El diablo de los números

Sección a cargo de

Fernando Chamizo

¿Y quiénes son... Edinah K. Gnang **y** Doron Zeilberger**?**
E.K. Gnang es un estudiante de doctorado en Rutgers University que acaba de presentar su tesis en temas de combinatoria y computación. Si trabajas en combinatoria o teoría de números ya conoces al profesor Zeilberger, también de Rutgers University, y si no, seguramente también lo conozcas por sus controvertidas opiniones y sus espectaculares charlas (una de mis favoritas es Erdös Memorial Lecture 2010 *http://vimeo.com/11931546). Si piensas que es excesivo, revisa* Rate my Professors *y toma nota.*

Generalizando y aplicando el asombroso algoritmo de Michael Hirschhorn para probar congruencias de tipo Ramanujan*

por

Edinah Gnang y Doron Zeilberger

1. Introducción

Sea $p(n)$ el número de particiones enteras[1] de n. Euler probó la siguiente igualdad, por todos conocida:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}.$$

*Con el título *Generalizing and Implementing Michael Hirschhorn's amazing Algorithm for proving Ramanujan-Type Conjectures*, este artículo fue publicado en *The Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger*, así como en `arxiv.org`, acompañado de los paquetes `HIRSCHHORN` y `BOYLAN` para Maple. *La Gaceta* agradece a los autores el permiso para publicarlo, y a Serafín Ruiz Cabello su traducción.

[1] *N. del E.* Éste es el número de formas de expresar n como suma de enteros positivos sin importar el orden.

Srinivasa Ramanujan descubrió (mirando una tabla de $p(n)$ para $1 \leq n \leq 200$ calculada por la *máquina analítica*, la cabeza del mayor Percy Alexander MacMahon) las tres famosas congruencias

$$\begin{aligned} p(5m+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7m+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11m+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Las dos primeras son muy sencillas, y las pruebas que G.H. Hardy escogió presentar en su clásico "Ramanujan" ([3], pp. 87-88), ligeramente simplificadas, proceden como sigue.

G.H. Hardy

Ramanujan's congruences

6.4. Very little is known about the arithmetical properties of $p(n)$; we do not know, for example, when $p(n)$ is odd or even. Ramanujan was the first, and up to now the only, mathematician to discover any such properties; and his theorems were discovered, in the first instance, by observation. MacMahon had calculated, for other purposes to which I shall refer later, a table of $p(n)$ for the first 200 values of n, and Ramanujan observed that the table indicated certain simple congruence properties of $p(n)$. In particular, the numbers of the partitions of numbers $5m+4$, $7m+5$, and $11m+6$ are divisible by 5, 7 and 11 respectively: i.e.

(6.4.1) $p(5m+4) \equiv 0 \pmod{5}$,

(6.4.2) $p(7m+5) \equiv 0 \pmod{7}$,

(6.4.3) $p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$.

Thus $p(4) = 5$ and $p(5) = 7$.

Un párrafo de su libro

En primer lugar, recordemos las identidades de Euler y Jacobi (totalmente elementales y *shaloshables*[2]):

$$E(q) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}$$

y

$$E(q)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{(n^2+n)/2}.$$

También tendremos en cuenta la conclusión obvia (pero *extremadamente útil* [p. ej. ¡el algoritmo AKS!]) que se desprende del teorema del binomio y del pequeño teorema de Fermat, de que para cada primo ℓ, y para cada polinomio o serie formal de potencias, $f(q)$, $f(q)^\ell \equiv f(q^\ell) \pmod{\ell}$. En particular $E(q)^\ell \equiv E(q^\ell) \pmod{\ell}$.

1.1. $p(5n+4)$ es divisible por 5

Puesto que $\{(n^2+n)/2 \mod 5\ ;\ 0 \leq n \leq 4\ ,\ 2n+1 \not\equiv 0 \pmod{5}\} = \{0,1\}$, se cumple:

$$E(q)^3 \equiv J_0 + J_1 \pmod{5},$$

[2] *N. del E.* El profesor Shalosh B. Ekhad es un matemático no humano experto en demostraciones simbólicas. `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/ekhad.html`

donde J_i está compuesto por los términos en los que la potencia de q es congruente con i módulo 5. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = E(q)^{-1} = \frac{(E(q)^3)^3}{E(q)^{10}} = \frac{(E(q)^3)^3}{(E(q)^5)^2} \equiv \frac{(J_0+J_1)^3}{E(q^5)^2} \pmod 5.$$

