frac{(-1)^{n-1}}{2(1-n)} - \frac{(-1)^{n-1}}{2(n+1)}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(1-n^2)} + \frac{(-1)^n}{2(1-n)} + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\right] \tag{6.2.157}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \qquad n \geq 2 \tag{6.2.158}$$

De esta forma

$$|\sin(x)\cos(x)| = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(1-n^2)\pi}\cos(2nx) \tag{6.2.159}$$

b) Primero que todo la serie anterior sobrevive únicamente cuando n es par es decir, $n = 2k$, por lo que

$$|\sin(x)\cos(x)| = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(1-4k^2)\pi}\cos(4kx) \tag{6.2.160}$$

tomando $x = 0$ se obtiene

$$0 = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2} \tag{6.2.161}$$

o bien

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2} = -\frac{1}{2} \tag{6.2.162}$$

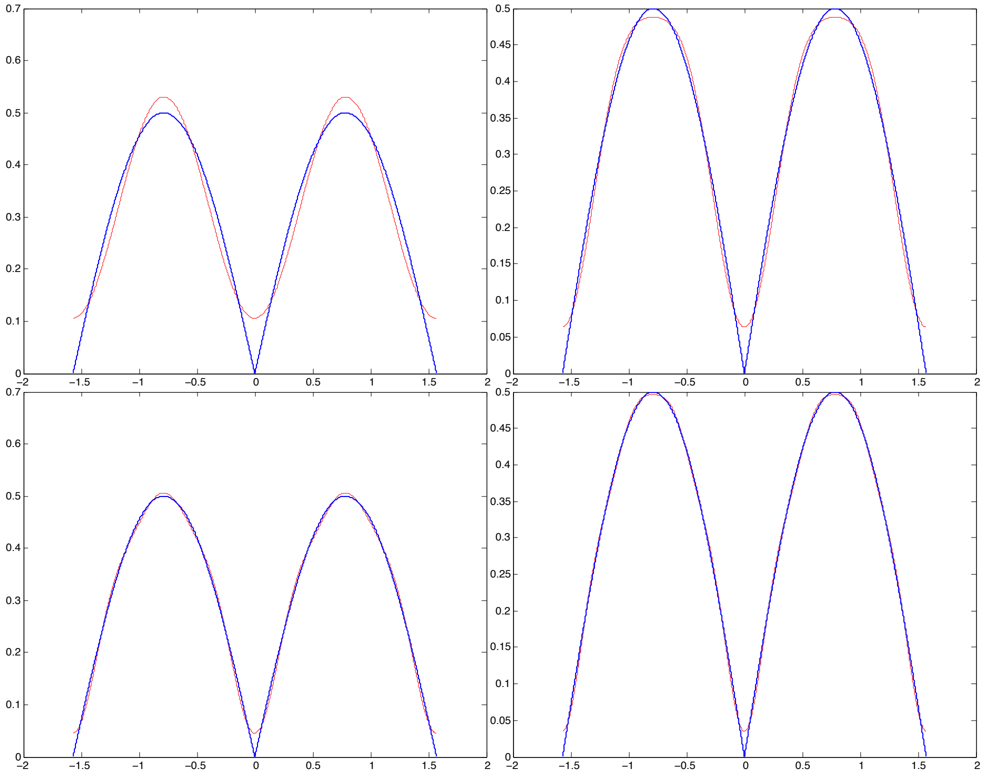

Figura 6.2.8: Serie de Fourier $f(x) = |\sin(x)\cos(x)|$. Sumas parciales $k = 1, 2, 3, 4$

Ejemplo 128. Una varilla de longitud L se hace coincidir con el intervalo $[0, L]$. Plantee el problema de valor de frontera para la temperatura $u(x, t)$ si a) el extremo izquierdo se mantiene a la temperatura cero y el derecho está aislado. La temperatura inicial de la variila en el punto x es $f(x)$. b) El extremo izquierdo se mantiene a la temperatura 100 y hay transmisión de calor desde el extremo derecho hacia el ambiente, el cual se encuentra a temperatura cero. La distribución de temperatura inicial es $f(x)$

a)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0 \end{cases} \tag{6.2.163}$$

b)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) & \\ u(0,t) = 100 & \\ u_x(L,t) = -hu(L,t) & h > 0 \end{cases} \tag{6.2.164}$$

donde la última condición se toma de la Ley de Enfriamiento de Newton.

