Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009) 1916–1935

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Pure and Applied Algebra

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jpaa

Plongement de certaines théories homotopiques de Quillen dans les dérivateurs

Olivier Renaudin

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 20 March 2007
Received in revised form 1 August 2008
Available online 5 April 2009
Communicated by I. Moerdijk

MSC:
18G55
55U35

R É S U M É

On construit une bi-localisation de la 2-catégorie des catégories modèles de Quillen combinatoires relativement aux équivalences de Quillen, puis on vérifie que celle-ci se plonge dans une 2-catégorie de dérivateurs de Grothendieck.

L'objectif de ce papier est de comparer la 2-catégorie des théories homotopiques de Quillen combinatoires propres à gauche avec une 2-catégorie de dérivateurs de Grothendieck. La 2-catégorie $\mathfrak{THQ}^{cpg}$ des théories homotopiques de Quillen combinatoires propres à gauche est la bi-localisation de la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ des catégories modèles de Quillen combinatoires propres à gauche relativement aux équivalences de Quillen. Dans un premier temps, on utilise des résultats de D. Pronk et de D. Dugger pour produire une construction de la 2-catégorie $\mathfrak{THQ}^{cpg}$. Dans un second temps, on utilise des résultats de D.-C. Cisinski pour obtenir une équivalence locale $\mathfrak{THQ}^{cpg} \to \mathfrak{Der}_{ad}$ où $\mathfrak{Der}_{ad}$ désigne la 2-catégorie des dérivateurs à droite et à gauche avec les adjonctions pour 1-morphismes.

La première section est consacrée à quelques rappels concernant le cadre 2-catégorique du papier et à la notion de bi-localisation d'une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ relativement à une classe $\mathfrak{W}$ de ses 1-morphismes et plus la spécifiquement la notion de 2-catégorie de fraction introduite par D. Pronk dans [1]. Notamment D. Pronk construit une bi-localisation de $\mathfrak{C}$ relativement à $\mathfrak{W}$ lorsque la classe $\mathfrak{W}$ admet un calcul par fraction à droite.

Le but de la deuxième section est de construire une bi-localisation de la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ des modèles de Quillen combinatoires propres à gauche relativement aux équivalences de Quillen.

On introduit d'abord des objets cylindre et chemin dans la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}$ des modèles de Quillen, qui mènent naturellement aux homotopies de Quillen, i.e. aux transformations naturelles de $\mathfrak{ModQ}$ qui sont des équivalences faibles sur les cofibrants. L'intérêt principal de ces modèles cylindres pour la suite est qu'ils assurent qu'un pseudo-foncteur de source $\mathfrak{ModQ}$ qui envoie les équivalences de Quillen dans les équivalences, envoie également les homotopies de Quillen dans les isomorphismes.

On se place ensuite dans la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^{c}$ des modèles de Quillen combinatoires. On rappelle la notion de modèle présentable et le théorème de "résolution" de D. Dugger [2], selon lequel tout modèle combinatoire est but d'une équivalence de Quillen de source un modèle présentable. Suivant toujours des observations de D. Dugger [3], on énonce un résultat d'invariance homotopique qui reflète le caractère "cofibrant" des modèles présentables.

On utilise alors ces propriétés pour construire une 2-catégorie $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{cpg}$ et un pseudo-foncteur $\gamma : \mathfrak{ModQ}^{cpg} \to \underline{\mathfrak{ModQ}}^{cpg}$ initial parmi les pseudo-foncteurs de source $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ envoyant les homotopies de Quillen dans les 2-isomorphismes. On vérifie ensuite que les équivalences de Quillen dans $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{cpg}$ admettent un calcul par fraction à droite. On en déduit

E-mail address: o_renaudin@yahoo.fr.

0022-4049/$ – see front matter © 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.jpaa.2009.02.014

par les résultats de D. Pronk [1] la construction d'une bi-localisation $\Gamma : \mathfrak{ModQ}^{cpg} \to \mathfrak{THQ}^{cpg}$ de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ relativement aux équivalences de Quillen.

Enfin, on termine la deuxième section en indiquant comment les considérations qui précèdent s'appliquent également, d'une part aux modèles pointés et aux modèles stables, et d'autre part aux modèles simpliciaux et aux modèles spectraux, en utilisant à nouveau des observations de D. Dugger.

La troisième section débute par le rappel de définitions concernant les dérivateurs. On rappelle ensuite sommairement la construction, dû à D.-C. Cisinski [4], d'un pseudo-foncteur de la 2-catégorie des modèles de Quillen dans celle des dérivateurs, dont on déduit un pseudo-foncteur $\mathfrak{THQ}^{cpg} \to \mathfrak{Der}_{ad}$. En utilisant un théorème de représentation également de D.-C. Cisinski [5], on vérifie que ce dernier pseudo-foncteur est une équivalence locale. Pour clore cette section, on ébauche l'étude de l'image essentielle de ce même pseudo-foncteur en introduisant les dérivateurs de petite présentation.

Je remercie le referee pour ses commentaires instructifs et ses suggestions détaillées, notamment concernant l'utilisation des travaux de D. Pronk [1]. Une première version du présent article exposait des résultats très similaires à ceux présentés ici, mais basés sur la notion, plus rigide, de pseudo-localisation (cf. [6]).

1. Préliminaires 2-catégoriques

On note $\mathfrak{Cat}$ la 2-catégorie des petites catégories, et $\mathfrak{CAT}$ la 2-catégorie de toutes les catégories.

1.1. Rappels

On rappelle dans cette section quelques définitions concernant les 2-catégories, pseudo-foncteurs, transformations pseudo-naturelles…(cf. e.g. [7,8]), qui constituent le cadre dans lequel s'inscrivent les sections suivantes.

Une 2-catégorie est une $\mathfrak{CAT}$-catégorie, i.e. une catégorie enrichie sur la catégorie des catégories. On note e la 2-catégorie ponctuelle.

Définition 1.1.1. Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ deux 2-catégories. Un *pseudo-foncteur* $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est la donnée:

- d'une fonction $\Phi : Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\mathfrak{D})$,
- pour tout $c, c' \in Ob(\mathfrak{C})$, d'un foncteur $\Phi_{c,c'} : \mathfrak{C}(c, c') \longrightarrow \mathfrak{D}(\Phi(c), \Phi(c'))$,
- pour tout $c, c', c'' \in Ob(\mathfrak{C})$, des isomorphismes naturels

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(c,c') \times \mathfrak{C}(c',c'') \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\Phi_{c,c'} \times \Phi_{c',c''}"'] & \mathfrak{C}(c,c'') \arrow[d, "\Phi_{c,c''}"] \\ \mathfrak{D}(\Phi(c),\Phi(c')) \times \mathfrak{D}(\Phi(c'),\Phi(c'')) \arrow[r, "\circ"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{m}^{\Phi}_{cc'c''}"] & \mathfrak{D}(\Phi(c),\Phi(c'')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[r, "Id_c"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{C}(c,c) \arrow[d, "\Phi_{c,c'}"] \\ e \arrow[r, "Id_{\Phi(c)}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{u}^{\Phi}_c"] & \mathfrak{D}(\Phi(c),\Phi(c)) \end{tikzcd}$$

soit, pour tout $c \in Ob(\mathfrak{C})$, d'un 2-isomorphisme $\mathrm{u}^{\Phi}_c : Id_{\Phi(c)} \xrightarrow{\sim} \Phi(Id_c)$, et pour toute paire f, g de 1-morphismes composables de $\mathfrak{C}$, d'un 2-isomorphisme $\mathrm{m}^{\Phi}_{g,f} : \Phi(g) \circ \Phi(f) \xrightarrow{\sim} \Phi(g \circ f)$ naturel en f et en g,

telle que les diagrammes suivants commutent:

- Axiome d'associativité:

$$\begin{tikzcd} \Phi(h) \circ \Phi(g) \circ \Phi(f) \arrow[r, "\Phi(h) \circ \mathrm{m}^{\Phi}_{g,f}"] \arrow[d, "\mathrm{m}^{\Phi}_{h,g} \circ \Phi(f)"'] & \Phi(h) \circ \Phi(g \circ f) \arrow[d, "\mathrm{m}^{\Phi}_{h,g\circ f}"] \\ \Phi(h \circ g) \circ \Phi(f) \arrow[r, "\mathrm{m}^{\Phi}_{h\circ g,f}"'] & \Phi(h \circ g \circ f) \end{tikzcd}$$

- Axiomes d'unité:

$$\begin{tikzcd} Id_{\Phi(c)} \circ \Phi(f) \arrow[r, "\mathrm{u}^{\Phi}_c \circ \Phi(f)"] \arrow[d, equal] & \Phi(Id_c) \circ \Phi(f) \arrow[d, "\mathrm{m}^{\Phi}_{Id_c,f}"] \\ \Phi(f) \arrow[r, equal] & \Phi(Id_c \circ f) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi(f) \circ Id_{\Phi(c)} \arrow[r, "\Phi(f) \circ \mathrm{u}^{\Phi}_c"] \arrow[d, equal] & \Phi(f) \circ \Phi(Id_c) \arrow[d, "\mathrm{m}^{\Phi}_{f,Id_c}"] \\ \Phi(f) \arrow[r, equal] & \Phi(f \circ Id_c) \end{tikzcd}$$

Un 2-foncteur est un pseudo-foncteur dont les isomorphismes structuraux u et m sont des morphismes identités.

Définition 1.1.2. Soient deux 2-catégories $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ et deux pseudo-foncteurs $\Phi, \Psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Une *transformation pseudo-naturelle* $\alpha : \Phi \Rightarrow \Psi$ est la donnée:

- pour tout $c \in Ob(\mathfrak{C})$, d'un 1-morphisme $\alpha_c : \Phi(c) \to \Psi(c)$,
- pour tout $c, c' \in Ob(\mathfrak{C})$, d'un isomorphisme naturel

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(c,c') \arrow[r, "\Psi_{c,c'}"] \arrow[d, "\Phi_{c,c'}"'] & \mathfrak{D}(\Psi(c),\Psi(c')) \arrow[d, "(\alpha_c)^*"] \\ \mathfrak{D}(\Phi(c),\Phi(c')) \arrow[r, "(\alpha_{c'})_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\lambda^{\alpha}_{cc'}"] & \mathfrak{D}(\Phi(c),\Psi(c')) \end{tikzcd}$$

soit, pour tout 1-morphisme $f : c \to c'$ de $\mathfrak{C}$, d'un 2-isomorphisme $\lambda^{\alpha}_f : \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \xrightarrow{\sim} \Psi(f) \circ \alpha_c$ naturel en f,

telle que les diagrammes suivants commutent:

Axiome de composition:

$$\begin{tikzcd} \alpha_{c''} \circ \Phi(g) \circ \Phi(f) \arrow[r, "\lambda^{\alpha}_g * Id"] \arrow[d, "Id * m^{\Phi}_{g,f}"'] & \Psi(g) \circ \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "Id * \lambda^{\alpha}_f"] & \Psi(g) \circ \Psi(f) \circ \alpha_c \arrow[d, "m^{\Psi}_{g,f} * Id"] \\ \alpha_{c''} \circ \Phi(g \circ f) \arrow[rr, "\lambda^{\alpha}_{g \circ f}"'] & & \Psi(g \circ f) \circ \alpha_c \end{tikzcd}$$

Axiome d'unité:

$$\begin{tikzcd} \alpha_c \circ Id_{\Phi(c)} \arrow[r, equal] \arrow[d, "Id * u^{\Phi}_c"'] & Id_{\Psi(c)} \circ \alpha_c \arrow[d, "u^{\Psi}_c * Id"] \\ \alpha_c \circ \Phi(Id_c) \arrow[r, "\lambda^{\alpha}_{Id}"'] & \Psi(Id_c) \circ \alpha_c \end{tikzcd}$$

Une transformation naturelle est une transformation pseudo-naturelle dont les isomorphismes structuraux λ sont des morphismes identités.

Définition 1.1.3. Soient deux 2-catégories $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, deux pseudo-foncteurs $\Phi, \Psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ et deux transformations pseudo-naturelles $\alpha, \beta : \Phi \Rightarrow \Psi$. Une *modification* $\theta : \alpha \Rrightarrow \beta$ est la donnée, pour tout $c \in Ob(\mathfrak{C})$, d'un 2-morphisme $\theta_c : \alpha_c \to \beta_c$ tels que, pour tout 1-morphisme $f : c \to c' \in \mathfrak{C}$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "\lambda^{\alpha}_f"] \arrow[d, "\theta_{c'} * Id"'] & \Psi(f) \circ \alpha_c \arrow[d, "Id * \theta_c"] \\ \beta_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "\lambda^{\beta}_f"'] & \Psi(f) \circ \beta_c \end{tikzcd}$$

Avec des compositions évidentes, on obtient une 3-catégorie 2-$\mathfrak{CAT}_{ps}$ dont les objets sont les 2-catégories, dont les 1-morphismes sont les pseudo-foncteurs, dont les 2-morphismes sont les transformations pseudo-naturelles, et dont les 3-morphismes sont les modifications.

Définition 1.1.4. Un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est une *équivalence locale* (resp. un *plongement*) si, pour tout $c, c' \in Ob(\mathfrak{C})$, le foncteur $\Phi_{c,c'} : \mathfrak{C}(c,c') \longrightarrow \mathfrak{D}(\Phi(c), \Phi(c'))$ est une équivalence de catégorie (resp. un isomorphisme).

Un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est *2-essentiellement surjectif* (resp. *essentiellement surjectif*) si, pour tout $d \in Ob(\mathfrak{D})$, il existe $c \in Ob(\mathfrak{C})$ et une équivalence (resp. un isomorphisme) $\Phi(c) \to d$.

Un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est une *biéquivalence* (resp. une *équivalence*) s'il existe un pseudo-foncteur $\Psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ et des équivalences (resp. des isomorphismes) $\Phi \circ \Psi \longrightarrow Id$ et $Id \longrightarrow \Psi \circ \Phi$.

Proposition 1.1.5 ([8]). *Un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est une biéquivalence si et seulement s'il est une équivalence locale et 2-essentiellement surjectif.* □

Dans la suite, on utilisera la remarque suivante.

