北京大學

硕士研究生学位论文

题目 常数量曲率度量和稳定性

姓　　名	李驰
学　　号	10401012
院　　系	数学学院
专　　业	基础数学
研究方向	复几何
指导教师	田刚 教授

二零零七年六月

Constant Scalar Curvature Kähler Metrics and Stabilities

Li, Chi

Supervisor:

Prof. Tian, Gang

School of Mathematical Sciences, Peking University

June , 2007

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master in Pure Mathematics

版权声明

摘　　要

Kähler几何中一个主要问题是Kähler-Einstein度量的存在性, 非正数量曲率的Kähler-Einstein度量的存在性已经解决. 正数量曲率的情形不一定存在. Futaki引入了重要的全纯不变量: Futaki不变量. 存在性的必要条件是Futaki不变量等于0. 和向量丛的情形对比, 猜测Kähler-Einstein度量的存在性和流形在几何不变量理论中的某种稳定性有关. Tian首先证明了正数量曲率Kähler-Einstein度量存在能推出他定义的K-稳定性. K-稳定性中Futaki不变量起了重要的作用. 更一般的考虑常数量曲率度量的存在性, Futaki不变量推广到这种情况, 也能定义K稳定性的概念. 另外还有Chow稳定性的概念. Donaldson利用Bergman核的展式证明了一定条件下常数量曲率度量存在能推出渐近Chow稳定性. 各种稳定性都有对应的凸泛函和作用的权. K-稳定性对应的凸泛函是K-泛函, 权对应于Futaki不变量. 利用Donaldson的计算可以说明渐近Chow稳定性能推出K-半稳定性.

在这篇文章中, 我们说明从Chow稳定性的定义到balanced度量判别法, 同时可得到Chow权的表达式和Donaldson论文中有限维空间上泛函的表达式. 我们给出Donaldson定理证明的主要思路, 说明Bergman核展式的作用. 我们说明利用Bergman核可以给出Hilbert权的渐近表达式, 得到Donaldson关于Futaki不变量的代数定义和它能被看作Chow权渐近展式的首项系数, 从而说明渐近Chow稳定性能推出K-半稳定性. 我们还利用Futaki不变量的代数定义给出完全交的Futaki不变量的计算, 检验和局部化公式算出的结果一致. 本文是我学习的一个总结.

关键词： 常数量曲率度量, 稳定性, Futaki不变量, Bergman核

Abstract

One of the major problems in Kähler geometry is the existence of Kähler-Einstein metrics. The existences of Kähler-Einstein metrics with nonpositive scalar curvature have been confirmed. But Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature do not necessarily exist. Futaki defined an important holomorphic invariant: Futaki invariant. The necessary condition for existence is the vanishing of Futaki invariant. Compared with the case of vector bundles, it is conjectured that the existence of Kähler-Einstein metric is equivalent to some kind of stability of the manifold in the Geometric Invariant Theory. Tian first proved that the existence of Kähler-Einstein metric with positive scalar curvature imply K- stability which he defined. In the definition of K-stability, the Futaki invariant plays a fundamental role. More generally, one considers the existence of Kähler metrics with constant scalar curvature. Both the Futaki invariant and K-stability extend to this case. There is also a notion of Chow stability. Donaldson proved that under some condition, the existence of constant scalar curvature metric implies asymptotic stability of the underlying manifold. Both stabilities have convex functionals and weights under group actions. In the case of K-stability, the functional is K-functional and the weight is just the Futaki invariant. Using the calculation of Donaldson, it can be showed that the asymptotic Chow stable implies semi K-stable.

In this article, we explain from the definition of Chow stability to the criterion by balanced metrics, and we can get the Chow weight and the functionals which Donaldson used in his papers. We explain the main idea of the proof of Donaldson's theorem and how the expansion of Bergman kernel is used. We can use the Bergman kernel to give the asymptotic expansion of the Hilbert weight, get the algebraic definition of Futaki invariant by Donaldson and the fact that the Futaki invariant is the leading coefficient in the expansion of the Chow weight associated to a 1psg action, thus we explain the result that the asymptotic Chow stable implies semi K-stable. We also use the algebraic definition to give the computation of the Futaki invariant of complete intersections and test that the result is the same as that obtained using localization formula. This article is a summary of what I learned in this subject.

Keywords: Constant scalar curvature metrics, Stability, Futaki invariant, Bergman kernel

目　　录

第一章　问题的描述, 本文的结构和一些记号

假设(X,ω)是一个复n维Kähler流形, 在X的局部坐标下, Kähler形式为

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

度量张量为

$$g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$$

Ricci形式是$c_1(X)$的代表元, 定义为

$$Ric(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\log\det(g_{k\bar{l}}) dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

数量曲率为

$$S = \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}} = \frac{nRic(\omega)\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n}$$

Kähler几何中一个主要问题是X上什么时候存在Kähler-Einstein度量. ω称为是Kähler-Einstein度量, 如果

$$Ric(\omega) = \lambda\omega \tag{1.1}$$

其中不妨设$\lambda = -1, 0, 1$. 对应于λ的符号, 存在的一个必要条件是$c_1(X)$定号. $c_1(X) < 0$的情况被Aubin和Yau解决. $c_1(X) = 0$由Yau对Calabi猜测的解决而解决. 答案都是肯定的. 本文只考虑$c_1(X) > 0$的情形, 即$\lambda = 1$. 此时, X上不一定存在Kähler-Einstein度量. Matsushima[16]证明X上有Kähler-Einstein度量，则$Aut(X)$是reductive的. Futaki[10]给出了重要的全纯不变量, 存在Kähler-Einstein度量时, 这个不变量为0. 在全纯向量丛的情形, Hermitian-Einstein度量的存在性和向量丛的某种稳定性是等价的, 叫做Hitchin-Kobayashi对应. 所以Yau猜想Kähler-Einstein的存在性也和几何不变量理论中的某种稳定性有关. Tian[21]首先证明了存在的必要条件是他定义的K稳定性, 并且猜测这两者是等价的. 在K-稳定性中Futaki不变量起着基本的作用.

当$\omega \in c_1(X)$时, 由$\partial\bar{\partial}$-引理, 存在$h_\omega \in C^\infty(X)$使得$Ric(\omega) - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h_\omega$, 两边对$\omega$缩并得$S - n = \Delta_\omega h_\omega$. 所以可知$\omega$是Kähler-Einstein的当且仅当它是常数量曲率的. 一般的取定Kähler类$[\omega] \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$. 对任意的$\phi \in C^\infty(X)$, 记

$$\omega_\phi = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\phi$$

$$P(X,\omega) = \{\phi \in C^\infty(X) | \omega_\phi > 0\}$$

$$\mathscr{K}(X,[\omega]) = \{\omega_\phi | \phi \in P(X,\omega)\}$$

考虑是否有$\phi \in P(X,\omega)$使得$S(\omega_\phi)$是常数. 注意S的平均值$\underline{S}$只依赖于Kähler类. 令$V = \int_X \omega^n$.

$$\underline{S} = \frac{1}{V}\int_X S(\omega)\omega^n = \frac{\langle nc_1(X)[\omega]^{n-1},[X]\rangle}{\langle[\omega]^n,[X]\rangle}$$

如果取$[\omega] \in H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$, 则存在$X$上正的全纯线丛$L$, 使得$c_1(L) = [\omega]$. 此时称$(X,L)$是polarized对. 设$h$是$L$上Hermitian度量, 记

$$Ric(h) \triangleq \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log |e_L|_h^2$$

其中e_L是是局部处处非零的全纯截面. 对任意的$\phi \in C^\infty(X)$, 记$h_\phi = he^{-\phi}$, 有$Ric(h_\phi) = Ric(h) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\phi$. 由$\partial\bar{\partial}$引理容易知道, 在相差正常数下存在唯一的Hermitian度量h, 使得$\omega = Ric(h)$.

因为L是正的线丛, 当k充分大时, 我们有Kodaira嵌入.

$$\begin{aligned} I_{kL}: X &\longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,kL)^*) \\ z &\mapsto \{s \in H^0(X,kL) | s(z) = 0\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

使得$I_{kL}^*\mathcal{O}(1) = kL$. 取$H^0(X,kL)$的一组基$\{s_\alpha\}$, $H^0(X,kL)^* \cong \mathbb{C}^{N_k+1}$

$$\begin{aligned} I_{\{s_\alpha\}}: X &\longrightarrow \mathbb{CP}^{N_k} \\ z &\mapsto [s_0(z):\cdots:s_{N_k}(z)] \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\mathbb{CP}^{N_k}$中有标准的Fubini-Study度量. 在非齐次坐标$\{z_\alpha\}$下,

$$\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1+\sum_{\alpha=1}^{N_k}|z_\alpha|^2) \tag{1.4}$$

所以我们有拉回的Kähler度量$\frac{1}{k}(I_{\{s_\alpha\}})^*\omega_{FS}$. 取定Hermitian度量$h$, 使得$\omega = Ric(h)$. 注意到有

$$(I_{\{s_\alpha\}})^*\omega_{FS} = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{1}{k}\partial\bar{\partial}\log\sum_{\alpha=0}^{N_k}|s_\alpha|_{h^k}^2$$

记

$$P_k(X,\omega) = \{\phi = \frac{1}{k}\log\sum_{\alpha=0}^{N_k}|s_\alpha|_{h^k}^2 \ | \{s_\alpha\}\text{是}H^0(X,kL)\text{的一组基}\} \tag{1.5}$$

$$\mathscr{K}_k(X,\omega) = \{\frac{1}{k}(I_{\{s_\alpha\}})^*\omega_{FS} | \{s_\alpha\}\text{是}H^0(X,kL)\text{的一组基}\}$$

Tian[20]证明了X上任何Kähler度量都可以用一族度量$\omega_k \in \mathscr{K}_k$来逼近, 只要取$\{s_\alpha\}$为$h$决定$H^0(X,kL)$内积的一组标准正交基. 此时$\omega_k$称为Bergman度量. 等价的, $P(X,\omega)$中的函数可

以用$P_k(X,\omega)$中的函数来逼近. 这是多复变里以下事实的Kähler流形的版本: 在有界全纯域上可以用Bergman核函数来逼近多次调和函数(plurisubharmonic function).

现在假设X上没有全纯向量场, ω是常数量曲率的度量. Donaldson[6]证明了可以用另外一族度量$\widetilde{\omega}_k \in \mathscr{K}_k$来逼近, 称为balanced度量. 而Zhang[25]证明了这种balanced度量的存在性和几何不变量理论里的Chow稳定性是等价的. Luo[14], Paul[19]也证明了同样的事实. 所以Donaldson实际证明了当X上没有全纯向量场时, 常数量曲率度量的存在性能推出渐近Chow稳定性. 可以看出Kähler-Einstein度量和balanced度量的存在性都和某种稳定性有关. 这种联系可以从两方面来理解. 一方面, 分析上, 典范度量的存在性以及稳定性都和一些凸泛函的properness有关. 例如Chow稳定性中的凸泛函和以下定义的泛函密切相关, 我们会一直用到.

定义 1.1. 对任意的$\phi \in C^\infty(X)$, 取$C^\infty(X)$中连接0和ϕ的一条道路$\{\phi_t\}$

$$F_\omega^0(\phi) = -\frac{1}{V}\int_0^1\int_X \frac{d}{dt}\phi_t \omega_{\phi_t}^n \tag{1.6}$$

当$\omega \in c_1(L)$时, F_ω^0可看作Bott-Chern类在X上的积分, 由附录定理A.7知不依赖于道路$\{\phi_t\}$的选取. 而对应于K-稳定性, 我们有类似的K-泛函, Tian[21]证明了Kähler-Einstein度量的存在性等价于它的某种properness.

另一方面, 代数几何里稳定性有Hilbert判别法, 是计算单参数子群作用下的权的正负. 这些权可以用相应向量场的矩映射表示为不变量的形式. 上述的凸泛函可以看作是把矩映射换成Kähler势, 再沿任意路径积分得到的. 所以权可看作是凸泛函在极限点处的导数, 如果泛函是proper的, 它的增长性保证了导数是严格大于0的. Futaki不变量的定义中的全纯向量场对应着单参数群的作用, 形式上恰好可以看作某种权.

在第二节中, 我们介绍Chow稳定性和它的判别法, 第三节, 我们介绍Bergman核的渐近展开式和Donaldson的结果. 第四节, 我们介绍Futaki不变量, 权的两种计算, Futaki不变量的代数定义, 给出计算的例子. 第四节我们来简单介绍凸泛函和稳定性的关系. 附录中我们给出正文中要用到的等变上同调和Bott-Chern类的定义, 性质和相关的例子.

第二章 Chow稳定性和balanced度量

设通过Kodaira嵌入(1.2), X成为射影空间$\mathbb{CP}^N$的代数子流形. $\dim X = n$, $\deg X = d$. 注意$d = \int_X \omega_{FS}^n$, 本节中的d和其它节中的V是一样的. 我们来定义X的Chow向量. Grassmannian流形$Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N)$表示$\mathbb{CP}^N$中所有$N-n-1$维子空间的集合, 它的维数记为$m+1 = (N-n)(n+1)$. 利用万有商丛Q的行列式, 我们有Plücker嵌入$I_{Pl} : Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{N-n} \mathbb{C}^{N+1})$, 使得$I_{Pl}^* \mathcal{O}(1) = \det(Q)$. 记

$$Z(X) = \{V \in Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N) | V \cap X \neq \varnothing\}$$

$$\Gamma(X) = \{(z, V) \in X \times Z(X) | z \in V\}$$

$$\Gamma(\mathbb{CP}^N) = \{(z, V) \in X \times Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N) | z \in V\}$$

我们有投射

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi_{1X}} & \Gamma(X) & \xrightarrow{\pi_{2X}} & Z(X) \\ \bigcap & & \bigcap & & \bigcap \\ \mathbb{CP}^N & \xleftarrow{\pi_1} & \Gamma(\mathbb{CP}^N) & \xrightarrow{\pi_2} & Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N) \end{array} \tag{2.1}$$

因为$Z(X)$处于一般位置的$N-n-1$子空间交X只有一个点, 所以π_{2X}是双有理态射. 而π_1的每根纤维同构于$Gr(N-n-2, \mathbb{CP}^{N-1})$, 所以

$$\dim Z(X) = \dim \Gamma(X) = \dim X + \dim Gr(N-n-2, \mathbb{CP}^{N-1}) = (N-n)(n+1) - 1 = m$$

以下简记$Gr = Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N)$. 取$\mathbb{CP}^N$的两个处于一般位置的子空间$U \cong \mathbb{CP}^{N-n-2} \subset W \cong \mathbb{CP}^{N-n}$. 则

$$F(U, W) \triangleq \{V \in Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N) | U \subset V \subset W\} \cong \mathbb{CP}^1$$

因为U, W处于一般位置, 所以$U \cap X = \emptyset$, $\sharp(W \cap X) = d$. 于是$F(U, V)$中恰好有d个$(N-n-1)$维子空间和X相交非空, 即$\sharp(F(U, W) \cap Z(X)) = d$. 所以$Z(X)$是$Gr$的度数为$d$的除子. 于是相差常数下存在唯一的$f \in H^0(Gr, \mathcal{O}(d))$, 使得$Z(X) = f$的零点集. 其中$\mathcal{O}(d)$是$\det(Q) = \mathcal{O}(1)$的$d$次张量积. f称为X的Chow向量. $[f] \in \mathbb{P}[H^0(Gr, \mathcal{O}(d))]$称为$X$的Chow点.

$SL(N+1, \mathbb{C})$作用在$(\mathbb{CP}^N, \mathcal{O}(1))$上, 自然作用在$(Gr(N-n-1, \mathbb{CP}^N), \mathcal{O}(1))$, 及全纯截面空间$H^0(Gr, \mathcal{O}(d))$和射影化$\mathbb{P}[H^0(Gr, \mathcal{O}(d))]$上.

定义 2.1. X称为Chow稳定的, 如果$f \in H^0(Gr, \mathcal{O}(d))$在$SL(N+1, \mathbb{C})$作用下的轨道是闭的, 且$f$的稳定化子有限. X称为Chow半稳定的, 如果f的轨道的闭包不含0.

为了判别稳定性, 我们有两种办法, 一种是利用轨道上凸泛函的性质, 一种是Hilbert判别法. 我们先来定义凸泛函

定义 2.2. 设$f \in H^0(Gr, \mathcal{O}(d))$, 定义Chow范数$\|f\|_{Ch}$满足

$$\log \|f\|_{Ch}^2 = \frac{1}{D}\int_{Gr} \log |f|^2_{h^d_{FS}} \omega_{Gr}^{m+1}$$

其中$D = \int_{Gr} \omega_{Gr}^{m+1}$. $|f|^2_{h^d_{FS}}$, ω_{Gr}是通过Plücker嵌入得到的$\mathcal{O}(d)$和Gr上的标准Fubini-Study度量,

注 1. 局部上f是Gr上全纯函数, $\log |f|^2_{h^d_{FS}}$是是局部可积的多次调和函数, 在f的零点取值$-\infty$. 易知$\|cf\|^2_{Ch} = |c|\|f\|^2_{Ch}$.