Como $(J_0+J_1)^3 = J_0^3 + 3J_0^2J_1 + 3J_0J_1^2 + J_1^3$, cuyos términos son respectivamente las potencias de q que son $0,1,2,3$ módulo 5, ninguna de las potencias de q que sean congruentes con 4 módulo 5 aparecerán, y por tanto el coeficiente q^{5n+4} es siempre 0 módulo 5. □

1.2. $p(7n+5)$ es divisible por 7

Puesto que $\{(n^2+n)/2 \mod 7\ ;\ 0 \le n \le 6\ ,\ 2n+1 \not\equiv 0 \pmod 7\} = \{0,1,3\}$, se cumple:

$$E(q)^3 \equiv J_0 + J_1 + J_3 \pmod 7,$$

donde J_i está compuesto por los términos en los que la potencia de q es congruente con i módulo 7. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = E(q)^{-1} = \frac{(E(q)^3)^2}{E(q)^7} \equiv \frac{(J_0+J_1+J_3)^2}{E(q^7)} \pmod 7,$$

Como $(J_0+J_1+J_3)^2 = J_0^2 + J_1^2 + J_3^2 + 2J_0J_1 + 2J_0J_3 + 2J_1J_3$, cuyos términos son respectivamente las potencias de q que son $0,2,6,1,3,4$ módulo 7, ninguna de las potencias de q que sean congruentes con 5 módulo 7 aparecerán, y por tanto el coeficiente q^{7n+5} es siempre 0 módulo 7. □

Al final de la página 88 del ya mencionado clásico de Hardy “Ramanujan” [3], menciona:

“*No parece existir una prueba igualmente sencilla de que* $p(11n+6)$ *es divisible por* 11”.

Con los años surgieron muchas pruebas, pero **ninguna** tan **simple** y **elemental** y, lo más importante, **¡bella!**, como la hallada recientemente por Michael Hirschhorn [4].

2. La prueba de Michael Hirschhorn de que $p(11n+6)$ es divisible por 11

La prueba de [4] va como sigue. Comienza como antes.

Puesto que $\{(n^2+n)/2 \mod 11\ ;\ 0 \le n \le 10\ ,\ 2n+1 \not\equiv 0 \pmod{11}\} = \{0,1,3,6,10\}$, se cumple:

$$E(q)^3 \equiv J_0 + J_1 + J_3 + J_6 + J_{10} \pmod{11},$$

donde J_i está compuesto por los términos en los que la potencia de q es congruente con i módulo 11. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = E(q)^{-1} = \frac{(E(q)^3)^7}{E(q)^{22}} \equiv \frac{(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10})^7}{E(q^{11})^2} \pmod{11}.$$

¡Vaya!, ahora la parte compuesta por las potencias que son congruentes con 6 módulo 11 en el polinomio $(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10})^7 \pmod{11}$ **no** es idénticamente cero módulo 11, sino un determinado polinomio de grado 7 en $\{J_0, J_1, J_3, J_6, J_{10}\}$ (sobre $GF(11)$), llamémoslo POL.

Se puede ver de inmediato, introduciendo una variable auxiliar t, que

$$POL(J_0, J_1, J_3, J_6, J_{10}) \\ = \mathrm{Coeff}_{t^6}\left(J_0 + J_1 t + J_3 t^3 + J_6 t^6 + J_{10} t^{10}\right)^7 \pmod{11} \pmod{t^{11}-1},$$

que **no** es idénticamente cero.

Pero, como $\{(3n^2+n)/2 \mod 11 \; ; \; 0 \le n \le 10\} = \{0,1,2,4,5,7\}$, tenemos que

$$E(q) = E_0 + E_1 + E_2 + E_4 + E_5 + E_7,$$

donde E_i lo forman aquellos términos en los cuáles la potencia de q es congruente con i módulo 11, y

$$(E(q)^3)^4 = E(q)^{12} = E(q)^{11}E(q) \equiv E(q^{11})E(q) \pmod{11},$$

luego

$$(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10})^4 \equiv E(q^{11})(E_0+E_1+E_2+E_4+E_5+E_7) \pmod{11}.$$

Dearrollando el término de la izquierda y seleccionando las potencias complementarias $\pmod{11}$ ($\{3,6,8,9,10\}$), obtenemos cinco polinomios de grado 4, llamémoslos $Q_3, Q_6, Q_8, Q_9, Q_{10}$, que sabemos que son 0 módulo 11 (una vez los J_i son reemplazados por la serie de potencias formal a la que representan). Para $m \in \{3,6,8,9,10\}$, se cumple

$$Q_m(J_0, J_1, J_3, J_6, J_{10}) \\ = \mathrm{Coeff}_{t^m}\left(J_0 + J_1 t + J_3 t^3 + J_6 t^6 + J_{10} t^{10}\right)^4 \pmod{11} \pmod{t^{11}-1}.$$