Proposition 1.1.6. *Soient deux 2-catégories $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, deux pseudo-foncteurs $\Phi, \Psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ et une transformation pseudo-naturelle $\alpha : \Phi \Rightarrow \Psi$. L'axiome d'unité de α est redondant: il découle des axiomes d'unité de Φ et Ψ et de l'axiome de composition de α.*

Démonstration. Des axiomes d'unité de Φ et Ψ, il découle, pour tout 1-morphisme $f : c \to c' \in \mathfrak{C}$, la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "\mathrm{u}^{\Psi}_{c'} * Id"] \arrow[dr, "\lambda^{\alpha}_{f}"] \arrow[ddr, equal] \arrow[dd, "Id * \mathrm{u}^{\Phi}_{c'} * Id"'] & \Psi(Id_{c'}) \circ \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "Id * \lambda^{\alpha}_{f}"] & \Psi(Id_{c'}) \circ \Psi(f) \circ \alpha_c \arrow[dd, "\mathrm{m}^{\Psi}_{Id,f} * Id"] \\
 & \Psi(f) \circ \alpha_c \arrow[ur, "\mathrm{u}^{\Psi}_{c'} * Id"'] \arrow[dr, equal] & \\
\alpha_{c'} \circ \Phi(Id_{c'}) \circ \Phi(f) \arrow[r, "Id * \mathrm{m}^{\Psi}_{Id,f}"'] & \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, "\lambda^{\alpha}_{f}"'] & \Psi(f) \circ \alpha_c
\end{tikzcd}$$

Par comparaison avec l'axiome de composition de α pour les 1-morphismes $Id_{c'}$ et f, on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[r, equal] \arrow[d, "Id * \mathrm{u}^{\Phi}_{c'} * Id"'] & \alpha_{c'} \circ \Phi(f) \arrow[d, "\mathrm{u}^{\Psi}_{c'} * Id"] \\
\alpha_{c'} \circ \Phi(Id_{c'}) \circ \Phi(f) \arrow[r, "\lambda^{\alpha}_{Id_{c'}} * Id"'] & \Psi(Id_{c'}) \circ \alpha_{c'} \circ \Phi(f)
\end{tikzcd}$$

En choisissant $f = Id_{c'}$ et en utilisant le 2-isomorphisme $\mathrm{u}^{\Phi}_{c'} : Id_{\Phi(c')} \xrightarrow{\sim} \Phi(Id_{c'})$, on obtient l'axiome d'unité de α.

1.2. Bi-localisation et 2-catégorie de fractions

Cette section présente quelques rappels concernant la bi-localisation d'une une 2-catégorie relativement à une classe de 1-morphismes et la notion de 2-catégorie de fraction introduite par D. Pronk dans [1, Sections 2 et 3].

Dans toute cette section, on considère une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe $\mathfrak{W}$ de ses 1-morphismes. Pour deux 2-catégories $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, on note $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ pour $2\text{-}\mathfrak{CAT}_{ps}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$, la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{D}$.

Définition 1.2.1. Une *bi-localisation* de $\mathfrak{C}$ relativement à $\mathfrak{W}$ est la donnée d'une 2-catégorie $\mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}]$ dotée d'un pseudo-foncteur $\Gamma : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}]$ envoyant $\mathfrak{W}$ dans les équivalences, tels que, pour toute 2-catégorie $\mathfrak{D}$, le 2-foncteur induit

$$\Gamma^* : [\mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}], \mathfrak{D}] \longrightarrow [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{W}}$$

est une bi-équivalence de 2-catégories, où $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{W}}$ désigne la sous-2-catégorie pleine de $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ constituée des pseudo-foncteurs envoyant $\mathfrak{W}$ dans les équivalences.

En particulier, pour tout pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ envoyant $\mathfrak{W}$ dans les équivalences de $\mathfrak{D}$, il existe un pseudo-foncteur $\widetilde{\Phi} : \mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}] \to \mathfrak{D}$, unique à équivalence près, tel que $\widetilde{\Phi} \circ \Gamma$ soit équivalent à Φ. La propriété universelle de $\Gamma : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}]$ énoncée dans ce théorème caractérise la bi-localisation $\mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}]$ à biéquivalence près.

La notion de bi-localisation est étudiée dans [1] dans le cas où la classe $\mathfrak{W}$ admet un calcul par fraction à droite. Cet article propose en particulier, sous cette hypothèse, une construction de la bi-localisation.

Définition 1.2.2. Une classe $\mathfrak{W}$ de 1-morphismes d'une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ admet un calcul par fraction à droite si elle satisfait aux cinq conditions suivantes:

BF1 La classe $\mathfrak{W}$ contient les équivalences.
BF2 La classe $\mathfrak{W}$ est stable par composition.
BF3 Pour toutes paires de 1-morphismes $f : a \to b$ et $w : c \to b$ où $w \in \mathfrak{W}$, il existe un 2-isomorphisme α:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & c \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "w"'] & b
\end{tikzcd}$$

où $v \in \mathfrak{W}$.

BF4 Pour tout 2-morphisme $\alpha : w \circ f \Rightarrow w \circ g$ tel que $w \in \mathfrak{W}$, il existe un 1-morphisme $v \in \mathfrak{W}$ et un 2-morphisme $\beta : f \circ v \Rightarrow g \circ v$ tels que $\alpha \circ v = w \circ \beta$. De plus, si α est un 2-isomorphisme, il est requis que β soit également un 2-isomorphisme. Si v' et β' vérifie les mêmes conditions que v et β, il existe des 1-morphismes u et u' tels que $v \circ u \in \mathfrak{W}$ et $v' \circ u' \in \mathfrak{W}$, et un 2-isomorphisme $\epsilon : v \circ u \Rightarrow v' \circ u'$ tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
f \circ v \circ u \arrow[r, "\beta \circ u"] \arrow[d, "f \circ \epsilon"'] & g \circ v \circ u \arrow[d, "g \circ \epsilon"] \\
f \circ v' \circ u' \arrow[r, "\beta' \circ u'"'] & g \circ v' \circ u'
\end{tikzcd}$$

BF5 Pour tout 2-isomorphisme $\alpha : w \Rightarrow v$, si $w \in \mathfrak{W}$, alors $v \in \mathfrak{W}$.

En présence d'une une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et d'une classe $\mathfrak{W}$ de 1-morphismes de $\mathfrak{C}$ admettant un calcul par fraction à droite, D. Pronk construit une 2-catégorie de fraction $\mathfrak{C}/\mathfrak{W}$ et un pseudo-foncteur $U : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}/\mathfrak{W}$ envoyant $\mathfrak{W}$ dans les équivalences de $\mathfrak{C}/\mathfrak{W}$.

Théorème 1.2.3 ([1, Theorem 21]). *Soient une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe de 1-morphismes $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{C}$ admettant un calcul par fraction à droite. Le pseudo-foncteur $U : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}/\mathfrak{W}$ est une bi-localisation.* □

En particulier, l'existence d'un calcul par fraction à droite assure l'existence de la bi-localisation. Les détails de la construction d'une 2-catégorie de fraction ne seront pas utilisés dans la suite.

D. Pronk fournit également un critère permettant d'identifier les pseudo-foncteurs induisant une biéquivalence au niveau des bi-localisations.

Théorème 1.2.4 ([1, Theorem 24]). *Soient une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe de 1-morphismes $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{C}$ admettant un calcul par fraction à droite. Soit un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ envoyant $\mathfrak{W}$ dans les équivalences de $\mathfrak{D}$. Un pseudo-foncteur $\widetilde{\Phi} : \mathfrak{C}[\mathfrak{W}^{-1}] \to \mathfrak{D}$ induit par Φ, tel que $\widetilde{\Phi} \circ \Gamma$ soit équivalent à Φ, est une biéquivalence si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

B1 *Pour tout morphisme g de $\mathfrak{D}$ de source et de but dans l'image de Φ, il existe des morphismes f de $\mathfrak{C}$ et w de $\mathfrak{W}$ et un 2-isomorphisme $\Phi(f) \overset{\sim}{\Rightarrow} g \circ \Phi(w)$.*
B2 *Le pseudo-foncteur Φ est pleinement fidèle sur les 2-morphismes.*
B3 *Le pseudo-foncteur Φ est 2-essentiellement surjectif.* □

Tout pseudo-foncteur équivalent à un pseudo-foncteur vérifiant les axiomes B1, B2 et B3 satisfait également ces axiomes. Comme $\widetilde{U}$ est équivalent au 2-foncteur identité, le pseudo-foncteur U vérifie les axiomes B1, B2 et B3.

2. Théories homotopiques de Quillen combinatoires propres à gauche

On note $\mathfrak{ModQ}$ la 2-catégorie des modèles de Quillen [9]. Un 1-morphisme $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est une adjonction de Quillen $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : F^\flat$. Un 2-morphisme $\tau : F \to G$ de $\mathfrak{ModQ}$ est une transformation naturelle des adjoints à gauche $F \to G$. On note $\mathfrak{Q}$ la classe des 1-morphismes de $\mathfrak{ModQ}$ constituée des équivalences de Quillen.

2.1. Homotopies de Quillen et modèles chemins

2.1.1. Modèles chemins, modèles cylindres

On note $[n]$ l'ensemble ordonné $\{0 < \cdots < n\}$ considéré comme une catégorie. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie modèle. La factorisation de la codiagonale $[0] \amalg [0] \xrightarrow{i} [1] \xrightarrow{p} [0]$ induit un diagramme:

$$\mathcal{M} \underset{p_*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}^{[1]} \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$$

où p^* est le foncteur "diagramme constant", $i^* = (e_0, e_1), p_* = e_0$, en notant e_i l'évaluation en i, et $i_*(M_0, M_1) = (M_0 \times M_1 \to M_1)$.

En considérant la catégorie [1] comme une catégorie indirecte, on peut munir $\mathcal{M}^{[1]}$ d'une structure de catégorie modèle de Reedy [10, Chapter 15], qui n'est autre que la structure injective: un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{M}^{[1]}$ est:

- une cofibration si $f_i : X_i \to Y_i$ est une cofibration pour $i = 0, 1$,
- une équivalence faible si $f_i : X_i \to Y_i$ est une équivalence faible pour $i = 0, 1$,
- une fibration si $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $X_0 \to X_1 \times_{Y_1} Y_0$ sont des fibrations.

Les adjonctions (p^*, p_*) et (i^*, i_*) sont ainsi des adjonctions de Quillen.

Dans le but de construire un "objet chemin" relativement aux équivalences de Quillen dans $\mathfrak{ModQ}$, on considère la localisation de Bousfield à droite [10, 3.3.1(2)] relativement aux e_0-équivalences de la structure injective de $\mathcal{M}^{[1]}$.

Proposition 2.1.1. *La catégorie $\mathcal{M}^{[1]}$ possède une structure de catégorie modèle telle qu'un morphisme $f : X \to Y$ est:*

- *une fibration si $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $X_0 \to X_1 \times_{Y_1} Y_0$ sont des fibrations,*
- *une équivalence faible si $f_0 : X_0 \to Y_0$ est une équivalence faible,*
- *une cofibration si $f_i : X_i \to Y_i$ est une cofibration pour $i = 0, 1$, et $X_1 \amalg_{X_0} Y_0 \to Y_1$ est une équivalence faible.*

On note $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$ cette catégorie modèle.

Démonstration. Les fibrations et équivalences faibles de l'énoncé sont, par définition, celles de la structure localisée de Bousfield à droite de la structure injective relativement aux e_0-équivalences. L'existence de la structure de modèle localisé est équivalente à celle de la factorisation "cofibration locale/fibration triviale locale". On va d'abord montrer que les cofibrations de l'énoncé sont des cofibrations locales, puis produire la factorisation requise.

Soient deux morphismes $A \to B$ et $X \to Y$ de $\mathcal{M}^{[1]}$, respectivement une cofibration et une fibration triviale de l'énoncé. On fixe un morphisme du premier vers le second

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

et on note $f : A \to Y$ la composée. Il s'agit de construire un relèvement $B \to X$.

On se place dans la catégorie $\mathcal{M}^{[1]}(f)$ des factorisations du morphisme $f : A \to Y$, i.e. la catégorie $f/(\mathcal{M}^{[1]}/Y)$ des objets au-dessous de f dans celle des objets de $\mathcal{M}^{[1]}$ au-dessus de Y. Cette catégorie est munie de la structure modèle induite par la structure injective de $\mathcal{M}^{[1]}$. Comme il n'y aura pas d'ambiguité sur les morphismes structuraux, on dénotera les objets de $\mathcal{M}^{[1]}(f)$ par leur objet central.

On note B' l'objet $(B_0 \to B_0 \amalg_{A_0} A_1)$ de $\mathcal{M}^{[1]}$ donné par l'injection canonique. Le fait que le morphisme $A \to B$ soit une cofibration de $\mathcal{M}^{[1]}$ signifie, d'une part, que les morphismes $A_0 \to B_0$, $A_1 \to B_0 \amalg_{A_0} A_1$ et $A_1 \to B_1$ sont des cofibrations, et, d'autre part, que le morphisme $B_0 \amalg_{A_0} A_1 \to B_1$ est une équivalence faible. Autrement dit, que le morphisme $B' \to B$ de $\mathcal{M}^{[1]}(f)$:

$$(B_0 \to B_0 \amalg_{A_0} A_1) \longrightarrow (B_0 \to B_1)$$

est une équivalence faible entre cofibrants. Le fait que le morphisme $X \to Y$ soit une fibration de $\mathcal{M}^{[1]}$ signifie que X est un objet fibrant de $\mathcal{M}^{[1]}(f)$. Comme le morphisme $X \to Y$ est une fibration triviale de $\mathcal{M}^{[1]}$, $X_0 \to Y_0$ est une fibration triviale, et comme $A_0 \to B_0$ est une cofibration, on a un relèvement:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ B_0 \arrow[r] \arrow[ur] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Le morphisme composé $B_0 \to X_0 \to X_1$ et le morphisme $A_1 \to X_1$ déterminent un morphisme $B_0 \amalg_{A_0} A_1 \to X_1$ dont on tire un morphisme $B' \to X$ de $\mathcal{M}^{[1]}$. Comme $B' \to B$ est une équivalence faible entre cofibrants et X un objet fibrant, le morphisme $B' \to X$ s'étend, à homotopie près, en un morphisme $B \to X$ [10, 7.8.6], et on a ainsi obtenu le relèvement requis.