设$\sigma \in SL(N+1, \mathbb{C})$, 用$f_\sigma$表示$\sigma \cdot f$, 于是$f_\sigma$是$\sigma(X)$的Chow向量. 定义$SL(N+1, \mathbb{C})$上的函数:

$$F(\sigma) = \log \|f_\sigma\|^2_{Ch} \tag{2.2}$$

因为$SU(N+1)$保持度量, $F(\sigma)$实际是定义在对称空间$\mathcal{S} = SL(N+1, \mathbb{C})/SU(N+1)$上. 我们来证明$F(\sigma)$沿$\mathcal{S}$的测地线是凸函数. $\mathcal{S}$中的测地线都由单参数子群表示. 注意到

$$sl(N+1, \mathbb{C}) = su(N+1) + \sqrt{-1}su(N+1), \quad SL(N+1, \mathbb{C}) = SU(N+1)^{\mathbb{C}}$$

设$\sigma(e^t) : \mathbb{C}^* \to SL(N+1, \mathbb{C})$是表示一条测地线的单参数子群. 不妨设

$$\sigma(e^t) = \exp(tA) \tag{2.3}$$

生成元$A \in \sqrt{-1}su(N+1)$满足

$$A^* = A, \quad \mathrm{tr}(A) = 0 \tag{2.4}$$

取$Z = (Z_0, \cdots, Z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, 记$|Z|^2 = \sum_{\alpha=0}^N |Z_\alpha|^2$. 设$Z$是$[Z] \in \mathbb{CP}^N$的齐次坐标. 令

$$\phi_\sigma([Z]) = \log \frac{|\sigma \cdot Z|^2}{|Z|^2} \tag{2.5}$$

则$\sigma^*\omega_{FS} = \omega_{FS} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\phi_\sigma$且

$$\frac{d}{dt}\sigma^*\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\dot{\phi}_\sigma, \quad \dot{\phi}_\sigma([Z]) = \frac{d}{dt}\log\frac{|\sigma \cdot Z|^2}{|Z|^2} = 2\frac{Z^*\sigma^* A\sigma Z}{|\sigma \cdot Z|^2} \tag{2.6}$$

定理 2.1 (Phong-Sturm[17], S. Paul[19])**.**

$$\frac{d}{dt}\log\|f_\sigma\|^2_{Ch} = (n+1)\int_X \dot{\phi}_\sigma(\sigma^*\omega_{FS})^n = 2(n+1)\int_{\sigma(X)} \frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\omega_{FS}^n \tag{2.7}$$

证明. 我们只给出证明中主要计算. 通过Plücker嵌入, ω_{Gr}是射影空间$P(\bigwedge^{N-n}\mathbb{C}^{N+1})$上标准Fubini-Study度量在$Gr$上的限制. 和上面一样定义$\Phi_\sigma$使得$\sigma^*\omega_{Gr} = \omega_{Gr} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\Phi_\sigma$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log\|f_\sigma\|^2_{Ch} &= \frac{1}{D}\int_{Gr}\log|f|^2_{h^d_{FS}}(m+1)\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\dot{\Phi}_\sigma \wedge \omega_{Gr}^m \text{ (其它导数项积分为0)} \\
&= (m+1)\frac{1}{D}\int_{Z(X)}\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m
\end{aligned} \tag{2.8}$$

第二个等号是由Poincaré-Lelong方程: 在分布意义下

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log|f|^2_{h^d_{FS}}=\int_{Z(X)}$$

由投影(2.1)易知

$$\frac{1}{D}\pi_{1*}\pi_2^*\omega_{Gr}^{m+1}=\omega_{FS}^{n+1}$$

其中π_{1*}是沿π_1的纤维$Gr(N-n-2,\mathbb{CP}^{N-1})$积分. 两边对$t$求导得

$$\partial\bar{\partial}(m+1)\frac{1}{D}\pi_{1*}\pi_2^*(\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m)=(n+1)\partial\bar{\partial}\dot{\phi}_\sigma\omega^n$$

可以知道$\eta=(m+1)\frac{1}{D}\pi_{1*}\pi_2^*(\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m)-(n+1)\dot{\phi}_\sigma\omega^n$ 是闭的(n,n)形式, 而且η在$\sigma(e^t)$保持不变的$\mathbb{CP}^n$上积分为0, 所以η是正合的, 从而$\int_X\eta=0$. 所以

$$\begin{aligned}(m+1)\frac{1}{D}\int_{Z(X)}\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m &= (m+1)\frac{1}{D}\int_{\Gamma(X)}\pi_{2X}^*(\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m)\ (\pi_{2X}\text{是双有理的})\\ &= (m+1)\frac{1}{D}\int_X\pi_{1*}\pi_2^*(\dot{\Phi}_\sigma\omega_{Gr}^m)\\ &= (n+1)\int_X\dot{\phi}_\sigma\omega_{FS}^n \qquad (2.9)\end{aligned}$$

□

注 2. 上面证明中式(2.8)可直接在$Z(X)$上积分证明范函$F(\sigma)$沿$\mathcal{S}$测地线的凸性, 可以看出下面的证明适用. 但式(2.9)使我们不用在$Z(X)$上积分, 而只用在X上作积分就行了.

令$(N+1)$阶Hermitian矩阵$M(X)$为

$$M(X)_{\alpha\beta}=\int_X\frac{Z_\alpha\bar{Z}_\beta}{|Z|^2}\omega_{FS}^n \qquad (2.10)$$

记$X_t=\sigma(e^t)X$, 则式(2.7)可写为

$$\frac{d}{dt}\log\|f_\sigma\|^2_{Ch}=-d\cdot(n+1)\frac{d}{dt}F^0_{\omega_{FS}}(\phi_\sigma)=2(n+1)\mathrm{tr}(M(X_t)A) \qquad (2.11)$$

注意, 这里的d就是其它节中的体积V. 所以

$$F(\sigma)=\log\|f_\sigma\|^2_{Ch}=-d\cdot(n+1)F^0_{\omega_{FS}}(\phi_\sigma) \qquad (2.12)$$

命题 2.2. *$tr(M(X_t)A)$作为$t\in\mathbb{R}$的函数是增函数. 而且如果X上没有能提升到作用在$\mathcal{O}(1)$的全纯向量场, 则$tr(M(X_t)A)$关于t是严格递增的.*

证明. 设单参数子群表示为(2.3),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(M(X_t)A) &= \frac{d}{dt}\int_X\frac{Z^*\sigma^*A\sigma Z}{|\sigma\cdot Z|^2}(\sigma^*\omega_{FS})^n\\ &= 2\int_{\sigma(X)}\left(\frac{Z^*A^2Z}{|Z|^2}-\frac{(Z^*AZ)^2}{|Z|^4}\right)\omega_{FS}^n-n\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\wedge\bar{\partial}\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\wedge\omega_{FS}^{n-1} \qquad (2.13)\end{aligned}$$

我们要证明积分非负. 不妨假设σ是恒等变换. 用$SU(N+1)$作坐标变换, 可以假设$A=diag(\lambda_0,\cdots,\lambda_N)$是对角矩阵, 其中$\lambda_\alpha\in\mathbb{R}$, 且$\sum_{\alpha=0}^N\lambda_\alpha=0$. 单参数子群(2.3)生成了$\mathbb{CP}^N$上一全纯向量场$v$, 在非齐次坐标$\{w_{\alpha'}=\frac{Z_{\alpha'}}{Z_0}|\alpha'=1,\cdots,N\}$下,

$$v=\sum_{\alpha'=1}^N(\lambda_{\alpha'}-\lambda_0)w_{\alpha'}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha'}}$$

注意$Im(v)$是Killing向量场, 且$Re(v)=J(Im(v))$. 令

$$\theta_A=\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}=\frac{\sum_{\alpha=0}^N\lambda_\alpha|Z_\alpha|^2}{\sum_{\alpha=0}^N|Z_\alpha|^2} \tag{2.14}$$

直接计算可知(参看附录), 在$\mathbb{CP}^N$的Fubini-Study Kähler形式下, $2Im(v)$是$\frac{1}{2\pi}\theta_A$的Hamilton向量场, 即

$$2\,i_{Im(v)}\omega_{FS}=\frac{1}{2\pi}d\theta_A\quad \text{或}\quad \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar\partial\theta_A=i_v\omega_{FS} \tag{2.15}$$

而且

$$\frac{Z^*A^2Z}{|Z|^2}-\frac{(Z^*AZ)^2}{|Z|^4}=g_{FS}(v,\bar v)=|v|^2=|\bar\partial\theta_A|^2_{\omega_{FS}} \tag{2.16}$$

为了区分大空间$\mathbb{CP}^N$和子流形X上的几何，我们记$\bar\partial_X$是X上的$\bar\partial$算子, 而仍用$\bar\partial$表示$\mathbb{CP}^N$上的算子. 令$v=v^T+v^\perp$是在$T\mathbb{CP}^N=TX\oplus TX^\perp$下的正交分解, 则

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}n\partial_X\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\wedge\bar\partial_X\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\wedge\omega_{FS}^{n-1}=|\bar\partial_X\theta_A|^2\omega_{FS}^n=|v^T|^2\omega_{FS}^n \tag{2.17}$$

由(2.16),(2.17)得(2.13)的积分项可化为(除去常数4和ω_{FS}^n)

$$|\bar\partial\theta_A|^2-|\bar\partial_X\theta_A|^2=|v|^2-|v^T|^2=|v^\perp|^2\geq 0 \tag{2.18}$$

由(2.18)知(2.13)式为0当且仅当v和X相切. 所以如果X上没有能提升到作用在$\mathcal{O}(1)$的全纯向量场, 则$\mathrm{tr}(M(X_t)A)$关于t是严格递增的. □

注 3. 令

$$|Z_\alpha|^2_{FS}=\frac{|Z_\alpha|^2}{|Z|^2}=\frac{|Z_\alpha|^2}{\sum_\beta|Z_\beta|^2}$$

把Z_α看作是$\mathbb{CP}^N$上超平面从$\mathcal{O}(1)$的全纯截面$|Z_\alpha|^2_{FS}$是标准的Fubini-Study度量. 则积分项可化为

$$\sum_{\alpha=0}^N\lambda_\alpha^2|Z_\alpha|^2_{FS}-(\sum_{\alpha=0}^N\lambda_\alpha|Z_\alpha|^2_{FS})^2-|\bar\partial_X(\sum_{\alpha=0}^N\lambda_\alpha|Z_\alpha|^2_{FS})|^2_{\omega_{FS}|_X}=\sum_{\alpha=0}^N|\lambda_\alpha Z_\alpha-\nabla_{h^i\partial_i}Z_\alpha-hZ_\alpha|^2_{FS} \tag{2.19}$$

其中∇是$\mathcal{O}(1)$上Fubini-Study度量对应的全纯联络. $h^i\partial_i=\frac{\partial h}{\partial\bar z^j}g^{i\bar j}\frac{\partial}{\partial z^i}$, $g=g_{FS}$是Fubini-Study度量在X上的限制. 见(3.7)和(3.8).

由式(2.11)和命题2.2得

定理 2.3. *$F(\sigma) = \log\|f_\sigma\|^2_{Ch}$沿$SL(N+1)/SU(N+1)$的测地线是凸的. 当$X$上没有能够提升到$\mathcal{O}(1)$上的全纯向量场时, $F(\sigma)$是严格凸的.*

因为$SL(N+1)/SU(N+1)$上任意两点都有测地线连接, 利用$F(\sigma)$沿测地线的凸性可证

定理 2.4. *以下各项等价:*

(1) X是Chow稳定的,

(2) $F(\sigma)$在$SL(N+1,\mathbb{C})/SU(N+1)$上是proper的, 即当$\sigma\to\infty$时(比如在对称空间的标准度量下), $F(\sigma)\to+\infty$.

(3) $F(\sigma)$在$\mathcal{S}=SL(N+1,\mathbb{C})/SU(N+1)$上存在唯一的临界点, 即存在唯一的$\sigma\in\mathcal{S}$使得对任意的$A\in\sqrt{-1}su(N+1)$, 有

$$\int_{\sigma(X)}\frac{Z^*AZ}{|Z|^2}\omega^n_{FS} = tr(M(\sigma(X))A) = 0$$

引理 2.5. *设M是$(N+1)\times(N+1)$阶Hermitian矩阵, 则M是对角矩阵当且仅当, 对任意的$A\in\sqrt{-1}su(N+1)$, 有*

$$tr(MA) = \sum_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = 0$$

定义 2.3. X称为是balanced的, 如果$M(X)$是数量矩阵. 注意到

$$\mathrm{tr}(M) = \int_X \omega^n_{FS} = d$$

X是balanced的当且仅当

$$M(X) = \frac{d}{N+1}I_{N+1}$$

其中I_{N+1}是$N+1$阶单位矩阵.

由定理2.4和引理2.5得

定理 2.6. *X是Chow稳定的, 当且仅当存在唯一的$\sigma\in SL(N+1,\mathbb{C})/SU(N+1)$, 使得$\sigma(X)$是balanced的.*

我们来看看Hilbert判别法. 先设$\sigma(e^t)$保持X, 则$\sigma(e^t)$保持$Z(X)$. X的Chow向量f在相差常数下被$Z(X)$决定, 于是$\sigma(e^t)$作用在1维复线性空间$\mathbb{C}f$上. 设

$$f_{\sigma(e^t)} = e^{tA}\cdot f = e^{tw}f$$

代入(2.7), 两边对t在0点求导可得

$$w = (n+1)\int_X \theta_A\omega^{n+1}_{FS} = (n+1)\mathrm{tr}(M(X)A) \tag{2.20}$$

如果X是Chow稳定的, 则存在t_0, 使得$\mathrm{tr}(M(X_{t_0})A) = 0$. 所以由命题2.2得, 对任意的$t > t_0$, 有

$$\mathrm{tr}(M(X_t)A) > \mathrm{tr}(M(X_{t_0})A) = 0$$

令$t \to \infty$, X有极限X_∞. 设f是X的Chow向量. 在$\mathbb{P}(H^0(Gr, \mathcal{O}(d)))$中有极限$[f_\infty] = \lim_{t\to\infty} \sigma(e^t)[f]$, f_∞是X_∞的Chow向量. $\mathbb{C}^*$作用在$\mathbb{C}f_\infty$上, 记这个作用的权为$w_{ch}(\sigma)$, 叫Chow权.

$$w_{ch}(\sigma) = (n+1)\mathrm{tr}(M(X_\infty)A) > 0$$

这正是Hilbert判别法.

定理 2.7 (Hilbert判别法)**.** *X是稳定(半稳定)的, 当且仅当下面的条件成立: 对于$SL(N+1, \mathbb{C})$中的任何单参数子群$\sigma : \mathbb{C}^* \to SL(N+1, \mathbb{C})$, 有$w_{ch}(\sigma) > 0 (\geq 0)$.*

这节最后, 我们来做一点变化. 下面我们需要在更大的对称空间$GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$上考虑, 所以我们把$F(\sigma)$扩充定义在$GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$上. 对任意的$\sigma \in GL(N+1, \mathbb{C})$, $\tilde{\sigma} = (\det(\sigma))^{-\frac{1}{N+1}}\sigma \in SL(N+1, \mathbb{C})$, 利用式(2.5), (2.12)和$F^0_\omega(\phi + c) = -c + F^0_\omega(\phi)$得

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\sigma) &= F(\tilde{\sigma}) = -d \cdot (n+1) F^0_{\omega_{FS}}(\phi_{\tilde{\sigma}}) \\ &= (n+1)(-d \cdot F^0_{\omega_{FS}}(\phi_\sigma) - \frac{2d}{N+1} \log\det(\sigma)) \end{aligned} \tag{2.21}$$

如果在权上来看, 设$A \in gl(N+1, \mathbb{C})$, 令$\underline{A} = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{N+1} I_{N+1} \in sl(N+1, \mathbb{C})$, $\sigma(e^t) = \exp(t\underline{A})$. 则$\sigma(e^t)$的Chow权是

$$(n+1)\mathrm{tr}(M(X_\infty)\underline{A}) = (n+1)(\mathrm{tr}(M(X_\infty)A) - \frac{d}{N+1}\mathrm{tr}(A)) \tag{2.22}$$

第三章 常数量曲率度量和渐近Chow稳定

3.1 Bergman核

回到第一节中polarized情形(X, L, ω). 设h是L上的Hermitian度量, 使得$\omega = Ric(h)$. h决定了$H^0(X, kL)$上一个内积, 设$s_i \in H^0(X, kL)$, $i = 1, 2$.

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{Hilb(h^k)} = \frac{1}{n!} \int_X (s_1, s_2)_{h^k} (k\omega)^n$$

取$Hilb(h^k)$的一组标准正交基$\{s_\alpha | \alpha = 0, \cdots, N_k\}$, 其中$N_k + 1$是$H^0(X, kL)$的维数.

定义 3.1. Bergman核函数$B(h^k)$定义为

$$B(h^k)(z) = \sum_{\alpha=0}^{N_k} |s_\alpha(z)|^2_{h^k}$$

注 4. 考虑正交投影算子$P_k : \Gamma(X, kL) \to H^0(X, kL)$, 其中$\Gamma(X, kL)$为全体光滑截面. 则

$$B(h^k)(z, w) = \sum_{\alpha=0}^{N_k} s_\alpha(z) \otimes s^*_\alpha(w)$$

是P_k的积分核, 而$B(h^k)(z) = B(h^k)(z, z)$. 易知$B(h^k)(z)$不依赖标准正交基的选取. 且h相差正常数不影响$B(h^k)$, 所以我们也可写作$B(k\omega)$, 其中$\omega = Ric(h)$. 为方便, 我们记$B_k = B_k(h) = B(h^k)$.

