ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

P. BÉNILAN
H. BRÉZIS

# Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert

*Annales de l'institut Fourier*, tome 22, n° 2 (1972), p. 311-329.
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_311_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 311-329.

# SOLUTIONS FAIBLES D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DANS LES ESPACES DE HILBERT

par P. BENILAN et H. BREZIS

---

Soit H un espace de Hilbert sur **R**. Rappelons qu'un opérateur (ou graphe) maximal monotone A est une application multivoque de H dans H vérifiant :

$$(f_1 - f_2,\ u_1 - u_2) \geqslant 0 \quad \text{pour tous} \quad [u_1, f_1],\ [u_2, f_2] \in A$$

ainsi que $R(I + A) = H$.

On dit que $A \in \mathcal{A}(\omega)$ avec $\omega \in \mathbf{R}$ si $A + \omega I$ est maximal monotone et on pose

$$D(A) = \{u \in H;\ Au \neq \emptyset\}.$$

Étant donné $A \in \mathcal{A}(\omega)$, il est bien connu (cf. [3], [6], [8], [9]) que l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \quad \text{sur} \quad [0, T], \qquad u(0) = u_0$$

admet une solution lorsque $f$ est absolument continue sur $[0, T]$ et $u_0 \in D(A)$. On introduit ici la notion de solution faible associée à $f \in L^1(0, T; H)$ et $u_0 \in \overline{D(A)}$, définie par passage à la limite à partir de solutions fortes.

On établit diverses propriétés de la solution faible $u$; en particulier on montre qu'en un point de Lebesgue $t_0$ de $f$, $u$ est dérivable à droite en $t_0$ si et seulement si $u(t_0) \in D(A)$.

On montre ensuite, dans le cas où $\operatorname{Int} D(A) \neq \emptyset$ que la solution faible $u$ est à variation bornée et que $u(t) \in D(A)$ en tout point de Lebesgue de $f$.

On en déduit l'existence d'une solution forte lorsque $f$ est continue sur $[0, T]$ et $u_0 \in \overline{D(A)}$. On établit enfin des résultats analogues pour le problème périodique :

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = u(T).$$

## 1. Étude des solutions faibles.

DÉFINITION 1.1. — *Soient* A *un opérateur de* H *et* $f \in L^1(0, T; H)$.

*a) on appelle solution forte sur* $[0, T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, *toute fonction* $u$ *définie et continue sur* $[0, T]$ *à valeurs dans* H, *absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans* $]0, T[$ *et donc p.p. dérivable sur* $]0, T[$ (cf [9] Appendix) *vérifiant*

$$u(t) \in D(A), \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[.$$

*b) on dit que* $u$ *est solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *s'il existe* $f_n \in L^1(0, T, H)$, $u_n$ *solution forte de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, *tel que* $f_n \to f$ *dans* $L^1(0, T; H)$ *et* $u_n \to u$ *uniformément sur* $[0, T]$.

LEMME 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f$ *et* $g \in L^1(0, T; H)$, $u$ *et* $v$ *des solutions faibles sur* $[0, T]$ *des équations* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *et* $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ *respectivement. Alors pour tout* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, *on a*

$$|u(t) - v(t)| \leqslant e^{\omega(t-s)}|u(s) - v(s)| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}|f(\tau) - g(\tau)|\, d\tau. \quad (1.1)$$

*Démonstration du lemme* 1.1.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la relation (1.1) pour $u$ et $v$ solutions fortes et $0 < s \leqslant t < T$. En

appliquant la monotonie de $A + \omega I$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 \leqslant \omega|u(t) - v(t)|^2 + (f(t) - g(t),\ u(t) - v(t)) \quad p.p.\ t \in ]0,\ T[$$

D'où la relation, par application du lemme de Gronwall.

PROPOSITION 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $x_0 \in \overline{D(A)}$. *Il existe une solution faible unique sur* $[0, T]$ *de l'équation d'évolution.*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = x_0.$$

*Démonstration de la proposition* 1.1.

L'unicité résulte du lemme 1.1 en faisant $g = f$, $s = 0$. Pour l'existence, faisons appel au résultat de Kato [8] : « étant donné $f$ absolument continue sur $[0, T]$ et $x_0 \in D(A)$, il existe une solution forte sur $[0, T]$ de l'équation d'évolution $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x_0$ ».