Ejemplo 129. Una cuerda de longitud L se hace coincidir con el intervalo $[0, L]$. Plantee el problema de valor de frontera para el desplazamiento $u(x,t)$ si a) los extremos se mantienen fijos y la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $x(L-x)$. b) El extremo izquierdo se mantiene fijo, pero el extremo derecho se mueve de acuerdo con la función $\sin(\pi t)$. La cuerda parte del reposo desde un desplazamiento inicial $f(x)$. Para $t > 0$, las vibraciones se amortiguan con una fuerza proporcional a la velocidad instantánea.

a)

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \tag{6.2.165}$$

b)

$$\begin{cases} u_{tt} + c\frac{\partial u}{\partial t} = v^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = \sin(\pi t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \tag{6.2.166}$$

Ejemplo 130. Plantee el problema para la temperatura $u(x,y)$ del estado estable de una placa rectangular delgada que se hace coincidir con la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\}$ si el lado izquierdo y la cara inferior de la placa están aislados, la cara superior se mantiene a temperatura cero y el lado derecho a la temperatura $f(y)$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 \leq x \leq 4 \quad 0 \leq y \leq 2 \\ u_x(0,y) = 0 \\ u_y(x,0) = 0 \\ u(x,2) = 0 \\ u(4,y) = f(y) \end{cases} \tag{6.2.167}$$

Ejemplo 131. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, pruebe a partir de la definición que $\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}(s) = aF(as)$

Por definición

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{6.2.168}$$

Definiendo la función $g(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$ entonces

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} f\left(\frac{t}{a}\right)dt \tag{6.2.169}$$

se hace el cambio de variable $u = \frac{t}{a}$ para obtener

$$\int_0^\infty e^{-sua} f(u)adu = a\int_0^\infty e^{-sua} f(u)du = a\int_0^\infty e^{-(as)t} f(t)dt = aF(as) \tag{6.2.170}$$

Luego

$$G(s) = aF(as) \tag{6.2.171}$$

que es lo que se quería mostrar.

Ejemplo 132. Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

Se utiliza el diagrama de multiplicación por t y el hecho de que para funciones bien portadas $\lim_{s\longrightarrow\infty} F(s) = 0$.

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ tf(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & -\frac{dF}{ds} \end{tikzcd} \tag{6.2.172}$$

Ajustado al problema

$$\begin{tikzcd} \frac{\sin t}{t} \arrow[r, dashed, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \sin t \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{1}{s^2+1} \end{tikzcd} \tag{6.2.173}$$

Luego

$$\frac{dF}{ds} = -\frac{1}{s^2+1} \tag{6.2.174}$$

o bien

$$F = -\arctan(s) + c \tag{6.2.175}$$

como $\lim_{s\longrightarrow\infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}$ entonces se toma $c = \frac{\pi}{2}$. Luego

$$\mathscr{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) \tag{6.2.176}$$

Ejemplo 133. Suponga que la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y que la transformada de Laplace de $f'(t)$ existe. a) Verifique que $\mathcal{L}\left\{-te^{at}f'(t)\right\} = (s-a)F'(s-a)+F(s-a)$. b) Use la parte anterior para encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4(s-3)^2}{\left[(s-3)^2+4\right]^2} + \frac{2}{(s-3)^2+4}\right\}$

Se utilizan los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ -tf(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{dF}{ds} \end{tikzcd} \tag{6.2.177}$$

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ e^{at}f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & F(s-a) \end{tikzcd} \tag{6.2.178}$$

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \frac{df}{dt} \arrow[r, "\mathscr{L}"] & sF(s)-f(0) \end{tikzcd} \tag{6.2.179}$$

Es decir

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d] \\ \frac{df}{dt} \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & sF(s)-f(0) \arrow[d] \\ e^{at}\frac{df}{dt} \arrow[r, "\mathscr{L}"] \arrow[d] & (s-a)F(s-a)-f(0) \arrow[d] \\ -te^{at}\frac{df}{dt} \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \frac{d}{ds}\left((s-a)F(s-a)-f(0)\right) = (s-a)F'(s-a)+F(s-a) \end{tikzcd} \tag{6.2.180}$$

b) Se toma $F(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ y $a = 3$. Claramente $\frac{-4(s-3)^2}{\left[(s-3)^2+4\right]^2} + \frac{2}{(s-3)^2+4} = (s-a)F'(s-$

$a) + F(s-a)$ y por la parte $a)$ dado que $f(t) = \sin 2t$ se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-4(s-3)^2}{\left[(s-3)^2+4\right]^2}+\frac{2}{(s-3)^2+4}\right) = -2te^{3t}\cos 2t \tag{6.2.181}$$

Ejemplo 134. Pruebe que si $a \geq 0$ entonces $\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du$

Por las propiedades de la integral

$$\int_a^t f(u)du = \int_0^t f(u)du - \int_0^a f(u)du \tag{6.2.182}$$

Aplicando la transformada a ambos lados y usando el hecho de que $\int_0^a f(u)du$ es una constante se tiene

$$\mathscr{L}\left(\int_a^t f(u)du\right) = \mathscr{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) - \int_0^a f(u)du\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du \tag{6.2.183}$$

Ejemplo 135. Calcule la transformada de Laplace de t^p usando la función gamma y la definición

Nada más hay que recordar que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{6.2.184}$$

Por la definición de la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}t^p = \int_0^\infty e^{-st}t^p dt \tag{6.2.185}$$

usando el cambio de variable $r = st$ se tiene $dr = sdt$ por lo que

$$\int_0^\infty e^{-st}t^p dt = \int_0^\infty e^{-r}\left(\frac{r}{s}\right)^p \frac{dr}{s} = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-r}r^p dr = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \tag{6.2.186}$$

Índice de figuras

Índice alfabético

Bibliografía

[1]