我们需要B_k关于k的展开式. 注意到

$$\frac{1}{n!} \int_X B_k(z)(k\omega)^n = \sum_{\alpha=0}^{N_k} \|s_\alpha\|^2_{Hilb(h^k)} = N_k + 1$$

我们先计算$N_k + 1$. 因为L是正线丛, 当正整数k充分大时, $-K_X + kL$也是正线丛, 由Kodaira消失定理, L的高阶同调消失:

$$H^p(X, kL) = H^p(X, \Omega^n(-K_X + KL)) = 0, \quad 1 \leq p \leq n$$

所以Riemann-Roch定理给出k充分大时$H^0(X, kL)$的维数公式

$$N_k + 1 = \dim H^0(X, kL) = \int_X e^{kc_1(L)} Td(X) \tag{3.1}$$

其中$Td(X)$是X的Todd类, 有展式$(c_i = c_i(X))$

$$Td(X) = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2}{12} + \frac{c_1 \cdot c_2}{24} + \cdots \tag{3.2}$$

带入(3.1)得展式

$$N_k + 1 = C_0 k^n + C_1 k^{n-1} + \cdots$$

其中

$$C_0 = \langle \frac{c_1(L)^n}{n!}, [X] \rangle = \frac{1}{n!} \int_X \omega^n = \frac{V}{n!}$$

$$C_1 = \frac{1}{2n!} \langle nc_1(L)^{n-1} c_1(X), [X] \rangle = \frac{1}{2n!} \int_X nRic(\omega) \wedge \omega^n = \frac{V}{2n!} \frac{1}{V} \int_X S\omega^n = \frac{1}{2n!} V \underline{S}$$

其中V表示体积, $\underline{S}$表示S的平均值. 假设B_k有展式

$$B_k = a_0 + a_1 k^{-1} + O(k^{-2})$$

则a_i蕴含了X的几何信息. 我们有定理:

定理 3.1. *对于固定的Kähler度量ω, 当$k \to \infty$时在C^∞收敛意义下有渐近展式:*

$$B_k(\omega) = a_0(\omega) + a_1(\omega) k^{-1} + \cdots \tag{3.3}$$

即对任意的$r, N \geq 0$

$$\| B_k(\omega) - \sum_{i=0}^{N} a_i(\omega) k^{-i} \|_{C^r(X)} \leq C_{r,N,\omega} k^{-N-1} \tag{3.4}$$

其中$a_i(\omega)$是ω的曲率及其协变导数的多项式. 特别的

$$a_0(\omega) = 1, a_1(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega)$$

并且展式(3.4)有一致性, 即对任意的r, N, 存在正整数s使得当有一族ω在(相对于某个固定度量的)C^s模下一致有界时, 展式中的常数$C_{r,N,\omega}$可以不依赖ω.

注 5. 在Tian [20]中用Hörmander关于$\bar{\partial}$算子的估计构造出Peak Section, 得到了a_0, 证明了C^2收敛性. Ruan[18]用Bochner典范坐标改进了计算并且得到了C^∞收敛, Lu[12]用Tian的Peak Section计算了a_1的表达式, 且给出一般系数的计算方法. 另外Zelditch[24]用Szegö核的办法得到了这一展式, Dai-Liu-Ma[4]用热核的办法给出了另一个证明.

利用标准正交基$\{s_\alpha\}$作Kodaira嵌入(1.3), 第k个Bergman度量定义为

$$\omega_k = \frac{1}{k} I^*_{\{s_\alpha\}} \omega_{FS}$$

其中ω_{FS}是$\mathbb{CP}^N$上标准的Fubini-Study度量.

利用展式, 很容易证明

定理 3.2 (Tian)**.** *当$k \to \infty$时, ω_k收敛于ω.*

证明. 取kL的局部处处非零的全纯截面e_L, 由Fubini-Study度量的定义有

$$\omega_k = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}\partial\bar{\partial}\log\frac{\sum_{\alpha=0}^{N_k}|s_\alpha|^2_{h^k}}{|e_L|^2_{h^k}} = \omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}\partial\bar{\partial}\log B_k$$

而对任意的正整数r, $\frac{1}{k}\log B_k = \frac{1}{k}\log(1+O(k^{-1})) \xrightarrow{C^r} 0$, 当$k\to\infty$. □

我们有等价的事实

命题 3.3. 可以用有限维的空间$P_k(X,\omega)$逼近无穷维空间$P(X,\omega)$.

证明. 对任意的$\phi\in P(X,\omega)$, 令$h_\phi = he^{-\phi}$, 则$Ric(h_\phi)=\omega_\phi$. 取$H^0(X,kL)$在内积$Hilb(h_\phi)$下的一组标准正交基, 令

$$P_k(X,\omega)\ni\phi_k = \frac{1}{k}\log\sum_{\alpha=0}^{N_k}|s_\alpha|^2_{h^k} = \log\sum_{\alpha=0}^{N_k}|s_\alpha|^2_{h^k_\phi} + \phi = \frac{1}{k}\log B_k(h_\phi) + \phi \tag{3.5}$$

由B_k的渐近展式可得对任意的$r>0$, ϕ_k在$C^r(\omega_\phi)$下收敛于ϕ, 对于固定的ϕ, 关于ω和ω_ϕ的C^r收敛是一样的, 所以ϕ_k也在$C^r(\omega)$下收敛到ϕ. □

3.2 Donaldson的定理

可以用Bergman核来刻划balanced度量. 称(X,L)是balanced的, 如果存在$H^0(X,kL)$的一组基$\{s_\alpha\}$, 满足$I_{\{s_\alpha\}}(X)$是banlanced的. 设h_{FS}是$\mathcal{O}(1)$上的Fubini-Study度量, 称$I^*_{\{s_\alpha\}}h_{FS}$, $I^*_{\{s_\alpha\}}\omega_{FS}$为balanced度量, 为方便不写拉回. 此时$\{\sqrt{\frac{n!(N_k+1)}{V_k}}s_\alpha\}$是$Hilb(h_{FS})$的一组标准正交基, 注意到

$$\sum_{\alpha=0}^{N}|s_\alpha|^2_{h_{FS}} = \sum_{\alpha=0}^{N}\frac{|Z_\alpha|^2}{|Z|^2} = 1$$

所以ω_{FS}的Bergman核函数为常数

$$B(\omega_{FS})(z) = \sum_{\alpha=0}^{N_k}\frac{n!(N_k+1)}{V_k}|s_\alpha|^2_{h_{FS}} = \frac{n!(N_k+1)}{V_k}$$

反之, 如果h_k是kL上的Hermitian度量使得$B(h_k)$是常数. 取$\{s_\alpha\}$为$Hilb(h_k)$的标准正交基, 则

$$(I_{\{s_\alpha\}})^*\omega_{FS} = \omega_{h_k} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}B(h_k) = \omega_{h_k}$$

且易知$I_{\{s_\alpha\}}(X)$是balanced的. 所以我们证明了

命题 3.4. (X,kL)是*balanced*的, 当且仅当kL上存在*Hermitian*度量h_k, 使得*Bergman*核函数$B(h_k)$是常数.

利用Bergman核的一致展式(3.4)易证:

命题 3.5. 假设当k充分大时, (X, kL)上存在balanced度量h_k, 使得$\omega_k = \frac{1}{k}Ric(h_k)$在$C^\infty$下收敛于极限度量$\omega_\infty$, 则$\omega_\infty$有常数量曲率.

当$Aut(X, L)$是离散时, 由定理2.3知$F(\sigma) = -d \cdot F^0_{\omega_{FS}}(\phi_\sigma)$沿$SL(N+1, \mathbb{C})/SU(N+1)$的测地线严格凸. 而且balanced的基相差常数也是balanced的, 所以易证

命题 3.6. 当$Aut(X, L)$是离散时, 如果(X, L)是balanced的, 则$H^0(X, L)$中使得$I_L(X)$是balanced的基在相差$U(N+1)\times\mathbb{R}^*$的作用下是唯一的. 所以L上的balanced度量h相差一正常数下唯一决定, 而相应的Kähler度量$\omega = Ric(h)$唯一决定.

Donaldson证明了

定理 3.7 (Donaldson[6])**.** 假设$Aut(X, L)$是离散的, 且$\omega_\infty \in c_1(L)$是常数量曲率的度量. 则当k充分大时, (X, kL)是balanced的, 且设balanced度量为h_k, 则balanced度量$\omega_k = \frac{1}{k}Ric(h_k)$在$C^\infty$下收敛于$\omega_\infty$.

我们来给出Donaldson证明这个定理的大概思路. 我们想要找$H^0(X, kL)$的一组基, 使得X在用$\{s_\alpha\}$作Kodaira嵌入下的象$I_{\{s_\alpha\}}(X)$是balanced的, 即矩阵

$$M(I_{\{s_\alpha\}}(X))_{\alpha\beta} = \int_{I_{\{s_\alpha\}}(X)} \frac{Z_\alpha \bar{Z}_\beta}{|Z|^2}\omega^n_{FS} = \int_X \frac{s_\alpha \overline{s_\beta}}{\sum_\gamma |s_\gamma|^2}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\sum_\gamma |s_\gamma|^2\right)^n$$

是对角矩阵, 或者它的无迹部分$\underline{M} = 0$. 为方便, 引入一些记号. $\Gamma(kL)$是kL的所有光滑截面的集合.

$C^\infty(X)$作用在$\Gamma(kL)$上. 对任意的$f \in C^\infty(X)$, 令

$$\begin{aligned} R(f): H^0(X, kL) &\to \Gamma(kL) \\ s &\mapsto \nabla_{f^i\partial_i}s + fs \end{aligned}$$

令

$$\Gamma(kL)^{N_k+1} = \overbrace{\Gamma(kL)\times\cdots\Gamma(kL)}^{(N_k+1)\text{个}}$$

$C^\infty(X)$也作用在$\Gamma(kL)^{N_k+1}$上. $SL(N_k+1, \mathbb{C})$也作用在$\Gamma(kL)^{N_k+1}$上. 为了和$SL(N_k+1, \mathbb{C})$在所有嵌入的集合上作用联系起来, 我们需要考虑约化的作用. 考虑无穷维线性空间$\Gamma(kL)^{N_k+1}$的子集

$$\mathscr{B} = \{\{s_\alpha\} | \{s_\alpha\}\text{是}H^0(X, kL)\text{的一组基}\}$$

取定$\{s_\alpha\} \in \mathscr{B}$, 对任意的$A \in \sqrt{-1}su(N_k+1)$, 记

$$\theta_A = \theta_{A,\{s_\alpha\}} = A_{\alpha\beta}\frac{s_\alpha\overline{s_\beta}}{\sum_\gamma |s_\gamma|^2}$$

则$\sqrt{-1}su(N_k+1)$无穷小的约化作用为

$$\begin{aligned}\tau(\{s_\alpha\}):\sqrt{-1}su(N_k+1) &\rightarrow \Gamma(kL)^{N_k+1}\\ A &\mapsto \{A_{\alpha\beta}s_\beta - R(\theta_{A,\{s_\alpha\}})s_\alpha\} = \{A_{\alpha\beta}s_\beta - \nabla_{\theta^i_A\partial_i}s_\alpha - \theta_A s_\alpha\}\end{aligned}$$

$\sqrt{-1}su(N_k+1)$上有内积

$$\langle A,B\rangle_{su} = \mathrm{tr}(AB)$$

$\Gamma(L)^{N_k+1}$上有内积

$$\langle\{s'_\alpha\},\{s''_\alpha\}\rangle_{\{s_\alpha\}} = Re\sum_\alpha\int_X \frac{s'_\alpha\overline{s''_\alpha}}{\sum_\beta|s_\beta|^2}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\beta|s_\beta|^2)^n$$

所以可以考虑$\tau(\{s_\alpha\})$的共轭算子$\tau(\{s_\alpha\})^*:\Gamma(kL)^{N_k+1}\to\sqrt{-1}su(N_k+1)$.

取定$\{s_\alpha\}$, 要找$\sigma\in SL(N_k+1,\mathbb{C})$ 使得$\sigma\cdot\{s_\alpha\}=\{\sigma^\beta_\alpha s_\beta\}$是balanced的. 只要找到这样一条道路$\sigma(t)\in SL(N_k+1,\mathbb{C})/SU(N_k+1)$. 记$\{s_\alpha(t)\}=\sigma(t)\cdot\{s_\alpha\}$, $X_t=I_{\{s_\alpha(t)\}}(X)$, $\underline{M}(t)=\underline{M}(X_t)$. 使得

$$\frac{d}{dt}\underline{M}(t) = -\underline{M}(t) \tag{3.6}$$

假设(3.6)对任意的$t>0$都有解, 则解为

$$\underline{M}(t)=e^{-t}\underline{M}(0)$$

令$t\to\infty$, 假设极限存在, 则$\underline{M}(\infty)=0$. 于是$\{s_\alpha(\infty)\}=\sigma(\infty)\cdot\{s_\alpha\}$是balanced的. 设

$$A(t)=\sigma(t)^{-1}\frac{d}{dt}\sigma(t)$$

我们来计算$A(t)$需要满足的方程. 对任意取定的参数t, 通过$SU(N_k+1)$的变换, 不妨假设$A(t)$是对角矩阵$A=diag(\lambda_1(t),\cdots,\lambda_{N_k}(t))$. 对任意的$B\in\sqrt{-1}su(N_k+1)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(\underline{M}(t)B) &= \frac{d}{dt}\mathrm{tr}(M(t)B) = B_{\beta\alpha}\frac{d}{dt}\int_X\frac{s_\alpha\overline{s_\beta}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\gamma|s_\gamma|^2)^n\\
&= B_{\beta\alpha}\int_X(\frac{\lambda_\alpha s_\alpha\overline{s_\beta}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}-\frac{s_\alpha\overline{s_\beta}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}\frac{(\lambda_\gamma s_\gamma,s_\gamma)}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2})(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\gamma|s_\gamma|^2)^n\\
&\quad +B_{\beta\alpha}\int_X\frac{s_\alpha\overline{s_\beta}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}(n\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\frac{\sum_\gamma\lambda_\gamma|s_\gamma|^2}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2})\wedge(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\gamma|s_\gamma|^2)^{n-1}\\
&= \int_X(\frac{\lambda_\alpha s_\alpha\overline{B_{\alpha\beta}s_\beta}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}-\theta_A\theta_B-g_{i\bar j}\theta^i_A\theta^{\bar j}_B)(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\gamma|s_\gamma|^2)^n \qquad (3.7)\\
&= \int_X\frac{(\lambda_\alpha s_\alpha-\nabla_{\theta^i_A\partial_i}s_\alpha-\theta_A s_\alpha)\overline{(B_{\alpha\beta}s_\beta-\nabla_{\theta^i_B\partial_i}s_\alpha-\theta_B s_\alpha)}}{\sum_\gamma|s_\gamma|^2}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\sum_\gamma|s_\gamma|^2)^n\\
&= \langle\tau(t)(A),\tau(t)(B)\rangle_{\{s_\alpha(t)\}}\quad (\text{我们简记}\tau(t)=\tau(\{s_\alpha(t)\})) \qquad (3.8)\\
&= \langle\tau(t)^*\tau(t)(A),B\rangle_{su} = \mathrm{tr}[((\tau(t)^*\tau(t))(A))B]\end{aligned}$$

所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{M}(t)=\tau(t)^*\tau(t)(A)$. 比较(3.6), 得

$$\tau^*\tau(A)=-\underline{M} \quad 即 \quad A(t)=-(\tau(t)^*\tau(t))^{-1}\underline{M}(t)$$

所以(3.6)变为李群$SL(N_k+1)$上的方程

$$\sigma(t)^{-1}\frac{d}{dt}\sigma(t)=-(\tau(t)^*\tau(t))^{-1}\underline{M}(t) \tag{3.9}$$

要使(3.9)的解区间为$[0,\infty]$, 需要对$\underline{M}(0)$和$(\tau(t)^*\tau(t))^{-1}$的模有一致的控制. 所以Donaldson换了一种观点, 先用Bergman核的展式从常数量曲率的度量出发构造B_k几乎为常数的Kähler度量(他叫做nearly balanced度量), 把它决定的$H^0(X,kL)$中的标准正交基$\{s_\alpha\}$作为上述过程中出发的基, 保证$\|\underline{M}(0)\|$足够小. 并且他估计了此时对任意的$t>0$, $(\tau(t)^*\tau(t))^{-1}$的模能被很好地控制, 使得解区间是$[0,\infty)$, 而且(3.9)的解不会跑出$SL(N_k+1,\mathbb{C})$上离单位元有限距离的球, 所以$t\to\infty$, 极限也存在.

在构造nearly balanced度量的过程中, 需要数量曲率$S(\omega_\phi)$关于ϕ的变分, 后面我们也会用到: 设$\phi_t\in P(X,\omega)$, 我们计算

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S(\omega_{\phi_t}) &= -\frac{d}{dt}(g^{i\bar{j}}(\log\det(g))_{i\bar{j}}) \\
&= -g^{i\bar{l}}\,\dot{\phi}_{k\bar{l}}\,g^{k\bar{j}}R_{i\bar{j}}-(\dot{\phi}^k{}_k)^i{}_i=-\dot{\phi}^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}}-\Delta\Delta\dot{\phi} && (3.10)\\
&= -\dot{\phi}^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}}-(\dot{\phi}^{ki}{}_{ki}+(\dot{\phi}^jR_j{}^{ki}{}_k)_{,i})=-\dot{\phi}^{ki}{}_{ki}+\dot{\phi}^jR^k{}_i{}^i{}_{k,j} \\
&= -\dot{\phi}^{ij}{}_{ij}+\dot{\phi}^iS_i && (3.11)\\
&= -\dot{\phi}_{ij}{}^{ij}+\dot{\phi}_iS^i && (3.12)
\end{aligned}$$

所以在S为常数量曲率的Kähler度量ω_∞处, $\phi\to S(\omega_\phi)$的切映射为

$$DS_{\omega_\infty}\cdot\delta\phi=-(\delta\phi)^{ij}{}_{ij}$$

$(\delta\phi)^{ij}{}_{ij}=0$当且仅当$(\delta\phi)^i\frac{\partial}{\partial z^i}$是可以提升到$L$上的全纯向量场. 当$Aut(X,L)$离散时, X上没有非零的全纯向量场能提升到L上, 所以此时DS_{ω_∞}是可逆的. Donaldson令

$$\omega=\omega_\infty+\sum_{i=1}^{p}k^{-i}\phi_i$$

利用$B_k(\omega)$的展式和DS_{ω_∞}可逆, 随着p增大, 可以递归地解出ϕ_i, 使得展式中k^{-i}, $i=2,\cdots,p+1$, 的系数都是常数, 从而得到几乎balanced的度量.