Soit alors $f_n$ absolument continue sur $[0, T]$ tel que $f_n \to f$ dans $L^1(0, T; H)$ et $x_n \in D(A)$ tel que $x_n \to x_0$ dans H. Il existe une solution forte $u_n$ de l'équation $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = x_n$. Utilisant le lemme 1.1,

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant e^{\omega t}|x_n - x_m| + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}|f_n(\tau) - f_m(\tau)|\,dt \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit

$$\operatorname*{Sup}_{[0, T]} |u_n(t) - u_m(t)| \leqslant e^{|\omega|T}(|x_n - x_m| + \|f_n - f_m\|_{L^1(0, T; H)}).$$

Donc $u_n$ converge uniformément vers une fonction $u$, par définition solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, et telle que $u(0) = x_0$.

LEMME 1.2. — *Soient* A *monotone*, $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $u$ *solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. *Alors*

*pour tout* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *et tout* $[x, y] \in A$, *on a*

$$(u(t) - u(s), u(s) - x) \leqslant \int_s^t (f(t) - y, u(\tau) - x)\, d\tau. \quad (1.2)$$

*Démonstration du lemme* 1.2.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la relation (1.2) pour $u$ solution forte et $0 < s \leqslant t < T$. En appliquant la monotonie de A, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - x|^2 \leqslant (f(t) - y, u(t) - x) \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[$$

D'où en intégrant

$$(u(t) - u(s), u(s) - x) \leqslant \frac{1}{2}|u(t) - x|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - x|^2$$
$$\leqslant \int_s^t (f(\tau) - y, u(\tau) - x)\, d\tau.$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette partie. Précisons d'abord la définition suivante :

Définition 1.2. — *Soit* $f \in L^1(0, T; H)$. *On dira que* $t \in [0, T[$ *est point de Lebesgue à droite* (resp. $t \in ]0, T[$ *est point de Lebesgue*) *de* $f$, *s'il existe* $y \in H$ *tel que*

$$\lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y|\, d\tau = 0$$
$$\left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y|\, d\tau = 0\right).$$

*La valeur* $y$ *est alors unique, on la notera* $f(t + 0)$. *On a*

$$f(t + 0) = \lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\, d\tau.$$

Rappelons (cf. [7] p. 217) que l'ensemble des points de Lebesgue de $f$ est de complémentaire négligeable.

Notons enfin que si

$$\lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h > 0}} f(t + h) \text{ existe } \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h \neq 0}} f(t + h) \text{ existe}\right),$$

$t$ est point de Lebesgue à droite (resp. point de Lebesgue) de $f$ et $f(t + 0) = \lim_{\substack{h \geqslant 0 \\ h > 0}} f(t + h)$.

THÉORÈME 1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0, T; H)$, $u$ *solution faible sur* $[0, T]$ *de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $t \in [0, T[$ *point de Lebesgue à droite de* $f$ (resp. $t \in ]0, T[$ *point de Lebesgue de* $f$). *Il y a équivalence entre les propriétés* :

*a)* $u(t) \in D(A)$;

*b)* $u$ *est dérivable à droite en* $t$;

*c)*

$$\varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$$

$$\left(\text{resp. } \varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty\right).$$

De plus sous ces conditions on a [1] :

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t))^0.$$

Pour la démonstration du théorème, remarquons que l'on peut supposer A monotone en remplaçant A par $A + \omega I$ et $f$ par $f + \omega u$.

*Démonstration de* $a) \Rightarrow b)$. — Supposons donc $u(t) \in D(A)$ et posons $z = (f(t+0) - Au(t))^0$. Appliquons le lemme 1.1 avec $g \equiv f(t+0) - z \in Au(t)$ et $v \equiv u(t)$, on a pour tout $h > 0$, $|u(t+h) - u(t)| \leqslant \int_t^{t+h} |f(\tau) - f(t+0) + z| \, d\tau$ et donc

$$\varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} \leqslant |z|.$$

Soit $h_n > 0$, $h_n \to 0$ tel que $\frac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n} \rightharpoonup \xi$. Pour tout $[x, y] \in A$, on a d'après le lemme 1.2

$$\left(\frac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n}, \, u(t) - x\right) \leqslant \frac{1}{h_n} \int_t^{t+h_n} (f(\tau) - y, u(\tau) - x) \, d\tau$$

[1] Étant donné un ensemble convexe fermé C, on désigne par $C^0$ la projection de 0 sur C.

d'où à la limite, $(\xi,\ u(t)-x) \leqslant (f(t+0)-y,\ u(t)-x)$. Donc $f(t+0)-\xi \in Au(t)$, c'est-à-dire $\xi \in f(t+0)-Au(t)$; d'où puisque $|\xi| \leqslant |z|$, on a $\xi = z$. Donc $\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} \to z$ lorsque $h \downarrow 0$.

