Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Haïm Brezis

# Prolongement d'applications lipschitziennes et de semi-groupes de contractions

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 19, p. 1-9.
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 19, 9 p.



21 mai 1970

# PROLONGEMENT D'APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES ET DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS

par Haïm BREZIS

Dans la première partie de cet exposé, on considère une application $f$ définie sur un sous-ensemble $D$ d'un espace métrique $X$, à valeurs dans un espace normé $Y$, et vérifiant

(1) $\|f(x) - f(x')\| \leqslant kd^{\alpha}(x , x')$ , $\forall\, x , x' \in D$ , avec $0 < \alpha \leqslant 1$ , $k > 0$ .

On montre que, sous certaines hypothèses, il existe un prolongement $\tilde{f} : X \to Y$ de $f$ vérifiant (1) sur $X$ (avec les mêmes constantes $k$ et $\alpha$ ).

Dans la seconde partie, on se restreint au cas où $X = Y = H$ est un espace de Hilbert. Soient $D$ un sous-ensemble de $H$, et une famille $S(t)$ de contractions de $D$ dans $D$ (i. e. (1) est vérifiée avec $k = \alpha = 1$ ), dépendant d'un paramètre $t \geqslant 0$ , et vérifiant une condition de semi-groupe. On cherche à prolonger $S(t)$ de manière à préserver à la fois la propriété de semi-groupe et de contraction.

## 1. Prolongement d'applications lipschitziennes et höldériennes.

Nous commençons par un des résultats essentiels.

THÉORÈME 1. - *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux espaces de Hilbert, et soit* $f : D \subset X \to Y$ *vérifiant*

(2) $|f(x) - f(x')|_Y \leqslant k|x - x'|_X^{\alpha}$ , $\forall\, x , x' \in D$ , *avec* $0 < \alpha \leqslant 1$ *et* $k > 0$ .

*Alors il existe* $\tilde{f} : X \to Y$ *vérifiant* (2) *sur* $X$ , *et telle que* $\tilde{f} = f$ *sur* $D$ .
*De plus, on peut choisir* $\tilde{f}$ *de sorte que* $\tilde{f}(X) \subset \overline{\text{conv}}\, f(D)$ .

*Remarque*. - Lorsque $\alpha = 1$ ( $f$ lipschitzien), ce résultat est dû à KIRSZBRAUN [8] dans le cas où $X$ et $Y$ sont de dimensions finies, et à VALENTINE [13] dans le cas général. Lorsque $\alpha < 1$ ( $f$ höldérien), le théorème 1 est dû à MICKLE [10] dans le cas où $X$ est de dimension finie ; il a été étendu au cas général indépendamment par MINTY [11] et HAYDEN-WELLS [5]. Nous suivons ici la démonstration de MINTY.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la suite.

LEMME 1 ( min max de Von Neumann). - Soient $A$ , $B \subset \mathbb{R}^n$ deux convexes compacts, et soit $\Phi(\lambda , \mu)$ une fonction continue sur $A \times B$ , à valeurs dans $\mathbb{R}$ , telle que $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ soit convexe et $\mu \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ soit concave. Alors il existe $\lambda^0 \in A$ et $\mu^0 \in B$ vérifiant

$$\Phi(\lambda^0 , \mu) \leqslant \Phi(\lambda^0 , \mu^0) \leqslant \Phi(\lambda , \mu^0) , \qquad \forall \lambda \in A , \ \forall \mu \in B .$$

On trouvera une démonstration très élémentaire, due à SHIFFMAN, de ce lemme, dans le livre de KARLIN [6].