第四章　Futaki 不变量, Hilbert权和Chow权

4.1　Futaki不变量

Futaki不变量是存在常数量曲率度量的障碍. 设S是ω的数量曲率, $\underline{S}$是S的平均值. 则存在$h \in C^\infty(X)$使得$S - \underline{S} = \Delta_\omega h$.设$v$是$X$的全纯向量场, 令

$$f_X(\omega, v) = \int_X v(h)\omega^n \tag{4.1}$$

因为$\bar{\partial} i_v \omega = 0$, 所以存在$\theta_v = \theta_v(\omega) \in C^\infty(X)$, 及调和的$(0,1)$形式$\alpha$, 使得

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-1}} i_v \omega = \alpha + \bar{\partial}\theta_v \tag{4.2}$$

α满足

$$\alpha_{\bar{i},j} = 0, \quad \alpha_{\bar{i}}{}^{,\bar{i}} = 0 \tag{4.3}$$

利用$\alpha^i{}_{,i} = 0$, Futaki不变量(4.1)可化为

$$f_X(\omega, v) = -\int_X (S - \underline{S})\theta_v \omega^n \tag{4.4}$$

定理 4.1. *$f_X(\omega, v)$不依赖于$\omega \in [\omega]$的选取. 所以我们记作$f([\omega], v)$.*

证明. (Calabi) 设$\phi_t \in P(X, \omega)$是任意一条道路, $\omega_t = \omega_{\phi_t}$. 我们有

$$\Delta_t h(\omega_t) = S(\omega_t) - \underline{S}$$

两边对t求导, 由(3.10)得

$$\Delta \dot{h} - \dot{\phi}^{i\bar{j}} h_{i\bar{j}} = -\dot{\phi}^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}} - \Delta\Delta\dot{\phi} \tag{4.5}$$

令$f = \dot{\phi}^{i\bar{j}}(R_{i\bar{j}} - h_{i\bar{j}})$, 由Bianchi恒等式有

$$(R_{i\bar{j}} - h_{i\bar{j}})^{,i} = R_i{}^k{}_{k\bar{j}}{}^{,i} - h_i{}^i{}_{\bar{j}} = R_i{}^k{}_k{}^i{}_{,\bar{j}} - (\Delta h)_{\bar{j}} = S_{\bar{j}} - (S - \underline{S})_{\bar{j}} = 0 \tag{4.6}$$

取共轭也可得

$$(R_{i\bar{j}} - h_{i\bar{j}})^{,\bar{j}} = 0 \tag{4.7}$$

所以$\int_X f\omega^n = -\int_X \dot{\phi}^{\bar{j}}\omega^n (R_{i\bar{j}} - h_{i\bar{j}})^{,i} = 0$, 所以存在$\Delta^{-1} f \in C^\infty(X)$使得$\Delta\Delta^{-1} f = f$. 由(4.5)得

$$\dot{h} = -\Delta\dot{\phi} - \Delta^{-1} f + c_t$$

c_t为常数. (4.1)对t求导, 注意到$\alpha^i{}_{,i}=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\omega_t,v) &= \int(v(\dot h)+v(h)\Delta\dot\phi)\omega^n=\int_X[(\theta_v{}^i+\alpha^i)(-\Delta\dot\phi-\Delta^{-1}f)_i+v(h)\Delta\dot\phi]\omega^n\\ &= \int_X[\Delta\theta_v\cdot\Delta\dot\phi+\theta_v\cdot f+v(h)\Delta\dot\phi]\omega^n=\int_X[(\Delta\theta_v+v(h))\dot\phi^{\bar j}{}_{\bar j}+\theta_v\dot\phi^{i\bar j}(R_{i\bar j}-h_{i\bar j})]\omega^n\\ &= -\int_X[(\Delta\theta_v+v(h))_{\bar j}+(\theta_v(R_{i\bar j}-h_{i\bar j}))^{i}]\dot\phi^{\bar j}\omega^n\end{aligned}$$

因为v是全纯向量场, $v^i{}_{,\bar j}=0$, 又利用$\alpha^i{}_{,i}=0$

$$(\Delta\theta_v)_{\bar j}=\theta_v{}^i{}_{i\bar j}=(v^i-\alpha^i)_{,i\bar j}=v^i{}_{,i\bar j}=v^i{}_{,\bar j i}+v^kR_k{}^i{}_{\bar j i}=-v^iR_{i\bar j} \tag{4.8}$$

$$(v(h))_{\bar j}=v^ih_{i\bar j},\quad (\theta_v(R_{i\bar j}-h_{i\bar j}))^{,i}=\theta_v{}^{,i}(R_{i\bar j}-h_{i\bar j})\ (\text{由}(4.6))$$

所以由(4.3), (4.7)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\omega_t,v) &= \int_X(v^i-\theta_v{}^i)(R_{i\bar j}-h_{i\bar j})\dot\phi^{\bar j}\omega_t^n\\ &= -\int(\alpha^i(R_{i\bar j}-h_{i\bar j}))^{,\bar j}\dot\phi\omega_t^n=0\end{aligned}$$

□

注 6. 当(A.16)中α=0时, 定理4.1的证明可以简化, 此时θ_v满足$\theta_v{}^i{}_{\bar j}=0$, 注意到$\alpha$始终为0, 可设:

$$\theta_v(\omega_\phi)=\theta_v(\omega)+\bar\partial\phi$$

(4.4)右边对t求导, 利用(3.11)得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_X(S-\underline{S})\theta_v\omega_t^n &= \int_X[(-\dot\phi_{ij}{}^{ij}+\dot\phi_iS^i)\theta_v+(S-\underline{S})(v(\dot\phi)+\theta_v\Delta_t\dot\phi)]\omega_t^n\\ &= \int_X[-\dot\phi_{ij}\theta_v{}^{ij}+((S-\underline{S})\theta_v\dot\phi_i)^i]\omega_t^n\\ &= 0\end{aligned}$$

实际上, 当$\alpha=0$时. v可以提升到L上, 全纯地作用在(X,L)上. 即$v\in Lie(Aut(X,L))$. 有等变上同调的看法，我们把需要的等边上同调内容放在附录里.

注意到(4.4)可以化为

$$f_X(\omega,v)=-\int_X(\omega+\theta_v)^n(Ric(\omega)-\Delta\theta_v)-\frac{\underline{S}}{n+1}(\omega+\theta_v)^{n+1} \tag{4.9}$$

(A.16), (4.8)可化为

$$(\bar\partial-i_v)(\omega+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\theta_v)=0,\quad(\bar\partial-i_v)(Ric(\omega)-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Delta\theta_v)=0$$

由附录中定理A.10可得$f_X(\omega,v)$不依赖于$\omega\in[\omega]=c_1(L)$的选取. 所以记$f_X(c_1(L),v)=f_X(\omega,v)$.

表达式(4.9)由Tian得到, 它和Tian引入的CM丛和CM稳定性密切相关, 其实Futaki不变量可以看作CM权. Ding-Tian[5]首先把Futaki不变量推广到正规(normal)的奇异代数簇上. 后来Donaldson[7]给出Futaki不变量的代数定义.

下面我们计算Hilbert权的表达式, 得到光滑情形它和Futaki不变量的关系, 从而得到Donaldson关于Futaki不变量的代数定义.

4.2 Hilbert权的计算和Futaki不变量的代数定义

设v生成(X,L)上一个全纯的$\mathbb{C}^*$作用, 记作$\sigma(e^t)$. 圆周$S^1\subset\mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}^*$作用在$H^0(X,kL)$上: 对任意的$e^t\in\mathbb{C}^*$, $s\in H^0(X,kL)$,

$$(e^t\cdot s)(z)=e^t\cdot s(e^{-t}z) \tag{4.10}$$

我们有分解

$$H^0(X,kL)=\bigoplus_{\alpha=0}^{N_k}\mathbb{C}s_\alpha \tag{4.11}$$

其中$N_k+1=\dim H^0(X,kL)$, $e^t\cdot s_\alpha=e^{t\lambda_\alpha}s_\alpha$. 记$\mathbb{C}^*$在$H^0(X,kL)$上作用的权定义为

$$w_k=\sum_{\alpha=0}^{N_k}\lambda_\alpha$$

利用$\{s_\alpha\}$把X嵌入到$\mathbb{CP}^{N_k}=\mathbb{P}(H^0(X,kL)^*)$中, kL成为$\mathbb{CP}^{N_k}$的超平面丛. 设$\mathbb{CP}^{N_k}$的齐次坐标是$\{Z_\alpha\}$, 把$\{Z_\alpha\}$看作超平面丛的截面, 则s_α成为截面Z_α. $\mathbb{C}^*$作用成为$GL(N+1,\mathbb{C})$的一单参数子群$\sigma(e^t)=e^{tA_k}$作用在$\mathbb{C}^{N_k+1}\cong H^0(X,kL)^*$上. 在$\mathbb{C}^{N_k+1}$的标准正交基下,

$$A_k=diag(-\lambda_0,\cdots,-\lambda_{N_k}),\quad \sigma(e^t)=diag(e^{-t\lambda_0},\cdots,e^{-t\lambda_{N_k}}) \tag{4.12}$$

注意有

$$w_k=-\mathrm{tr}(A_k) \tag{4.13}$$

我们用两种办法来计算权w_k. 首先注意到S^1是紧李群, 可设L上有一S^1不变的Hermitian度量h, $\omega_h=Ric(h)>0$. S^1自然也保持ω_h.

4.2.1 算法1

因为S^1保持度量h和ω_h, 易知S^1保持$H^0(X,kL)$上的内积$Hilb(h^k)$. 所以属于不同权λ_α的特征截面相互内积为0, 所以我们可以取分解(4.11)中的$\{s_\alpha\}$为一组标准正交基.

设$\mathcal{L}_v^L$为v在L上的无穷小作用, ∇^L是由h决定的唯一的Hermitian联络. 则有

$$\mathcal{L}_v^{kL}=\nabla_v^{kL}+k\theta_v$$

$\theta_v = \mu^L(v)$是矩映射(见附录). 满足

$$i_v\omega_h = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\theta_v$$

注意到$\mathcal{L}_v^{kL}s_\alpha = -\lambda_\alpha s_\alpha$, 于是$\lambda_\alpha s_\alpha = -\nabla_v^{kL}s_\alpha - k\theta_v s_\alpha$. 所以

$$\lambda_\alpha|s_\alpha|^2_{h^k} = (\lambda_\alpha s_\alpha, s_\alpha)_{h^k} = -(\nabla_v^{kL}s_\alpha + k\theta_v s_\alpha, s_\alpha)_{h^k} = -v(|s_\alpha|^2_{h^k}) - k\theta_v|s_\alpha|^2_{h^k}$$

最后一个等式利用了∇^{kL}保持度量, 而且, 因为s_α是全纯的, $\nabla_{\bar{v}}^{kL}s_\alpha = 0$. 所以

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{\alpha=0}^{N_k}\lambda_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{N_k}\lambda_\alpha\|s_\alpha\|^2_{Hilb(h^k)} = \frac{1}{n!}\int_X\sum_\alpha\lambda_\alpha|s_\alpha|^2_{h^k}(k\omega_h)^n \\ &= -\frac{1}{n!}\int_X(v(\sum_\alpha|s_\alpha|^2_{h^k}) + k\theta_v\sum_\alpha|s_\alpha|^2_{h^k})(k\omega_h)^n \\ &= -\frac{1}{n!}\int_X\theta_v(kB_k(h) - \Delta_{\omega_h}B_k(h))(k\omega_h)^n \end{aligned} \tag{4.14}$$

把Bergman核的展式(3.3)带入得

$$w_k = -\sum_{i=0}k^{n+1-i}\frac{1}{n!}\int_X\theta_v(a_i - \Delta a_{i-1})\omega_h^n \tag{4.15}$$

$$= -(\frac{k^{n+1}}{n!}\int_X\theta_v\omega_h^n + \frac{k^n}{2n!}\int_X S\theta_v\omega_h^n + \cdots) \tag{4.16}$$

我们可以换一种角度来看式(4.14). 设$\sigma(e^t)^*h$是度量h通过σ的拉回, 自然有$\omega_{\sigma^*h} = \sigma^*\omega_h$. 对任意的截面$s$, 注意在截面上作用的定义(4.10), 有

$$|s|^2_{\sigma^*h}(z) = |\sigma\cdot s(z)|^2_h(\sigma\cdot z) = |\sigma\cdot s(\sigma^{-1}\cdot\sigma\cdot z)|^2_h(\sigma\cdot z) = (\sigma^*|\sigma\cdot s|^2_h)(z)$$

所以

$$\begin{aligned} \langle s_\alpha, s_\beta\rangle_{Hilb(\sigma^*h^k)} &= \frac{1}{n!}\int_X(s_\alpha, s_\beta)_{\sigma^*h^k}\sigma^*(k\omega_h)^n \\ &= \frac{1}{n!}\int_X\sigma^*((\sigma\cdot s_\alpha, \sigma\cdot s_\beta)_{h^k})\sigma^*(k\omega_h)^n \\ &= \frac{1}{n!}\int_X(\sigma\cdot s_\alpha, \sigma\cdot s_\beta)_{h^k}(k\omega_h)^n \quad (\text{因为}\sigma(X) = X) \\ &= \langle\sigma\cdot s_\alpha, \sigma\cdot s_\beta\rangle_{Hilb(h^k)} \end{aligned}$$

令$Hilb(h)$表示内积矩阵$(\langle s_\alpha, s_\beta\rangle_{Hilb(h)})$. 注意到$\sigma$作用在$\{s_\alpha\}$下的矩阵是$\sigma^{-1}$. 所以

$$Hilb(\sigma^*h^k) = \sigma^{-1}Hilb(h^k)(\sigma^{-1})^* \tag{4.17}$$

$(\sigma^{-1})^*$表示共轭转置. 所以

$$\log\det Hilb(\sigma^*h^k) = -2\log\det\sigma + \log\det Hilb(h^k) \tag{4.18}$$

由(4.12)和(4.13), 两边对t求导得

$$w_k = -\frac{d}{dt}\log\det(\sigma) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\det Hilb(\sigma^* h)$$

注意到$(\sigma^* h)^{-1}\frac{d}{dt}\sigma^* h = -2\theta_v$. 所以式(4.14)由下面的计算得到. 对任意的一族Hermitian度量$h_t = he^{-\phi_t}$, 使得$\omega_{h_t} = Ric(h_t) > 0$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\log\det Hilb(h_t^k) &= \operatorname{tr}\left(Hilb(h_0^k)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}Hilb(h_t^k)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=0}^{N_k}\frac{1}{n!}\int_X |s_\alpha|^2_{h_0^k}(k\omega_{h_0})^n \quad (\text{这里}\{s_\alpha\}\text{是}Hilb(h_0^k)\text{的标准正交基}) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\alpha=0}^{N_k}\int_X |s_\alpha|^2_{h_0^k}(-k\dot{\phi} + \Delta_{\omega_{h_0}}\dot{\phi})(k\omega_{h_0})^n \\
&= -\frac{1}{n!}\int_X \dot{\phi}(kB(h_0^k) - \Delta_{\omega_{h_0}}B(h_0^k)(k\omega_{h_0})^n \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

4.2.2 算法2

我们来介绍Donaldson利用等变上同调的计算方法. 设$\mathcal{O}(1)$是$\mathbb{CP}^1$上超平面丛, P是$\mathcal{O}(1)$的圆周丛. 有Kähler流形的纤维化

$$X \to \mathcal{X} = P \times_{S^1} X \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^1$$

$\mathcal{X}$上有全纯线丛$\mathcal{L} = P \times_{S^1} L \to \mathcal{X}$. $\mathbb{CP}^1$上有全纯向量丛

$$P \times_{S^1} (H^0(X, kL)) = R^0\pi_*\mathcal{O}(kL) = \mathrm{Ind}D_k$$

其中$D_k = \bar{\partial}_X^{k\mathcal{L}} + (\bar{\partial}_X^{k\mathcal{L}})^*$是沿纤维$X$的Dirac算子. 注意到有

$$w_k = c_1(P \times_{S^1} (H^0(X, kL))) = c_1(\mathrm{Ind}D_k)$$

由Family Riemann-Roch定理有

$$w_k = c_1(\mathrm{Ind}D_k) = (\int_X e^{k\,c_1(\mathcal{L})}Td(TX))_{[2]} \qquad (4.20)$$

其中$TX = T^{1,0}X$是沿纤维的复切丛, 它是$\mathcal{X}$上的全纯向量丛. 设ξ是S^1作用对应的实全纯向量场. 则$v = -\frac{J\xi + \sqrt{-1}\xi}{2}$. 设$\Theta$是标准Fubini-Study度量决定的$P$上的曲率, 看作$\mathbb{CP}^1$上的微分形式, 令

$$t = \frac{1}{2\pi}\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(1+|z|^2) = \frac{1}{\pi}\frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

则$\langle[t], [\mathbb{CP}^1]\rangle = \int_{\mathbb{CP}^1} t = 1$. $c_1(\mathcal{L})$在等变de Rham复形中表示为

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(R^L + \mu^L(\xi)\Theta) = \omega - \mu^L(v)t = \omega - \theta_v t \qquad (4.21)$$

$c(TX)$表示为$\det(1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TX}_{u(1)}(\xi))$, 其中

$$R^{TX}_{u(1)}(\xi)=R^{TX}-(\nabla\xi)|_{T^{1,0}X}\Theta=R^{TX}-\sqrt{-1}(\nabla v)\Theta \tag{4.22}$$