$b) \Longrightarrow c)$ étant immédiat passons à la

*Démonstration de* $c) \Longrightarrow a)$.

Sous les hypothèses $c)$, il existe $h_n > 0$, $h_n \to 0$ (resp. $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$) tel que $\dfrac{u(t+h_n)-u(t)}{h_n} \rightharpoonup \xi$. Dans tous les cas pour $[x,\ y] \in A$,

$$\frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} (f(\tau)-y,\ u(\tau)-x)\,d\tau \to (f(t+0)-y,\ u(t)-x).$$

Si

$$h_n > 0,\ \left(\frac{u(t+h_n)-u(t)}{h_n},\ u(t)-x\right) \leqslant \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} (f(\tau)-y,\ u(\tau)-x)\,d\tau.$$

Si

$$h_n < 0,\ \left(\frac{u(t)-u(t+h_n)}{-h_n},\ u(t+h_n)-x\right) \leqslant -\frac{1}{h_n}\int_{t+h_n}^{t} (f(\tau)-y,\ u(\tau)-x)\,d\tau.$$

Dans tous les cas, à la limite,

$$(\xi,\ u(t)-x) \leqslant (f(t+0)-y,\ u(t)-x).$$

Donc $u(t) \in D(A)$.

*Remarque* 1.1. — En fait, un raisonnement identique montre que si $u$ est solution faible de

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f$$

et $t \in [0, T]$ vérifie $\overline{\lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in [0,\,T]}}} \left|\dfrac{1}{s-t}\displaystyle\int_t^s |f(\tau)|\,d\tau\right| < +\infty$

alors $u(t) \in D(A)$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in [0,\,T]}} \dfrac{|u(t)-u(s)|}{t-s} < +\infty$.

*Remarque* 1.2. — Lorsque A est univoque, $u$ étant une solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $t$ un point de Lebesgue de $f$, si l'on suppose $\overline{\lim_{\substack{h>0 \\ h\neq 0}}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$ alors $u$ est faiblement dérivable en $t$.

*Remarque* 1.3. — L'inégalité intégrale (1.2) qui joue un rôle essentiel dans la démonstration a été introduite en [1] pour des opérateurs accrétifs dans les espaces de Banach. Elle est aussi utilisée sous une forme sensiblement plus générale dans [5].

COROLLAIRE 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $u$ *fonction définie sur* $[0, T]$. *Il y a équivalence entre les propriétés*

*a)* $u$ *est solution forte de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

*b)* $u$ *est solution faible de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *et* $u$ *est absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans* $]0, T[$.

*Remarque* 1.4.

Ces deux propriétés sont équivalentes aussi à la propriété plus faible *a priori* : $u$ est absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans $]0, T[$, continue sur $[0, T]$ et vérifie l'inéquation intégrale (1.2). Il serait intéressant de savoir si toute solution continue sur $[0, T]$ de l'inéquation intégrale (1.2) est solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

DÉFINITION 1.3. — *On dit qu'une fonction* $f$ *de* $[0, T]$ *dans* H *est à variation bornée s'il existe* C *tel que pour toute subdivision* $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = T$ *de* $[0, T]$ *on a* $\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \leqslant C$. *On appelle variation totale de* $f$ *la borne inférieure des* C.

Nous résumons dans le lemme suivant quelques propriétés des fonctions à variation bornée (cf. par exemple [3]).

LEMME 1.3. — *Soit $f$ une fonction à variation bornée sur* $[0, T]$. *Alors $f$ vérifie :*

1) *$f$ admet une limite à droite (resp. à gauche) en tout* $t \in [0, T[$ (*resp.* $]0, T]$),

2) $\int_0^{T-h} |f(\tau + h) - f(\tau)|\, dt \leqslant Ch$ *pour tout* $h \in ]0, T[$,

3) *$f$ est faiblement dérivable* p.p. *sur* $]0, T[$ *et* $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; H)$,

4) *Si de plus $f$ est continue et faiblement dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point de* $]0, T[$, *alors $f$ est absolument continue.*

COROLLAIRE 1.2. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, *$f$ à variation bornée sur* $[0, T]$ *et* $x \in \overline{D(A)}$. *Soit $u$ la solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation d'évolution*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f,\ u(0) = x. \tag{1.3}$$

*Il y a équivalence entre les propriétés :*

*a)* $x \in D(A)$,

*b) $u$ est lipschitzienne.*

*De plus sous ces conditions $u$ est la solution forte de* (1.3), $u(t) \in D(A)$ *en tout* $t \in [0, T]$.

