Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

H. Brezis

G. Stampacchia

Problèmes elliptiques avec frontière libre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 11, p. 1-9.

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1972-1973

PROBLEMES ELLIPTIQUES AVEC FRONTIERE LIBRE

par H. BREZIS et G. STAMPACCHIA

Exposé N° XI

13 Décembre 1972

Nous présentons au paragraphe 1 une méthode permettant de ramener l'étude de certains problèmes aux limites elliptiques à frontière libre, à la résolution d'inéquations variationnelles. Vu la grande diversité des problèmes particuliers que l'on rencontre, nous nous contenterons d'énoncer seulement quelques <u>principes directeurs</u>.

Les conditions aux limites que nous imposons sur la frontière libre se rencontrent :

1) explicitement dans certains problèmes physiques (exemple : filtrage à travers une digue, cf. Baiocchi [1]),

2) indirectement, après transformation de l'hodographe dans de nombreux problèmes d'écoulements (avec ou sans sillage) de fluides compressibles ou incompressibles (cf. l'exemple du paragraphe 2 ainsi Brezis-Stampacchia [2] et Brezis-Duvaut [3]).

§ 1. DESCRIPTION HEURISTIQUE DE LA METHODE

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert fixé ; on cherche :

1) un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega$; on désignera par Γ la frontière libre de $\mathcal{D}$, i.e. $\Gamma = \partial \mathcal{D} \cap \Omega$

2) une fonction ϕ définie sur $\mathcal{D}$ telle que

(1) $\quad -\Delta\phi = \varphi \qquad$ sur $\mathcal{D}$

(2) $\quad \phi = 0 \qquad$ sur Γ

(3) $\quad \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = \vec{\pi}\,.\,\vec{\nu} \qquad$ sur Γ

(4) des conditions aux limites usuelles pour ϕ sur $\partial\mathcal{D} \cap \partial\Omega$ (par exemple, Dirichlet, Neumann etc...)

où φ est une fonction donnée sur Ω, $\vec{\pi}$ est un champ de vecteurs donné sur Ω ($\vec{\pi} \neq 0$) et $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à $\mathcal{D}$ sur Γ.

On notera que la donnée de deux conditions aux limites sur Γ ((2) et (3)) "compense" le fait que Γ est à priori inconnu. La méthode que nous présentons est inspirée de l'important travail de Baiocchi [1]. Rappelons brièvement son problème.

Soit $\Omega =]a,b[\times]0,H[$ et soit à chercher une fonction $\tilde{\phi}(x,y)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\phi} &= 0 && \text{sur } \mathcal{D} \\ \tilde{\phi} &= y && \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

ainsi que (4).

Le changement d'inconnu $\phi = \tilde{\phi} - y$ montre que l'on peut se ramener à la forme (1) - (4) avec $\varphi = 0$ et $\vec{\pi} = (0,-1)$.

L'idée principale de Baiocchi consiste à prolonger ϕ par 0 en dehors de $\mathcal{D}$ et à chercher ϕ sous la forme $\phi = \frac{\partial u}{\partial y}$ où u est la solution d'une inéquation variationnelle posée dans Ω.

Afin de mieux faire apparaître le rapport existant entre le problème (1) - (3) et les inéquations variationnelles, procédons en sens inverse ; c'est-à-dire, dérivons la solution d'une inéquation variationnelle et explicitons les propriétés qu'elle satisfait. Pour $u, v \in H^1_0(\Omega)$, posons $a(u,v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx$, et soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle

$$(5) \qquad a(u,v-u) \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx \qquad \forall\, v \in K$$

où $K = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

On sait que si $f \in L^p(\Omega)$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et en particulier si $p > n$, on a $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Enfin u vérifie

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D} = \{u \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ et $\operatorname{grad} u = 0$ sur Γ (puisque $u \in C^1(\Omega)$). Posons $\phi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ où ξ est une direction arbitraire ($|\xi| = 1$) et montrons que ϕ vérifie

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta\phi = \dfrac{\partial f}{\partial \xi} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = -f\,\vec{\xi}\cdot\vec{\nu} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En effet, soit $v \in C_0^\infty(\Omega)$; on a

$$\sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial\xi}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = - \sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial \xi}\, dx$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \Delta u\ \frac{\partial v}{\partial \xi}\, dx = - \int_{\mathcal{D}} f\ \frac{\partial v}{\partial \xi}\, dx = - \int_{\Gamma} fv \cos(\nu, \xi) d\Gamma + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \xi}\ v\, dx.$$

Par ailleurs :

$$\sum_i \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\ v\, d\Gamma - \int_{\mathcal{D}} \Delta\psi . v\, dx\ ;$$

d'où l'on déduit (6).