LEMME 2 (SCHOENBERG). - Soient $\mu_i \in \mathbb{R}$ , $i = 1 , 2 , \dots , n$ , avec $\mu_i \geqslant 0$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ . Soient $x_i \in X$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ ( $X$ Hilbert), et soit $0 \leqslant p \leqslant 2$ . Alors on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j |x_i - x_j|^p \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^p \quad . \tag{3}$$

Démonstration. - Si $0 \leqslant p \leqslant 1$ , l'inégalité (3) est évidente, puisque

$$|x_i - x_j|^p \leqslant |x_i|^p + |x_j|^p \quad .$$

Dans le cas où $p = 2$ , l'inégalité (3) est immédiate, car

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j |x_i - x_j|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j (x_i , x_j)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 - 2 \Big| \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, x_i \Big|^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 .$$

Lorsque $1 < p < 2$ , on procède par interpolation, autrement dit, on utilise le théorème de convexité de M. Riesz. On suppose dans la suite que $\mu_i > 0$ , $i = 1 , 2 , \dots , n$ . Soit $E_p$ l'espace des suites $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ , $x_i \in X$ , muni de la norme $\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ , et soit $F_p$ l'espace des suites $\{x_{ij}\}_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ muni de la norme $\left(\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j |x_{ij}|^p\right)^{1/p}$ . Soit $T$ l'application linéaire de $E_p$ dans $F_p$ , qui à $x = \{x_i\}$ fait correspondre $Tx = \{x_i - x_j\}$ , et soit $\|T\|_p$ sa norme.

D'après le théorème de convexité de M. Riesz, on a $\|T\|_p \leqslant \|T\|_1^{1-\theta} \, \|T\|_2^{\theta}$ , avec $\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$ .

Comme $\|T\|_1 \leqslant 2$ et $\|T\|_2 \leqslant \sqrt{2}$ , on a $\|T\|_p \leqslant 2^{1-\theta/2} = 2^{1/p}$ . D'où (3).

On trouvera une démonstration directe, due à FOX, de l'inégalité (3) dans MINTY [11].

Démonstration du théorème 1. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = 1$ . Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal $\widetilde{f}$ de $f$ , vérifiant (2) sur $D(\widetilde{f})$ . Pour montrer que $D(\widetilde{f}) = X$ , on raisonne par l'absurde, et on suppose donc que $D(\widetilde{f}) \neq X$ . Soit alors $x_0 \notin D(\widetilde{f})$ . Par suite, on a

$$\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) \ , \ |x - x_0|^{\alpha}] = \emptyset$$

(où $B(y \ , \ r)$ désigne la boule fermée de centre $y$ et de rayon $r$ ), car s'il existait $y_0 \in \bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) \ , \ |x - x_0|^{\alpha}]$ , on pourrait prolonger $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(x_0) = y_0$ , ce qui contredirait la maximalité de $\widetilde{f}$ .

Soient alors $x_1 , x_2 , \dots , x_n \in D(\widetilde{f})$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} B[\widetilde{f}(x_i) \ , \ |x_i - x_0|^{\alpha}] = \emptyset \ .$$

On pose

$$P_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \ , \ \lambda_i \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ \text{ et } \ \sum \lambda_i = 1\} \ ,$$

et on définit sur $P_n \times P_n$ la fonction

$$\Phi(\lambda \ , \ \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i[\,|y_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, y_j|^2 - |x_i - x_0|^{2\alpha}] \ , \qquad \text{où} \quad y_i = \widetilde{f}(x_i) \ .$$

Il est clair que $\Phi$ est continue sur $P_n \times P_n$ , et que $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda \ , \ \mu)$ est convexe, $\mu \longmapsto \Phi(\lambda \ , \ \mu)$ est concave.

D'après le lemme 1, il existe $\lambda^0 \in P_n$ et $\mu^0 \in P_n$ tels que

$$\Phi(\lambda^0 \ , \ \mu) \leqslant \Phi(\lambda^0 \ , \ \mu^0) \leqslant \Phi(\lambda \ , \ \mu^0) \ , \qquad \forall \ \lambda \ , \ \mu \in P_n \ . \tag{4}$$