取迹可得$c_1(TX)$表示为

$$Ric(\omega)+\frac{1}{2\pi}\mathrm{div}(v)\Theta=Ric(\omega)+\Delta\theta_v t \tag{4.23}$$

由附录中交换图表得

$$w_k=\left[\int_X e^{k\,(\omega-\theta_v t)}Td\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(R^{TX}-\sqrt{-1}(\nabla v)\Theta)\right)\right]_{[2]} \tag{4.24}$$

设曲率形式

$$\Omega_\gamma^\delta=\sum_{\alpha,\beta}R_\gamma{}^\delta{}_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta \tag{4.25}$$

由(3.2)和(4.22)可计算得

$$\begin{aligned}Td\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(R^{TX}-\sqrt{-1}(\nabla v)\Theta)\right)_{linear} &= 1+\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}(\Omega)+\Delta\theta_v t)+\\ &+\frac{1}{24}((\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^2(3\mathrm{tr}(\Omega)^2-\Omega_\alpha^\beta\Omega_\beta^\alpha)+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(6\Delta\theta_v\mathrm{tr}(\Omega)-2\Omega_\alpha^\beta v^\alpha{}_{,\beta})t)+\cdots\end{aligned}$$

代入(4.24)可得w_k关于k的展开式

$$w_k=-\sum_{i=0}D_ik^{n+1-i} \tag{4.26}$$

$$D_0=-\frac{1}{(n+1)!}\int_X(\omega-\theta_v)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_X(\omega+\theta_v)^{n+1}=\frac{1}{n!}\int_X\theta_v\omega^n \tag{4.27}$$

$$D_1=-\frac{1}{2n!}\int_X(\omega-\theta_v)^n(Ric(\omega)+\Delta\theta_v)=\frac{1}{2n!}\int_X(\omega+\theta_v)^n(Ric(\omega)-\Delta\theta_v)=\frac{1}{2n!}\int_X S\theta_v\omega^n \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}D_2 &= -(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^2\frac{1}{24(n-1)!}\int_X(\omega-\theta_v)^{n-1}((\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^2(3(Tr(\Omega))^2-\Omega_\alpha^\beta\Omega_\beta^\alpha)+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(6\Delta\theta_v\mathrm{tr}(\Omega)-2\Omega_\alpha^\beta v^\alpha{}_{,\beta}))\\ &= \frac{1}{n!}\int_X\theta_v(\frac{1}{24}(R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\bar\delta}R_\beta{}^{\alpha\gamma\bar\delta}-4R_\alpha{}^\beta R_\beta{}^\alpha+3S^2)-\frac{\Delta S}{6})\omega^n\\ &= \frac{1}{n!}\int_X\theta_v(\frac{1}{24}(|R|^2-4|Ric|^2+3S^2)-\frac{\Delta S}{6})\omega^n\end{aligned}$$

比较(4.4)和(4.27), (4.28)得

$$f_X(c_1(L),v)=n!(\underline{S}\,D_0-2D_1) \tag{4.29}$$

因为光滑情形有上式, Donaldson就把它作为Futaki不变量的代数定义. 注意Futaki不变量的两个性质.

命题 4.2. 设c是一整数.

(1) 当把$\sigma(e^t)$的作用变为$\sigma(e^{ct})$时, *Futaki*不变量变为原来的c倍.

(2) 当把$\sigma(e^t)$的作用变为$\sigma(e^t)\cdot e^{ct}$时, *Futaki*不变量不变.

注 7. 易知, (4.26)中的系数D_i都可写作

$$D_i = \frac{1}{n!}\int_X \theta_v b_i \omega^n$$

其中b_i是曲率及其协变导数的多项式. 比较(4.15), 可以猜测有关系式

$$b_i = a_i - \Delta a_{i-1}$$

如果这是对的, 则它给出了计算Bergman核展式的一个递推公式, 因为b_i是可以直接计算的. 例如

$$a_2 = b_2 + \Delta a_1 = \frac{1}{24}(|R|^2 - 4|Ric|^2 + 3S^2) + \frac{\Delta S}{3}$$

这和Lu[12]的结果是一样的. 但是因为θ_v只是特殊的函数, 我们需要证明Riemann-Roch公式中的积分项$e^{k\omega_h}Td(R^{TX}(h))$关于$L$上度量$h$的Bott-Chern类在$X$上的积分(由附录A.7, 这是良好定义的)等于

$$\int_X (h^{-1}\dot{h})(kB_k(h) - \Delta B_k(h))(k\omega_h)^n$$

4.3　例子

我们计算超曲面及完全交(complete intersection)Hilbert权的展式, 可得Futaki不变量和Chow权. Futaki不变量计算结果和Lu[13]用解析方法计算的结果是一样的。

例 4.1. 设F是d次齐次多项式,

$$X = \{Z = [Z_0, Z_1, \ldots, Z_N] \in \mathbb{CP}^N | F(Z) = 0\}$$

X的坐标环为

$$S(X) = \mathbb{C}[Z_0, \cdots, Z_N]/(F) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(X)$$

其中(F)是F生成的理想, 按次数有分解$(F) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I_k$, 其中$I_k$是能被$F$整除的$k$次齐次多项式. 我们有正合列

$$0 \longrightarrow I_k(X) \longrightarrow Sym^k((\mathbb{C}^*)^{N+1}) \longrightarrow H^0(X, kH) \longrightarrow 0 \tag{4.30}$$

即$S_k(X) \cong H^0(X, kH)$.

设H是$\mathbb{CP}^N$的超平面丛, 我们取$c_1(H)$为Kähler类. 由伴随公式有

$$K_X^{-1} + [X]|_X = K_{\mathbb{CP}^N}^{-1}|_X$$

而$[X]=dH$, $\mathbb{CP}^N=(N+1)H$, 所以$K_X^{-1}=(N+1-d)H|_X$. 所以

$$\underline{S}=(N-1)(N+1-d)$$

设$\sigma(e^t):\mathbb{C}^*\to SL(N+1,\mathbb{C})$是单参数子群, v是生成$\sigma(e^t)$的全纯向量场. 设$\sigma(e^t)$保持X不变, 且v的无穷小作用有

$$v\cdot F=\mu F$$

因为$\sigma(e^t)\in SL(N+1,\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^*$在$(\mathbb{C}^*)^{N+1}$上权$\lambda=0$. 在$H^0(X,kH)$上的权w_k等于$Sym^k((\mathbb{C}^*)^{N+1})$和$I_k(X)$上的权之差. 所以

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda\frac{k\binom{k+N}{N}}{N+1}-\left(\lambda\frac{(k-d)\binom{k-d+N}{N}}{N+1}+\mu\binom{k-d+N}{N}\right)\\ &= -\frac{k^N}{N!}\mu-\frac{k^{N-1}}{2(N-1)!}\mu(N+1-2d)\end{aligned}$$

所以由(4.29)可得

$$f_X(c_1(H),v)=\frac{(d-1)(N+1)}{N}\mu \tag{4.31}$$

我们可以用相同的方法来计算完全交的Futaki不变量. 设$F_1,F_2,\cdots,F_r$是次数分别为$d_1,d_2,\cdots,d_r$的齐次多项式. X是完全交

$$X=\bigcap_{i=0}^{r}\{F_i=0\}$$

X的坐标环为

$$S(X)=\mathbb{C}[Z_0,\cdots,Z_N]/(F_1,\cdots,F_r)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}S_k(X)$$

设$\sigma(e^t)$保持X不变, 且

$$vF_i=\mu_iF_i,\quad i=1,\cdots,r$$

我们也有正合列(4.30), 所以

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda\frac{k\binom{k+N}{N}}{N+1}-\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_\alpha\le r}[\lambda\frac{(k-(d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_\alpha}))\binom{k-(d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_\alpha})+N}{N}}{N+1}\\ &\quad +(\mu_{i_1}+\mu_{i_2}+\cdots+\mu_{i_\alpha})\binom{k-(d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_\alpha})+N}{N}]\\ &\overset{\lambda=0}{=} -\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_\alpha\le r}(\mu_{i_1}+\mu_{i_2}+\cdots+\mu_{i_\alpha})\binom{k-(d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_\alpha})+N}{N}\\ &= -\frac{1}{N!}\sum_{p=0}^{N}k^{N-p}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\binom{N-p+q}{q}c_{p-q}(N)a_q \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中

$$c_s(N)=\sum_{1\le j_1<i_2<\cdots<j_s\le N}j_1\times j_2\times\cdots\times j_s$$

是N的$2s$次多项式,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$c_2 = \sum_{1\le i<j\le N} i \times j = \frac{1}{24}N(N+1)(N-1)(3N+2)$$

而

$$a_q = \sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_\alpha\le r}(\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_\alpha})(d_{i_1}+\cdots+d_{i_\alpha})^q$$

易知对任意的$q<r-1$, $a_q=0$. 而对$q=r-1,r$有:

$$\begin{aligned} a_{r-1} &= (-1)^{r-1}(r-1)!(\mu_1 d_2\cdots d_r+\mu_2 d_1 d_3\cdots d_r+\cdots+\mu_r d_1\cdots d_{r-1}) \\ &= (-1)^{r-1}(r-1)!\prod_{i=1}^{r} d_i\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu_i}{d_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{1}{2}(-1)^{r-1}r!((\mu_1+\cdots+\mu_r)d_1\cdots d_r+(\mu_1 d_2\cdots d_r+\cdots+\mu_r d_1\cdots d_{r-1})(d_1+\cdots+d_r)) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{r-1}r!\prod_i d_i(\sum_i\mu_i+\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}\sum_i d_i) \end{aligned}$$

代入(4.32)得

$$\begin{aligned} -w_k &= \frac{k^{N-r+1}}{N!}(-1)^{r-1}\binom{N}{r-1}a_{r-1}+\frac{k^{N-r}}{N!}[(-1)^{r-1}\binom{N-1}{r-1}\frac{N(N+1)}{2}a_{r-1}+(-1)^r\binom{N}{r}a_r] \\ &= \frac{k^{N-r+1}}{(N-r+1)!}\prod_{i=1}^{r}d_i\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu_i}{d_i}+\frac{1}{2}\frac{k^{N-r}}{(N-r)!}\prod_i d_i[(N+1-\sum_i d_i)\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}-\sum_i\mu_i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(c_1(H),v) &= \frac{(N-r)(N+1-\sum_i d_i)}{N-r+1}\prod_i d_i\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}-\prod_i d_i[(N+1-\sum_i d_i)\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}-\sum_i\mu_i] \\ &= \prod_i d_i(\sum_i\mu_i-\frac{N+1-\sum_i d_i}{N-r+1}\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}) \end{aligned}$$

特别的, 当$r=1$时, 我们得式(4.31). 注意我们假设了$\sigma\in SL(N+1,\mathbb{C})$, 利用(2.20)和(4.27), 我们还可得到完全交的Chow权的表达式:

$$w_{ch}(\sigma) = \prod_i d_i\sum_i\frac{\mu_i}{d_i}$$

我们取Ding-Tian[5]中的两个例子检验正规奇异情况下解析定义和代数定义是相同的.

例 4.2. $F = Z_0Z_1^2+Z_2Z_3(Z_2-Z_3)$, $\sigma(e^t)=diag(1,e^{3t},e^{2t},e^{2t})$, v是σ对应的全纯向量场. 注意由伴随公式有$K_X^{-1}=H|_X$. 向量场在线丛上的不同提升相差常数因子. 利用命题4.2(2), $f_X(c_1(X),v)=f_X(c_1(H),v)$.

利用Futaki不变量的性质，只要求作用$\tilde{\sigma}(e^t) = \sigma(e^{4t}) \cdot e^{-7t} = diag(e^{-7t}, e^{5t}, e^t, e^t) \in SL(4,\mathbb{C})$的Futaki不变量, 设$\tilde{v}$是$\tilde{\sigma}$对应的向量场. 此时$N = 3$, $d = 3$, $\mu = -3$, 代入式(4.31)得Futaki不变量为$f_X(c_1(H), \tilde{v}) = -8$. 所以$f_X(c_1(X), v) = f_X(c_1(H), v) = -2$.

下面用解析的定义方法. X有唯一的商奇点$p_0 = [1, 0, 0, 0]$. 这个奇点局部上是$\mathbb{C}^2/\Gamma$, Γ是二面体群D_4在$SU(2)$中的提升. $|\Gamma| = 8$. 商映射可写为

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 &\rightarrow X \\ (z_1, z_2) &\mapsto [1, \frac{(z_1^4 - z_2^4)}{4}(z_1 z_2), \frac{(z_1^2 + z_2^2)^2}{4}, (z_1 z_2)^2] \end{aligned}$$

$\sigma(e^t)$可以提升到$\mathbb{C}^2$上, 变为$(z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{t}{2}} z_1, e^{\frac{t}{2}} z_2)$. 所以$\pi^* v = \frac{1}{2}(z_1 \partial_{z_1} + z_2 \partial_{z_2})$. v有5个零点$[1, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[0, 0, 1, 1]$. 利用Ding-Tian[5]中的局部化公式(v的零点都是0维的情形)

$$f_X(c_1(X), v) = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{z \in X \\ v(z)=0}} \frac{1}{|\Gamma_z|} \frac{(\mathrm{div}_z(v))^{n+1}}{\det(\nabla v|_{T_z X})} \tag{4.33}$$

我们可计算

$$f_X(c_1(X), v) = \frac{1}{3}(\frac{1}{8}\frac{1^3}{\frac{1}{4}} + \frac{(-2)^3}{1} + 3\frac{(-1)^3}{-2}) = -2$$

结果和前面是一样的.

例 4.3. $F = Z_0 Z_1^2 + Z_1 Z_2^2 + Z_3^3$, $\sigma(e^t) = diag(1, e^{6t}, e^{3t}, e^{4t})$. 也有$K_X^{-1} = H|_X$.

利用Futaki不变量的性质，令$\tilde{\sigma}(e^t) = \sigma(e^{4t}) \cdot e^{-13t} = diag(e^{-13t}, e^{11t}, e^{-t}, e^{3t})$. $N = 3$, $d = 3$, $\mu = -9$. 代入式(4.31)得$f_X(c_1(H), \tilde{v}) = -24$. 所以$f_X(c_1(X), v) = f_X(c_1(H), v) = -6$.

X有唯一的商奇点$[1, 0, 0, 0]$. 局部上是$\mathbb{C}^2/\Gamma$, Γ是正四面体旋转群在$SU(2)$中的提升. $|\Gamma| = 24$. 商映射为(可参见F.Klein的书 *Lectures on the Icosahedron* 中的计算)

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 &\rightarrow X \\ (z_1, z_2) &\mapsto [1, (z_1^4 + 2\sqrt{-3} z_1^2 z_2^2 + z_2^4)^3, 2(-3)^{\frac{3}{4}} z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4), -(z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8)] \end{aligned}$$

$\sigma(e^t)$提升到$\mathbb{C}^2$上变为$(z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{t}{2}} z_1, e^{\frac{t}{2}} z_2)$. 所以$\pi^* v = \frac{1}{2}(z_1 \partial_{z_1} + z_2 \partial_{z_2})$. v有3个零点$[1, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$. 利用局部化公式(4.33)可计算得

$$f_X(c_1(X), v) = \frac{1}{3}(\frac{1}{24}\frac{1^3}{\frac{1}{4}} + \frac{(-5)^3}{6} + \frac{(-2)^3}{-3}) = -6$$

第五章　能量泛函和稳定性

5.1　K泛函和K稳定性

对任意的$\phi \in P(X,\omega)$, K泛函最早由Mabuchi[15]引入, 定义为

$$\nu_\omega(\phi) = -\int_0^1 dt \int_X (S(\omega_{\phi_t}) - \underline{S})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi_t\, \omega_{\phi_t}^n$$

其中ϕ_t是$P(X,\omega)$中连接0到ϕ的任意一条道路.

注 8. K泛函可以写成关于$R^{K^{-1}}(h)R^{L,n}(h) - \frac{S}{n+1}R^{L,n+1}(h)$的Bott-Chern类的积分

$$\int_X\int_0^1 (\Delta\dot{\phi}\omega_\phi^n - n\dot{\phi}Ric(\omega_\phi)\wedge\omega_\phi^n + \underline{S}\dot{\phi}\omega_\phi^n)$$

利用附录中定理A.7易知不依赖道路ϕ_t的选取. 按照附录的记号这里出现了两个从L和K_X^{-1}, 而K_X^{-1}上的度量是由L上的度量决定的. Tian称之为restricted Bott-Chern类.

如果v是X上的全纯向量场, v生成单参数全纯变换$\sigma(e^t)$. 设$\sigma(e^t)^*\omega = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\phi_t$, 则$\dot{\phi} = \theta_v$, 所以

$$\frac{d}{dt}\nu_\omega(\phi_t) = -\int_X (S-\underline{S})\theta_v\omega^n = f_X([\omega],v)$$

K泛函可看作$P(X,\omega)$上某种凸泛函. Chen[2]证明了Kähler度量的空间$\mathscr{K}(X,[\omega])$是一个度量空间(metric space). $P(X,\omega)$有度量结构: 如果$\gamma = \{\phi_t\}$是一条道路, 则它的长度定义为

$$L(\gamma) = \int_0^1 dt\int\sqrt{\int_X |\dot{\phi}|^2\omega_\phi^n}$$

用弧长变分可以求得测地线方程为

$$\ddot{\phi} - |\nabla\phi|_{g_\phi}^2 = \ddot{\phi} - \dot{\phi}^i\dot{\phi}_i = 0 \tag{5.1}$$

形式上我们有

命题 5.1. $\nu_\omega(\phi)$沿测地线是凸的. 当X上没有全纯向量场时, 它沿测地线是严格凸的.