*$u$ est dérivable à droite en tout* $t \in [0, T[$ *et*

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^0.$$

*Si de plus* A *est univoque et $f$ continue, $u$ est faiblement dérivable en tout* $t \in [0, T]$ *et* $\frac{du}{dt}(t)$ *est faiblement continue.*

*Démonstration du corollaire* 1.2. — Supposons d'abord $x \in D(A)$. D'après le théorème 1, $u$ est dérivable à droite en 0 et

$\frac{d^+u}{dt}(0) = (f(0 + 0) - Ax)^0$. Soit $0 \leqslant t_0 \leqslant t_0 + h \leqslant T$;

appliquons le lemme 1.1. avec $g(t) = f(t + h)$, $v(t) = u(t + h)$,

$s = 0$ : on obtient

$$|u(t_0 + h) - u(t_0)| \leqslant e^{\omega t_0}|u(h) - x| + \int_0^{t_0} e^{\omega(t_0-\tau)}|f(\tau + h) - f(\tau)|\ d\tau. \quad (1.4)$$

Soit $|u(t_0 + h) - u(t_0)| < e^{|\omega|T}\left\{\left|\frac{d^+u}{dt}(0)\right| + \text{variation totale}\right.$ de $f\}h$. Donc $u$ est lipschitzienne.

Supposons maintenant $u$ lipschitzienne. D'après le théorème 1, pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in D(A)$, (donc en particulier $b) \Longrightarrow a)$), $u$ est dérivable à droite en $t$ et

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^0.$$

D'après le corollaire 1.1, $u$ est solution forte. Enfin si A est univoque, $Au(t)$ étant borné est faiblement continu; si de plus $f$ est continue, $\frac{d^+u}{dt}(t)$ est faiblement continue et donc $u$ est faiblement dérivable.

COROLLAIRE 1.3. — *Soit* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *tel que* $D(A)$ *soit fermé et* $A^0$ *soit borné sur les compacts de* $\overline{D(A)}$.

*Soit* $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $x \in \overline{D(A)}$.

*Alors il existe une solution forte de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$. *De plus* $u$ *est dérivable à droite en tout point de Lebesgue de* $f$ *et si* $f \in L^p(0, T; H)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *alors* $\frac{du}{dt} \in L^p(0, T; H)$.

*Démonstration du corollaire* 1.3. — Soit $f_n$ une suite de fonctions absolument continues sur $[0, T]$ telles que $f_n \to f$ dans $L^1(0, T; H)$ et soit $u_n$ une suite de solutions fortes de l'équation

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n \qquad \text{telles que} \qquad u_n \to u \quad \text{dans} \quad C([0, T]; H).$$

L'ensemble $\{u_n(t); n \geqslant 0, t \in [0, T)\}$ est relativement compact dans $D(A)$.

Donc $|A^0 u_n(t)| \leqslant M$ et par suite

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right| = |(f_n(t) - Au_n(t)^0| \leqslant |f_n(t)| + M \quad \text{p.p. sur } ]0, T[.$$

Donc

$$|u_n(t) - u_n(x)| \leqslant \int_s^t |f_n(\tau)|\, d\tau + M(t - s)$$

et à la limite

$$|u(t) - u(s)| \leqslant \int_s^t |f(\tau)|\, dt + M(t - s).$$

Il en résulte que $u$ est absolument continu et d'après le corollaire 1.1, $u$ est solution forte de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. De plus on a

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqslant |f(t)| + M \quad \text{p.p. sur } ]0, T[.$$

*Remarque* 1.5. — L'hypothèse « D(A) fermé et $A^0$ borné sur les compacts de D(A) » est en particulier vérifiée si $D(A) = H$ ou bien si $A = \partial\psi_C$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé C.

## 2. Cas où Int(conv D(A)) $\neq \emptyset$.

Dans toute cette section A désigne un opérateur appartenant à $\mathcal{A}(\omega)$ tel que Int(conv D(A)) $\neq \emptyset$. Rappelons (Cf. [10] ou bien [4] pour une démonstration simplifiée) qu'alors Int D(A) = Int $\overline{D(A)}$ et que A est borné au voisinage de tout point intérieur à D(A).

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses précédentes, soient* $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $u$ *une solution faible de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f.$$

*Alors*

*a) $u$ est à variation bornée sur* $[0, T]$.

*b) pour tout* $t \in ]0, T[$ *point de Lebesgue de* $f$, $u(t) \in D(A)$, *$u$ est dérivable à droite en $t$ et* $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^0$.