Montrons que $\Phi(\mu \ , \ \mu) \leqslant 0$ , $\forall \ \mu \in P_n$ . En effet, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, y_j|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j (y_i \ , \ y_j) + |\sum_{j=1}^{n} \mu_j \, y_j|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i|^2 - |\sum_{j=1}^{n} \mu_j \, y_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j |y_i - y_j|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \, \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha} \ ,$$

puisque $\widetilde{f}$ vérifie (2). Par suite,

$$\Phi(\mu , \mu) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i - x_0|^{2\alpha} \leqslant 0 ,$$

grâce au lemme 2 (appliqué à $x_i - x_0$ au lieu de $x_i$ ). Reportant $\lambda = \mu^0$ dans (4), il vient

$$\Phi(\lambda^0 , \mu) \leqslant 0 , \qquad \forall \mu \in P_n .$$

Il en résulte que

$$|y_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 y_j|^2 \leqslant |x_i - x_0|^{2\alpha} , \qquad i = 1 , 2 , \ldots , n .$$

Posant $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 y_j$ , on a

$$y_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} B[\tilde{f}(x_i) , |x_i - x_0|^{\alpha}] ,$$

ce qui conduit à une contradiction.

Enfin, il est clair que l'on peut projeter $\tilde{f}$ sur $\overline{\text{conv}}\, f(D)$ , et obtenir ainsi un prolongement à valeurs dans $\overline{\text{conv}}\, f(D)$ .

En dehors des espaces de Hilbert, une autre classe d'espaces joue un rôle important dans les problèmes de prolongement. Soit $\ell_n^\infty$ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|x\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ (plus généralement, on pourrait considérer l'espace $C(K)$ où $K$ est un compact extrêmement discontinu).

THÉORÈME 2. - Soit $X$ un espace métrique, et soit $Y = \ell_n^\infty$ . Soient $D \subset X$ , et $f : D \to Y$ vérifiant

(5) $\|f(x) - f(x')\| \leqslant kd^{\alpha}(x , x')$ , $\forall x , x' \in D$ , avec $0 < \alpha \leqslant 1$ et $k > 0$ . Alors il existe une application $\tilde{f}$ de $X$ dans $Y$ , vérifiant (5) sur $X$ , et telle que $\tilde{f} = f$ sur $D$ .

Remarque. - En général, il n'existe pas de prolongement de $f$ à valeurs dans $\overline{\text{conv}}\, f(D)$ (sauf si $n \leqslant 2$ ).

Démonstration du théorème 2. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = \alpha = 1$ , puisque $kd^{\alpha}(x , x')$ définit une nouvelle métrique.

Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal $\tilde{f}$ de $f$ vérifiant (5) sur $D(\tilde{f})$ . Pour montrer que $D(\tilde{f}) = X$ , on raisonne par l'absurde. Supposons donc que $D(\tilde{f}) \neq X$ , et soit $x_0 \notin D(\tilde{f})$ . On a

$$\bigcap_{x\in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x)\ ,\ d(x\ ,\ x_0)] = \emptyset \ .$$

D'autre part,

$$\bigcap_{x\in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x)\ ,\ d(x\ ,\ x_0)] \neq \emptyset \ .$$

En effet, comme $Y = \ell^\infty_n$ , il suffit de montrer que l'intersection des projections de ces boules sur chacune des composantes n'est pas vide. Autrement dit, il faut montrer que l'intersection des intervalles $\bigcap_{x\in D(\tilde{f})} I[\tilde{f}_k(x)\ ,\ d(x\ ,\ x_0)] \neq \emptyset$ . Or les intersections deux à deux de ces intervalles ne sont pas vides, puisque

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leqslant \|f(x) - f(x')\| \leqslant d(x\ ,\ x') \leqslant d(x\ ,\ x_0) + d(x'\ ,\ x_0) \ ,$$

et par suite

$$\bigcap_{x\in D(\tilde{f})} I[\tilde{f}_k(x)\ ,\ d(x\ ,\ x_0)] \neq \emptyset \ .$$

On a donc une contradiction.

Il est intéressant de noter que les deux classes d'espaces considérés (Hilbert et $\ell^\infty_n$ ) sont à "peu près" les seules à posséder la propriété de prolongement pour des applications lipschitziennes. Plus précisément, les deux résultats suivants ont été démontrés par GRÜNBAUM [4] et SCHÖNBECK [12].