Autrement dit $\psi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ résoud le problème initial si l'on peut trouver f et ξ tels que

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \text{et } \vec{\pi} = - f\, \vec{\xi}.$$

Ceci n'étant pas le cas en général, nous sommes conduits à introduire la nouvelle transformation $\psi = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$ où $\vec{a} = (a_k)$ est un champ de vecteurs sur Ω et u est la solution de (5).

Par un calcul analogue, on trouve cette fois

$$\begin{cases} - \Delta\psi = \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} - 2 \sum_{i,k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_k (\Delta a_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma & \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = - f\ \vec{a}.\vec{\nu} \quad \text{sur } \Gamma & \end{cases}$$

Modulo un commutateur, $\psi = \sum_k a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$ résoud le problème initial si l'on peut trouver f et $\vec{a}$ tels que

$$(7) \qquad \varphi = \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad \text{et} \qquad \vec{\pi} = -f\,\vec{a}$$

Les équations (7) déterminent f et $\vec{a}$, car on a $a_k = - \frac{1}{f}\pi_k$ et $\sum_k \pi_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\log f) = - \varphi$; cette équation en f s'intègre "explicitement" le long des caractéristiques de $\vec{\pi}$.

Il est maintenant indispensable de modifier sensiblement l'inéquation (5) de façon à éliminer les termes provenant du commutateur.

Pour simplifier nous supposerons dorénavant que $\vec{\pi}$ conserve une direction constante par exemple $\vec{\pi} = \pi \vec{e}_n$. [Remarquons qu'on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de coordonnées, mais alors Δ est remplacé dans (1) par un opérateur à coefficients variables, ce qui complique notablement la suite].

On a alors $\vec{a} = a\, e_n$ avec $\varphi = a \frac{\partial f}{\partial x_n}$ et $\pi = -af$.
Reportant $\phi = a \frac{\partial u}{\partial x_n}$ dans l'équation (1) il vient

$$-\varphi = a\, \Delta \frac{\partial u}{\partial x_n} + 2 \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} + (\Delta a) \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Divisant par a ($a \neq 0$ car $\pi \neq 0$) on a $-\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}(\Delta u) + \sum_i A_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} + B \frac{\partial u}{\partial x_n}$
avec $A_i = \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial x_i}$ et $B = \frac{\Delta a}{a}$

Donc

$$-\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}(\Delta u) + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(\sum_{i=1}^{i} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \Big(B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n}\Big) \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Par suite

$$Lu = -\Delta u - \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int^{x_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_n - \Big(B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n}\Big) u + \int^{x_n} C\, u\, dx_n =$$
$$f + \Phi(x').$$

où $C = \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(B - \frac{\partial A_n}{\partial x_n}\Big)$.

Choisissant des bornes d'intégration convenables (plus précisément $u = \int_\Gamma^{x_n} \frac{\phi}{a}\, dx_n$) on montre, moyennant des hypothèses appropriées sur les signes de φ et π, que u (prolongé par 0 en dehors de $\mathcal{D}$) est solution de l'inéquation variationnelle $u \in K$

$$(8) \qquad (Lu\, ,\, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall\, v \in K$$

On a ainsi abouti à un problème (non linéaire) posé <u>sur Ω</u> et $\mathcal{D}$ apparaît ensuite comme étant l'ensemble $\{x \in \Omega\ ;\ u(x) > 0\}$.

On ne peut pas appliquer directement à (8) les résultats classiques d'existence et d'unicité pour deux raisons :

a) L n'est pas un opérateur elliptique ordinaire mais contient des "perturbations" intégro-différentielles.

b) les conditions aux limites pour u sur $\partial\Omega$ sont en général compliquées; par exemple si $\phi = 0$ sur $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{D}$ on est conduit à $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ sur $\partial\Omega$: c'est un problème de dérivées obliques (qui se réduit d'ailleurs à un problème de Dirichlet ou Neumann sur les parties de $\partial\Omega$ où e_n est tangent ou normal à $\partial\Omega$).

Notons enfin que l'opérateur L prend une forme particulièrement simple dans le cas suivant : $\varphi = 0$ et $\pi(x) = R(x')\, e^{-kx_n}$ où R est une fonction qui dépend seulement de $x' = (x_1, x_2, \dots x_{n-1})$. En effet dans ce cas on peut prendre

(9) $$f(x) = -R(x') \qquad \text{et} \qquad a(x) = e^{-kx_n} \;;$$

d'où $A_i = 0$ pour $1 \le i \le n-1$, $A_n = -2k$ et $B = k^2$. Par suite

(10) $$Lu = -\Delta u + 2k \frac{\partial u}{\partial x_n} - k^2 u.$$

§ 2. UN EXEMPLE (cf. Brezis-Duvaut [3])

On considère un écoulement plan, stationnaire, irrotationnel d'un fluide parfait et incompressible autour d'un profil $\mathcal{P}$ convexe et symétrique. On suppose de plus que l'écoulement est uniforme à l'infini et admet un sillage (γ) (qui est une frontière libre).