*Démonstration de a).* — On peut toujours supposer A maximal monotone et $0 \in \mathrm{Int}\ D(A)$. Soit $\rho > 0$ et M tels que $|\xi| = \rho \Longrightarrow \xi \in D(A)$ et $|A^0\xi| \leqslant M$. On a alors pour tout $[x, y] \in A$, $(y - A^0\xi, x - \xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi$ tel que $|\xi| = \rho$ d'où

$$|y| = \frac{1}{\rho} \sup_{|\xi|=\rho} (y, \xi) \leqslant \frac{1}{\rho} (y, x) + M\left(1 + \frac{|x|}{\rho}\right). \quad (2.1)$$

Soient alors $f_n \in L^1(0, T; H)$, $u_n$ solution forte de

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

tels que $f_n \to f$ dans $L^1(0, T; H)$ et $u_n \to u$ uniformément.

Appliquons l'estimation (2.1) à

$$\left[u_n(t), f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\right] \in A \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[;$$

On obtient

$$\left|f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\right| \leqslant \frac{1}{\rho} (f_n(t), u_n(t)) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n(t)|^2 + M\left(1 + \frac{|u_n(t)|}{\rho}\right).$$

D'où pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$,

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leqslant \int_s^t |f_n(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{\rho} \int_s^t (f_n(\tau), u_n(\tau))\, d\tau + M\left(t - s + \frac{1}{\rho} \int_s^t |u_n(\tau)|\, d\tau\right) + \frac{1}{2\rho} (|u_n(s)|^2 - |u_n(t)|^2).$$

Posons

$$\varphi(\tau) = |f(\tau)| \left\{1 + \frac{1}{\rho} \sup_{[0, T]} |u(\tau)|\right\} + M\left(1 + \frac{|u(\tau)|}{\rho}\right).$$

A la limite on a

$$|u(t) - u(s)| \leqslant \int_s^t \varphi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\rho} (|u(s)|^2 - |u(t)|^2). \quad (2.2)$$

Cette estimation montre que $u$ est à variation bornée de

variation totale inférieure ou égale à

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\rho}\{|u(0)|^2 - |u(T)|^2\}.$$

*Démonstration de b).* — Utilisons le lemme géométrique suivant :

LEMME 2.1. — *Soient* C *un convexe ouvert et* $x \in \partial C$. *Il existe* $\xi \in C$ *tel que*

$$|z - \xi|^2 - |x - \xi|^2 \leqslant |z - x|^2 \quad \forall z \in \overline{C}.$$

Soit alors $t \in ]0, T[$ point de Lebesgue de $f$. Si $u(t) \in D(A)$, d'après le théorème 1, $u$ est dérivable à droite en $t$ et $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t))^0$. Supposons $u(t) \notin D(A)$, alors $u(t) \in \partial\overline{D(A)}$, D'après le lemme 2.1, il existe $\xi \in \text{Int } D(A)$ tel que $|z - \xi|^2 - |u(t) - \xi|^2 \leqslant |z - u(t)|^2$ $\forall z \in \overline{D(A)}$. Après translation, on peut supposer $\xi = 0$. On a donc pour tout $h \in [0, t]$, $|u(t-h)|^2 - |u(t)|^2 \leqslant |u(t-h) - u(t)|^2$. D'où en reprenant l'estimation (2.2)

$$|u(t) - u(t-h)| \leqslant \int_{t-h}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\rho}|u(t) - u(t-h)|^2.$$

La fonction $u$ étant continue en $t$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $|u(t) - u(t-h)| \leqslant \rho$. D'où pour tout $h \in [0, \delta]$, $|u(t) - u(t-h)| \leqslant 2\int_{t-h}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau$. Par construction de $\varphi$, $t$ est un point de Lebesgue de $\varphi$ et donc

$$\overline{\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}}} \left|\frac{u(t) - u(t-h)}{h}\right| < +\infty.$$

Ce qui est contradictoire avec $u(t) \notin D(A)$, d'après le théorème 1.

*Démonstration du lemme* 2.1. — On peut toujours supposer $x = 0$ et C cône convexe ouvert de sommet O. Soient $C^\perp = \{x \in H;\ (x, z) \leqslant 0\ \forall z \in C\}$ cône polaire de C et $K = \{x \in C^\perp;\ (\omega, x) = -1\}$ où $\omega$ est un élément *fixé* de C.

