ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une théorie des points critiques à l'infini pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner.* Note de **Abbas Bahri** et **Jean-Michel Coron**, présentée par Jacques-Louis Lions.

On considère dans cette Note un ouvert Ω de S^3, K une fonction positive sur Ω, et l'équation dans Ω $-8\Delta u+6u=K u^5$, $u>0$ dans Ω, $u=0$ sur $\partial\Omega$ (pas de condition si $\Omega=S^3$). On suppose que soit K est une constante (équation de Yamabe) et $\Omega\neq S^3$, soit $\Omega=S^3$ et K est une fonction positive. Le problème variationnel est non compact. On analyse dans cette Note les points critiques à l'infini qui lui sont associés. On en déduit des conditions suffisantes sur K pour qu'elle soit courbure scalaire d'une métrique confirme à la métrique standard de S^3.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Critical points at infinity in the Yamabe equation and the Kazdan-Warner problem.

Let Ω be an open set of S^3 *and* K *be a positive function on Ω. We consider the equation* $-8\Delta u+6u=K u^5$ *in Ω, $u>0$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$ (no condition if $\Omega=S^3$). We assume either* K *is constant and* $\Omega\neq S^3$ *or* $\Omega=S^3$. *The variational problem is not compact. We analyze the critical points at infinity of this functional. We give sufficient conditions on* K *to be the scalar curvature of a metric conformally equivalent to the standard metric on* S^3.

I. INTRODUCTION. — Soient $S^3=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid |x|=1\}$, c la métrique canonique sur S^3, Ω un ouvert régulier de S^3 (éventuellement $\Omega=S^3$) et K une fonction positive et de classe C^2 sur $\bar\Omega$. On cherche u de $\bar\Omega$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$-8\Delta u+R u=K(x) u^5, \qquad u>0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad (\text{si } \Omega\neq S^3). \tag{2}$$

Dans (1) Δ est le laplacien de (S^3, c) et R est la courbure scalaire de (S^3, c) soit 6. Quand Ω est différent de S^3, on supposera que K est une fonction constante.

Dans le cas $\Omega=S^3$ le problème (1) a l'interprétation géométrique suivante : *existe-t-il une métrique g sur S^3 conforme à c telle que la courbure scalaire de (S^3, g) soit* K (chercher g sous la forme $g=u^{4/(n-2)}c$)? Des obstructions dues à Kazdan-Warner [1] et à Bourguignon-Ezin [2] sont connues pour ce problème (problème de Kazdan-Warner).

Pour $u\in H^1(\Omega)$ on pose $\|u\|_\Omega^2=\int_\Omega (8|\nabla u|^2+R u^2)\,dv$. Soit $\Sigma=\{u\in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|=1\}$. On pose :

$$I(u)=\left(\int_\Omega K(x)u^6\,dv\right)^{-1/2} \qquad \text{pour} \quad u\in\Sigma \quad \text{et} \quad \Sigma^+=\{u\in\Sigma \mid u\geqq 0\}.$$

Il est facile de voir que $\inf_\Sigma I$ n'est pas atteint si $\Omega=S^3$ et K n'est pas constante ou si $\Omega\neq S^3$. De plus un point critique de I qui est une fonction positive sur Ω donne une solution de (1)-(2).

Soit $d(.,.)$ la distance géodésique sur (S^3, c) et soit, pour $a\in S^3$ et $\lambda>0$, $\delta(a, \lambda)$ la fonction sur S^3 :

$$\delta(a, \lambda)(x)=c\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+1-(\lambda^2-1)\cos d(a, x)}\right]^{1/2},$$

où c est tel que $\|\delta(a, \lambda)\|=1$ (c est en fait indépendant de λ et a).