On va maintenant montrer que tout morphisme $f : X \to Y \in \mathcal{M}^{[1]}$ se factorise en une cofibration de l'énoncé suivie d'une fibration de l'énoncé (i.e. injective). On factorise f_0 en une cofibration suivie d'une fibration triviale $X_0 \to E'_0 \to Y_0$. Les morphismes $E'_0 \to Y_0 \to Y_1$ et $X_1 \to Y_1$ induisent par propriété universelle un morphisme $X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \to Y_1$. On factorise ce dernier morphisme en une cofibration triviale suivie d'une fibration $X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \to E_1 \to Y_1$. Le morphisme composé $X_1 \to X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \to E_1$ est ainsi une cofibration. En introduisant le produit fibré $E_1 \times_{Y_1} Y_0$, on obtient donc le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "cof."'] \arrow[rrrr, bend left] \arrow[dd] & & E'_0 \arrow[rr, "fib.triv."'] \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & & Y_0 \arrow[dd] \\ & X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \arrow[dr] & & E_1 \times_{Y_1} Y_0 \arrow[ur, "fib."'] \arrow[dl] & \\ X_1 \arrow[ur, "cof."] \arrow[rr, "cof."] \arrow[rrrr, bend right] & & E_1 \arrow[rr, "fib."] & & Y_1 \end{tikzcd}$$

Le morphisme $E'_0 \to E_1 \times_{Y_1} Y_0$ se factorise en une cofibration triviale suivie d'une fibration $E'_0 \to E_0 \to E_1 \times_{Y_1} Y_0$. Le morphisme $E_0 \to Y_0$ ainsi obtenu est une fibration triviale, par l'axiome "deux sur trois". Comme $E'_0 \to E_0$ est une cofibration triviale, il en va de même de $X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \to X_1 \amalg_{X_0} E_0$, et comme $X_1 \amalg_{X_0} E'_0 \to E_1$ est également une cofibration triviale, le morphisme $X_1 \amalg_{X_0} E_0 \to E_1$, obtenu par propriété universelle, est une équivalence faible. On a donc la factorisation voulue:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[rr, "cof."'] \arrow[dd] \arrow[rrrr, bend left] & & E_0 \arrow[rr, "fib.triv."'] \arrow[dl] \arrow[dr, "fib."'] \arrow[dd] & & Y_0 \arrow[dd] \\
& X_1 \amalg_{X_0} E_0 \arrow[dr, "eq.f."] & & E_1 \times_{Y_1} Y_0 \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
X_1 \arrow[rr, "cof."] \arrow[ur] \arrow[rrrr, bend right] & & E_1 \arrow[rr, "fib."] & & Y_1
\end{tikzcd}$$

Enfin, avec l'argument de rétracte habituel, la factorisation ci-dessus appliquée à une cofibration locale montre que les cofibrations de l'énoncé coïncident avec les cofibrations locales. $\square$

Il est clair que les foncteurs $p^* : \mathcal{M} \to \mathcal{C}h(\mathcal{M})$ et $i^* : \mathcal{C}h(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ préservent cofibrations et cofibrations triviales, et que l'on a donc deux morphismes de $\mathfrak{ModQ}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, shift left, "p^*"] & \mathcal{C}h(\mathcal{M}) \arrow[l, shift left, "p_*"] \arrow[r, shift left, "i^*"] & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \arrow[l, shift left, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

Qui plus est, comme l'unité de la paire (p^*, p_*) est un isomorphisme et e_0 préserve et reflète les équivalences faibles, cette paire est une équivalence de Quillen. La catégorie modèle $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$ est appelée le *modèle chemin* de $\mathcal{M}$.

Dualement, on a un *modèle cylindre* $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ défini par $\mathcal{C}yl(\mathcal{M}) = \mathcal{C}h(\mathcal{M}^{op})^{op}$, et qui s'inscrit dans un diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \times \mathcal{M} \arrow[r, shift left, "i_!"] & \mathcal{C}yl(\mathcal{M}) \arrow[l, shift left, "i^*"] \arrow[r, shift left, "p_!"] & \mathcal{M} \arrow[l, shift left, "p^*"]
\end{tikzcd}$$

où $p_! = e_1$. La catégorie modèle $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ est la localisation de Bousfield à gauche relativement aux e_1-équivalences de la structure projective de $\mathcal{M}^{[1]}$.

2.1.2. Homotopies de Quillen

Définition 2.1.2. Soient $F_0, F_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux morphismes de $\mathfrak{ModQ}$.

1. Une *homotopie de Quillen* de F_0 vers F_1 est une transformation naturelle $\tau : F_0 \to F_1$ telle que $\tau_M : F_0(M) \to F_1(M)$ soit une équivalence faible lorsque M est cofibrant.
2. Les morphismes F_0 et F_1 sont *Quillen-homotopes* s'ils sont connectés par un zigzag d'homotopies de Quillen.

On note $\mathcal{Q}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$, ou plus simplement $\mathcal{Q}$, la classe des homotopies de Quillen de $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Remarque 2.1.3. Suivant [9, 1.3.18], la transformation naturelle de foncteurs dérivés totaux $\mathbf{L}(\tau) : \mathbf{L}(F_0) \to \mathbf{L}(F_1)$ induite par un 2-morphisme $\tau : F_0 \to F_1$ de $\mathfrak{ModQ}$ est un isomorphisme si et seulement si $\tau_M : F_0(M) \to F_1(M)$ est une équivalence faible pour tout M cofibrant. Il en découle qu'un morphisme de $\mathfrak{ModQ}$ Quillen-homotope à une équivalence de Quillen est également une équivalence de Quillen.

Proposition 2.1.4. *Soient $F, G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux morphismes de $\mathfrak{ModQ}$. La donnée d'une homotopie de Quillen $\tau : F \to G$ est équivalente à la donnée d'un morphisme $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}h(\mathcal{N})$ de $\mathfrak{ModQ}$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "(F,G)"'] & \mathcal{C}h(\mathcal{N}) \arrow[d, "i^*"] \\
& \mathcal{N} \times \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

avec $H(M) = (\tau_M : F(M) \to G(M))$ pour tout $M \in \mathcal{M}$.

Démonstration. On note d'abord que la donnée d'un foncteur $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}^{[1]}$ tel que $i^* \circ H = (F, G)$ est équivalente à celle d'une transformation naturelle $\tau^H : F \to G$ avec $H(M) = (\tau^H_M : F(M) \to G(M))$ pour tout $M \in \mathcal{M}$.

De plus, un tel foncteur H possède un adjoint à droite si et seulement si F et G possèdent un adjoint à droite. En effet, d'une part, i^* possède un adjoint à droite, et, d'autre part, si on note $F^\flat$ et $G^\flat$ des adjoints à droite de F et G respectivement, le foncteur $H^\flat : \mathcal{N}^{[1]} \longrightarrow \mathcal{N}$, qui à $X = (X_< : X_0 \to X_1) \in \mathcal{N}^{[1]}$ associe le produit fibré de $F^\flat(X_<) : F^\flat(X_0) \longrightarrow F^\flat(X_1)$ et de $(\tau^H)^\flat_{X_1} : G^\flat(X_1) \to F^\flat(X_1)$ (où $(\tau^H)^\flat$ désigne la transformation conjuguée de τ^H), est un adjoint à droite de H.

Un objet X de $\mathcal{C}h(\mathcal{N})$ est cofibrant si et seulement si $X_< : X_0 \to X_1$ est une équivalence faible entre cofibrants. Donc un foncteur $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}h(\mathcal{N})$ tel que $i^* \circ H = (F, G)$ préserve les cofibrants si et seulement si $\tau^H_M : F(M) \to G(M)$ est une équivalence faible pour tout M cofibrant, autrement dit si τ^H est une homotopie de Quillen. Il reste donc à vérifier qu'un foncteur $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}h(\mathcal{N})$ tel que $i^* \circ H = (F, G)$ est un morphisme de $\mathfrak{ModQ}$ si et seulement s'il préserve les cofibrants.

Lorsque $\mathcal{N}^{[1]}$ est munie de la structure injective, $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}^{[1]}$ est un morphisme de $\mathfrak{ModQ}$ si et seulement si F et G le sont également. Comme les cofibrations triviales injectives et les cofibrations triviales locales coïncident, le foncteur $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}h(\mathcal{N})$ détermine un morphisme de $\mathfrak{ModQ}$ si et seulement s'il préserve les cofibrations entre cofibrants [10, 8.5.4]. Cela nécessite évidemment que H préserve les cofibrants. Réciproquement, l'image par H d'une cofibration entre cofibrants $f : M \to M'$ de $\mathcal{M}$ est représenté par le carré extérieur du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dd, "\tau^H_M"'] & & F(M') \arrow[dl] \arrow[dd, "\tau^H_{M'}"] \\
& F(M') \amalg_{F(M)} G(M) \arrow[dr] & \\
G(M) \arrow[ur] \arrow[rr, "G(f)"'] & & G(M')
\end{tikzcd}$$

où $F(f)$ et $G(f)$ sont des cofibrations entre cofibrants et τ^H_M et $\tau^H_{M'}$ des équivalences faibles entre cofibrants. Il s'en suit [10, 13.1.2] que le morphisme $F(M') \longrightarrow F(M') \amalg_{F(M)} G(M)$ et donc le morphisme $F(M') \amalg_{F(M)} G(M) \longrightarrow G(M')$ sont des équivalences faibles, ce qui montre que si H préserve les cofibrants, alors il préserve les cofibrations entre cofibrants. □

Corollaire 2.1.5. *Soit $\mathfrak{ModQ}^\dagger$ une sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{ModQ}$. Soient $\mathfrak{C}$ une 2-catégorie et $\Phi : \mathfrak{ModQ}^\dagger \longrightarrow \mathfrak{C}$ un pseudo-foncteur envoyant les équivalences de Quillen dans les équivalences de $\mathfrak{C}$. Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathfrak{ModQ}^\dagger$ tels que le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ ou le modèle chemin $\mathcal{C}h(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$ appartienne à $\mathfrak{ModQ}^\dagger$. Alors le foncteur $\Phi_{\mathcal{M},\mathcal{N}} : \mathfrak{ModQ}^\dagger(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathfrak{C}(\Phi(\mathcal{M}), \Phi(\mathcal{N}))$ envoie les homotopies de Quillen dans les isomorphismes.*

Démonstration. Soient $F, G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux morphismes de $\mathfrak{ModQ}^\dagger$ et $\tau : F \to G$ une homotopie de Quillen. Il faut montrer que $\Phi_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(\tau)$ est un isomorphisme. On suppose que le modèle chemin $\mathcal{C}h(\mathcal{N})$ appartient à $\mathfrak{ModQ}^\dagger$: le cas où le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ appartient à $\mathfrak{ModQ}^\dagger$ s'obtient par dualité. Soit $H_\tau : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}h(\mathcal{N})$ le morphisme de $\mathfrak{ModQ}^\dagger$ correspondant à τ (cf. Proposition 2.1.4). On note $\alpha : e_0 \to e_1$ l'homotopie de Quillen tautologique, définie par $\alpha_f = f : e_0(f) \to e_1(f)$ pour $f \in \mathcal{C}h(\mathcal{N})$, et correspondant au foncteur identité $Id : \mathcal{C}h(\mathcal{N}) \to \mathcal{C}h(\mathcal{N})$. On a ainsi $\tau = \alpha \circ H_\tau$. En appliquant le pseudo-foncteur Φ au diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "H_\tau"] \arrow[rr, bend left=45, "F"] \arrow[rr, bend right=45, "G"'] & \mathcal{C}h(\mathcal{N}) \arrow[r, bend left, "e_0"] \arrow[r, bend right, "e_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

on constate que les 2-isomophismes structuraux du pseudo-foncteur Φ donnent un isomophisme entre $\Phi(\tau)$ et $\Phi(\alpha) \circ \Phi(H_\tau)$, au sens où $\Phi(\tau)$ est composé de $\Phi(\alpha) \circ \Phi(H_\tau)$ et de 2-isomophismes. Il suffit donc de vérifier que $\Phi(\alpha)$ est un isomorphisme. En appliquant le pseudo-foncteur Φ au diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, "p^*"] \arrow[rr, bend left=45, "Id"] \arrow[rr, bend right=45, "Id"'] & \mathcal{C}h(\mathcal{N}) \arrow[r, bend left, "e_0"] \arrow[r, bend right, "e_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

on obtient un isomorphisme entre $\Phi(\alpha) \circ \Phi(p^*)$ et la transformation naturelle identité du foncteur $Id : \Phi(\mathcal{N}) \to \Phi(\mathcal{N})$, ce qui assure que $\Phi(\alpha) \circ \Phi(p^*)$ est un isomorphisme. Comme p^* est une équivalence de Quillen, $\Phi(p^*)$ est, par hypothèse, une équivalence, ce qui implique que $\Phi(\alpha)$ est un isomorphisme. □

Remarque 2.1.6. Les résultats de cette section s'adaptent immédiatement aux 2-catégories $\mathfrak{ModQ}_*$ et $\mathfrak{ModQ}_{st}$ des modèles de Quillen pointés et des modèles de Quillen stables respectivement. En effet, si $\mathcal{M}$ est un modèle pointé (resp. stable), il en va de même du modèle chemin $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$.

Ces résultats s'adaptent également à la 2-catégorie $\mathcal{V}$-$\mathfrak{ModQ}$ des $\mathcal{V}$-catégories modèles, où $\mathcal{V}$ est une catégorie modèle monoïdale [9]. Il suffit de vérifier que pour tout $\mathcal{V}$-modèle $\mathcal{M}$, le modèle chemin $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$ est encore un $\mathcal{V}$-modèle. Or, si $V \to W$ est une cofibration de $\mathcal{V}$ et $X \to Y$ une fibration de $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$, il est clair que le morphisme $\{W, X\} \to$

$\{V, X\} \times_{\{V,Y\}} \{W, Y\}$, où $\{-, -\}$ désigne la cotensorisation, est une fibration de $\mathcal{C}h(\mathcal{M})$, triviale si $V \to W$ est une cofibration triviale. Et lorsque $X \to Y$ est aussi une e_0-équivalence, l'évaluation en 0 de $\{W, X\} \to \{V, X\} \times_{\{V,Y\}} \{W, Y\}$ n'est autre que $\{W, X_0\} \to \{V, X_0\} \times_{\{V,Y_0\}} \{W, Y_0\}$, qui est bien une équivalence faible.