K est un convexe fermé ne contenant pas 0. Soit $x \in C^{\perp}$ tel que $(\omega, x) = 0$. Il existe $\mathcal{U}$ voisinage de 0 tel que $\omega + \mathcal{U} \subset C$ et donc $(u, x) \leqslant 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}$, ce qui implique $x = 0$. Donc $C^{\perp} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda K$.

Soit alors $\xi$ la projection de 0 sur K. Montrons que $-\xi \in C$. Sinon d'après Hahn-Banach, il existerait $\zeta \neq 0$ tel que $(\zeta, -\xi) = k > (\zeta, z)$ pour tout $z \in C$. Puisque C est un cône, $(\zeta, z) \leqslant 0$ pour tout $z \in C$ et donc $\zeta \in C^{\perp}$ et $k \geqslant 0$. Donc il existerait $\zeta_1 \in K$ tel que $(\zeta_1, \xi) \leqslant 0$ ce qui est impossible car $\xi$ est la projection de 0 sur K.

Étant donné $z \in C$, on a alors

$$|z + \xi|^2 - |\xi|^2 = |z|^2 + 2(z, \xi) \leqslant |z|^2.$$

*Remarque* 2.1. — On peut en fait, compte tenu de la remarque 1.1, améliorer la conclusion *b*) du théorème 2. On a en effet : si $t \in ]0, T]$ vérifie $\varlimsup_{\substack{h \geqslant 0 \\ h>0}} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} |f(\tau)|\, d\tau < +\infty$, alors $u(t) \in D(A)$; si de plus $t \in ]0, T[$ et $t$ est point de Lebesgue à droite de $f$, alors $u$ est dérivable à droite et

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^0.$$

Corollaire 2.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *tel que* Int (conv $D(A)) \neq \emptyset$, $f$ *continu sur* $[0, T]$ *et* $x \in \overline{D(A)}$. *Alors il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = x.$$

*De plus cette solution* $u$ *vérifie :*

$$u(t) \in D(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in ]0, T]$$

$u$ *est dérivable à droite et* $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t) - Au(t))^0$ *pour tout* $t \in ]0, T[$ *avec* $\frac{du}{dt} \in L^1(0, T; H)$.

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 2 et du lemme 1.3.

*Remarque* 2.2. — On peut facilement remplacer dans le corollaire 2.1, $f$ continue par $f$ réglée. Il est vraisemblable que sous les hypothèses du théorème 2, $u$ est absolument continue. En dehors du corollaire 2.1, nous savons le démontrer seulement dans des cas particuliers (cf [3]). Citons par exemple :

*a*) Si $A \in \mathcal{A}(\omega)$ est tel que Int (conv D(A)) $\neq \emptyset$ et $\partial\overline{D(A)}$ est *différentiable*, alors pour tout $f \in L^1(0, T; H)$ et tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$.

*b*) Si $A \in \mathcal{A}(\omega)$ est tel que $D(A)$ soit *ouvert*, alors pour tout $f \in L^\infty(0, T; H)$ et tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x$.

*Remarque* 2.3. — Lorsque dim $H < +\infty$, tous les résultats de cette section s'appliquent à un opérateur $A \in \mathcal{A}(\omega)$ quelconque. En effet, si $A$ est maximal monotone dans $H$ et si $0 \in D(A)$ (on peut toujours se ramener à ce cas), considérons $H_0$ le sous-espace engendré par $D(A)$ et $H_1$ le sous-espace orthogonal à $H_0$. On vérifie facilement que $A_0 = A \cap (H_0 \times H_0)$ est un opérateur maximal monotone de $H_0$ et que pour tout $x \in D(A) = D(A_0)$, $Ax = A_0x + H_1$. L'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ s'écrit alors par projection sur $H_0$ et $H_1$ :

$$\frac{du}{dt} + A_0u \ni \mathrm{Proj}_{H_0}f$$
$$0 + H_1 \ni \mathrm{Proj}_{H_1}f.$$

La seconde équation étant toujours vérifiée et l'intérieur relatif à $H_0$ de conv $D(A_0)$ étant non vide, tous les résultats de la section sont valables.

« Depuis le dépôt du manuscrit, nous avons démontré que lorsque dim $H < +\infty$, pour $A \in \mathcal{A}(\omega)$ et $f \in L^1(0, T; H)$ quelconques, toute solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ est absolument continue sur $[0, T]$ (cf. [3]). »

### 3. Solutions périodiques.

Étant donné $A \in \mathcal{A}(\omega)$ avec $\omega < 0$ et $f$ absolument continue telle que $f(0) = f(T)$, il existe $u$ solution forte unique de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$; de plus $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H)$. (Cf [3]).