Dans le plan physique (x,y) le vecteur vitesse $\vec{q} = (u,v)$ vérifie

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{q} = 0$$

$\vec{q}$ est tangent à $\mathcal{P}$ le long de $\mathcal{P}$,

$\vec{q}(u,y) \longrightarrow \vec{q}_\infty$ quand $(x,y) \to \infty$.

Le long de (γ), $\vec{q}$ est tangent à γ et de plus $q = |\vec{q}| = |\vec{q}_\infty| = q_\infty$.
Il est classique d'introduire la fonction courant ϕ par les relations

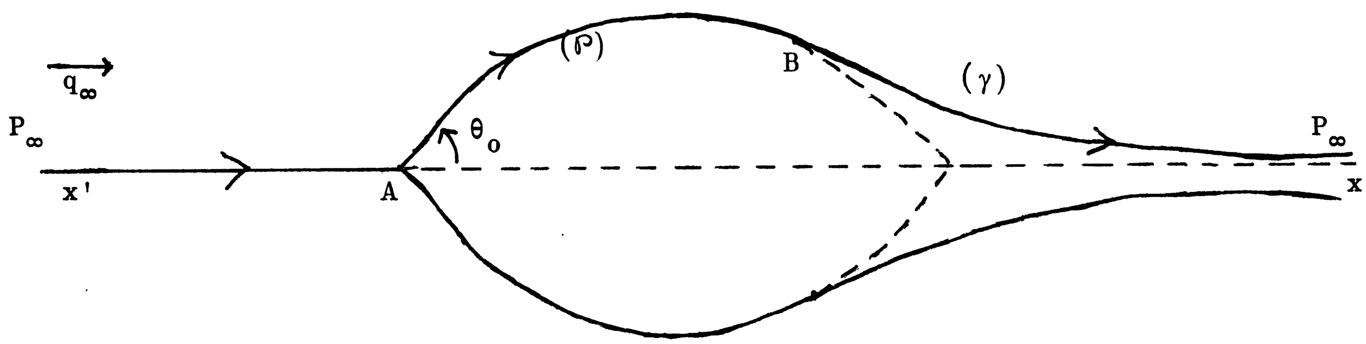
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \;;$$

on a alors

$$(11) \qquad \Delta\phi = 0$$

Le profil $\mathcal{P}$ étant symétrique par rapport à l'axe x'x (portant $\vec{q}_\infty$) on peut se restreindre à l'étude de ϕ dans le demi-plan supérieur. Les conditions aux limites pour ϕ sont

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{sur } P_\infty A,\ AB \text{ et } (\gamma) \\ |\text{grad } \phi| = q_\infty & \text{sur } (\gamma) \end{cases}$$



Les conditions aux limites le long de la frontière libre (γ) ne sont pas de la forme (2) - (3).
Nous allons toutefois nous ramener à un problème du type (1) - (4) à l'aide de la transformation de l'hodographe. Soit $\mathcal{T}$ la transformation

$$(x,y) \longrightarrow (u,v) \longrightarrow (\theta,q) \qquad \text{où } \operatorname{tg}\theta = \frac{v}{u}$$

L'équation (11) devient

$$q^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} + q \frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{12}$$

si l'on considère ϕ comme fonction des variables indépendantes θ et q.

Enfin il est commode de poser $\sigma = -\log q$ de sorte que si l'on considère ϕ comme fonction de θ et σ on a grâce à (12)