2.2. Modèles combinatoires

Une catégorie modèle $\mathcal{M}$ est dite combinatoire si la catégorie $\mathcal{M}$ est localement présentable et la catégorie modèle $\mathcal{M}$ est engendrée par cofibrations [3]. On note $\mathfrak{ModQ}^c$ la sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{ModQ}$ constituée des modèles de Quillen combinatoires.

2.2.1. Modèles présentables et résolutions

Pour toute catégorie modèle combinatoire $\mathcal{M}$ et toute petite catégorie C, la structure de catégorie modèle projective sur $\mathcal{M}^C$ existe et est combinatoire. Elle est également propre à gauche dès que $\mathcal{M}$ est propre à gauche.

Pour toute catégorie modèle combinatoire propre à gauche $\mathcal{M}$ et tout ensemble de morphisme S de $\mathcal{M}$, la localisation de Bousfield à gauche de $\mathcal{M}$ relativement à S, notée $\mathcal{M}/S$, existe et est combinatoire propre à gauche [3,2].

Pour toute petite catégorie C, on note $\mathcal{U}(C)$ la catégorie $\mathcal{S}^{C^{op}}$ des préfaisceaux en ensembles simplicaux sur C, que l'on munie de la structure de modèle projective. Il s'agit d'une catégorie modèle combinatoire simpliciale propre.

Définition 2.2.1 (*[3]*). Une catégorie modèle de la forme $\mathcal{U}(C)/S$, où C est une petite catégorie et S un ensemble de morphisme de $\mathcal{U}(C)$, est dite *présentable*. Une *petite présentation* d'une catégorie modèle $\mathcal{M}$ est la donnée d'une catégorie modèle présentable $\mathcal{U}(C)/S$ et d'une équivalence de Quillen $\mathcal{U}(C)/S \longrightarrow \mathcal{M}$.

Un premier résultat important concernant les catégories modèles combinatoires et présentables est le théorème suivant [2, Theorem 1.1].

Théorème 2.2.2 (*[2]*). *Toute catégorie modèle combinatoire possède une petite présentation.* □

De [2], on tire également le résultat suivant, qui permet d'utiliser le Corollaire 2.1.5.

Proposition 2.2.3. *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie modèle combinatoire propre à gauche, alors le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est également une catégorie modèle combinatoire propre à gauche.*

Démonstration. La catégorie modèle $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ est la localisation de Bousfield à gauche relativement aux e_1-équivalences de la structure de catégorie modèle (combinatoire propre à gauche) projective de $\mathcal{M}^{[1]}$. Les foncteurs de l'adjonction de Quillen $e_1 : \mathcal{M}^{[1]} \rightleftarrows \mathcal{M} : p^*$ préservent les équivalences faibles, si bien que la co-unité de l'adjonction dérivée est un isomorphisme. Il découle alors de [2, Proposition 3.2] qu'il existe un ensemble S de morphisme de $\mathcal{M}^{[1]}$ tel que les S-équivalences coïncident avec les e_1-équivalences. La catégorie modèle $\mathcal{C}yl(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{[1]}/S$ est donc combinatoire propre à gauche. □

On termine cette section par une remarque générale qui sera utilisée dans la section suivante.

Lemme 2.2.4. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie modèle et $\mathcal{N}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ munie de la structure induite. On suppose que $\mathcal{N}$ est stable relativement aux factorisations, i.e. que toutes les factorisations "cofibration trivale/fibration" et "cofibration/fibration trivale" d'un morphisme de $\mathcal{N}$ sont également dans $\mathcal{N}$.*

Soit $\overline{\mathcal{N}}$ l'image pleine de $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$. Le foncteur $\gamma : \mathcal{N} \hookrightarrow \overline{\mathcal{N}}$ est une localisation relativement aux équivalences faibles de $\mathcal{N}$.

La stabilité relativement aux factorisations de l'énoncé est assurée dès que la sous-catégorie pleine $\mathcal{N}$ est stable par équivalence faible dans $\mathcal{M}$, i.e.: dès que, pour toute équivalence faible $M \to M'$ de $\mathcal{M}$, M appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si M' appartient à $\mathcal{N}$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que le foncteur $\gamma : \mathcal{N} \hookrightarrow \overline{\mathcal{N}}$ possède la propriété universelle de la localisation. Pour cela, on reprend la construction classique de la catégorie homotopique d'une catégorie modèle (e.g. [10, 8.3.5]). Par définition de $\overline{\mathcal{N}}$, on a

$$Ob(\overline{\mathcal{N}}) = Ob(\mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{N}}(N, N') = \mathcal{M}(N^{cf}, N'^{cf})/\sim$$

où $i_N : N^c \to N$ et $j_{N^c} : N^c \to N^{cf}$ sont respectivement la résolution cofibrante de N et la résolution fibrante de N^c, obtenues par factorisation. Le quotient est relatif à la relation d'homotopie : on a $f \sim f' \in \mathcal{M}(N^{cf}, N'^{cf})$ s'il existe un objet cylindre dans $\mathcal{M}$:

$$N^{cf} \amalg N^{cf} \xrightarrow{i \amalg i'} Cyl(N^{cf}) \to N^{cf}$$

constitué d'une cofibration suivie d'une fibration triviale, et un morphisme $h : Cyl(N^{cf}) \to N'^{cf}$ tel que $h \circ i = f$ et $h \circ i' = f'$. Comme N^{cf} est cofibrant, on a en particulier une factorisation "cofibration/ fibration trivale" $N^{cf} \xrightarrow{i} Cyl(N^{cf}) \to N^{cf}$ de l'identité. L'hypothèse de stabilité relativement aux factorisations montre alors que N^{cf}, N'^{cf} et $Cyl(N^{cf})$ sont dans $\mathcal{N}$. Ainsi, on a en fait $\overline{\mathcal{N}}(N,N') = \mathcal{N}(N^{cf}, N'^{cf})/\sim$, où la relation d'homotopie est formée par des objets cylindres dans $\mathcal{N}$. Cela suffit pour vérifier la propriété universelle requise de la manière habituelle (e.g. [10, 8.3.5]). □

2.2.2. Invariance homotopique

Soient $\mathcal{M}$ une catégorie modèle et C une petite catégorie. On note Δ la catégorie simpliciale et $c\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Delta}$ la catégorie des objets cosimpliciaux dans $\mathcal{M}$. On a une équivalence de catégories:

$$\mathcal{R} : \mathcal{C}ocont(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \rightleftarrows c\mathcal{M}^C : \mathcal{Q}$$

entre la catégorie des foncteurs cocontinus de $\mathcal{U}(C)$ dans $\mathcal{M}$ et la catégorie des foncteurs de C dans $c\mathcal{M}$, avec, pour $F \in \mathcal{C}ocont(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$ et $\Gamma \in c\mathcal{M}^C$:

$$\mathcal{R}(F) = F \circ h^{C\times\Delta} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(\Gamma) : X \mapsto \int^{C\times\Delta} \Gamma^n(c)\cdot X_n(c)$$

où $h^{C\times\Delta} : C \times \Delta \hookrightarrow \mathcal{U}(C)$ désigne le foncteur de Yoneda et $\Gamma^n(c)\cdot X_n(c) = \amalg_{X_n(c)} \Gamma^n(c)$.

On munit $c\mathcal{M}$ de la structure de catégorie modèle de Reedy. Soit $E_0 : c\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M} : E_0^{\flat}$ l'adjonction de Quillen constituée de l'évaluation en 0 et du foncteur "objet cosimplicial constant". On note $E_{0*} : c\mathcal{M}^C \rightleftarrows \mathcal{M}^C : E_{0*}^{\flat}$ l'adjonction induite par postcomposition. Il s'agit d'une adjonction de Quillen lorsque $c\mathcal{M}^C$ et $\mathcal{M}^C$ sont munies des structures de catégorie modèle projectives, dont l'existence est assurée dès que le modèle $\mathcal{M}$ est combinatoire.

Définition 2.2.5. On désigne par $c\mathcal{R}es(C, \mathcal{M})$ la sous-catégorie pleine de $c\mathcal{M}^C$ constituée des objets X tels que l'unité d'adjonction $\eta_X : X \to (E_{0*}^{\flat} \circ E_{0*})(X)$ est une équivalence faible argument par argument dans $c\mathcal{M}^C$. On désigne par $c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$ la sous-catégorie pleine de $c\mathcal{R}es(C, \mathcal{M})$ constituée des objets cofibrants injectifs dans $c\mathcal{M}^C$, i.e. Reedy-cofibrants argument par argument.

Remarque 2.2.6. La catégorie $c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$ est la catégorie des résolutions cosimpliciales des foncteurs de C dans $\mathcal{M}$ [10].

Proposition 2.2.7 (*[3, 3.4]*). *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie modèle et C une petite catégorie. Les foncteurs décrits ci-dessus définissent une équivalence de catégories:*

$$\mathcal{R} : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \rightleftarrows c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M}) : \mathcal{Q}$$

qui fait correspondre aux homotopies de Quillen les équivalences faibles argument par argument.

Démonstration. Il s'agit d'abord de vérifier que les foncteurs de l'équivalence de catégorie $\mathcal{R} : \mathcal{C}ocont(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \rightleftarrows c\mathcal{M}^C : \mathcal{Q}$ se restreignent aux sous-catégories de l'énoncé.

Soit $F \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$. L'unité d'adjonction $\eta_{\mathcal{R}(F)} : \mathcal{R}(F) \to (E_{0*}^{\flat} \circ E_{0*})(\mathcal{R}(F))$, évaluée en $c \in C$ et en $n \in \Delta$, n'est autre que le morphisme $F(h_{c,n}^{C\times\Delta}) \to F(h_{c,0}^{C\times\Delta})$ induit par la projection $h_{c,n}^{C\times\Delta} = h_c^C \times \Delta^n \to h_c^C$. Cette dernière est une équivalence faible entre cofibrants, donc $\eta_{\mathcal{R}(F)}$ également, et on a ainsi $\mathcal{R}(F) \in c\mathcal{R}es(C, \mathcal{M})$. De plus, le foncteur induit $F^{\Delta} : \mathcal{U}(C)^{\Delta} \to \mathcal{M}^{\Delta}$ préserve les Reedy-cofibrants. Comme, pour tout $c \in C$, $h_c^C \times \Delta^{\bullet}$ est Reedy-cofibrant dans $\mathcal{U}(C)^{\Delta}$, il en va de même de $\mathcal{R}(F)(c) = F(h_c^C \times \Delta^{\bullet})$, si bien que $\mathcal{R}(F) \in c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$.

Soit $\Gamma \in c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$. Comme, pour tout $c \in C$, $\Gamma(c)$ est Reedy-cofibrant, [10, 16.5.4(2)] assure que le foncteur de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{S}$ défini par $M \mapsto \mathcal{M}(\Gamma(c), M)$ préserve fibrations et fibrations triviales, ce qui montre que $\mathcal{Q}(\Gamma)^{\flat} : \mathcal{M} \to \mathcal{U}(C)$ est un foncteur de Quillen à droite, soit $\mathcal{Q}(\Gamma) \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$.

Soit $\tau : F_0 \to F_1$ une homotopie de Quillen dans $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$. Comme, pour tout $c \in C$ et $n \in \Delta$, $h_{c,n}^{C\times\Delta}$ est cofibrant dans $\mathcal{U}(C)$, le morphisme $\mathcal{R}(\tau)(c)^n = \tau_{h_{c,n}^{C\times\Delta}} : F_0(h_{c,n}^{C\times\Delta}) \longrightarrow F_1(h_{c,n}^{C\times\Delta})$ est une équivalence faible de $\mathcal{M}$ et donc $\mathcal{R}(\tau)$ est une équivalence faible de $c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$.

Soit $f : \Gamma \to \Gamma'$ une équivalence faible de $c\mathcal{R}es_c(C, \mathcal{M})$. Par [10, 16.5.5(1)], l'équivalence faible entre résolutions cosimpliciales $f(c) : \Gamma(c) \to \Gamma'(c)$ induit, pour tout $M \in \mathcal{M}$ fibrant, une équivalence faible $\mathcal{M}(\Gamma'(c), M) \to \mathcal{M}(\Gamma(c), M)$. Cela signifie que la transformation naturelle $\mathcal{Q}(\Gamma')^{\flat} \to \mathcal{Q}(\Gamma)^{\flat}$, conjuguée de $\mathcal{Q}(f)$, est une équivalence faible sur tout fibrant de $\mathcal{M}$, et donc que $\mathcal{Q}(f)$ est une homotopie de Quillen. □

Soient $C \in \mathfrak{Cat}$ et $S \subset \mathcal{U}(C)$ un ensemble de morphisme. Soit $T : \mathcal{U}(C) \longrightarrow \mathcal{U}(C)/S$ le morphisme de la localisation de Bousfield. Le foncteur $T^* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$, obtenu par précomposition par T, est l'inclusion de la sous-catégorie pleine des morphismes $F : \mathcal{U}(C) \to \mathcal{M}$ tels que $\mathbf{L}(F)$ envoie S dans les isomorphismes.

On note encore $h^C \in \mathcal{U}(C)^C$ le foncteur $C \hookrightarrow \mathcal{E}ns^{C^{op}} \hookrightarrow \mathcal{U}(C)$ associé au foncteur de Yoneda, et on considère le foncteur $F^C : \mathcal{U}(C)^C \longrightarrow \mathcal{M}^C$ associé à $F \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$.

Proposition 2.2.8. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie modèle combinatoire, C une petite catégorie et $S \subset \mathcal{U}(C)$ un ensemble de morphisme. Les foncteurs $T^* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \hookrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$ et $F \mapsto F^C(h^C)$: $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C$ induisent un plongement et une équivalence*

$$\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^C)$$

au niveau des catégories localisées relativement aux homotopies de Quillen et aux équivalences faibles projectives respectivement (en particulier ces catégories sont localement petites).

Démonstration. Le composé de l'énoncé est induit par le composé suivant:

$$\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M}) \overset{\sim}{\to} c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M}) \hookrightarrow c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M}) \hookrightarrow c\mathcal{M}^C \xrightarrow{E_{0*}} \mathcal{M}^C$$

dont le second foncteur est l'équivalence $\mathcal{R}$ de la Proposition 2.2.7.

