Involutions en groupes de type dégénéré

Gregory Cherlin
April 28, 2005
Lyon

Types

$S^{\circ} = U * T$

$U > 1$, simple $\Longrightarrow$ algébrique

K^*, simple, $Pr(T) > 2 \Longrightarrow$ algébrique

$U = T = 1$: dégénéré

Théorème: Dégénéré $\Longrightarrow I(G) = \emptyset$

Problème: Elimination de l'hypothèse "K^*" en type pair.

Conséquence:
$x^4 = 1$ génériquement $\Longrightarrow$
$x^4 = 1$ globalement.

Rappel:
T tore décent, maximal $\Longrightarrow$
$C^\circ(T)$ génériquement disjoint de ses conjugués et presque autonormalisant.

Les 3 cas

$$(*) \qquad H < G \text{ connexe } \implies I(H) = \emptyset$$

1. $I(G) \leq Z(G)$

2. G simple, $C = i^G$.
   Génériquement sur $C \times C$:

   (a) $I(d(ij)) = \emptyset$; ou bien

   (b) $I(d(ij)) = \langle k \rangle$.

Rappel sur 1, 2(a):

1. $Z(G) = \langle i \rangle$;

$\zeta : G \to \langle i \rangle$, $\langle \zeta(g) \rangle = d(g) \cap \langle i \rangle$.

$\zeta(ig) = i\zeta(g)$.

deg(G) $\geq$ deg($\langle i \rangle$) $= 2$, contradiction.

2 (a) G simple, $d(i \cdot i^g)$ génériquement sans involution.

$d(i \cdot i^g)$ sans involution, donc $i^g = i^x$, $x \in d(i \cdot i^g)$.

$\zeta : G \to C(i)$ (génériquement):

$$\zeta(g) \in C(i) \cap g d(i \cdot i^g)$$

$\zeta(cg) = c\zeta(g)$

deg(G) $\geq$ deg($C(i)$) > 1, contradiction.

Plus précisément:

$$d(a) \leq \widehat{d}(a), \text{ abélien;}$$

$$d(a)_2 = \widehat{d}(a)_2$$

$\widehat{d}$ *définissable*

La 3^e voie

G simple,
les sous-groupes connexes sont sans involution
$d(i \cdot i^g)$ contient une involution, génériquement.

$H_i = N^\circ(\dots N^\circ(C^\circ(i))\dots)$.

$H_a = H_i$ si $i \in I(d(a))$.

- presque autonormalisant

- $a \in N(H_a) \setminus H_a$

- $H_a^g = H_{a^g}$

Lemme

1. $c \in aH_a \implies H_a = H_c$; *donc:*

2. $aH_a \cap bH_b \neq \emptyset \implies aH_a = bH_b$.

Lemme *S est élémentaire abélien.*

Corollaire *Si $I(d(i \cdot i^g)) = \{k\}$, $i \not\sim i^g$ via $C(k)$*

—Puisque $i^g \sim ik$ via $C(k)$, et $i \not\sim ik$ via $C(k)$.

G simple, génériquement $I(d(i \cdot i^g)) \neq \emptyset$ (continuation)

$C = i^G$.

$i, j \in C$ générique, indépendant sur S.

$I(d(i \cdot j)) = \{k\}$.

$S_{i,j} = \{(s,t) \in S \times S : (i,k) \sim (s,t)\}$

$S_{i,j} = S_{j,i}$.

Donc $(i,k) \sim (j,k)$, et $i \sim j$ via $C(k)$, contradiction.

Rappel

Théorème Gen (Borovik, Luminy)
Soit V un 4-groupe opérant définissablement sur un groupe H connexe de type dégénéré. Alors

$$H = \langle C_H(v) : v \in V^\times \rangle$$

Et si on avait aussi les Carters génériques?