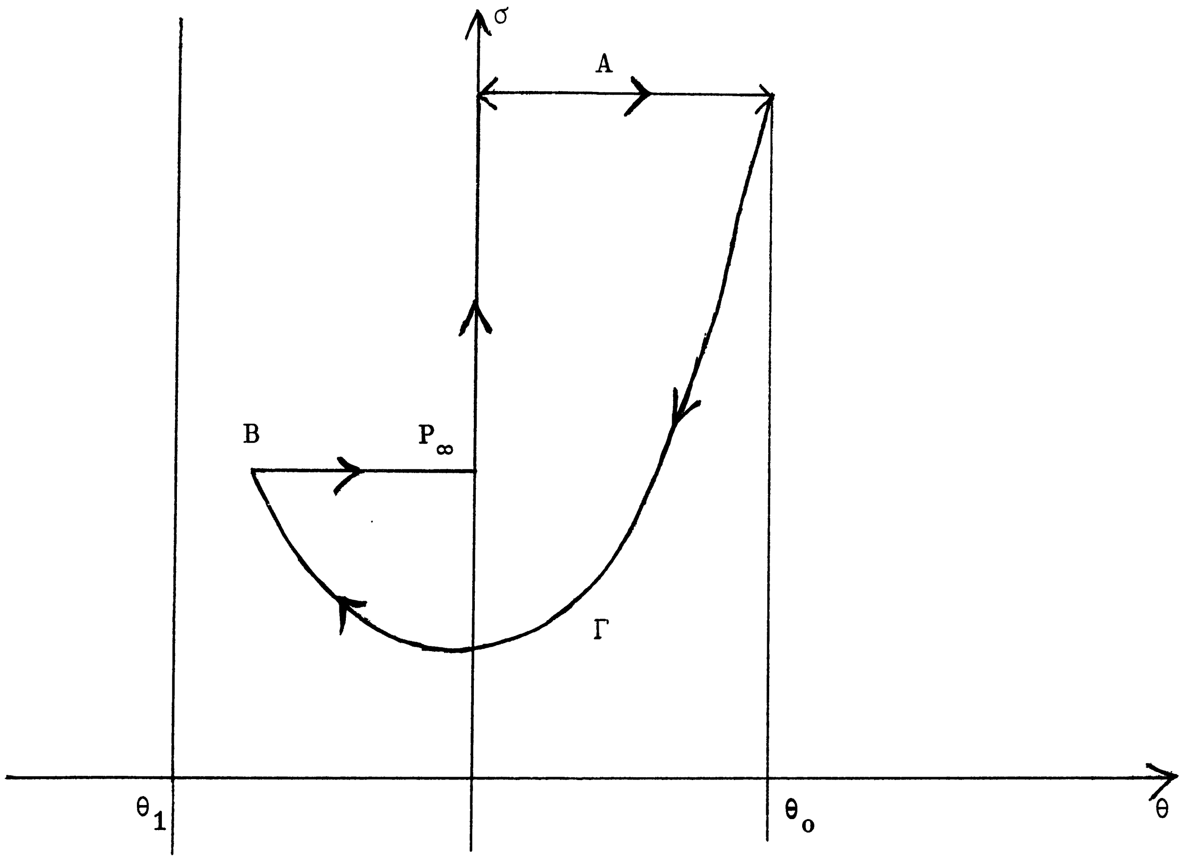
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} = \Delta\phi = 0. \tag{13}$$

Le profil $(\mathcal{P})$, donné dans le plan physique, est transformé par $\mathcal{C}$ en une courbe Γ qui doit être considérée comme une frontière libre dans le plan de l'hodographe (puisque $\mathcal{C}$ dépend de ϕ et n'est pas connu à priori). Par contre la courbe (γ), inconnue dans le plan physique est transformée par $\mathcal{C}$ en un segment de la droite $\sigma = \sigma_\infty$ (puisque $q = q_\infty$ le long de (γ)).

Enfin on montre que , le long de Γ on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \vec{\pi}.\vec{\nu} \qquad \text{où} \qquad \vec{\pi} = (0,\ R(\theta)\ e^{-\sigma})$$

où $R(\theta)$ est le rayon de courbure algébrique de $\mathcal{P}$ au point $P \in \mathcal{P}$ où la tangente à $\mathcal{P}$ forme avec l'axe $x'x$ un angle θ.



Appliquant les résultats du paragraphe 1 (en particulier (9) et (10)) on voit que l'on est conduit à résoudre une inéquation variationnelle pour l'opérateur $Lu = -\Delta u + 2\,\frac{\partial u}{\partial \sigma} - u$, u et ϕ étant liés par $\phi = e^{-\sigma}\,\frac{\partial u}{\partial \sigma}$.

On notera enfin que les conditions aux limites pour u sur $\partial\Omega$ se réduisent à des conditions de Dirichlet ou Neumann car $\partial\Omega$ est composé de segments parallèles ou orthogonaux à la direction σ. Pour les détails nous renvoyons à [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Baiocchi : Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. di Mat. Pura ed Applic. 92 (1972) p. 107-127.

[2] H. Brezis, G. Stampacchia : Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires, C. R. Acad. Sc. Paris, (1972) et article détaillé à paraître.

[3] H. Brezis, G. Duvaut : Ecoulement avec sillage autour d'un profil symétrique sans incidence, C. R. Acad. Sc. Paris (1973).