Le théorème suivant généralise ce résultat :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *maximal monotone et* $f \in L^1(0, T; H)$. *On suppose* A *coercif au sens suivant :*

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ [x, y] \in A}} \frac{(y, x)}{|x|} = +\infty.$$

*Alors il existe une solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \quad u(0) = u(T). \tag{3.1}$$

*Etant donné* $u$ *solution faible de* (3.1), *il existe* $f_n \in L^1(0, T; H)$, $u_n$ *absolument continue sur* $[0, T]$ *solution de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = u_n(T)$, *tels que* $f_n \to f$ *dans* $L^1(0, T; H)$, *et* $u_n \to u$ *uniformément sur* $[0, T]$.

*D'autre part, l'ensemble des solutions faibles de* (3.1) *est un convexe fermé borné pour la norme uniforme.*

*Démonstration du théorème* 3. — Désignons par $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H muni de la norme uniforme et $\mathcal{Y} = L^1(0, T; H)$. Les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont mis en dualité par $[u, f] \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longmapsto \int_0^T (f(t), u(t))\, dt$.

Considérons $\mathcal{B} = \{[y, f] \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; $u$ absolument continue sur $[0, T]$ et solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)\}$. Il est immédiat que $\mathcal{B}$ est monotone. D'autre part, d'après le résultat classique rappelé au début de cette section, étant donné $f$

absolument continu sur $[0, T]$ avec $f(0) = f(T)$, il existe $u \in \mathcal{X}$ unique tel que $[u, f - u] \in \mathcal{B}$.

Enfin d'après le lemme 1.1, si $[u, f]$ et $[v, g] \in \mathcal{B}$, pour tout $t \geqslant s$,

$$|u(t) - v(t)| \leqslant e^{-(t-s)}|u(s) - v(s)| + \int_s^t e^{-(t-\tau)} |(f(\tau) + u(\tau)) - (g(\tau) + v(\tau))\, d\tau$$

et donc

$$|u(T) - v(T)| \leqslant e^{-T}|u(0) - v(0)| + \int_0^T e^{\tau - T} |(f(\tau) + u(\tau)) - (g(\tau) + v(\tau))|\, d\tau$$

d'où l'on tire $|u(0) - v(0)| \leqslant \dfrac{1}{1 - e^{-T}} \|(f + u) - (g + v)\|_{\mathcal{Y}}$

et donc

$$\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leqslant C\|(f + u) - (g + v)\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1 - e^{-T}} + 1$$

Ces deux propriétés permettent d'affirmer que $\overline{\mathcal{B}}$, fermeture de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est maximal monotone.

Considérons alors $\tilde{\mathcal{B}} = \{[u, f] \in \mathcal{X} = \mathcal{Y};\ u$ solution faible de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f,\ u(0) = u(T)\}$. $\tilde{\mathcal{B}}$ est monotone : en reprenant le lemme 1.1 ou 1.2, on a en effet si $u, v$ sont solutions faibles des équations $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ et $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$ respectivement

$$\frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t (f(\tau) - g(\tau),\ u(\tau) - v(\tau))\, d\tau$$

pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$; d'où si de plus

$$u(0) = u(T) \text{ et } v(0) = v(T), \int_0^T (f(t) - g(t), u(t) - v(t)\, dt \geqslant 0.$$

Puisque évidemment $\overline{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$, on a $\overline{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}$.

Ceci démontre que si $u$ est solution faible de (3.1), il existe $[u_n, f_n] \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \to f$ dans $L^1$ et $u_n \to u$ uniformément. Ceci démontre aussi que l'ensemble des solutions faibles de (3.1) est un convexe fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Démontrons que cet ensemble est non vide et borné. Utilisons pour cela le

LEMME 3.1. — *Soient* A *maximal monotone coercif,* $f_n \in L^1(0, T; H)$, $u_n$ *solution faible de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$. *On suppose* $(f_n)$ *borné dans* $L^1$ *et* $|u_n(0)| - |u_n(T)| \leqslant C$. *Alors* $(u_n)$ *est uniformément borné.*

Achevons la démonstration du théorème 3 en montrant qu'il existe une solution de (3.1). Pour cela considérons l'application S qui à $x \in \overline{D(A)}$ fait correspondre $S(x)$ la valeur en T de la solution faible de l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \quad u(0) = x.$$

D'après le lemme 1.1, S est une contraction du convexe fermé $\overline{D(A)}$ dans lui-même. D'autre part pour $x \in \overline{D(A)}$ fixé, désignant par $u_n$ la solution faible de l'équation d'évolution $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f$, $u_n(0) = S^n(x)$, on a $u_n(T) = S^{n+1}(x)$ et donc $|u_n(T)| - |u_n(0)| \leqslant |S^{n+1}(x) - S^n(x)| \leqslant |S(x) - x|$; donc d'après le lemme 3.1, $(S^n(x))$ est borné.