证明. 设ϕ_t是$P(X,\omega)$中的测地线, 则ϕ_t满足方程(5.1), 所以

$$\frac{d^2}{dt^2}F_\omega^0(\phi) = \int_X(\ddot{\phi} + \dot{\phi}\Delta\dot{\phi})\omega_\phi^2 = \int_X(\ddot{\phi} - \dot{\phi}^i\dot{\phi}_i)\omega_\phi^n = 0$$

利用(3.11)得

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\nu_\omega(\phi) &= -\int_X (-\dot\phi^{ij}{}_{ij} + \dot\phi^i S_i + S\ddot\phi + S\dot\phi\Delta\dot\phi)\omega_\phi^n - \underline{S}\frac{d^2}{dt^2}F_\omega^0(\phi_t) \\
&= \int (\dot\phi^{ij}\dot\phi_{ij} - S(\ddot\phi - \dot\phi^i\dot\phi_i))\omega_\phi^n \\
&= \int_X \dot\phi^{ij}\dot\phi_{ij}\omega_\phi^n \geq 0
\end{aligned}
$$

等于0成立当且仅当$\dot\phi^i{}_{\bar j} = 0$, 此时$\sum_i \phi^i \frac{\partial}{\partial z^i}$是全纯向量场, 所以命题成立. □

Kähler-Einstein的情形我们还有另外一个泛函. 取定$\omega \in c_1(X)$, 设

$$
\begin{cases} Ric(\omega) - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial h_\omega \\ \int_X e^{h_\omega}\omega^n = \int_X \omega^n \end{cases} \tag{5.2}
$$

Kähler-Einstein度量的存在性可化为Monge-Ampere方程的可解性:

$$
\omega_\phi^n = e^{h_\omega - \phi}\omega^n \tag{5.3}
$$

(5.3)是下面泛函的Euler-Langrange方程, 首先由Ding引入

$$
F_\omega(\phi) = F_\omega^0(\phi) - \log(\frac{1}{V}\int_X e^{h_\omega-\phi}\omega^n) \tag{5.4}
$$

我们来计算F_ω^0的具体表达式. 因为它的定义不依赖于道路的选取. 所以取$\phi_t = t\phi$. 利用组合恒等式

$$
\binom{n+1}{i+1} = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i}
$$

我们可计算得

$$
\begin{aligned}
F_\omega^0(\phi) &= -\frac{1}{V}\int_0^1 dt\int_X \phi(\omega + t\partial\bar\partial\phi)^n \\
&= -\frac{1}{V}\int_X \phi\omega^n - \frac{1}{V}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i+2}\int_X \phi\wedge\partial\bar\partial\phi\wedge(\partial\bar\partial\phi)^i\wedge\omega^{n-1-i} \\
&= -\frac{1}{V}\int_X \phi\omega^n + \frac{1}{V}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i}^{j-1}\binom{k}{i}\int_X \partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge(\partial\bar\partial\phi)^i\wedge\omega^{n-1-i} \\
&= -\frac{1}{V}\int_X \phi\omega^n + \frac{1}{V}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\int_X \partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\partial\bar\partial\phi)^i\wedge\omega^{k-i})\wedge\omega^{n-1-k} \\
&= -\frac{1}{V}\int_X \phi\omega^n + \frac{1}{V}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{n+1}\int_X \partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-1-k} \\
&= -\frac{1}{V}\int_X \phi\omega^n + J_\omega(\phi)
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

其中

$$J_\omega(\phi)=\frac{1}{V}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{n+1}\int_X\partial\phi\wedge\bar\partial\phi\wedge\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-1-k}\geq 0$$

特别的, 有

$$-F_\omega^0(\phi)\leq\frac{1}{V}\int_X\phi\omega^n \tag{5.6}$$

利用连续性方法和Kähler-Ricci流, Tian证明了Kähler-Einstein度量的存在性等价于$F_\omega(\phi)$在$P(X,\omega)$上的某种增长性称为properness, 见[21], [22]. $\nu_\omega(\phi)$和$F_\omega(\phi)$都满足cocycle条件, 它们相差一个依赖于度量的函数. 计算可知

$$\begin{aligned}\nu_\omega(\phi)&=-n\int_0^1dt\int_X\dot\phi(Ric(\omega_\phi)-Ric(\omega)+Ric(\omega)-\omega+\omega-\omega_\phi)\wedge\omega_\phi^{n-1}\\&=\int_X\log\frac{\omega_\phi^n}{\omega^n}\omega_\phi^n+\int_X h_\omega(\omega^n-\omega_\phi^n)+\int_X\phi\omega_\phi^n+F_\omega^0(\phi)\\&=F_\omega(\phi)+\int_X h_\omega\omega^n-\int_X h_{\omega_\phi}\omega_\phi^n\end{aligned}$$

可以知道$F_\omega(\phi)$的properness等价于$\nu_\omega(\phi)$的properness. Tian[21]利用这种properness证明了Kähler-Einstein度量存在的必要条件是K-稳定性. 后来Donaldson[7]对一般的类重新叙述了K-稳定性.

定义 5.1. (X,L)的一个test configuration包括:

1. 一个有$\mathbb{C}^*$作用的代数簇$\mathcal{X}$
2. 一个$\mathbb{C}^*$等变作用的正线丛$\mathcal{L}\to\mathcal{X}$
3. 一个平坦的$\mathbb{C}^*$等变的映射$\pi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$, 其中$\mathbb{C}^*$乘法作用在$\mathbb{C}$上.

使得对任意的$t\neq 0$, $X_t=\pi^{-1}(t)$同构于X, 且$(X_t,\mathcal{L}|_{X_t})$同构于(X,L).

在Tian开始的定义中, 取$L=K_X^{-1}$, 要求没有重纤维, 并且中间的纤维X_0是正规的. 并且猜想Kähler-Einstein的情形只需要考虑正规的情形就可以了. $\mathbb{C}^*$作用在中间的纤维X_0上, 诱导了全纯向量场v. 虽然X_0可能是奇异的, Ding-Tian[5]证明了Futaki不变量$f_{X_0}(c_1(X),v)$仍可以良好定义.

定义 5.2 (Tian)**.** (X,L)称为是K-稳定的(K-半稳定的), 如果X没有全纯向量场, 并且对任意的不是乘积的test configuration, $f_{X_0}(c_1(L),v)$都有正(非负)的实部.

当k充分大时, 利用$k\mathcal{L}$的$\mathbb{C}^*$作用的特征截面可以把一个test configuration等变地嵌入到$\mathbb{CP}^{N_k}$中, 成为$\mathbb{CP}^{N_k}$的一族代数簇X_t, $\mathbb{C}^*$作用成为$GL(N_k+1,\mathbb{C})$的一个单参数子群$\sigma(e^t)=e^{tA_k}$. $X_t=\sigma(e^t)(X)$, $X_0=\lim_{t\to 0}X_t$. 由(4.15)或(4.26)知

$$\mathrm{tr}(A_k)=D_0k^{n+1}+D_1k^n+\cdots$$

A_k对应的全纯向量场限制在X_0上是v. $\mathrm{tr}(A_k)$不一定是0. 令

$$\underline{A_k} = A_k - \frac{\mathrm{tr}(A_k)}{N_k+1} I_{N_k+1}$$

$\sigma_k(e^t) = \exp(t\underline{A_k}) \in SL(N_k+1, \mathbb{C})$. 记$M_k(X_0)$是$X_0$作为$\mathbb{CP}^{N_k}$的代数子簇计算矩阵$M(X_0)$(2.10)

$$\mathrm{tr}(M_k(X_0)) = k^n V = k^n n! C_0$$

由(4.16)和(4.27)可得

$$\mathrm{tr}(M_k(X_0)A_k) = \int_X \mu^{kL}(v)\omega_k^n = k^{n+1}\int_X \mu^L(v)\omega^n = k^{n+1} n! D_0$$

由第二节式(2.22)知σ_k的Chow权为(见[9])

$$\begin{aligned} w_{ch}(\sigma_k) &= (n+1)\mathrm{tr}(M_k(X_0)\underline{A_k}) = (n+1)\left(\mathrm{tr}(M_k(X_0)A_k) - \frac{\mathrm{tr}(M_k(X_0))\mathrm{tr}(A_k)}{N_k+1}\right) \\ &= (n+1)\left(k^{n+1}n!D_0 - \frac{k^n n! D_0(D_0 k^{n+1} + D_1 k^n + \cdots)}{C_0 k^n + C_1 k^{n-1} + \cdots}\right) \\ &= (n+1)!(k^n \frac{C_1 D_0 - C_0 D_1}{C_0} + \cdots) \\ &= (n+1)k^n f_{X_0}(c_1(L), v) + \cdots \end{aligned} \tag{5.7}$$

如果当k充分大时, X是Chow稳定的, 则$w_{ch}(\sigma_k) > 0$, 当$k >> 1$. 由(5.7)有$f_{X_0}(c_1(L), v) \geq 0$. 所以我们说明了

命题 5.2. *渐近Chow稳定能推出K-半稳定.*

第二节中, 我们已说明Donaldson证明了当$Aut(X, L)$是离散时, 常数量曲率存在能得出渐近Chow稳定性. 所以此时(X, L)也是K-半稳定的.

5.2 有限维空间上泛函的逼近

我们知道Chow稳定性等价于泛函

$$\tilde{F}(\sigma) = -V \cdot F^0_{\omega_{FS}}(\phi_\sigma) - \frac{2V}{N+1}\log\det(\sigma), \quad \sigma \in GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$$

的properness. 为了下面的分析, 我们把这个泛函改写一下. 设X已经嵌入射影空间$\mathbb{CP}^N$, $\mathcal{O}(1)$是超平面丛. $\mathcal{O}(1)$有标准的Fubini-Study度量$|\cdot|_{FS}$. 把齐次坐标看作$H^0(X, \mathcal{O}(1))$的一组基Z_α. 注意对称空间$GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$就是$\mathbb{C}^{N+1}$上所有内积组成的空间. 对任意的内积$H$, 设$\{s_\alpha\}$是$H$的一组标准正交基, 令$s'_\alpha = \sqrt{\frac{V}{n!(N+1)}}\, s_\alpha$. $\{Z_\alpha\}$到$\{s'_\alpha\}$的转移矩阵σ满足$s'_\alpha = \sigma^\beta_\alpha Z_\beta$, 不同的标准正交基相差$U(N+1)$, 所以$\sigma \in GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$, 而且可

以使得$\det(\sigma) \in \mathbb{R}$. 记$Hilb(H)$为内积矩阵$\{(Z_\alpha, Z_\beta)_H\}$, 则$\det Hilb(H) = \det(\sigma)^{-2}$. $\{s_\alpha\}$决定了$\mathcal{O}(1)$上的另外一个度量$FS(H)$, 满足

$$|s'_\alpha|^2_{FS(H)} = \frac{|s'_\alpha|^2_{FS}}{\sum_{\beta=0}^N |s'_\beta|^2_{FS}} = |s'_\alpha|^2_{FS} e^{-\phi_H} \tag{5.8}$$

其中

$$\phi_H = \log \sum_{\beta=0}^N |s'_\beta|^2_{FS} = \log \sum_\beta |\sum_\gamma \sigma^\gamma_\beta Z_\gamma|^2_{FS} = \log \frac{|\sigma \cdot Z|^2}{|Z|^2} = \phi_\sigma$$

注意到F^0_ω的性质, 可以把ω_{FS}换成取定的$\omega = Ric(h)$. 所以相差常数$F^0_{\omega_{FS}}(h)$下, 泛函$\tilde{F}(\sigma)$可写为

$$\tilde{F}(H) = -V \cdot F^0_\omega(FS(H)) + \frac{V}{N+1} \log\det H \tag{5.9}$$

其中我们简记

$$F^0_\omega(FS(H)) = F^0_\omega(-\log \frac{FS(H)}{h})$$

设H^*是$\tilde{F}(H)$的临界点, 则H^*的标准正交基s_α给出X的balanced的嵌入. 令$h^* = FS(H)$, h^*是$\mathcal{O}(1)$上balanced度量, 满足

$$Hilb(FS(H^*)) = H^*, \quad FS(Hilb(h^*)) = h^* \tag{5.10}$$

我们把泛函(5.9)推广到无穷维空间$P(X, \omega)$. 由Chow权表达式(2.22), 及(2.20), (4.13)和式(4.14)知Chow权可以表示为

$$\int_X \theta_v(h)\omega_h^n - \frac{V}{N+1}\int_X \theta_v(B(h) - \Delta_{\omega_h} B(h))\omega_h^n$$

把θ_v换成Kähler势, 在沿路径ϕ_t积分, 利用式(4.19)可得所要泛函为: 对任意的$\phi \in P(X, \omega)$,

$$F(\phi) = -V \cdot F^0_\omega(\phi) + \frac{V}{N+1} \log\det Hilb(h_\phi)$$

其中$Hilb(h_\phi) = (\langle s_\alpha, s_\beta \rangle)$是$(N+1)$阶正定的内积矩阵, $\{s_\alpha\}$是$H^0(X, L)$中取定的一组基. 这个$P(X, \omega)$上的泛函和原来$GL(N+1, \mathbb{C})/U(N+1)$上的泛函有密切的关系.

命题 5.3 (Donaldson[8]). *(1) $F(\phi)$的临界点是balanced度量, 即Bergman核$B(h_\phi)$是常数.*

(2) $F(\phi) \geq \tilde{F}(Hilb(h_\phi))$, $\tilde{F}(H) \geq F(FS(H))$.

(3) balanced度量是$F(\phi)$的最小点.

证明. (1) 利用式(4.19)得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\phi) &= \int_X \dot{\phi}\omega_\phi^n - \frac{V}{N+1}\frac{1}{n!}\int_X \dot{\phi}(B(h_\phi) - \Delta_\phi B(h_\phi))\omega_\phi^n \\ &= -\frac{V}{N+1}\frac{1}{n!}\int_X \dot{\phi}(B(h_\phi) - \Delta_{\omega_\phi} B(h_\phi) - c)\omega_\phi^n \end{aligned}$$

其中, 由Bergman核$B(h_\phi)$的定义得

$$c = \frac{1}{V}\int_X (B(h_\phi) - \Delta_{\omega_\phi} B(h_\phi))\omega_\phi^n = \frac{(N+1)n!}{V}$$

如果ϕ是$F(\phi)$的临界点, 则$\Delta_{\omega_\phi}(B(h_\phi)-c) = B(h_\phi)-c$. 注意到$\Delta$的特征值都是非正的, 所以$B(h_\phi)=c$. 所以$h_\phi$是balanced度量.

(2) 设$\{s_\alpha\}$是$Hilb(h_\phi)$的一组标准正交基, $s'_\alpha = \sqrt{\frac{V}{n!(N+1)}}s_\alpha$. 则和(5.8)一样有

$$|s'_\alpha|^2_{FS(Hilb(h_\phi))} = \frac{|s'_\alpha|^2_{h_\phi}}{\sum_{\beta=0}^N |s'_\beta|^2_{h_\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}(\tilde{F}(Hilb(h_\phi)) - F(\phi)) &= -F^0_{\omega_\phi}(FS(Hilb(h_\phi))) \quad (\text{由}F^0_\omega\text{的性质})\\
&\le \frac{1}{V}\int_X \log(\sum_\alpha |s'_\alpha|^2_{h_\phi})\omega_\phi^n \quad (\text{由式(5.6)})\\
&\le \log(\frac{1}{V}\int_X \sum_\alpha |s'_\alpha|^2_{h_\phi}\omega_\phi^n) \quad (\text{利用log的凹性})\\
&= \log(\frac{1}{(N+1)n!}\int_X \sum_\alpha |s_\alpha|^2_{h_\phi}\omega_\phi^n) = 0
\end{aligned}$$

对于第二个不等式, 同样设$\{s_\alpha\}$是H的标准正交基, $s'_\alpha = \sqrt{\frac{V}{n!(N+1)}}s_\alpha$.

$$\begin{aligned}
F(FS(H)) - \tilde{F}(H) &= \frac{V}{N+1}(\log\det Hilb(FS(H)) - \log\det(H))\\
&\le V\log(\frac{1}{(N+1)n!}\sum_\alpha \int_X |s_\alpha|^2_{FS(H)}\omega^n_{FS(H)})\\
&= V\log(\frac{1}{V}\sum_\alpha \int_X |s'_\alpha|^2_{FS(H)}\omega^n_{FS(H)})\\
&= 0
\end{aligned}$$

其中不等号是因为, 对于任意的$N+1$阶正定Hermitian矩阵A, 通过对角化和平均值不等式有

$$(\det A)^{\frac{1}{N+1}} \le \frac{\mathrm{tr}(A)}{N+1} \quad \text{或} \quad \frac{1}{N+1}\log\det A \le \log\frac{\mathrm{tr}(A)}{N+1}$$

(3) 因为balanced度量H^*是$\tilde{F}$的最小值, 所以利用(2)和式(5.10)得

$$F(\phi) \ge \tilde{F}(Hilb(h_\phi)) \ge \tilde{F}(H^*) = F(FS(H^*)) = F(h^*)$$

□

把L换成kL, 第k个Chow稳定性对应着泛函

$$F_k(\phi) = -V_k \cdot F^0_{k\omega}(k\phi) + \frac{V_k}{N_k+1} \log\det Hilb(h^k_\phi)$$

设ϕ_t是$P(X,\phi)$中一条道路, 利用式(4.19)和Bergman核的展式(定理3.1), 有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_k(\phi) &= \int_X k\dot{\phi}(k\omega_\phi)^n - \frac{k^nV}{N_k+1}\frac{1}{n!}\int_X \dot{\phi}(kB(h^k_\phi) - \Delta_{\omega_\phi}B(h^k_\phi))(k\omega_\phi)^n \\
&= k^{n+1}\int_X \dot{\phi}\omega^n_\phi - \frac{Vk^n}{Vk^n + \frac{1}{2}\underline{S}Vk^{n-1} + \cdots}\int_X \dot{\phi}(k^{n+1} + \frac{1}{2}S(\omega_\phi)k^n + \cdots)\omega^n_\phi \\
&= -k^n \int_X \dot{\phi}(S - \underline{S})\omega^n_\phi + O(k^{n-1})
\end{aligned}$$

显然这个式子是(5.7)在积分得到的凸泛函上的体现.