La sous-catégorie pleine $c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M})$ de $c\mathcal{M}^C$ est constituée des objets $X \in c\mathcal{M}^C$ tels que l'unité $\eta_X : X \to (E_{0*}^{\flat} \circ E_{0*})(X)$ est une équivalence faible. Comme les foncteurs E_{0*} et $E_{0*}^{\flat}$ préservent les équivalences faibles, l'inclusion $c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M}) \subset c\mathcal{M}^C$ est stable par équivalence faible.

La sous-catégorie pleine $c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M})$ de $c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M})$ est constituée des objets cofibrants injectifs (i.e.: Reedy-cofibrant argument par argument). Comme les cofibrations projectives sont également injectives, toute cofibration projective de source un cofibrant injectif a pour but un cofibrant injectif, ce qui garantit la stabilité relativement aux factorisations de $c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M}) \subset c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M})$.

Via l'équivalence $\mathcal{R} : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M}) \to c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M})$, on constate donc que le plongement $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M}) \hookrightarrow c\mathcal{M}^C$ vérifie les hypothèses de stabilité du Lemme 2.2.4. Comme la sous-catégorie pleine $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M})$ de $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M})$ est stable par homotopies de Quillen, le plongement $\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M}) \hookrightarrow c\mathcal{M}^C$ vérifie également les hypothèses de stabilité du Lemme 2.2.4.

On voit donc que les foncteurs de la chaîne ci-dessus, à l'exception du dernier, induisent des plongements au niveau des catégories localisées, ce qui donne, d'une part, le plongement de l'énoncé et, d'autre part, le plongement central du diagramme:

$$\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \overset{\sim}{\to} \mathrm{Ho}(c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M})) \hookrightarrow \mathrm{Ho}(c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M})) \xrightarrow{E_{0*}} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^C)$$

dont la première flèche est l'équivalence induite par $\mathcal{R}$. Ce plongement central est également essentiellement surjectif, et donc une équivalence, du fait que tout objet de $c\mathcal{R}es_c(C,\mathcal{M})$ possède une résolution cofibrante projective et donc injective. Enfin, par définition de $c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M})$, l'adjonction $E_0 : c\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M} : E_0^{\flat}$ se restreint en une adjonction $E_0 : c\mathcal{R}es(C,\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathcal{M} : E_0^{\flat}$ de foncteurs préservant les équivalences faibles, dont la co-unité est un isomorphisme et l'unité une équivalence faible, et qui induit donc une équivalence de catégories localisées.

Tout morphisme $G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ de $\mathfrak{ModQ}$ induit, pour tout $\mathcal{N} \in \mathfrak{ModQ}$, des foncteurs

$$G_* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{N},\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{N},\mathcal{M}') \quad \text{et} \quad G^* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{M}',\mathcal{N}) \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

par postcomposition $F \mapsto G \circ F$ et par précomposition $F \mapsto F \circ G$ respectivement. Il est clair que chacun de ces foncteurs préserve les homotopies de Quillen. De plus, les isomorphismes $\mathbf{L}(G_*(F)) \simeq \mathbf{L}(G) \circ \mathbf{L}(F)$ et $\mathbf{L}(G^*(F)) \simeq \mathbf{L}(F) \circ \mathbf{L}(G)$ montrent que si G est une équivalence de Quillen, les foncteurs G_* et G^* reflètent également les homotopies de Quillen.

Proposition 2.2.9. *Soit une équivalence de Quillen $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dans $\mathfrak{ModQ}^c$. Pour tout modèle présentable $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{ModQ}^c$, le foncteur $\tilde{G}_* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{P},\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{P},\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. Soient une petite catégorie C et un ensemble de morphisme $S \subset \mathcal{U}(C)$. On considère le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{G}_*"'] & \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{G}_*"'] & \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^C) \arrow[d, shift right, "\mathbf{L}(G^C)"'] \\
\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, hook] & \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{N}^C) \arrow[u, shift right, "\mathbf{R}(G^{C\flat})"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel, d'après la Proposition 2.2.8, les flèches horizontales de gauche sont des plongements et les flèches horizontales de droite sont des équivalences. Comme $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dans $\mathfrak{ModQ}$ est une équivalence de Quillen, le foncteur $\mathbf{L}(G^C)$ est une équivalence, ainsi donc que $\tilde{G}_* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$. Cela implique, d'une part, que le foncteur $\tilde{G}_* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est pleinement fidèle, et, d'autre part, que, pour tout $F' \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$, il existe $F \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C),\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}]$ et un isomorphisme $G_*(F) \simeq F'$. Comme $\mathbf{L}(F') \simeq \mathbf{L}(G_*(F)) \simeq \mathbf{L}(G) \circ \mathbf{L}(F)$ et $\mathbf{L}(G)$ est une équivalence, le foncteur $\mathbf{L}(F)$ envoie S dans les isomorphismes, si bien que $F \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{N})$, et le foncteur $\tilde{G}_* : \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est ainsi essentiellement surjectif. □

2.3. Bi-localisation de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$

L'objectif principal de cette section est de construire une bi-localisation relativement aux équivalences de Quillen de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$, la sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{ModQ}^c$ constituée des modèles propres à gauches, et, plus généralement, de certaines sous-2-catégories pleines de cette dernière. La sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ constituée des modèles présentables est notée $\mathfrak{ModQ}^{p}$.

Pour toute la section, on se donne une sous-2-catégorie pleine $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}$ de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ satisfaisant les conditions suivantes:

- la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}$ contient tout les modèles présentables,
- pour tout modèle $\mathcal{M} \in \mathfrak{ModQ}^{\dagger}$, le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ appartient à $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}$.

Ces conditions sont évidemment vérifiées par $\mathfrak{ModQ}^{cpg}$.

2.3.1. La 2-catégorie $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$

On définit d'abord une 2-catégorie $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ de la façon suivante. On pose $Ob(\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}) = Ob(\mathfrak{ModQ}^{\dagger})$ et, pour $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$:

$$\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$$

la localisation de la catégorie $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ relativement aux homotopies de Quillen.

La composition est donnée par la flèche diagonale ci-dessous. Les deux flèche verticales supérieures sont les foncteurs localisations. Comme les composées "horizontales" d'homotopies de Quillen sont des homotopies de Quillen, la propriété universelle induit le foncteur horizontal inférieur.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \times \mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d] & \mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3) \arrow[d] \\
\big(\mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \times \mathfrak{ModQ}^{\dagger}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)\big)[(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3) \\
\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \times \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \arrow[ur, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

L'identité $Id_{\mathcal{M}} \in \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ est définie par $Id_{\mathcal{M}} = \gamma(Id_{\mathcal{M}})$. Les axiomes d'associativité et d'unité découlent de la propriété universelle de localisation. On note $\gamma : \mathfrak{ModQ}^{\dagger} \to \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ le 2-foncteur évident. Ce 2-foncteur est une localisation locale relativement aux homotopies de Quillen dans le sens suivant.

Proposition 2.3.1. *Pour toute 2-catégorie $\mathfrak{D}$, le 2-foncteur $\gamma : \mathfrak{ModQ}^{\dagger} \to \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ induit un isomorphisme de 2-catégorie*

$$\gamma^* : [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}] \longrightarrow [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathcal{Q}\text{-}htp}$$

où $[\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathcal{Q}\text{-}htp}$ désigne la sous-2-catégorie pleine de $[\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]$ constituée des pseudo-foncteurs envoyant les homotopies de Quillen dans les 2-isomorphismes.

Démonstration. Soit un pseudo-foncteur $\Phi : \mathfrak{ModQ}^{\dagger} \longrightarrow \mathfrak{D}$ envoyant les homotopies de Quillen dans les 2-isomorphismes. Il existe un unique pseudo-foncteur $\bar{\Phi} : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tel que $\bar{\Phi} \circ \gamma = \Phi$ construit de la manière suivante. Pour tout $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in Ob(\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger})$, $\bar{\Phi}(\mathcal{M})$ est défini comme égal à $\Phi(\mathcal{M})$ et, en utilisant la propriété universelle de $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$, $\bar{\Phi}_{\mathcal{M},\mathcal{N}} : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathfrak{D}(\bar{\Phi}(\mathcal{M}), \bar{\Phi}(\mathcal{N}))$ est l'unique foncteur tel que $\bar{\Phi}_{\mathcal{M},\mathcal{N}} \circ \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = \Phi_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$. Soit l'unique transformation naturelle $\mathrm{m}^{\bar{\Phi}}$ telle que $\mathrm{m}^{\bar{\Phi}} \circ (\gamma \times \gamma) = \gamma \circ \mathrm{m}^{\Phi}$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{m}^{\bar{\Phi}}$ et l'isomorphisme $\mathrm{u}^{\bar{\Phi}_{\mathcal{M}}} = \mathrm{u}^{\Phi_{\mathcal{M}}} : Id_{\bar{\Phi}(\mathcal{M})} \xrightarrow{\sim} \bar{\Phi}(Id_{\mathcal{M}})$ font de $\bar{\Phi}$ un pseudo-foncteur.

Soient $\Psi, \Psi' \in [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]$. Il faut vérifier que le foncteur $\gamma^*_{\Psi,\Psi'} : [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}](\Psi, \Psi') \longrightarrow [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}](\gamma^*(\Psi), \gamma^*(\Psi'))$ est un isomorphisme. Soit une transformation pseudo-naturelle $\chi : \gamma^*(\Psi) \to \gamma^*(\Psi')$ Il existe une unique transformation pseudo-naturelle $\bar{\chi} : \Psi \to \Psi'$ telle $\gamma^*(\bar{\chi}) = \chi$. En effet, pour tout $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in Ob(\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger})$, les 1-morphismes structuraux $\chi_{\mathcal{M}}$ et les 2-isomorphismes $\lambda^{\chi}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ structuraux de χ déterminent uniquement les morphismes structuraux de $\bar{\chi}$, avec $\bar{\chi}_{\mathcal{M}} = \chi_{\mathcal{M}}$ et $\lambda^{\chi}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ étant l'unique 2-isomorphisme tel que $\lambda^{\bar{\chi}}_{\mathcal{M},\mathcal{N}} \circ \gamma = \lambda^{\chi}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$. L'axiome de composition de $\bar{\chi}$ se déduit de celui de χ par la propriété universelle de la localisation. Le foncteur $\gamma^*_{\Psi,\Psi'}$ est ainsi un isomorphisme sur les objets. Il découle également immédiatement de la propriété universelle que $\gamma^*_{\Psi,\Psi'}$ est pleinement fidèle. □

2.3.2. La 2-catégorie de fractions de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$

On appelle également équivalences de Quillen, et on note encore $\mathfrak{Q}$, l'image par le 2-foncteur γ de la classe des équivalences de Quillen dans $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$.

Proposition 2.3.2. *La classe $\mathfrak{Q}$ des équivalences de Quillen de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ admet un calcul par fraction à droite.*

Démonstration. La vérification des axiomes **BF1**, **BF2** et **BF5** est immédiate. Soient $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $W : \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ deux 1-morphismes de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ tels que $W \in \mathfrak{Q}$. D'après le Théorème 2.2.2, il existe un modèle présentable $\mathcal{P}$ et une équivalence de Quillen $V : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$. Par la Proposition 2.2.9, le morphisme W induit une équivalence de catégorie

$W_* : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}, \mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}, \mathcal{N})$. La surjectivité essentielle implique qu'il existe dans $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ un 1-morphisme $G : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ et un 2-isomorphisme $\alpha : W \circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} F \circ V \in \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}, \mathcal{N})$, ce qui démontre **BF3**.

Soient $F, G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $W : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ des 1-morphismes de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ tels que $W \in \mathfrak{Q}$ et $\alpha : W \circ F \Rightarrow W \circ G$ un 2-morphisme de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$. Soient $\mathcal{P}$ un modèle présentable et $V : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ une équivalence de Quillen. D'après la Proposition 2.2.9, le foncteur W_* inférieur du carré commutatif suivant est une équivalence de catégorie.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \arrow[r, "W_*"] \arrow[d, "V^*"'] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}') \arrow[d, "V^*"] \\
\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}, \mathcal{N}) \arrow[r, "W_*"'] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}, \mathcal{N}')
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un unique 2-morphisme $\beta : F \circ V \Rightarrow G \circ V$ tel que $W_*(\beta) = V^*(\alpha)$. De plus, β est un 2-isomorphisme dès que α est un 2-isomorphisme.

Soient $V' : \mathcal{P}' \to \mathcal{M}$ une équivalence de Quillen et $\beta' : F \circ V' \Rightarrow G \circ V'$ un 2-morphisme tels $W_*(\beta) = V'^*(\alpha)$. D'après l'axiome **BF3** vérifié ci-dessus, il existe un modèle présentable $\mathcal{P}''$, deux équivalences de Quillen $U : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}$ et $U' : \mathcal{P}'' \to \mathcal{P}'$ et un 2-isomorphisme $\epsilon : V \circ U \overset{\sim}{\Rightarrow} V' \circ U' \in \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}'', \mathcal{M})$. Pour vérifier que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd}
F \circ V \circ U \arrow[r, "\beta \circ U"] \arrow[d, "F \circ \epsilon"'] & G \circ V \circ U \arrow[d, "G \circ \epsilon"] \\
F \circ V' \circ U' \arrow[r, "\beta' \circ U'"'] & G \circ V' \circ U'
\end{tikzcd}$$

il suffit de vérifier que son image par l'équivalence $W_* : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}'', \mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}'', \mathcal{N}')$ commute également. Or, cette image coïncide avec le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(VU)^*(WF) \arrow[r, "(VU)^*(\alpha)"] \arrow[d, "\epsilon^*_{WF}"'] & (VU)^*(WG) \arrow[d, "\epsilon^*_{WG}"] \\
(V'U')^*(WF) \arrow[r, "(V'U')^*(\alpha)"'] & (V'U')^*(WG)
\end{tikzcd}$$

qui exprime la naturalité de l'isomorphisme naturelle $\epsilon^* : (V \circ U)^* \overset{\sim}{\Rightarrow} (V' \circ U')^* \in \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}(\mathcal{P}'', \mathcal{M})$ relativement au morphisme $\alpha : W \circ F \Rightarrow W \circ G$. Ceci achève la vérification de l'axiome **BF4**. $\square$

Il découle de la proposition précédente et de [1, Theorem 21] (cf. Théorème 1.2.3) qu'il existe un pseudo-foncteur bi-localisation $U : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger} \longrightarrow \underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}[\mathfrak{Q}^{-1}]$. Cette bi-localisation de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ relativement aux équivalences de Quillen sera désormais noté $\mathfrak{THQ}^{\dagger}$, et le pseudo-foncteur composé $U \circ \gamma$ sera noté $\Gamma : \mathfrak{ModQ}^{\dagger} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{\dagger}$.