0249-6321/85/03000513 $ 2.00

Soit, pour $\varepsilon>0$ et un entier p, $V(p, \varepsilon)$ l'ensemble des fonctions de Σ^+ telles que $\exists a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p \in \Omega$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_p \in]0, +\infty[$ tels que :

$$\left\| u - \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{K(a_i)^{1/4}} \delta(a_i, \lambda_i) \right\|_\Omega \leqq \varepsilon \quad \text{avec} \quad S = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{K(a_i)^{1/2}},$$

$$\lambda_i \geqq \varepsilon^{-1}, \quad \forall i, \qquad \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + (d(a_i, a_j))^2 \lambda_i \lambda_j \geqq \varepsilon^{-1}, \quad \forall i \neq j$$

$$\text{et, si } \partial\Omega \neq \varnothing, \quad d(a_i, \partial\Omega)\lambda_i \geqq \varepsilon^{-1}.$$

On a :

Proposition 1. — *Soit u_n une suite de Σ^+ telle que $I'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ (faiblement) et $(I(u_n))_n$ est une suite bornée. Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe un entier p et une suite $(\varepsilon_n)_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ tels que :*

$$u_n \in V(p, \varepsilon_n), \qquad \forall n. \quad \blacksquare$$

Le premier travail relatif à cette proposition est dû à Sacks-Uhlenbeck [3]. La démonstration de la proposition 1 est contenue dans les méthodes de [4] à [8].

Notre méthode pour trouver des points critiques de I consiste pour le problème de la condition de Palais-Smale à suivre les lignes du gradient de I au lieu de considérer les suites $(u_n)_n$ telles que $I'(u_n) \to 0$ et $I(u_n) \leqq c$. Cette méthode a été introduite précédemment dans [9] pour la conjecture de Weinstein. On verra apparaître des phénomènes différents de ceux de la proposition 1 le long des lignes du gradient de I.

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on convient de prolonger u par 0 à l'extérieur de Ω. On a :

Proposition 2. — *Soit p un entier; alors, pour $\varepsilon>0$ assez petit et pour u dans $V(p, \varepsilon)$ le problème :*

Minimiser $\left\| u - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta(a_i, \lambda_i) \right\|_{S^3}$ *avec* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $(a_1, \ldots, a_p) \in \Omega^p$ *et* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in]0, +\infty[^p$ *a une solution unique.* $\blacksquare$

On notera $a_i(u)$, $\lambda_i(u)$, $\alpha_i(u)$ la solution du problème de minimisation.

II. $\Omega \neq S^3$. — Notons d'abord que, quitte à remplacer Ω par sa projection stéréographique sur $\mathbb{R}^3$, le problème (1)-(2) est équivalent à la recherche de u tel que :

$$-\Delta u = u^5 \text{ dans } \Omega, \quad u>0 \text{ dans } \Omega \quad \text{avec } u=0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où maintenant Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$. On note maintenant :

$$\|u\| = \left(\int |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}, \qquad \Sigma = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| = 1 \},$$

$$\Sigma^+ = \{ u \in \Sigma \mid u \geqq 0 \}, \qquad I(u) = \left(\int_\Omega u^6 dx \right)^{-1/2}$$

et :

$$\delta(a, \lambda)(x) = c \left\{ \frac{\lambda}{1+\lambda^2 |x-a|^2} \right\}^{1/2} \quad \text{avec } c \text{ tel que } \|\delta(a, \lambda)\| = 1.$$

Pour $x \in \Omega$ on définit la fonction $y \to H(x, y)$ sur Ω par :

$$\Delta_y H(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$H(x, y) = |x-y|^{-1} \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Pour $a=(a_1, \ldots, a_p)\in\Omega^p$ on définit la matrice $\mathrm{M}(a)\in\mathbb{R}^{p^2}$ par :

$$\mathrm{M}_{ij}(a)=\mathrm{H}(a_i, a_j)-|a_i-a_j|^{-1} \quad \text{si } i\neq j, \qquad \mathrm{M}_{ii}(a)=\mathrm{H}(a_i, a_i).$$

On convient que $\mathrm{M}_{ij}(a)=-\infty$ si $i\neq j$ et $a_i=a_j$. On notera $\rho(a)$ la plus petite valeur propre de la matrice symétrique $\mathrm{M}(a)$ en convenant que $\rho(a)=-\infty$ si, pour un couple (i, j) avec $i\neq j$, on a $a_i=a_j$.