由Bergman核展式的一致性知, 对任意的r, 存在正整数s使得对于$P(X,\omega)$中C^{s+2}模一致有界的ϕ, 我们有

$$F_k(\phi) = k^n\nu_\omega(\phi) + O(k^{n-1}) \tag{5.11}$$

由命题5.3知balanced度量h_k是$F_k(\phi)$的最小值. 利用定理3.7和逼近式(5.11), 可得

定理 5.4 (Donaldson[8]). *设在$c_1(L)$中存在常数量曲率度量ω_∞, 且$Aut(X,L)$离散, ω_∞是K泛函的最小值.*

一般情况下, Kähler类不一定是代数的, Chen-Tian[3]证明了常数量曲率也是达到K-泛函的最小值.

附录 A　附录

A.1　紧李群的等变上同调

设G是一个紧李群, $EG \to BG$是万有G主从. 即满足EG是可缩的. 设G作用在光滑流形m维实流形X上. 令$X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G$是配丛, 有纤维化$X \to X_G \to BG$.

定义 A.1. X的等变上同调定义为

$$H_G^*(X) = H^*(X_G)$$

特别的, $H_G^*(\{\mathrm{pt}\}) = H^*(BG)$, $\{\mathrm{pt}\}$表示单点集.

我们需要de Rham同调的等变版本. 设$\mathfrak{g}$是G的李代数, $\mathfrak{g}^*$是其对偶. 对任意的$\xi \in \mathfrak{g}$, 用ξ_X记ξ的无穷小作用(如不混淆, 我们也记ξ_X为ξ):

$$\xi_X(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x$$

记$S(g^*) = \bigoplus_i Sym(\bigotimes^i \mathfrak{g}^*)$是$g^*$的对称代数, $A(X) = \bigoplus_{i=0}^m \Gamma(\bigwedge^i T^*X)$是外形式代数. 定义代数$S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X)$上的一个分次. 对任意的$\alpha \in S^i(\mathfrak{g}^*) \otimes A^j(X)$, $\deg \alpha \triangleq 2i + j$. 通过余共轭作用和拉回, G自然作用在$S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X)$上. 任意的$\alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X)$可看作从$\mathfrak{g}$到$A(X)$的多项式函数. 对任意的$g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $(g \cdot \alpha)(\xi) = (g^{-1})^*(\alpha(Ad_{g^{-1}}\xi))$.

定义 A.2. X上的等变微分形式定义为$S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X)$中的$G$不变元素. 即$\alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X)$是等变的当且仅当对任意的$g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $\alpha(Ad_{g^{-1}}(\xi)) = g^*\alpha(\xi)$. 所有的等变微分形式的集合记为$A_G(X)$.

定义 A.3. 等变外微分定义为

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(\xi) = d(\alpha(\xi)) - i_{\xi_X}\alpha(\xi) =: d_{\xi_X}(\alpha(\xi))$$

和外微分一样, 可定义是等变闭形式和等变恰当形式. 还注意有$\deg d_{\mathfrak{g}}\alpha = \deg \alpha + 1$.

命题 A.1. *$d_{\mathfrak{g}}$保持$A_G(X)$不变, 且限制在$A_G(X)$上有$d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$.*

证明. 利用α是G-不变的和$(Ad_{g^{-1}}\xi)_X = (g^{-1})_*\xi_X$易证$d_{\mathfrak{g}}\alpha$也是$G$-不变的. 并且

$$(d_{\mathfrak{g}}^2\alpha)(\xi) = -(di_{\xi_X} + i_{\xi_X}d)\alpha(\xi) = -\mathcal{L}_{\xi_X}\alpha(\xi) = 0 \tag{A.1}$$

□

所以$(A_G, d_{\mathfrak{g}})$是复形, 称为等变de Rham复形, $H^*(A_G, d_{\mathfrak{g}})$称为等变de Rham同调. 为了看出定义的来历, 我们回忆一点Chern-Weil理论.

定义 A.4. 设G作用在光滑流形M上, M上的微分形式η称为基本的(basic), 如果它是水平的(horizontal)和G不变的, 即对任意的$\xi \in \mathfrak{g}$, $i_{\xi_M}\eta = 0$, 并且对任意的$g \in G$, $g^*\eta = \eta$. 所有基本微分形式的集合记为$A(M)_{bas}$.

注 9. 假设M/G是光滑流形, 则通过投影映射的拉回, M/G上的微分形式可以等同于M上的基本微分形式. 当M上有水平分布时, 定义$A(M)$上的协变微分为$D = h \circ d$, 其中h是向水平部分的投影. 则我们有复形的同构$(A(M)_{bas}, D) \cong (A(M/G), d)$.

设$P \to B$是一个G主丛, θ是P上的一个联络形式, Θ是其曲率形式. 对于$\mathfrak{g}$中的任意G不变多项式f, $f(\Theta)$是P上的基本微分形式, 所以可看作B上的微分形式. 我们有Chern-Weil同态

$$\begin{array}{rcl} CW : S(\mathfrak{g}^*)^G & \longrightarrow & A(P)_{bas} \\ \text{an invariant polynomial } f & \mapsto & f(\Theta) \end{array}$$

一般的, 我们有Chern-Weil同态

$$\begin{array}{rcl} CW : (S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X))^G & \to & (A(P \times X))_{bas} \\ \alpha & \mapsto & h(\alpha(\Theta)) \end{array}$$

这里h是投影到水平部分. 取$\mathfrak{g}$的一组基$\{\xi_i\}$, 设$\theta = \theta^i\xi_i$. 把ξ_i也看作$P \times X$上的竖直向量场, 则

$$\begin{array}{rcl} h : A(P \times X) & \longrightarrow & A(P \times X)_{hor} \\ \omega & \mapsto & \prod_i (1 - \theta^i i_{\xi_i})\omega \end{array} \tag{A.2}$$

命题 A.2. $CW \circ d_{\mathfrak{g}} = D \circ CW$.

所以CW是复形的同态, 诱导上同调环的同态

$$\widetilde{CW} : H^*(A_G(X), d_{\mathfrak{g}}) \to H^*(P \times_G X) \tag{A.3}$$

定理 A.3. 当$(P, B) = (EG, BG)$时, (A.3)是同构.

例 A.1. 当$G = S^1$, $BG = \mathbb{CP}^\infty$, $X = \{\text{pt}\}$. 有同构$\widetilde{CW}$: $\mathbb{C}[t] \cong H^*(BG)$.

这个定理使得我们可以用等变de Rham复形来计算等变上同调. 为了正文中应用, 我们还需要下面的交换图表.

命题 A.4.

$$\begin{array}{ccccc} (S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X))^G & \xrightarrow{CW} & (A(P \times X))_{bas} & \xrightarrow{\cong} & A(P \times_G X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \int_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \int_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_* = \int_X} \\ S(\mathfrak{g}^*)^G & \xrightarrow{CW} & (A(P))_{bas} & \xrightarrow{\cong} & A(B) \end{array} \tag{A.4}$$

证明. 对任意的$\alpha \in (S(\mathfrak{g}^*)\otimes A(X))^G$, 利用水平投影的表达式(A.2)和$\Theta$是水平的, 易知$h(\alpha(\Theta)) = \alpha(\Theta) + \beta \wedge f(\theta, \Theta)$, 其中$\beta \in A(X)$的次数低于$\dim X$. 所以

$$\int_X CW(\alpha) = \int_X h(\alpha(\Theta)) = \int_X \alpha(\Theta) = (\int_X \alpha)(\Theta) = CW(\int_X \alpha)$$

□

下面我们考虑向量丛Chern-Weil理论的等变版本.

定义 A.5. $E \to X$称为一个G向量丛, 如果G线性地作用在E上, 和G在X上的作用相容, 即对任意的$x \in X$, $g \in G$, 有线性映射$g_x : E_x \to E_{g\cdot x}$.

设∇^E是E上G不变的联络, 即对任意的$g \in G$, $g^*\nabla^E = \nabla^E$. 和定义A.3相似, 又注意到(A.1), 定义

定义 A.6. 等变联络是作用在$S(\mathfrak{g}^*)\otimes A(X,E)$上的次数1的算子, 对任意的$s \in S(\mathfrak{g}^*)\otimes A(X,E)$,

$$(\nabla_{\mathfrak{g}}^E s)(\xi) = \nabla^E(s(\xi)) - i_{\xi_X}(s(\xi)) =: \nabla_{\mathfrak{g}}^E(\xi)(s(\xi))$$

等变曲率是作用在$S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X,E)$的次数2的算子

$$R_{\mathfrak{g}}^E(\xi) = (\nabla_{\mathfrak{g}}^E(\xi))^2 + \mathcal{L}_{\xi_X}^E$$

其中$\mathcal{L}_{\xi_X}^E$定义同李导数, 即对$s \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X,E)$, 有

$$(\mathcal{L}_{\xi_X}^E s)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\exp(-t\xi)\cdot s(\exp(t\xi)\cdot x) - s(x)}{t}$$

命题 A.5. *(1) $R_{\mathfrak{g}}^E$是G不变的张量, 即$R_{\mathfrak{g}}^E \in (S(\mathfrak{g}^*) \otimes A(X, End(E)))^G$.*

(2) (Bianchi 恒等式) $[\nabla_{\mathfrak{g}}^E, R_{\mathfrak{g}}^E] = 0$.

证明. (1)

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{g}}^E(\xi) &= (\nabla_{\mathfrak{g}}^E(\xi))^2 + \mathcal{L}_{\xi_X}^E = \nabla^{E,2} - [\nabla^E, i_{\xi_X}] + \mathcal{L}_{\xi_X}^E \\ &= R^E + \mathcal{L}_{\xi_X}^E - \nabla_{\xi_X}^E = R^E + \mu^E(\xi) \end{aligned}$$

其中$\mu^E(\xi) = \mathcal{L}_{\xi_X}^E - \nabla_{\xi_X}^E$称为矩映射. 易知$R^E \in (A^2(X) \otimes End(E))^G$, $\mu^E \in (S(\mathfrak{g}^*) \otimes End(E))^G$, 所以可得命题中(1).

(2) 因为$g^*\nabla^E = \nabla^E$, 令$g(t) = \exp(t\xi)$, 在对t求导可得, 对任意的$\xi \in \mathfrak{g}$, $[\nabla^E, \mathcal{L}_{\xi_X}^E] = 0$. 又注意到由Cartan公式$[i_{\xi_X}, \mathcal{L}_{\xi_X}^{TX}] = [i_{\xi_X}, di_{\xi_X} + i_{\xi_X} d] = 0$. 所以

$$[\nabla_{\mathfrak{g}}^E, R_{\mathfrak{g}}^E](\xi) = [\nabla_{\mathfrak{g}}^E(\xi), (\nabla_{\mathfrak{g}}^E(\xi))^2 + \mathcal{L}_{\xi_X}^E] = [\nabla^E - i_{\xi_X}, \mathcal{L}_{\xi_X}^E] = 0$$

□

注 10. 矩映射有几何的描述. 因为E是一G丛, ξ_X可以提升到E上得向量场$\widetilde{\xi}_X$. 同时因为联络∇^E, ξ_X又有水平提升$\widehat{\xi}_X$. 于是$\xi_X^V=\widetilde{\xi}_X-\widehat{\xi}_X$是竖直向量场, 对任意的$s\in E_x$,

$$\xi_X^V(s)=-\mu^E(\xi)(s)$$

利用矩映射, Bianchi恒等式可化为, 对任意的$\xi\in\mathfrak{g}$

$$[\nabla^E,\mu^E(\xi)]=i_{\xi_X}R^E \tag{A.5}$$

例 A.2. (1) (X,ω)是一个辛流形, L是复线丛, ∇^L是一个联络使得$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\nabla^{L,2}=\omega$, G作用在(X,L)上, 使得对任意的$g\in G$, $g^*\nabla^L=\nabla^L$, 所以也有$g^*\omega=\omega$. (A.5)可化为

$$d\mu^L(\xi)=\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}i_{\xi_X}\omega \tag{A.6}$$

所以$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mu^L:\mathfrak{g}\to C^\infty(X)$是辛几何中标准的等变的矩映射.

(2) $E=TX$. 设g是X上G不变的黎曼度量, $\nabla=\nabla^{TX}$是其Levi-Civita联络, $\mathcal{L}=\mathcal{L}^{TX}$是标准的李导数. 由$\nabla$的无挠性, 有

$$\mu^{TX}(\xi)=\mathcal{L}_{\xi_X}-\nabla_{\xi_X}=-\nabla\xi_X\in\Gamma(End(TX))$$

(A.5)可化为

$$-\nabla\nabla\xi_X=i_{\xi_X}R\quad\in\Gamma(T^*X\otimes End(TX))$$

现在假设X是Kähler流形, J是其复结构. 上式两边作用J, 注意到$\nabla J=0$和$RJ=JR$得

$$-\nabla\nabla J\xi_X=i_{\xi_X}RJ \tag{A.7}$$

(X,g,J)的Ric曲率形式是(1,1)型的闭形式, 可表示为, 对任意的$u,v\in TX$,

$$Ric(u,v)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(w\to R(u,v)Jw)$$

在(A.7)两边去迹得

$$-\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}(\mathrm{div}\,J\xi_X)=2i_{\xi_X}Ric \tag{A.8}$$

设$\xi_X=\xi_X^{1,0}+\xi_X^{0,1}$是$T_{\mathbb{C}}X=T^{1,0}X\oplus T^{0,1}X$下的分解, 注意到$\mathrm{div}(\xi_X^{1,0})+\mathrm{div}(\xi_X^{0,1})=\mathrm{div}(\xi_X)=0$, (A.8)可化为

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\mathrm{div}(\xi_X^{1,0})=i_{\xi_X^{1,0}}Ric \tag{A.9}$$

当$E\to X$是复向量丛时, $EG\times_G E\to EG\times_G X$是复向量丛, 有陈类$c(EG\times_G E)\in H^{even}(EG\times_G X)$. 我们定义:

$$c(R_{\mathfrak{g}}^E)\triangleq\det(1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathfrak{g}}^E)$$

我们有向量丛Chern-Weil理论的等变版本.

定理 A.6. $c(R^E_{\mathfrak{g}}) \in (S(\mathfrak{g}^*)\otimes A(X))^G$是等变闭形式，且它表示的$H_G(X)$中的同调类不依赖$G$不变联络$\nabla^E$的选取．通过*Chern-Weil*同态$CW$(A.3)，在$H^{even}(EG\times_G X,\mathbb{R})$中，$c(R^E_{\mathfrak{g}})$表示了$c(EG\times_G E)$

A.2 Bott-Chern类和等变Dolbeault同调

设X是复流形，E是X上的全纯向量丛，$\mathrm{rk}E = r$．h是E上的Hermitian度量．h唯一决定了E的一个联络∇^E．∇^E保持度量h，且和全纯结构相容．取E的局部全纯标架$\{s_i\}$，令矩阵$h=(h_{ij})=((s_i,s_j)_h)$，则∇^E的联络形式是如下(1,0)型的:

$$\theta = h^{-1}\partial h$$

所以∇^E的曲率形式为如下(1,1)型的

$$\Theta = d\theta+\theta\wedge\theta = -h^{-1}\bar\partial h\wedge h^{-1}\partial h + h^{-1}\bar\partial\partial h$$

设$\nabla^E=\partial^E+\bar\partial^E$是相对于$T^*X=T^{*(1,0)}X+T^{*(0,1)}X$的分解，则

$$\bar\partial^{E,2}=0,\quad \partial^{E,2}=0,\quad R^E=\partial^E\bar\partial^E+\bar\partial^E\partial^E=[\partial^E,\bar\partial^E] \tag{A.10}$$

设$f_{k+1}(A)=\mathrm{tr}(A^k)$，对任意的$A\in gl(r,\mathbb{C})$．因为$R^E$仅依赖于度量$h$，令$f_{k+1}(h)=\mathrm{tr}((R^E)^{k+1})$．Chern-Weil理论告诉我们$f_k(h)$是闭的$(k,k)$形式，且它在$H^{k+1,k+1}(X)$中的同调类不依赖度量$h$的选取．如果$h_t$是Hermitian度量空间中的一条道路，我们可以计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(R^{E,k+1}) &= (k+1)\mathrm{tr}(R^{E,k}[\bar\partial^E,\frac{d}{dt}\partial^E])\\ &= k\bar\partial\mathrm{tr}(R^{E,k}[\partial^E,h^{-1}\dot h])\\ &= k\bar\partial\partial\mathrm{tr}(R^{E,k}h^{-1}\dot h)\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{tr}(R^{E,k+1}(h_1))-\mathrm{tr}(R^{E,k+1}(h_0))=(k+1)\bar\partial\partial\int_0^1\mathrm{tr}(R^{E,k}h^{-1}\dot h)dt$$

定义 A.7. $(k+1)\int_0^1\mathrm{tr}(R^{E,k}h^{-1}\dot h)dt$称为连接$h_0$和$h_1$的关于$f_{k+1}$的Bott-Chern类，记作$\tilde f_{k+1}(h_0,h_1)$．

定理 A.7. $\int_X\tilde f_{n+1}(h_0,h_1)$是良好定义的，不赖于连接$h_0$和$h_1$的道路的选取．

证明. 如果$\tilde h_t$是另外一族连接h_0和h_1的Hermitian度量，令$h=h_{s,t}=(1-s)h_t+s\tilde h_t$．仍用$\dot h$表

示对t求导. 把R^E, ∂^E, $\bar\partial^E$简记为R, ∂, $\bar\partial$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathrm{tr}(R^n h^{-1}\dot h) &= n\mathrm{tr}(R^{n-1}[\bar\partial,[\partial,h^{-1}\frac{dh}{ds}]]h^{-1}\dot h)+\mathrm{tr}(R^n\frac{d}{ds}(h^{-1}\dot h))\\
&= \bar\partial\alpha+n\mathrm{tr}(R^{n-1}[\partial,h^{-1}\frac{dh}{ds}][\bar\partial,h^{-1}\dot h])+\mathrm{tr}(R^n(\frac{d}{dt}(h^{-1}\frac{dh}{ds})-[h^{-1}\frac{dh}{ds},h^{-1}\dot h]))\\
&= \bar\partial\alpha+\partial\beta-n\mathrm{tr}(R^{n-1}h^{-1}\frac{dh}{ds}[\partial,[\bar\partial,h^{-1}\dot h]])+\mathrm{tr}(R^n\frac{d}{dt}(h^{-1}\frac{dh}{ds}))-\mathrm{tr}(R^n[h^{-1}\frac{dh}{ds},h^{-1}\dot h])\\
&= \bar\partial\alpha+\partial\beta-\mathrm{tr}([R^n h^{-1}\frac{dh}{ds},h^{-1}\dot h])+n\mathrm{tr}(R^{n-1}h^{-1}\frac{dh}{ds}[\bar\partial,[\partial,h^{-1}\dot h]])+\mathrm{tr}(R^n\frac{d}{dt}(h^{-1}\frac{dh}{ds}))\\
&= \bar\partial\alpha+\partial\beta+\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(R^n h^{-1}\frac{dh}{ds})
\end{aligned}$$

其中$\alpha=n\mathrm{tr}(R^{n-1}[\partial,h^{-1}\frac{dh}{ds}h^{-1}\dot h])$, $\beta=n\mathrm{tr}(R^{n-1}h^{-1}\frac{dh}{ds}[\bar\partial,h^{-1}\dot h])$.