Théorème 2.3.3. *Le pseudo-foncteur $\Gamma : \mathfrak{ModQ}^{\dagger} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{\dagger}$ est une bi-localisation de $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}$ relativement aux équivalences de Quillen.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que, pour toute 2-catégorie $\mathfrak{D}$, le 2-foncteur $\Gamma^* : [\mathfrak{THQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}] \xrightarrow{U^*} [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}} \xrightarrow{\gamma^*} [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}}$ est une biéquivalence. Le 2-foncteur U^* est une biéquivalence par définition. D'après la Corollaire 2.1.5, tout pseudo-foncteur $\mathfrak{ModQ}^{\dagger} \longrightarrow \mathfrak{D}$ envoyant les équivalences de Quillen dans les équivalences envoie aussi les homotopies de Quillen dans les 2-isomorphismes, si bien que le 2-foncteur γ^* se restreint comme indiqué dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
{[\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]} \arrow[r, "\gamma^*"] & {[\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathcal{Q}\text{-}htp}} \\
{[\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\gamma^*"'] & {[\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Le 2-foncteur $\gamma^* : [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathcal{Q}\text{-}htp}$ est un isomorphisme d'après la Proposition 2.3.1. Les 2-foncteurs verticaux étant des inclusions, le 2-foncteur $\gamma^* : [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}}$ est également pleinement fidèle. De plus, comme, par définition, un morphisme F de $\mathfrak{ModQ}^{\dagger}$ appartient à $\mathfrak{Q}$ si et seulement si $\gamma^*(F)$ de $\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}$ appartient à $\mathfrak{Q}$, le 2-foncteur $\gamma^* : [\underline{\mathfrak{ModQ}}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow [\mathfrak{ModQ}^{\dagger}, \mathfrak{D}]_{\mathfrak{Q}}$ est un isomorphisme. $\square$

Le résultat suivant est utilisé dans la dernière partie de ce papier.

Proposition 2.3.4. *Le pseudo-foncteur composé $U \circ \iota : \underline{\mathfrak{ModQ}}^{p} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{\dagger}$ est une biéquivalence.*

Démonstration. Comme il a été noté à la suite de l'énoncé du Théorème 1.2.4, le pseudo-foncteur $U : \underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^\dagger \longrightarrow \mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger$ vérifie les conditions **B1**, **B2** et **B3** de ce théorème. Comme $\iota : \underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^p \longrightarrow \underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^\dagger$ est une inclusion, la condition **B2** implique que le pseudo-foncteur composé $U \circ \iota$ est pleinement fidèle sur les 2-morphismes.

D'après la condition **B1**, pour tout morphisme $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger$ où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont présentables, il existe des morphismes F et W dans $\underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^\dagger$, tels que $W \in \mathfrak{Q}$, et un 2-isomorphisme $U(F) \stackrel{\sim}{\Rightarrow} G \circ U(W)$. Quitte à précomposer F et W par une résolution présentable de leur source commune, on peut supposer $F, W \in \underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^p$. Par la Proposition 2.2.9, W est une équivalence de $\underline{\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}}^p$. Il existe donc un quasi-inverse W^{-1} de W et un 2-isomorphisme $(U \circ \iota)(F \circ W^{-1}) \stackrel{\sim}{\Rightarrow} G$ et le pseudo-foncteur composé $U \circ \iota$ est ainsi une équivalence locale.

Enfin, le pseudo-foncteur composé $U \circ \iota$ est 2-essentiellement surjectif par le Théorème 2.2.2 [2, Theorem 1.1]. □

2.3.3. Autres propriétés

On note $\mathfrak{CAT}_{ad}$ la sous-2-catégorie de $\mathfrak{CAT}$ ayant les adjonctions pour 1-morphismes. On a un pseudo-foncteur Ho : $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger \longrightarrow \mathfrak{CAT}_{ad}$ qui associe à une catégorie modèle $\mathcal{M} \in \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger$ sa catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$, et à un morphisme $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger$ l'adjonction de foncteurs dérivés totaux $\mathbf{L}(F) : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbf{R}(F^\flat)$.

Le pseudo-foncteur Ho envoie les équivalences de Quillen dans les équivalences, donc, d'après la définition de la bi-localisation (cf. 1.2.1), il existe un pseudo-foncteur $\widetilde{\mathrm{Ho}} : \mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger \longrightarrow \mathfrak{CAT}_{ad}$ et un isomorphisme pseudo-naturel α : $\widetilde{\mathrm{Ho}} \circ \Gamma \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Ho}$.

Proposition 2.3.5. *Un morphisme $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger$ est une équivalence de Quillen si et seulement si $\Gamma(F)$ est une équivalence de $\mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger$.*

Démonstration. Par définition de la bi-localisation, si F est une équivalence de Quillen, alors $\Gamma(F)$ est une équivalence. Réciproquement, si $\Gamma(F)$ est une équivalence, alors $\mathrm{Ho}(F) \simeq \widetilde{\mathrm{Ho}}(\Gamma(F))$ est aussi une équivalence et F est donc une équivalence de Quillen. □

Deux catégories modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont dites Quillen-équivalentes si elles sont connectées par un zigzag d'équivalences de Quillen.

Proposition 2.3.6. *Deux catégories modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger$ sont Quillen-équivalentes si et seulement si $\Gamma(\mathcal{M})$ et $\Gamma(\mathcal{N})$ sont équivalentes dans $\mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger$.*

Démonstration. Si $\Gamma(\mathcal{M})$ et $\Gamma(\mathcal{N})$ sont équivalentes, il en va de même $\Gamma(\mathcal{M}^p)$ et $\Gamma(\mathcal{N}^p)$. Comme le foncteur $\Gamma_{\mathcal{M}^p,\mathcal{N}^p} = \gamma$: $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}^\dagger(\mathcal{M}^p, \mathcal{N}^p) \longrightarrow \mathfrak{TH}\mathfrak{Q}^\dagger(\Gamma(\mathcal{M}^p), \Gamma(\mathcal{N}^p))$ est surjectif, il existe un morphisme $F : \mathcal{M}^p \to \mathcal{N}^p$ qui induit l'équivalence de $\Gamma(\mathcal{M}^p)$ vers $\Gamma(\mathcal{N}^p)$, et qui doit donc être une équivalence de Quillen d'après la Proposition 2.3.5. On obtient ainsi un zigzag d'équivalences de Quillen

$$\mathcal{M} \xleftarrow{R_{\mathcal{M}}} \mathcal{M}^p \xrightarrow{F} \mathcal{N}^p \xrightarrow{R_{\mathcal{N}}} \mathcal{N}$$

La réciproque découle immédiatement de la Proposition 2.3.5. □

2.4. Variantes

Dans cette section, on indique brièvement comment les constructions des sections qui précèdent peuvent être adaptées, d'une part aux modèles pointés et aux modèles stables, et d'autre part aux modèles simpliciaux et aux modèles spectraux.

2.4.1. Modèles pointés et modèles stables

On note $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}_*$ et $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}_{st}$ les sous-2-catégories de $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}$ constituées des modèles de Quillen pointés et des modèles de Quillen stables respectivement.

L'inclusion $\mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}_* \hookrightarrow \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}$ possède un 2-adjoint à gauche $\Phi_* : \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q} \to \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}_*$ tel que, pour tout $\mathcal{M} \in \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}$, $\Phi_*(\mathcal{M}) = */\mathcal{M}$, la catégorie des objets en-dessous de l'objet terminal $*$ de $\mathcal{M}$. L'unité de la 2-adjonction $\Phi_* : \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q} \rightleftarrows \mathfrak{Mod}\mathfrak{Q}_*$ est l'adjonction de Quillen $\mathcal{M} \rightleftarrows \Phi_*(\mathcal{M})$, dont l'adjoint à gauche est défini, pour tout $M \in \mathcal{M}$, par $M \mapsto M_+ = M \amalg *$.

Pour toute petite catégorie C, on note $\mathcal{U}_*(C)$ la catégorie $\mathcal{S}_*^{C^{op}}$ des préfaisceaux en ensembles simplicaux pointés sur C, que l'on munie de la structure de modèle projective. Pour C une petite catégorie et S un ensemble de morphisme de $\mathcal{U}(C)$, on a un isomorphisme de modèle $\Phi_*(\mathcal{U}(C)/S) \simeq \mathcal{U}_*(C)/S_+$.

Définition 2.4.1. Une catégorie modèle de la forme $\mathcal{U}_*(C)/S_+$, où C est une petite catégorie et S un ensemble de morphisme de $\mathcal{U}(C)$, est dite *présentable pointée*. Une *petite présentation pointée* d'une catégorie modèle pointée $\mathcal{M}$ est la donnée d'une catégorie modèle présentable pointée $\mathcal{U}_*(C)/S_+$ et d'une équivalence de Quillen $\mathcal{U}_*(C)/S_+ \longrightarrow \mathcal{M}$.

Par la proposition [11, Prop. 4.7(a)], on a:

Proposition 2.4.2. *Tout modèle pointé combinatoire possède une petite présentation pointée.* □

Pour tout $\mathcal{M} \in \mathfrak{ModQ}^c$ et $\mathcal{N} \in \mathfrak{ModQ}^c_*$, l'isomorphisme $\mathfrak{ModQ}_*(\Phi_*(\mathcal{M}), \mathcal{N}) \simeq \mathfrak{ModQ}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ préserve les homotopies de Quillen, si bien que l'on a un isomorphisme des localisations relativement aux homotopies de Quillen $\mathfrak{ModQ}_*(\Phi_*(\mathcal{M}), \mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}] \simeq \mathfrak{ModQ}(\mathcal{M}, \mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$.

Proposition 2.4.3. *Soit une équivalence de Quillen $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dans $\mathfrak{ModQ}^c_*$. Pour tout modèle présentable pointé $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{ModQ}^c_*$, le foncteur $\tilde{G}_* : \mathfrak{ModQ}_*(\mathcal{P}, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}_*(\mathcal{P}, \mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. On a $\mathcal{P} = \mathcal{U}_*(C)/S_+ \simeq \Phi_*(\mathcal{U}(C)/S)$ pour une petite catégorie C et un ensemble S de morphisme de $\mathcal{U}(C)$, donc la proposition découle de la Proposition 2.2.9 par l'isomorphisme induit par la 2-adjonction $\Phi_* : \mathfrak{ModQ} \rightleftarrows \mathfrak{ModQ}_*$ décrit ci-dessus. □

Soit maintenant $\mathfrak{ModQ}^\dagger_*$ une sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{ModQ}^{cpg}_*$ satisfaisant les conditions suivantes:

- la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^\dagger_*$ contient tout les modèles présentables pointés,
- pour tout modèle $\mathcal{M} \in \mathfrak{ModQ}^\dagger_*$, le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ appartient à $\mathfrak{ModQ}^\dagger_*$.

Compte tenu des énoncés ci-dessus et de la Remarque 2.1.6, il est possible de reproduire pour $\mathfrak{ModQ}^\dagger_*$ les résultats de la Section 2.3, en particulier la construction d'une bi-localisation $\Gamma : \mathfrak{ModQ}^\dagger_* \longrightarrow \mathfrak{THQ}^\dagger_*$ de $\mathfrak{ModQ}^\dagger_*$ relativement aux équivalences de Quillen.

Les conditions sont vérifiées par la 2-catégorie $\mathfrak{ModQ}^{cpg}_*$, ainsi que par sa sous-2-catégorie pleine $\mathfrak{ModQ}^{cpg}_{st}$.

2.4.2. Modèles simpliciaux et modèles spectraux

Soient $\mathcal{V}$ une catégorie modèle monoïdale combinatoire [9], et $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$ la 2-catégorie des $\mathcal{V}$-catégories modèles combinatoires.

Pour toute petite catégorie C, on note $\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)$ la catégorie $\mathcal{V}^{C^{op}}$ des foncteurs contravariants de C dans $\mathcal{V}$, que l'on munie de la structure de modèle projective.

Définition 2.4.4. Une $\mathcal{V}$-catégorie modèle de la forme $\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)/S$, où C est une petite catégorie et S un ensemble de morphisme $\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)$, est dite *$\mathcal{V}$-présentable*. Une *petite $\mathcal{V}$-présentation* d'une $\mathcal{V}$-catégorie modèle $\mathcal{M}$ est la donnée d'une $\mathcal{V}$-catégorie modèle $\mathcal{V}$-présentable $\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)/S$ et d'une équivalence de Quillen $\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)/S \longrightarrow \mathcal{M}$ dans $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$.

Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{V}$-catégorie modèle et C une petite catégorie. On a une équivalence de catégories $\mathcal{C}ocont_\mathcal{V}(\mathcal{U}_\mathcal{V}(C), \mathcal{M}) \rightleftarrows \mathcal{M}^C$, entre la catégorie des $\mathcal{V}$-foncteurs cocontinus de $\mathcal{U}(C)$ dans $\mathcal{M}$ et la catégorie des foncteurs de C dans $\mathcal{M}$, qui se restreint en une équivalence de catégories $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}\ (\mathcal{U}_\mathcal{V}(C), \mathcal{M}) \rightleftarrows \mathcal{M}^C_c$ dont le but est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}^C$ constituée des cofibrants injectifs, et qui fait correspondre aux homotopies de Quillen les équivalences faibles argument par argument.

Une démonstration similaire (mais plus simple) à celle de la Proposition 2.2.8 prouve alors la proposition suivante.