Appliquant alors un résultat de Browder et Petryshyn [4], S admet au moins un point fixe dans $\overline{D(A)}$. Donc (3.1) admet au moins une solution faible.

*Démonstration du lemme* 3.1. — On peut toujours supposer $u_n$ solution forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$.

D'autre part on peut supposer $[0, 0] \in A$.

Raisonnant par l'absurbe, supposons $(u_n)$ non uniformément borné. D'après le lemme 1.1, on a

$$|u_n(t)| \leqslant |u_n(0)| + \|f_n\|_{L^1}.$$

soit $\|u_n\|_{L^\infty} \leqslant |u_n(0)| + \|f_n\|_{L^1}$ et par suite $|u_n(0)| \to +\infty$. Donc aussi $|u_n(T)| \to +\infty$. Comme $|u_n(T)| \leqslant |u_n(t)| + \|f_n\|_L$ on a $\inf_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \to +\infty$. Appliquant la coercivité de A,

$$\varphi_n(t) = \frac{\left(f_n(t) - \frac{du}{dt}\, n(t),\ u_n(t)\right)}{|u_n(t)|} \to +\infty \quad \text{pour p.p. } t \in ]0,\ T[.$$

D'où $\int_0^T \varphi_n(t)\ dt \to +\infty$. Or ceci est impossible puisque $\int_0^T \varphi_n(t)\ dt \leqslant \|f_n\|_{L^1} + |u_n(0)| - |u_n(T)|$.

COROLLAIRE 3.1. — *Soient* $\varphi$ *fonction convexe s.c.i. propre sur* H *et* $f \in L^2(0, T; H)$. *On suppose* $A = \partial\varphi$ *coercif. Alors il existe* $u$ *solution forte de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$. *De plus* $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.

Cela résulte du théorème 3 et du résultat de H. Brézis [2] qui, avec nos définitions peut s'exprimer : toute solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f \in L^2(0, T; H)$ est solution forte et $\frac{du}{dt} \in L^2_{loc}(0, T; H)$.

*Remarque* 3.2. — Dans le cas où $A = \partial\varphi$, l'hypothèse de coercivité est *équivalente* à A surjectif et $(A^{-1})^0$ borné sur les bornés (cf. [3]). Dans le cas général, cette hypothèse n'est pas suffisante pour avoir l'existence de solutions périodiques faibles pour tout $f \in L^1(0, T; H)$ : il suffit de considérer pour A la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan et $T = 2\pi$.

*Remarque* 3.3. — Le lecteur pourra obtenir de nombreux autres corollaires sur l'existence de solutions fortes de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$, en utilisant les résultats de la section II. Nous renvoyons à [3] pour l'énoncé de résultats complémentaires.

*Remarque* 3.4. — Si A est strictement monotone (i.e. $[x, y] \in A$, $[x', y'] \in A$, $x \neq x' \Rightarrow (y - y',\ x - x') > 0$) il existe au plus une solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS, On a problem of T. Kato, *Comm. Pure App. Math.*, **24** (1971).
[2] H. BREZIS, Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, *Israel J. of Math.*
[3] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes non linéaires, Cours 3e cycle rédigé par P. Benilan, Paris, (1970).
[4] F. BROWDER and W. V. PETRYSHYN, The solution by iteration of non linear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 571-575.
[5] M. CRANDALL and T. LIGGETT, Generation of semi groups of non linear transformations on general Banach spaces, (à paraître).
[6] M. CRANDALL and A. PAZY, Semigroups of non linear contractions and dissipative sets. *J. Funct. Anal.*, **3** (1969), 376-418.
[7] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, Linear operators, interscience.
[8] T. KATO, Accretive operators and non linear evolution equations in Banach spaces, Non linear Functional Analysis, *Proc. Symp. Pure Math.*, **18**, 138-161 A.M.S. (1970).
[9] Y. KOMURA, Non linear semigroups in Hilbert spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 493-507.
[10] R. T. ROCKAFELLAR, Local boundedness of non linear monotone operators, *Michigan Math. J.*, **16** (1969), 397-407.

Manuscrit reçu le 28 juin 1971,
accepté par G. Choquet.

P. BENILAN,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.

H. BREZIS,
Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
9, Quai St-Bernard,
Paris 5e.