注意到$\frac{dh}{ds}|_{t=0}=\frac{dh}{ds}|_{t=1}=0$, 所以

$$\frac{d}{ds}\int_X\int_0^1\mathrm{tr}(R^n h^{-1}\dot h)dt = \int_X\int_0^1\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(R^n h^{-1}\frac{dh}{ds})dt=0$$

□

下面看看等变Dolbeault同调. $G=Aut(X)$是X的全纯自同构群, $\mathfrak{g}=Lie(Aut(X))$表示X上全纯向量场的集合. 设$A^{p,\cdot}(X)=\Gamma(\bigoplus_{q=0}^n\bigwedge^{p,q}T^*X)$, $A_G^{p,\cdot}(X)=S(\mathfrak{g}^*)\otimes A^{p,\cdot}(X)$. 定义$\bar\partial_{\mathfrak{g}}$: 对任意的$\alpha\in A_G^{p,\cdot}(X)$, $v\in\mathfrak{g}$,

$$(\bar\partial_{\mathfrak{g}}\alpha)(v)=(\bar\partial-i_v)\alpha(v)$$

因为

$$(\bar\partial-i_v)^2=-(\bar\partial i_v+i_v\bar\partial)=0 \tag{A.11}$$

所以$(A_G^{p,\cdot}(X),\bar\partial_{\mathfrak{g}})$成为一个复形, 它的同调称为等变Dolbeault同调, 我们记作$H_G^{p,\cdot}(X)$.

注 11. 和前面的等变de Rham复形不同的是, 这里因为有复结构, 不需要取G不变元素就有(A.11)成立.

设v是X上的全纯向量场, 并且v生成的X的单参数变换可以提升为E上的一族全纯的线性作用, 即$v\in Lie(Aut(X,E))$, 为方便, 我们仍然分别用G和$\mathfrak{g}$表示$Aut(X,E)$和$Lie(Aut(X,E))$. 同定义A.6令

$$\nabla_{\mathfrak{g}}^E(v)=\nabla^E-i_v,\quad R_{\mathfrak{g}}^E(v)=\nabla_{\mathfrak{g}}^{E,2}+\mathcal{L}_v^E$$

我们也有

$$R_{\mathfrak{g}}^E(v)=\nabla^{E,2}+\mathcal{L}_v^E-\nabla_v^E=R^E+\mu^E(v) \tag{A.12}$$

命题 A.8.

$$[\bar\partial^E-i_v,R_{\mathfrak{g}}^E(v)]=0 \tag{A.13}$$

证明.

$$[\bar\partial^E - i_v, R^E_{\mathfrak{g}}(v)] = [\bar\partial^E - i_v, (\nabla^E - i_v)^2] + [\bar\partial^E, \mathcal{L}^E_v] - [i_v, \mathcal{L}^E_v]$$

第一项:

$$[\bar\partial^E - i_v, (\nabla^E - i_v)^2] = [[\bar\partial^E - i_v, \nabla^E - i_v], \nabla^E - i_v]$$

$$[\bar\partial^E - i_v, \nabla^E - i_v] = [\bar\partial^E - i_v, \partial^E] = R^E - \nabla^E_v = (\nabla^E - i_v)^2$$

第二式利用了(A.10), 和v是(1,0)型的. 由上两式得第一项为0.
第二项, 因为v是全纯向量场, 且全纯地作用在E上. 注意$\bar\partial^E$表示着E的全纯结构. 在E的局部全纯标架下表示易证$[\bar\partial^E, \mathcal{L}^E_v] = 0$.
第三项, 由Cartan公式$\mathcal{L}^{TX} = di + id$易知, $[i_v, \mathcal{L}^E_v] = 0$. □

注 12. 由(A.12), 且注意到$[\bar\partial^E, R^E] = 0$, 利用矩映射可以把(A.13)写为

$$[\bar\partial^E, \mu^E(v)] = i_v R^E \tag{A.14}$$

注意联络和曲率都是由度量决定的, 令

$$f_{k+1}(h, v) = \mathrm{tr}((R^E_{\mathfrak{g}}(v))^{k+1}) = (k+1)\mathrm{tr}(R^{E,k}\mu^E(v))$$

定理 A.9. *$(\bar\partial - i_v)f_{k+1}(h, v) = 0$, 且$f_{k+1}(h, v)$在$H^{k,k}_G(X)$中的同调类不依赖于$h$的选取.*

证明. 由(A.13)有, $[\bar\partial^E - i_v, (R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k] = 0$, 两边取迹可知$(\bar\partial - i_v)\mathrm{tr}((R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k) = 0$.
设h_t是一族Hermitian度量, ∇^E_t是对应的一族全纯联络. (A.12)两边对t求导, 由(A.10), $R^E_t = \nabla^{E,2}_t = [\bar\partial^E, \nabla^E_t]$, 而$\bar\partial^E$由$E$的全纯结构决定不变, 所以有

$$\frac{d}{dt}R^E_{\mathfrak{g}}(v) = [\bar\partial^E - i_v, \dot\nabla^E_t] \tag{A.15}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f_{k+1}(h_t, v) &= (k+1)\,\mathrm{tr}(\dot R^E_{\mathfrak{g}}(v)(R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k) = (k+1)\mathrm{tr}([\bar\partial^E - i_v, \dot\nabla^E_t](R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k) \\
&= (k+1)\,\mathrm{tr}([\bar\partial^E - i_v, \dot\nabla^E_t \cdot (R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k])\ (\text{由(A.13)}) \\
&= (k+1)\,(\bar\partial - i_v)\mathrm{tr}(\dot\nabla^E_t \cdot (R^E_{\mathfrak{g}}(v))^k) \\
&= (\bar\partial - i_v)\beta_t(v)
\end{aligned}$$

□

定理 A.10. *$\int_X f_{n+1}(h, v)$不依赖度量h. 记作$F(v)$.*

引理 A.11. *对任意的$\beta \in A(X) = \Gamma(\bigoplus_i \bigwedge^i T^*X)$, $\int_X (\bar\partial - i_v)\beta = 0$.*

证明. $\beta = \sum_{p,q=1}^{n} = \beta_{p,q}$, 则

$$\int_X (\bar\partial - i_v)\beta = \int_X \bar\partial\beta_{n,n-1} - i_v\beta_{n+1,n} = \int_X d\beta_{n,n-1} = 0$$

□

设$w \in \mathfrak{g} = Lie(Aut(X,E))$, $g_t = \exp(tw)$, $h_t = g_t^* h$, $v_t = Ad_{g_t^{-1}} v$, 则$f_{n+1}(h_t, v) = g_t^*(f(h, v_t))$. 所以利用定理??得

$$F(v) = \int_X f_{n+1}(h_t, v) = \int_X g_t^* f_{n+1}(h, v_t) = \int_X f_{n+1}(h, v_t) = F(Ad_{g_t^{-1}} v)$$

对t求导得

定理 A.12. 对任意的$v, w \in Lie(Aut(X,E))$, $F([w,v]) = 0$.

例 A.3. 设L是Kähler流形(X,ω)上全纯线丛, h是Hermitian度量使得$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} Ric(h) = \omega$, 则(A.14)化为

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar\partial\mu^L(v) = i_v\omega \tag{A.16}$$

所以$\mu^L(v)$就是正文中的θ_v. 设$h_t = he^{-\phi_t}$是一族Hermitian度量, 则$Ric(h_t) = Ric(h) + \partial\bar\partial\phi_t$. (A.15)化为

$$\frac{d}{dt}(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mu^L(v)) = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\bar\partial - i_v)\partial\dot\phi$$

TX上有Kähler度量和李导数的全纯作用L_v^{TX}, (A.14)化为

$$-\bar\partial\nabla v = i_v R^{TX}$$

取迹可得

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar\partial\Delta\mu^L(v) = i_v Ric(\omega) \tag{A.17}$$

(A.15)化为

$$\frac{d}{dt}(Ric(\omega) - \Delta\mu^L(v)) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\bar\partial - i_v)\partial\Delta\dot\phi$$

设$\mathbb{C}^*$作用在(X,L)上, $S^1 \subset \mathbb{C}^*$是圆周. S^1的作用保持度量L上度量h, 且其无穷小生成元是ξ, 则ξ是X上的Killing向量场, 而$v = -\frac{J\xi + \sqrt{-1}\xi}{2}$是生成$\mathbb{C}^*$作用的全纯向量场. 且$\xi^{1,0} = \sqrt{-1}v$. 易知

$$\mu^L(\xi) = \sqrt{-1}\mu^L(v) \tag{A.18}$$

$$(\nabla\xi)|_{T^{1,0}X} = \sqrt{-1}\nabla v \tag{A.19}$$

所以此时(A.6)和(A.16)是一样的, 而(A.9)和(A.17)是一样的.

例 A.4. 设X是射影空间$\mathbb{CP}^N$的代数子流形, $L=H$是超平面丛. 设$\lambda_\alpha\in\mathbb{R}$, $0\le\alpha\le N$, 令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N\end{pmatrix},\quad \sigma(t)=\exp(tA)=\begin{pmatrix}e^{t\lambda_0} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_N}\end{pmatrix}$$

A和$\sigma(t)$看作$\mathbb{C}^{N+1}$的线性变换, 也自然地成为$\mathbb{CP}^N$的射影变换. A是$\sigma(t)$的无穷小生成元, 对应着$\mathbb{CP}^N$上全纯向量场v, 设$Z=[Z_0,Z_1,\cdots,Z_N]$是齐次坐标, $\{z_{\alpha'}=\frac{Z_{\alpha'}}{Z_0};\alpha'=1,\cdots,N\}$是一组非齐次坐标则

$$v=\sum_{\alpha'=1}^{N}(\lambda_{\alpha'}-\lambda_0)z_{\alpha'}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha'}}$$

$-H$是$\mathbb{CP}^N$上的典范线丛, 即纤维化$\mathbb{C}^{N+1}\to\mathbb{CP}^N$, $[Z]$上的纤维是1维复空间$\mathbb{C}\cdot Z$. $\sigma(t)$作用在$-H$上, 也作用在H上. 把Z_α看作是H的全纯截面, 则

$$\sigma(e^t)\cdot Z_\alpha=e^{-t\lambda_\alpha}Z_\alpha$$

无穷小作用为

$$L_vZ_\alpha=\lambda_\alpha Z_\alpha$$

设$|\cdot|^2_{FS}$是H上标准的Fubini-Study度量, 有

$$|Z_\alpha|^2_{FS}=\frac{|Z_\alpha|^2}{\sum\limits_{\beta=0}^{N}|Z_\beta|^2}$$

$|\cdot|^2_{FS}$诱导Hermitian联络∇^L, 按定义有

$$\nabla^L_vZ_\alpha=v(\log|Z_\alpha|^2_{FS})Z_\alpha=-\frac{\sum\limits_{\beta=0}^{N}\lambda_\beta|Z_\beta|^2}{\sum\limits_{\beta=0}^{N}|Z_\beta|^2}Z_\alpha+\lambda_\alpha Z_\alpha$$

所以

$$\mu^L(v)Z_\alpha=L^L_vZ_\alpha-\nabla^L_vZ_\alpha=\frac{\sum_\beta\lambda_\beta|Z_\beta|^2}{\sum_\beta|Z_\beta|^2}Z_\alpha$$

因为Z_α生成L的每根纤维, 所以

$$\mu^L(v)=\frac{\sum_\beta\lambda_\beta|Z_\beta|^2}{\sum_\beta|Z_\beta|^2}\tag{A.20}$$

由(A.16)得(显然可直接验证)

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\frac{\sum_\beta\lambda_\beta|Z_\beta|^2}{\sum_\beta|Z_\beta|^2}=i_v\omega_{FS}$$

由例A.2我们得到了$U(N+1)$作用的矩映射, 利用它可得$\mathbb{CP}^N$到$u(N+1)$的嵌入

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{CP}^N &\longrightarrow u(N+1) \\ [Z_0, \cdots, Z_N] &\mapsto \sqrt{-1}\left(\frac{Z_\alpha \overline{Z_\beta}}{|Z|^2}\right) \end{aligned}$$

参考文献

[1] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M.: Heat kernels and Dirac operators, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1992

[2] Chen X.: The space of Kähler metrics, J. Diff. Geom., 56 (2000), 189-234

[3] Chen X., Tian, G.: Geometry of Kähler-metrics and holomorphic foliation by discs, preprint, DG/0409433

[4] Dai X., Liu K., Ma X.: On the asymptotic expansion of Bergman kernel, Preprint, DG/0404494

[5] Ding, W. and Tian, G.: Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariants. Invent. Math., 110, 315-335 (1992)

[6] Donaldson, S.: Scalar curvature and projective embeddings I, J. Diff. Geom., 59 (2001), 479-522

[7] Donaldson, S.: Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Diff. Geom., 62 (2002), 289-349

[8] Donaldson, S.: Scalar curvature and projective embeddings II, Preprint DG/0407534

[9] Donaldson, S.: Lower bounds on the Calabi functional, J. Diff. Geom., 70, (2005), 453-472

[10] Futaki, A.: An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics. Invent. Math., 73, 437-443 (1983)

[11] Griffith, P. and Harris J., Principles of algebraic geometry, Wiley, New York, 1978

[12] Lu, Z.: On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch. Amer. J. Math. 122 (2000), no. 2, 235-273

[13] Lu, Z.: On the Futaki invariants of complete intersections, Duke Math. J., Volume 100, Number 2 (1999), 359-372

[14] Luo, H.: Geometric criterion for Gieseker-Mumford stability of polarized manifolds. J. Diff. Geom., 49(3), 577-599, 1998

[15] Mabuchi, T.: K-energy maps integrating Futaki invariants, Tohoku Math. J., 38, 245-257 (1986)

[16] Matsushima, Y.: Sur la structure du group d'homeomorphismes analytiques d'une certaine varitie Kaehleriennes. Nagoya Math. J., 11, 145-150 (1957)

[17] Phong, D. and Sturm, J.: Stability, energy functionals and Kähler-Einstein metrics, Preprint DG/0203254

[18] Ruan, W., Canonical coordinates and Bergman metrics, Commun. Anal. Geom., 6, 589-631, 1998

[19] Paul, S.T.: Geometric analysis of Chow Mumford stability. Adv. Math., 182(2), 333-356, 2004

[20] Tian, G.: On a set of polarised Kähler metrics on algebraic manifolds, J. Diff. Geom., 32 (1990) 99-130

[21] Tian, G.: Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math., 137 (1997), 1-37

[22] Tian, G.: Bott-Chern forms and geometric stability, Discrete Contin. Dynam. Systems, 6 (2000), 1-39

[23] Tian, G.: Canonical metrics in Kähler geometry, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 2000

[24] Zelditch, S.: Szegö kernels and a theorem of Tian, Internat. Math. Res. Notice, 6, 317-331, 1998

[25] Zhang, S.: Heights and reductions of semi-stable varieties, Compositio Math. 104, 77-105,1996

致　谢

值此论文完成之际, 谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师, 同学, 朋友和家人表示衷心的感谢!

特别感谢田刚教授对我的指导. 他把我引入复几何的领域, 指导我阅读论文, 给我新的思路和问题, 一直给我关心和鼓励, 为我的学习提供了很多有利的条件. 他的学识和品质让我受益匪浅.

感谢讨论班的同学, 石亚龙, 王远琪, 周鑫, 许金兴, 申皓, 赵杰等, 他们耐心听我讲论文, 和我讨论, 我也从他们的讲解中学到了很多东西.

感谢数学中心的秘书余湘辉女士, 她出色的工作为我们营造了良好的学习条件和生活环境. 而且作为答辩秘书帮助我, 让我能顺利地进行答辩.

谨把此文献给我亲爱的爸爸妈妈.

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：　　　　　　　　日期：　　年　　月　　日

学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；

学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；

学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：　　　　　　　　导师签名：

日期：　　年　　月　　日