Proposition 2.4.5. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{V}$-modèle combinatoire, C une petite catégorie et $S \subset \mathcal{U}_\mathcal{V}(C)$ un ensemble de morphisme. Les foncteurs $T^* : \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}\ (\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)/S, \mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}\ (\mathcal{U}_\mathcal{V}(C), \mathcal{M})$ et $F \mapsto F^C(h^C_\mathcal{V}) : \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}\ (\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C$ induisent un plongement et une équivalence*

$$\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}_\mathcal{V}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}_\mathcal{V}(C), \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^C)$$

au niveau des catégories localisées relativement aux homotopies de Quillen et aux équivalences faibles projectives respectivement. □

De cette dernière proposition, on déduit (cf. Proposition 2.2.9):

Proposition 2.4.6. *Soit une équivalence de Quillen $G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dans $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$. Pour tout $\mathcal{V}$-modèle $\mathcal{V}$-présentable $\mathcal{P}$, le foncteur $\tilde{G}_* : \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{P}, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{P}, \mathcal{N})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est une équivalence de catégorie.* □

Soit alors $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$ une sous-2-catégorie pleine de $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$ satisfaisant les conditions suivantes:

- la 2-catégorie $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$ contient tout les modèles $\mathcal{V}$-présentables et tout modèle $\mathcal{M} \in \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$ possède une petite $\mathcal{V}$-présentation dans $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$,
- pour tout modèle $\mathcal{V}$-présentable $\mathcal{M} \in \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$, le modèle cylindre $\mathcal{C}yl(\mathcal{M})$ appartient à $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$.

Compte tenu des énoncés ci-dessus et de la Remarque 2.1.6, il est possible de reproduire pour $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$ les résultats de la Section 2.3, en particulier la construction d'une bi-localisation $\Gamma : \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger \longrightarrow \mathcal{V}\text{-}\mathfrak{THQ}^\dagger$ de $\mathcal{V}\text{-}\mathfrak{ModQ}^\dagger$ relativement aux équivalences de Quillen.

On se restreint maintenant aux cas où $\mathcal{V}$ est la catégorie modèle $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux ou la catégorie modèle $Sp^\Sigma = Sp^\Sigma(\mathcal{S}; S^1)$ des spectres symétriques.

Proposition 2.4.7. *Tout modèle simplicial combinatoire possède une petite $\mathcal{S}$-présentation dans $\mathcal{S}\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$. Tout modèle spectral combinatoire possède une petite Sp^Σ-présentation dans $Sp^\Sigma\text{-}\mathfrak{ModQ}^c$.*

Démonstration. La première assertion résulte de la proposition [3, Prop. 2.3] (cf. également la proposition [11, Prop. 5.4]). La deuxième assertion est prouvée dans la démonstration de [11, Prop. 6.4]). $\square$

Les conditions ci-dessus sont donc vérifiées par les 2-catégories $\mathcal{S}$-$\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ et Sp^{Σ}-$\mathfrak{ModQ}^{cpg}$, ainsi que par la sous-2-catégorie pleine $\mathcal{S}$-$\mathfrak{ModQ}^{cpg}_{st}$ de $\mathcal{S}$-$\mathfrak{ModQ}^{cpg}$ constituée des modèles simpliciaux stables combinatoires propres à gauches.

Proposition 2.4.8. *Les pseudo-foncteurs $\mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}$ et Sp^{Σ}-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$, induits par les 2-foncteurs de changement de base, sont des biéquivalences.*

De plus, les constructions de [12] permettent d'obtenir un pseudo-foncteur $\widetilde{Sp^{\Sigma}} : \mathcal{S}\text{-}\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathcal{S}\text{-}\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$ bi-adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{S}\text{-}\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st} \hookrightarrow \mathcal{S}\text{-}\mathfrak{THQ}^{cpg}$.

Démonstration. Du théorème [2, Theorem 1.1] (cf. Théorème 2.2.2) et de [11, Section 6.1], il découle que les pseudo-foncteurs $\mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}$ et Sp^{Σ}-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$ sont 2-essentiellement surjectifs. Pour montrer que le premier est également une équivalence locale, on est amené à vérifier que, pour tout $\mathcal{S}$-présentable $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$-$\mathfrak{ModQ}^{c}$, toute petite catégorie C et tout ensemble de morphisme $S \subset \mathcal{U}_{\mathcal{S}}(C) = \mathcal{U}(C)$, le foncteur $\mathcal{S}$-$\mathfrak{ModQ}\ (\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}]$ est une équivalence de catégorie. Des Proposition 2.2.8 et 2.4.5, on tire le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{S}\text{-}\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C}) \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, hook] & \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})[\mathcal{Q}^{-1}] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C})
\end{tikzcd}$$

dont l'équivalence de catégorie requise se déduit de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 2.2.9. On vérifie de même que le pseudo-foncteur Sp^{Σ}-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$ est une équivalence locale. $\square$

Enfin, on constate immédiatement que la biéquivalence $\mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}$ se restreint en une biéquivalence $\mathcal{S}$-$\mathfrak{THQ}^{cpg}_{st} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$, si bien que l'on obtient une biéquivalence Sp^{Σ}-$\mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}_{st}$.

3. Dérivateurs

3.1. Prédérivateurs, dérivateurs

On rappelle dans cette section des définitions et résultats concernant la notion de dérivateur, détaillés dans [13,4,5].

Définition 3.1.1. Un *prédérivateur* (de domaine $\mathfrak{Cat}$) est un 2-foncteur $\mathfrak{Cat}^{\circ} \longrightarrow \mathfrak{CAT}$, où $\mathfrak{Cat}^{\circ}$ est la 2-catégorie déduite de $\mathfrak{Cat}$ en inversant le sens des 1-morphismes et des 2-morphismes.

On note $\mathfrak{PDer}$ la 2-catégorie dont les objets sont les prédérivateurs, les 1-morphismes les transformations pseudo-naturelles, et les 2-morphismes les modifications.

Ainsi, un prédérivateur $\mathbb{D}$ associe à une petite catégorie A une catégorie $\mathbb{D}(A)$, à un foncteur $u : A \to B$ un foncteur $u^{*} : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$, et à une transformation naturelle $\alpha : u \Rightarrow v$ une transformation naturelle $\alpha^{*} : v^{*} \Rightarrow u^{*}$.

Tout prédérivateur $\mathbb{D}$ détermine un prédérivateur *opposé* $\mathbb{D}^{\circ}$ tel que $\mathbb{D}^{\circ}(A) = \mathbb{D}(A^{op})^{op}$ pour tout $A \in \mathfrak{Cat}$.

On utilise dans la suite la construction que voici. Soit un 2-morphisme de $\mathfrak{CAT}$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & C' \arrow[d, "f'"] \\
D \arrow[r, "l"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\theta"'] & D'
\end{tikzcd}$$

tel que f et f' possèdent chacun un adjoint à gauche, notés g et g' respectivement, avec

$$\eta : Id \longrightarrow f \circ g \qquad \varepsilon : g \circ f \longrightarrow Id \qquad \eta' : Id \longrightarrow f' \circ g' \qquad \varepsilon' : g' \circ f' \longrightarrow Id$$

pour morphismes d'adjonction. On tire de cette situation un nouveau 2-morphisme

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "k"] & C' \\
D \arrow[r, "l"'] \arrow[u, "g"] & D' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, Rightarrow, "\bar{\theta}"']
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\theta} = (g' \circ l \circ \eta) \circ (g' \circ \theta \circ g) \circ (\varepsilon' \circ k \circ g) : g' \circ l \longrightarrow g' \circ l \circ f \circ g \longrightarrow g' \circ f' \circ k \circ g \longrightarrow k \circ g$.

On commence par utiliser cette construction dans la situation suivante. Pour tout $A \in \mathfrak{Cat}$ et $a \in A$, on note $i_{A,a} : e \to A$ le foncteur de source la catégorie ponctuelle et de valeur a. Soient $u : A \to B$ dans $\mathfrak{Cat}$ et $b \in B$. On note b/A la catégorie dont les objets sont les couples (a, f) tels que $a \in A$ et $f : b \to u(a) \in B$, et $j_{u,b} : b/A \to A$ le foncteur envoyant le couple

(a, f) sur a. Les morphismes structuraux des objets de b/A définissent un 2-morphisme $\alpha_{u,b} : u \circ j_{u,b} \to i_{B,b} \circ p_{b/A}$

$$\begin{tikzcd} b/A \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{b/A}"'] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{u,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. Si les foncteurs u^* et $(p_{b/A})^*$ possèdent chacun un adjoint à gauche, noté respectivement $u_!$ et $(p_{b/A})_!$, la construction ci-dessus appliquée au 2-morphisme $(\alpha_{u,b})^*$ définit le 2-morphisme de *changement de base* $c_{u,b} : (p_{b/A})_! \circ j^*_{u,b} \longrightarrow i^*_{B,b} \circ u_!$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(b/A) \arrow[d, "(p_{b/A})_!"'] \arrow[dr, Rightarrow, "c_{u,b}"'] & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "j^*_{u,b}"'] \arrow[d, "u_!"] \\ \mathbb{D}(e) & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "i^*_{B,b}"] \end{tikzcd}$$

Définition 3.1.2. Un *dérivateur faible à droite* est un prédérivateur $\mathbb{D}$ satisfaisant aux axiomes suivants:

Der 1 (a) $\mathbb{D}(\emptyset) = e$, la catégorie finale;
(b) Pour tout $A, B \in \mathfrak{Cat}$, le foncteur induit par les foncteurs canoniques $A \to A \amalg B$ et $B \to A \amalg B$:
$$\mathbb{D}(A \amalg B) \longrightarrow \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(B)$$
est une équivalence de catégories.

Der 2 La famille des foncteurs $i^*_{A,a} : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in A$, est conservative (i.e. reflète les isomorphismes).

Der 3d Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathfrak{Cat}$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ possède un adjoint à gauche $u_! : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$.

Der 4d Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathfrak{Cat}$ et $b \in B$, le morphisme de changement de base $c_{u,b} : (p_{b/A})_! \circ j^*_{u,b} \longrightarrow i^*_{B,b} \circ u_!$ est un isomorphisme.

Soient $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ un morphisme de $\mathfrak{PDer}$ entre dérivateurs faibles à droite et $u : A \to B$ dans $\mathfrak{Cat}$. La construction développée plus haut appliquée au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A) \arrow[r, "F"] & \mathbb{D}'(A) \\ \mathbb{D}(B) \arrow[u, "u^*"] \arrow[r, "F"'] & \mathbb{D}'(B) \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd}$$

définit un 2-morphisme $u_! \circ F \to F \circ u_!$.

Définition 3.1.3. Un morphisme $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ entre dérivateurs faibles à droite est *cocontinu* si, pour tout $u : A \to B$ dans $\mathfrak{Cat}$, le 2-morphisme $u_! \circ F \to F \circ u_!$ ci-dessus est un isomorphisme. On note $\mathfrak{Der}^d$ la sous-2-catégorie de $\mathfrak{PDer}$ constituée des dérivateurs faibles à droite et des morphismes cocontinus.

On définit dualement la notion de dérivateur faible à gauche, vérifiant, outre les axiomes **Der 1** et **Der 2**, les axiomes **Der 3g** et **Der 4g** duaux des axiomes **Der 3d** et **Der 4d**. Un prédérivateur $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à gauche si et seulement si son opposé $\mathbb{D}^\circ$ est un dérivateur faible à droite.

Définition 3.1.4. Un *dérivateur* est un prédérivateur qui est un dérivateur faible à droite et à gauche. On note $\mathfrak{Der}$ la sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{PDer}$ constituée des dérivateurs.

On désigne par $\mathfrak{Der}_{ad}$ la 2-catégorie dont les objets sont les dérivateurs et dont les 1-morphismes sont les adjonctions entre ceux-ci. On constate facilement qu'un adjoint à gauche est cocontinu, si bien que l'on a un 2-foncteur "oubli de l'adjoint à droite" $\mathfrak{Der}_{ad} \to \mathfrak{Der}^d$.

3.2. *Dérivateur d'un modèle de Quillen*

On décrit dans cette section un pseudo-foncteur de la 2-catégorie des théories homotopiques de Quillen combinatoires dans celle des dérivateurs. On rappelle pour cela la construction de [4] d'un pseudo-foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o} : \mathfrak{ModQ} \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}$ de la 2-catégorie des modèles de Quillen dans celle des dérivateurs.

Pour toute catégorie modèle $\mathcal{M}$, on définit un 2-foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) : \mathfrak{Cat}^\circ \longrightarrow \mathfrak{CAT}$ de la façon suivante. Pour toute petite catégorie C, on pose $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(C) = \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C^{op}})$, la catégorie localisée de $\mathcal{M}^{C^{op}}$ relativement aux équivalences faibles argument par argument. Pour tout foncteur $u : A \to B \in \mathfrak{Cat}$, le foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(u) : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{B^{op}}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{A^{op}})$ est induit par le foncteur $(u^{op})^* : \mathcal{M}^{B^{op}} \longrightarrow \mathcal{M}^{A^{op}}$, qui préserve les équivalences faibles. Une transformation naturelle $\alpha : u \Rightarrow v$ induit alors une transformation naturelle $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(\alpha) : \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(v) \Rightarrow \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(u)$ de manière évidente.

Il est démontré dans [4] que le prédérivateur ainsi défini est un dérivateur. A titre indicatif, lorsque la catégorie modèle $\mathcal{M}$ est combinatoire, la catégorie $\mathcal{M}^{C^{op}}$ peut être munie de la structure de modèle projective, ce qui assure l'existence de $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C^{op}})$ et que le foncteur $(u^{op})^* : \mathcal{M}^{B^{op}} \longrightarrow \mathcal{M}^{A^{op}}$ est un foncteur de Quillen à droite. On en déduit facilement les axiomes **Der 1**, **Der 2** et **Der 3d**.

Pour tout morphisme $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathfrak{ModQ}$ et toute petite catégorie C, on a une adjonction de foncteurs dérivés totaux $\mathbf{L}(F^{C^{op}}) : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C^{op}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}^{C^{op}}) : \mathbf{R}(F^{\flat C^{op}})$ qui détermine un morphisme $\mathbb{H}\mathrm{o}(F) : \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{N})$ de $\mathfrak{Der}_{ad}$. Tout 2-morphisme $\tau : F \to G$ de $\mathfrak{ModQ}$ détermine également ainsi un 2-morphisme $\mathbb{H}\mathrm{o}(\tau) : \mathbb{H}\mathrm{o}(F) \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{o}(G)$ de $\mathfrak{Der}_{ad}$. Cette procédure définit un pseudo-foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o} : \mathfrak{ModQ} \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}$ qui envoie les équivalences de Quillen dans les équivalences.