THÉORÈME 3. - *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux espaces de Banach, avec* $Y$ *uniformément convexe. Supposons que le couple* $(X\ ,\ Y)$ *vérifie la propriété suivante* :

(6) *Pour tout* $D \subset X$ , *et toute application* $f\ :\ D \to Y$ *telle que*

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant \|x - x'\| \ , \qquad \forall\ x\ ,\ x' \in D \ ,$$

*il existe* $\tilde{f}\ :\ X \to Y$ *qui prolonge* $f$ , *et telle que*

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leqslant \|x - x'\| \ , \qquad \forall\ x\ ,\ x' \in X \ .$$

*Alors* $X$ *et* $Y$ *sont des espaces de Hilbert.*

THÉORÈME 4. - *Soit* $X$ *un espace de dimension* $n$ , *tel que le couple* $(X\ ,\ X)$ *vérifie la propriété* (6). *Alors* $X$ *est, ou bien un espace de Hilbert, ou bien isométrique à* $\ell^\infty_n$ *(autrement dit, la boule unité de* $X$ *est, ou bien un ellipsoïde, ou bien un parallélogramme)*.

## 2. Prolongement de semi-groupes de contractions.

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ , et soit $D \subset H$ .

Un semi-groupe continu de contractions sur $D$ , est une famille d'applications de

$D$ dans $D$, dépendant d'un paramètre $t \geqslant 0$, et vérifiant

(7) $$S(0) = I ,$$

(8) $$S(t_1 + t_2) = S(t_1)\, S(t_2) , \qquad \forall\, t_1 , t_2 \geqslant 0 ,$$

(9) $$\lim_{t \to 0} |S(t)x - x| = 0 , \qquad \forall\, x \in D ,$$

(10) $$|S(t)x - S(t)x'| \leqslant |x - x'| , \qquad \forall\, x , x' \in D , \quad \forall\, t \geqslant 0 .$$

Problème. - Peut-on prolonger $S(t)$ à un ensemble plus grand que $D$ de manière à préserver les propriétés (7), (8), (9) et (10) ?

En général, on ne peut pas prolonger $S(t)$ à l'espace $H$ tout entier ; par contre on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5 (KOMURA [9]). - *On pose* $C = \overline{\operatorname{conv}}\, D$. *Etant donné un semi-groupe continu de contractions* $S(t)$ *sur* $D$, *il existe un semi-groupe continu de contractions* $\widetilde{S}(t)$ *sur* $C$, *tel que*

$$\widetilde{S}(t)x = S(t)x , \qquad \forall\, t \geqslant 0 , \quad \forall\, x \in D .$$

Le théorème 5 est particulièrement intéressant du fait que les semi-groupes continus de contractions sur les ensembles convexes sont bien connus depuis les travaux de KOMURA [9], KATO [7], CRANDALL-PAZY [3], et BROWDER [2]. Ils sont liés à la résolution d'équations d'évolution comprenant un terme maximal monotone, et que nous décrivons ici brièvement.

Soit $A$ une application multivoque de $H$ dans $H$, et soit

$$D(A) = \{x \in H \ ; \ Ax \neq \emptyset\} .$$

On dit que $A$ est *monotone*, si

$$(y_1 - y_2 , x_1 - x_2) \geqslant 0 , \qquad \forall\, y_1 \in Ax_1 , \quad \forall\, y_2 \in Ax_2 ,$$

et *maximale monotone*, s'il n'existe aucun graphe monotone prolongeant strictement $A$. Une caractérisation des opérateurs maximaux monotones, due à MINTY, affirme que $A$ est maximale monotone si, et seulement si, $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ ; ceci permet alors de définir la résolvante $(I + \lambda A)^{-1}$ de $A$, qui est une contraction de $H$ dans $H$.

On montre aussi que si $A$ est maximale monotone, $\overline{D(A)}$ est convexe.