On suit maintenant une ligne de gradient de I dans Σ^+ :

$$\frac{du}{ds}=-\mathrm{I}'(u); \qquad u(0)\in\Sigma^+.$$

On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon(s)\to 0$ quand $s\to+\infty$ tels que $u(s)\in\mathrm{V}(p, \varepsilon(s))$ pour s assez grand.

On note (*voir* proposition 2) $\lambda_i(s)=\lambda_i(u(s))$; $a_i(s)=a_i(u(s))$; $\rho(s)=\rho(a(s))$.

On appelle points critiques à l'infini ces orbites du flot qui restent dans un des $\mathrm{V}(p, \varepsilon(s))$ pour une certaine fonction $\varepsilon(s)$ $[\varepsilon(s)\to 0$ quand $s\to+\infty]$. On a le :

THÉORÈME 1. — *On suppose que* $\forall i\in[1, p]$, $\overline{\lim}\, d(a_i(s), \partial\Omega)>0$. *On a alors* : $\overline{\lim\limits_{s\to+\infty}}\, \rho(s)\geqq 0$. *Si* $\overline{\lim\limits_{s\to+\infty}}\, \rho(s)>0$, *alors* $\rho(s)$ *et* $a(s)$ *convergent quand* $s\to+\infty$ *et* :

$$\lambda_i(s)\sim \mathrm{C}_i s; \ \mathrm{C}_i>0.$$

Le théorème suivant affine le théorème 1 en donnant au voisinage des points critiques à l'infini la dynamique du flot :

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\delta>0$, *il existe un* $\varepsilon_0>0$ *et un* $s_0>0$ *tels que, si* $u(s)\in\mathrm{V}(p, \varepsilon_0)$ *pour* $0\leqq s\leqq s_0$ *et* $d(a_i(s), \partial\Omega)\geqq\delta$ *pour* $0\leqq s\leqq s_0$, *alors pour tout* $\bar{s}\geqq s_0$ *tel que* $u(s)$ *reste dans* $\mathrm{V}(p, \varepsilon_0)$ *pour* $s\in[0, \bar{s}]$, *on a* :

$$\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i\sqrt{\lambda_i}}(\bar{s})=\frac{\bar{\alpha}\,\mathrm{I}(u)^{1/2}}{2\lambda_i\alpha_i}\left[\mathrm{I}(u)^2\frac{\alpha_i^5\,\mathrm{H}(a_i, a_i)}{\sqrt{\lambda_i}}-\mathrm{I}(u)^2\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\frac{\alpha_i^4\alpha_j+\alpha_j^5}{|a_i-a_j|}-\alpha_i^5\,\mathrm{H}(a_i, a_j)\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{\sqrt{\lambda_j}|a_i-a_j|}\right]+\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}o\left(\sum\frac{1}{\lambda_k}\right),$$

$$|\dot{a}_i|(\bar{s})\leqq\frac{\mathrm{C}}{\lambda_i}\left(\sum\frac{1}{\lambda_k}\right), \quad \bar{\alpha}, \mathrm{C}\ \textit{et}\ \bar{\mathrm{C}}\ \textit{sont des constantes.}$$

$$\dot{\alpha}_i(\bar{s})=-\bar{\mathrm{C}}\,\mathrm{I}(u)^{1/2}\alpha_i\left(1-\alpha_i^4\,\mathrm{I}(u)^2\int_{\mathbb{R}^3}\delta^6\right)+o\left(\sum\frac{1}{\lambda_k}\right),$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2\,dx\right)(\bar{s})\leqq\mathrm{K}\sum\lambda_i^{-1} \qquad \textit{où} \quad v=u-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\,\delta(a_i, \lambda_i). \quad \blacksquare$$

Des formules précédentes, on déduit la variété instable des points critiques à l'infini donnés par le théorème 1 en faisant varier les α_i autour de $\alpha_i=1/\sqrt{p}$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2=1$. On obtient ainsi tout « l'ensemble invariant du flot à l'infini » (*voir* [10]).