Ahora le pedimos a nuestro amado ordenador que halle para nosotros cinco polinomios de grado 3, (en las variables $\{J_0, J_1, J_3, J_6, J_{10}\}$), llamémoslos R_3, R_6, R_8, R_9, R_{10}, tales que

$$POL \equiv R_3Q_3 + R_6Q_6 + R_8Q_8 + R_9Q_9 + R_{10}Q_{10} \pmod{11}.$$

Como el ordenador tuvo éxito (¡*a priori* no había garantía alguna!), ¡hemos acabado! *Quod Erat Demonstratum.* □

Consúltese el archivo de salida
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/oHIRSCHHORN1v`,
que contiene las tres pruebas anteriores, (¡y otras cuatro más!), que fue generado mediante la ejecución del paquete para Maple `HIRSCHHORN` ¡en tres segundos!

3. Más congruencias de tipo Ramanujan

Consideremos, más en general

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-a}(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^a}.$$

(Nótese que $p_{-1}(n) = p(n)$ y $p_{24}(n) = \tau(n-1)$, donde $\tau(n)$ es la función τ de Ramanujan).

Se conocen muchas conjeturas de tipo Ramanujan para $p_{-a}(n)$. Matthew Boylan [1] (Teorema 1.3, donde nuestro $p_{-a}(n)$ se denota por $p_a(n)$, y la entrada $r = 27,\ l = 31$ es errónea) las ha hallado todas para a impar ≤ 47.

Las primeras son (aquí restringiremos nuestra búsqueda a los primos $\geq 2a+1$).

$$p_{-1}(5n+4) \equiv 0 \pmod 5, \quad p_{-1}(7n+5) \equiv 0 \pmod 7, \quad p_{-1}(11n+6) \equiv 0 \pmod{11},$$

(las de Ramanujan)

$$p_{-2}(5n+2) \equiv 0 \pmod 5, \quad p_{-2}(5n+3) \equiv 0 \pmod 5, \quad p_{-2}(5n+4) \equiv 0 \pmod 5,$$

$$p_{-3}(11n+7) \equiv 0 \pmod{11}, \quad p_{-3}(17n+15) \equiv 0 \pmod{17},$$
$$p_{-5}(11n+8) \equiv 0 \pmod{11}, \quad p_{-5}(23n+5) \equiv 0 \pmod{23},$$
$$p_{-7}(19n+9) \equiv 0 \pmod{19},$$
$$p_{-9}(19n+17) \equiv 0 \pmod{19}, \quad p_{-9}(23n+9) \equiv 0 \pmod{23},$$
$$p_{-21}(47n+42) \equiv 0 \pmod{47}.$$

Gracias al sorprendente algoritmo de Silviu Radu [7], cada una de tales congruencias (e incluso algunas más generales, véase [7]), es determinable de forma efectiva (¡y clara!). Teníamos la esperanza de que Radu colgase una implementación pública de su método. Pero como tal implementación parecía no existir, escribimos a Radu, que amablemente [6] nos mostró cómo deducir estas congruencias (salvo las dos últimas, que estamos seguros que pueden obtenerse con la misma facilidad) a partir de su potente algoritmo, especificando el valor de N_0 para el cual una comprobación para $0 \leq n \leq N_0$ implicaba el resultado para *todo* $0 \leq n < \infty$.

El algoritmo de Radu es tan sorprendente como **poco** elemental. Utiliza la 'sofisticada' e intimidante teoría de formas modulares que aun siendo analítica, no es lo suficientemente válida según nuestra filosofía finitista y discreta de las matemáticas. Por tanto todavía es interesante (¡al menos para nosotros!) encontrar pruebas elementales de tipo Hirschhorn. Además, por el *principio de casualidad* nuestra extensión e implementación del método de Hirschhorn podría dar lugar a nuevos objetos que **ni siquiera** las formas modulares serían capaces de lograr.