Par ailleurs, pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u(t)$ lipschitzienne, unique solution de l'équation d'évolution

$$u(t) \in D(A) \ , \qquad \forall \ t \geqslant 0 \ ,$$

$$- \frac{du}{dt} \in Au \quad \text{p.-p. sur } ]0 \ , + \infty[ \ ,$$

$$u(0) = u_0 \ .$$

L'application $u_0 \longmapsto u(t)$ définit un semi-groupe continu de contractions sur $D(A)$ , que l'on prolonge par continuité à $\overline{D(A)}$ . Le semi-groupe obtenu est désigné par $S(t)$ , et vérifie (7), (8), (9), (10) ; on dit que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $- A$ .

Réciproquement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$ sur un convexe fermé $C$ , il existe un graphe $A$ maximal monotone unique tel que $\overline{D(A)} = C$ , et $S(t)$ coïncide avec le semi-groupe engendré par $- A$ .

Il y a donc une correspondance bijective entre les graphes maximaux monotones d'une part, et les semi-groupes continus de contractions sur des convexes d'autre part.

En collaboration avec A. PAZY [1], nous avons simplifié la démonstration du théorème 5 qui était très technique (14 lemmes !), tout en dégageant un résultat plus général.

L'idée est la suivante : Pour chaque $t \geqslant 0$ , on désigne par $\mathbb{S}(t)$ l'ensemble de toutes les contractions prolongeant $S(t)$ à $C = \overline{\text{conv}}\ D$ , i. e.

(11) $\quad \mathbb{S}(t) = \{T : \ C \to C \ , \ \ T \ \text{ est une contraction et } \ Tx = S(t)x \ , \ \ \forall \ x \in D\}$ .

On obtient ainsi une famille de contractions de $C$ dans $C$ , qui vérifie "essentiellement" les propriétés d'un semi-groupe.

Plus précisément, on a

(12) $$\mathbb{S}(0) = I \ , \qquad \mathbb{S}(t) \neq \emptyset \ , \qquad \forall \ t \geqslant 0 \ ,$$

(13) $$T_1 \, T_2 \in \mathbb{S}(t_1 + t_2) \ , \qquad \forall \ T_1 \in \mathbb{S}(t_1) \ , \ \ \forall \ T_2 \in \mathbb{S}(t_2) \ ,$$

(14) $$\forall \ x \in C \ , \ \ \forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \ \delta > 0 \ \text{ tel que,}$$
$$\text{si } \ 0 < t < \delta \ , \ \text{ on a } \ |Tx - x| < \varepsilon \ , \ \ \forall \ T \in \mathbb{S}(t) \ ,$$

(15) $$|Tx - Tx'| \leqslant |x - x'| \ , \qquad \forall \ x \ , x' \in C \ , \ \ \forall \ T \in \mathbb{S}(t) \ .$$

Les propriétés (12), (13), (14), (15) définissent ce qu'on appelle un semi-groupe multivoque sur $C$ . Il est naturel de poser le problème suivant.

Problème. - Etant donné un semi-groupe multivoque sur un convexe fermé $C$ , peut-on trouver une sélection de $\mathbb{S}(t)$ qui constitue un semi-groupe continu de contractions ? Autrement dit, existe-t-il un semi-groupe continu de contractions $S(t)$

sur $C$ , tel que $S(t)x \in \overline{\bigcup_{T \in \mathbb{S}(t)} Tx}$ , $\forall\, x \in C$ , $\forall\, t \geq 0$ ?

Dans le cas général, ce problème est ouvert, mais moyennant des hypothèses supplémentaires, la réponse est affirmative. Pour cela, nous introduisons la définition suivante :

On dit que $\mathbb{S}(t)$ est fortement r-convexe si, pour toute suite finie

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n \in H ,$$

pour tout $\alpha > 0$ , et tout $t > 0$ , la fermeture de l'ensemble

$$\bigcup_{T \in \mathbb{S}(t)} [(I + \alpha(I - T))^{-1} x_1 , (I + \alpha(I - T))^{-1} x_2 , \dots , (I + \alpha(I - T))^{-1} x_n]$$

est convexe dans $H^n$ (on notera que, si $T$ est une contraction, alors $(I + \alpha(I - T))^{-1}$ définit une contraction de $C$ dans $C$ ).