Remarque 1. — On peut aussi montrer avec les méthodes ci-dessus et Schoen [11] que, sur une variété riemannienne M compacte de dimension 3, la condition de Palais-Smale est satisfaite le long des lignes d'un pseudo-gradient de I si K est une constante, $\Omega=\mathrm{M}$ et R est la courbure scalaire de M.

III. $\Omega=S^3$. Problème de Kazdan-Warner. — On considère le problème sur S^3 :

$$(1)\qquad \begin{cases} -8\,\Delta u+\mathrm{R}\,u=\mathrm{K}(x)\,u^5, \\ u>0. \end{cases}$$

On cherche des conditions suffisantes sur K pour que (1) admette une solution.

On suppose ici que K est une fonction >0, C^2, ayant des points critiques $y_1, \ldots, y_m$ non dégénérés et tels que $\Delta \mathrm{K}(y_i)\neq 0$, $\forall i=1, \ldots, m$. On a alors le :

Théorème 3. — *Soit k_i l'indice de Morse de K en y_i. Si* $\sum_{i/\Delta \mathrm{K}(y_i)<0}(-1)^{k_i}\neq -1$, *alors* (1) *admet une solution.*

Remarque 2. — Un contre-exemple dû à Kazdan-Warner [1] généralisé par Bourguignon et Ezin [2] montre que si $\sum_{i/\Delta \mathrm{K}(y_i)<0}(-1)^{k_i}=-1$ alors (1) peut ne pas avoir de solution.

Remarque 3. — Pour des variétés différentes de (S^3, c), *voir* [10].

Idée de la démonstration. — (*a*) Par rapport au paragraphe II, on montre d'abord que l'on a : $\dot{a}_i(s)=\bar{C}_i$ grad $\mathrm{K}(a_i)+o(1/\lambda_i)$. De sorte que les fonctions $\delta(a_i, \lambda_i)$ se concentrent aux points critiques de K.

(*b*) On montre que sur $V(p, \varepsilon_0)$, $p\geqq 2$, $\varepsilon_0>0$, I satisfait (P.S.) le long des lignes de flot. Il ne reste donc plus qu'à analyser la situation pour $p=1$ et $a_1(s)\to y_i$, y_i étant un des points critiques de K.

(*c*) On montre que si $\Delta \mathrm{K}(y_i)>0$, alors (P.S.) est satisfait le long des lignes de flot sur $V(1, \varepsilon_0)\cap\{u\mid |a_1(u)-y_i|<\varepsilon_1\}$, ε_1 assez petit.

(*d*) On est donc ramené à étudier la situation en y_i tel que $\Delta \mathrm{K}(y_i)<0$. On ne peut plus se contenter alors de suivre les lignes de flot de $-$grad I. Il faut construire un pseudo-gradient au voisinage de l'infini qui permet de voir qu'il y a un point critique à l'infini d'indice de Morse $-k_i+3$ (*pour* I) où k_i est l'indice de Morse en y_i *pour* K.

(*e*) On conclut par un argument de caractéristique d'Euler-Poincaré.

Remise le 11 février 1985.

Références bibliographiques

[1] J. Kazdan et F. Warner, *J. Diff. Geom.*, 10, 1975, p. 113-134.
[2] J.-P. Bourguignon et J. P. Ezin, Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations (à paraître).
[3] J. Sacks et K. Uhlenbeck, *Ann. Math.*, 113, 1981, p. 1-24.
[4] P.-L. Lions, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 645-648; The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case, *Riv. Iberoamericana* (à paraître).
[5] M. Struwe, A global existence result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities (à paraître).
[6] Y. T. Siu et S. T. Yau, *Invent. Math.*, 59, 1980, p. 189-204.
[7] C. H. Taubes, Path connected Yang-Mills moduli spaces, *J. Diff. Geom.* (à paraître).
[8] H. Brézis et J.-M. Coron, *Comptes rendus*, 298, série I, 1984, p. 389-392; Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles, *Archive Rat. Mech. Anal.* (à paraître).
[9] A. Bahri, Pseudo-orbites des formes de contact (à paraître); *Comptes rendus*, 299, série I, 1984, p. 757-760.
[10] A. Bahri et J.-M. Coron (à paraître).
[11] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature (à paraître).

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.