Par la propriété universelle de la bi-localisation, il existe un pseudo-foncteur $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} : \mathfrak{THQ}^c \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}$ et un isomorphisme pseudo-naturel $\alpha : \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} \circ \Gamma \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{H}\mathrm{o}$, déterminés à isomorphisme pseudo-naturel unique près.

Soient C une petite catégorie et S un ensemble de morphisme de $\mathcal{U}(C)$. On note $\mathbb{H}_C$ pour $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{U}(C))$ et $\mathbb{H}_{C,S}$ pour $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{U}(C)/S)$. Le morphisme $T : \mathcal{U}(C) \longrightarrow \mathcal{U}(C)/S$ de $\mathfrak{ModQ}^c$ induit un morphisme $\mathbb{H}\mathrm{o}(T) : \mathbb{H}_C \longrightarrow \mathbb{H}_{C,S}$ de $\mathfrak{Der}_{ad}$. On remarque pour la suite que la co-unité de cette dernière adjonction de $\mathfrak{Der}$ est un isomorphisme, et que la classe image inverse des isomorphismes par le foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)(e) : \mathbb{H}_C(e) \longrightarrow \mathbb{H}_{C,S}(e)$ n'est autre que la classe des S-équivalences dans $\mathbb{H}_C(e)$.

3.3. *Une équivalence locale*

Soient $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite et $C \in \mathfrak{Cat}$. On note à nouveau h^C l'objet de $\mathbb{H}_C(C^{op}) = \mathrm{Ho}(\mathcal{U}(C)^C)$ associé au foncteur de Yoneda. Un morphisme $F : \mathbb{H}_C \to \mathbb{D}$ détermine un foncteur $F(C^{op}) : \mathbb{H}_C(C^{op}) \longrightarrow \mathbb{D}(C^{op})$. On en tire un foncteur

$$\mathfrak{Der}^d(\mathbb{H}_C, \mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(C^{op}) \qquad F \mapsto F(C^{op})(h^C)$$

On a le théorème de représentation suivant, qui est une spécialisation de [5, Corollaire 3.26].

Théorème 3.3.1 ([5]). *Pour tout $\mathbb{D} \in \mathfrak{Der}$ et tout $C \in \mathfrak{Cat}$, le foncteur $\mathfrak{Der}^d(\mathbb{H}_C, \mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(C^{op})$ est une équivalence de catégorie.* □

Ce théorème est le principal outil dans la vérification du résultat suivant.

Théorème 3.3.2. *Le pseudo-foncteur $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} : \mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}$ est une équivalence locale.*

Démonstration. On doit vérifier que, pour tout $\mathcal{N}, \mathcal{M} \in \mathfrak{THQ}^{cpg}$, le foncteur

$$\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{N},\mathcal{M}} : \mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}(\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{N}), \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$$

est une équivalence de catégorie. D'après la Proposition 2.3.4, le pseudo-foncteur $\underline{\mathfrak{ModQ}}^p \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}$ est une biéquivalence, si bien qu'il suffit de vérifier que pour tout $C \in \mathfrak{Cat}$, tout ensemble de morphisme $S \subset \mathcal{U}(C)$ et tout $\mathcal{M} \in \mathfrak{THQ}^{cpg}$ présentable, le foncteur restreint

$$\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M}} : \underline{\mathfrak{ModQ}}^p(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$$

est une équivalence de catégorie.

On considère d'abord le cas particulier $S = \varnothing$. Dans le diagramme suivant, le carré de gauche est commutatif et le carré de droite est un 2-isomorphisme induit par une résolution cofibrante de h^C dans $\mathcal{U}(C)^C$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{ModQ}^p(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^p(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \arrow[r, "\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{Der}^d(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \arrow[d, "\wr"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
\mathcal{M}^C \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{Ho}\left(\mathcal{M}^C\right) \arrow[r, equal] & \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})(C^{op})
\end{tikzcd}$$

L'équivalence centrale est celle de la Proposition 2.2.8 et l'équivalence de droite celle du Théorème 3.3.1 ci-dessus. Il s'en suit que la composée

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \arrow[r, "\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}"] & \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \arrow[r, hook] & \mathfrak{Der}^d(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))
\end{tikzcd}$$

dont le second foncteur est le plongement "oubli de l'adjoint à droite", est une équivalence, si bien que $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{U}(C),\mathcal{M}} : \mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$ est également une équivalence.

On revient maintenant au cas général. Du morphisme $T : \mathcal{U}(C) \longrightarrow \mathcal{U}(C)/S \in \mathfrak{ModQ}$, on tire le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{ModQ}^p(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "T^*"'] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^p(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \arrow[r, "\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}"] \arrow[d, "\Gamma(T)^*"'] & \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] & \mathfrak{PDer}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \arrow[d, "\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*"] \\
\mathfrak{ModQ}^p(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \arrow[r, "\gamma"'] & \underline{\mathfrak{ModQ}}^p(\mathcal{U}(C), \mathcal{M}) \arrow[r, "\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}"'] & \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \arrow[r, hook] & \mathfrak{PDer}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))
\end{tikzcd}$$

Le carré central est composé des 2-isomorphismes $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^* \simeq \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\Gamma(T))^*$ et $\mathrm{m}^{\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}}_{T,\_} : \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\Gamma(T))^* \circ \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} \circ \Gamma(T)^*$. Les carrés latéraux sont commutatifs, les plongements de droite étant les foncteurs "oubli de l'adjoint à droite".

Comme la co-unité $\varepsilon : \mathbb{H}\mathrm{o}(T) \circ \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat \longrightarrow Id$ de l'adjonction $\mathbb{H}\mathrm{o}(T) : \mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{H}_{C,S} : \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat$ de $\mathfrak{PDer}$ est un isomorphisme, l'unité $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\varepsilon)^*$ de l'adjonction induite $(\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^{\flat *}, \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*)$ est un isomorphisme, ce qui fait du foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^* : \mathfrak{PDer}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathfrak{PDer}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$, et donc du foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^* : \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_C, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$, un plongement. Par ailleurs, la Proposition 2.2.8 indique que le foncteur $\Gamma(T)^* = \widetilde{T}^* : \mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$ est un plongement.

Le foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^* \circ \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}$, isomorphe au plongement $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} \circ \Gamma(T)^*$, est donc lui-même un plongement, et comme $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*$ est également un plongement, on a montré que $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M}}$ est pleinement fidèle.

Il reste à vérifier que $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{U}(C)/S,\mathcal{M}}$ est essentiellement surjectif. Soit $G \in \mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_{C,S}, \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{M}))$. Comme $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}_{\mathcal{U}(C),\mathcal{M}}$ est une équivalence, il existe $F \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C), \mathcal{M})$ et un 2-isomorphisme $\mathbb{H}\mathrm{o}(F) \simeq \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*(G)$. Le 2-isomorphisme

$$\mathbf{L}(F) = \mathbb{H}\mathrm{o}(F)(e) \simeq G(e) \circ \mathbb{H}\mathrm{o}(T)(e) : \mathrm{Ho}(\mathcal{U}(C)) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{U}(C)/S) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$$

montre que $\mathbf{L}(F)$ envoie l'ensemble S dans les isomorphismes, ce qui assure l'existence d'un morphisme $\bar{F} \in \mathfrak{ModQ}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})$ tel que $T^*(\bar{F}) = F$ et donc $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*(\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\gamma\bar{F})) \simeq \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(F) \simeq \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*(G)$. Comme $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^*$ est un plongement, on a un morphisme $\gamma\bar{F} \in \mathfrak{THQ}^{cpg}(\mathcal{U}(C)/S, \mathcal{M})$ et un 2-isomorphisme $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\gamma\bar{F}) \simeq G$, démontrant ainsi la surjectivité essentielle de $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}$. □

Remarque 3.3.3. La démonstration ci-dessus montre que si C est une petite catégorie et $\mathbb{D}$ est un dérivateur associé à un modèle de Quillen combinatoire propre à gauche, alors le foncteur oubli $\mathfrak{Der}_{ad}(\mathbb{H}_C, \mathbb{D}) \hookrightarrow \mathfrak{Der}^d(\mathbb{H}_C, \mathbb{D})$ est une équivalence de catégories.

3.4. *Dérivateurs de petite présentation*

Dans cette section, on introduit les dérivateurs de petite présentation dans le but de déduire du Théorème 3.3.2 une biéquivalence.

Définition 3.4.1. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. Une *localisation* de $\mathbb{D}$ est la donnée d'une adjonction $F : \mathbb{D} \rightleftarrows \mathbb{D}' : F^\flat$ de $\mathfrak{PDer}$ dont la co-unité $\varepsilon^F : F \circ F^\flat \to Id$ est un isomorphisme.

Il s'avère que la localisation préserve un certain nombre de propriété.

Lemme 3.4.2 (*[5, Lemme 4.2]*). *Une localisation d'un dérivateur est également un dérivateur.* □

Définition 3.4.3. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. Une *petite génération* de $\mathbb{D}$ est la donnée d'une petite catégorie $C \in \mathfrak{Cat}$ et d'une localisation $\mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{D}$. Une *petite présentation* de $\mathbb{D}$ est la donnée d'une petite génération $\mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{D}$ et d'un ensemble S de morphisme de $\mathbb{H}_C(e)$ tels que les S-équivalences coïncident avec l'image inverse des isomorphismes par le foncteur $\mathbb{H}_C(e) \to \mathbb{D}(e)$. Le prédérivateur $\mathbb{D}$ est dit de petite présentation s'il possède une petite présentation.

Il découle du Lemme 3.4.2 qu'un prédérivateur de petite présentation est nécessairement un dérivateur. L'exemple fondamental de petite présentation est la localisation $\mathbb{H}\mathrm{o}(T) : \mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{H}_{C,S} : \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat$ associé à une petite catégorie C et à un ensemble S de morphisme de $\mathbb{H}_C(e)$.

On note $\mathfrak{Der}^{pp}_{ad}$ la sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{Der}_{ad}$ constituée des dérivateurs de petite présentation. Le Théorème 2.2.2 montre que le pseudo-foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o} : \mathfrak{ModQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{Der}_{ad}$ est en fait à valeur dans $\mathfrak{Der}^{pp}_{ad}$.

Théorème 3.4.4. *Le pseudo-foncteur* $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}} : \mathfrak{THQ}^{cpg} \longrightarrow \mathfrak{Der}^{pp}_{ad}$ *est une biéquivalence.*

Démonstration. Vu le Théorème 3.3.2, il reste à vérifier que le pseudo-foncteur $\widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}$ est 2-essentiellement surjectif. Soit $\mathbb{D} \in \mathfrak{Der}^{pp}_{ad}$. Soient $C \in \mathfrak{Cat}$, un ensemble S de morphisme de $\mathbb{H}_C(e)$ et une localisation $F : \mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{D}$ constituant une petite présentation de $\mathbb{D}$. De la localisation $\mathbb{H}\mathrm{o}(T) : \mathbb{H}_C \rightleftarrows \mathbb{H}_{C,S} : \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat$, on tire deux morphismes $\widetilde{F} : \mathbb{H}_{C,S} \rightleftarrows \mathbb{D} : \widetilde{F}^\flat$ de $\mathfrak{Der}$ définis par $\widetilde{F} = F \circ \mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat$ et $\widetilde{F}^\flat = \mathbb{H}\mathrm{o}(T) \circ F^\flat$. Le 2-morphisme composé

$$Id \xrightarrow[(\varepsilon^F)^{-1}]{\sim} FF^\flat \xrightarrow[F\eta^{\mathbb{H}\mathrm{o}(T)}F^\flat]{} F\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat\mathbb{H}\mathrm{o}(T)F^\flat = \widetilde{F}\widetilde{F}^\flat$$

est un 2-isomorphisme. En effet, par l'axiome **Der 2**, il suffit de vérifier que $F\eta^{\mathbb{H}\mathrm{o}(T)}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$, ce qui découle de ce que $\eta^{\mathbb{H}\mathrm{o}(T)}$ est une S-équivalence, car $\mathbb{H}\mathrm{o}(T)(\eta^{\mathbb{H}\mathrm{o}(T)})$ est un isomorphisme, via une identité triangulaire. De même, le 2-morphisme composé

$$Id \xrightarrow[(\varepsilon^{\mathbb{H}\mathrm{o}(T)})^{-1}]{\sim} \mathbb{H}\mathrm{o}(T)\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat \xrightarrow[\mathbb{H}\mathrm{o}(T)\eta^F\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat]{} \mathbb{H}\mathrm{o}(T)F^\flat F\mathbb{H}\mathrm{o}(T)^\flat = \widetilde{F}^\flat\widetilde{F}$$

est un 2-isomorphisme, et on a ainsi obtenu une équivalence entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}_{C,S} = \widetilde{\mathbb{H}\mathrm{o}}(\mathcal{U}(C)/S)$. □

References

[1] D.A. Pronk, Etendues and stacks as bicategories of fractions, Compos. Math. 102 (3) (2001) 243–303.
[2] D. Dugger, Combinatorial model categories have presentations, Adv. Math. 164 (1) (2001) 177–201.
[3] D. Dugger, Universal homotopy theories, Adv. Math. 164 (1) (2001) 144–176.
[4] D.-C. Cisinski, Images directes cohomologiqques dans les catégories de modéles, Ann. Math. Blaise Pascal 10 (2003) 195–244.
[5] D.-C. Cisinski, Propriétés universelles et extension de Kan dérivées, Theory Appl. Categ. 20 (17) (2008) 605–649.
[6] O. Renaudin, Théories homotopiques de Quillen combinatoires et dérivateurs de Grothendieck, Prépublication. arXiv:math.AT/0603339.
[7] T. Leinster, Basic bicategories. arXiv:math.CT/9810017.
[8] T. Leinster, Higher operads, higher categories, in: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, 2004. arXiv:math.CT/0305049.
[9] M. Hovey, Model categories, in: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
[10] P.S. Hirschhorn, Model categories and their localizations, in: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
[11] D. Dugger, Spectral enrichments of model categories, Homology Homotopy Appl. 8 (1) (2006) 1–30.
[12] M. Hovey, Spectra and symmetric spectra in general model categories, J. Pure Appl. Algebra 165 (2001) 63–127.
[13] G. Maltsiniotis, Introduction á la théorie des dérivateurs, Prépublication. www.math.jussieu.fr/~maltsin/.