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> $\mathbb{S}(t)$ <u>un semi-groupe multivoque sur le convexe fermé</u> $C$ . <u>On suppose que, ou bien</u> $C$ <u>est localement compact, ou bien</u> $\mathbb{S}(t)$ <u>est fortement r-convexe.</u>

<u>Alors il existe un semi-groupe</u> $S(t)$ <u>continu, de contractions sur</u> $C$ , <u>tel que</u>

$$S(t)x \in \overline{\bigcup_{T \in \mathbb{S}(t)} Tx} , \qquad \forall\, t \geq 0 , \ \forall\, x \in C .$$

<u>Remarque</u>. - On montre que le semi-groupe multivoque $\mathbb{S}(t)$ , décrit en (11), est fortement r-convexe, de sorte que le théorème 5 résulte du théorème 6.

<u>Principe de la démonstration du théorème</u> 6. - Soit $\omega$ l'ensemble des couples $(t , T)$ , $t \geq 0$ , $T \in \mathbb{S}(t)$ . On montre qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\omega$ , convergeant vers $0$ (i. e. $\forall\, \varepsilon > 0$ , $\exists\, F \in \mathcal{U}$ tel que $t < \varepsilon$ , $\forall\, (t , T) \in F$ ), pour lequel la limite $\lim_{\mathcal{U}} \left(I + \frac{\lambda}{t} (I - T)\right)^{-1} x$ existe, $\forall\, \lambda > 0$ , $\forall\, x \in C$ ; on désigne par $J_\lambda x$ la limite (ce point est facile à établir lorsque $C$ est localement compact, et plus délicat si l'on suppose que $\mathbb{S}(t)$ est fortement r-convexe). On prouve ensuite qu'il existe un graphe $A$ maximal monotone, tel que

$$J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x , \qquad \forall\, \lambda > 0 , \ \forall\, x \in C ,$$

et que $\overline{D(A)} = C$ . On montre enfin que le semi-groupe engendré par $-A$ constitue une sélection de $\mathbb{S}(t)$ .

On trouvera les détails de la démonstration dans [1].

BIBLIOGRAPHIE


[1] BREZIS (H.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions on convex sets, J. funct. Anal. (à paraître).

[2] BROWDER (F.). - Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Nonlinear Funct. Anal. [1968. Chicago]. - Providence, American mathematical Society (à paraître).

[3] CRANDALL (M.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. funct. Anal., t. 3, 1969, p. 376-418.

[4] GRÜNBAUM (B.). - On a theorem of Kirszbraun, Bull. Res. Counc. Israel, t. 17 F, 1958, p. 129-132.

[5] HAYDEN (T.) and WELLS (J.). - On the extension of Lipschitz-Hölder maps of order $\alpha$ (à paraître).

[6] KARLIN (S.). - Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. 1.- Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1959.

[7] KATO (T.). - On the generators of nonlinear semigroups, Summer Inst. Global Anal., Berkeley, 1968.

[8] KIRSZBRAUN (M.). - Über die zusammenziehenden und lipschitzen Transformationen, Fund. Math., t. 22, 1934, p. 77-108.

[9] KOMURA (Y.). - Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Jap., t. 21, 1969, p. 375-402.

[10] MICKLE (E.). - On the extension of a transformation, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 160-164.

[11] MINTY (G.). - On the extension of Lipschitz, Hölder and monotone functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 76, 1970, p. 334-339.

[12] SCHÖNBECK (S.). - On the extension of lipschitzian maps, Ark. för Mat., t. 7, 1967, p. 201-209.

[13] VALENTINE (F.). - A Lipschitz condition preserving extension for a vector function, Amer. J. of Math., t. 67, 1945, p. 83-93.


(Texte reçu le 18 juin 1970)

Haïm BREZIS
Ch. Rech. CNRS
28 rue Berthollet
75 - PARIS 05