4. Extendiendo el método de Hirschhorn

Supongamos que, para algún primo ℓ y algún entero r ($0 \leq r < \ell$), queremos probar una congruencia de tipo

$$p_{-a}(\ell n + r) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

Comenzamos hallando el menor entero α tal que $b := (\alpha\ell - a)/3$ es un entero. Nótese que

$$E(q)^{-a} = \frac{(E(q)^3)^b}{E(q)^{\alpha\ell}} \equiv \frac{(E(q)^3)^b}{E(q^\ell)^\alpha} \pmod{\ell}.$$

Ahora definimos el conjunto $\{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$:

$$\mathrm{Jset}(\ell) := \{(n^2+n)/2 \mod \ell\ ;\ 0 \leq n \leq \ell - 1\ ,\ 2n+1 \not\equiv 0 \pmod{\ell}\},$$

y escribimos

$$E(q)^3 \equiv \sum_{i \in \mathrm{Jset}(\ell)} J_i \pmod{\ell},$$

donde J_i está compuesto por los términos cuya potencia de q sea congruente con i módulo ℓ. A continuación definimos el polinomio POL en el conjunto de variables $\{J_i\,;\, i \in \mathrm{Jset}(\ell)\}$,

$$POL(\{J_i\,;\, i \in \mathrm{Jset}(\ell)\}) = \mathrm{Coeff}_{t^r}\left[\left(\sum_{i \in \mathrm{Jset}(\ell)} J_i t^i\right)^b\right] \pmod{\ell} \pmod{t^\ell - 1}.$$

A continuación, si somos **afortunados**, el polinomio $POL(\{J_i\})$ será idénticamente cero (modulo ℓ). En ese caso tendremos una prueba de *tipo Ramanujan*, gracias a que las potencias de q que son congruentes con r módulo ℓ en $(E(q)^3)^b$, y por tanto también en $E(q)^{-a}$, ¡no aparecerán!

Si no lo somos, tendremos que recurrir a mejorar *Hirschhorn.*

De forma análoga a $\mathrm{Jset}(p)$, definimos

$$\mathrm{Eset}(\ell) := \{(3n^2+n)/2 \mod \ell\ ;\ 0 \leq n \leq \ell - 1\},$$

el conjunto de residuos módulo ℓ que aparecen como potencias en la expresión dispersa que el Teorema del Número Pentagonal de Euler otorga a $E(q)$.

Sea ahora c el recíproco de 3 módulo ℓ, y sea $d = (3c-1)/\ell$. Entonces

$$(E(q)^3)^c = E(q)E(q)^{3c-1} = E(q)E(q)^{d\ell} \equiv E(q)(E(q^\ell))^d \pmod{\ell}.$$

Seguidamente definiremos un conjunto de polinomios, para cada $0 \leq m < \ell$ que **no** esté en $\mathrm{Eset}(\ell)$ (es decir, para los miembros del complementario de $\mathrm{Eset}(\ell)$):

$$Q_m := \mathrm{Coeff}_{t^m}\left[\left(\sum_{i \in \mathrm{Jset}(\ell)} J_i t^i\right)^c\right] \pmod{\ell} \pmod{t^\ell - 1}, \quad m \notin \mathrm{Eset}(\ell).$$

Sabemos que todos los $Q_m(\{J_i\})$ $[m \notin \mathrm{Eset}(\ell)]$ son 0 módulo ℓ (una vez los $J_i's$ son reemplazados por la serie formal de potencias, en q, a la que representan).

Finalmente, decidimos que o bien el polinomio POL (que vive en el anillo de polinomios sobre el cuerpo de Galois $GF(\ell)$ en los J_i), o bien una de sus potencias, pertenece al **ideal** generado por los polinomios Q_m. Esto se puede hacer directamente (para ℓ pequeño), empleando *coeficientes indeterminados*, y para ℓ grande, mediante el *algoritmo de Buchberger* (también conocido como *bases de Gröbner*).

4.1. La gran decepción

Ingenuamente esperábamos que el método de Hirschhorn, tal y como acabamos de explicar y generalizar, sirviera para probar todas las demás congruencias. Por desgracia, fracasó intentando demostrar la congruencia $p_{-3}(17n+15) \equiv 0 \pmod{17}$.

Resulta que para la especialización

$$J_0 = 1\,,\ J_1 = 1\,,\ J_3 = 2\,,\ J_4 = 10\,,\ J_6 = 9\,,\ J_{10} = 11\,,\ J_{11} = 15\,,\ J_{15} = 12,$$

todos los Q_m son cero (módulo 17) **pero** $POL \equiv 6 \pmod{17} \neq 0$. Así que, desde luego, POL no está en el ideal generado por los Q_m en

$$GF(17)[J_0, J_1, J_3, J_4, J_6, J_{10}, J_{11}, J_{15}].$$

4.2. Pero hay esperanza

Las identidades de Euler y Jacobi no son sino las primeras en una sucesión *infinita* de identidades, las *identidades de Macdonald* [5], que ganaron fama en la histórica Lección Gibbs de Freeman Dyson [2] en 1972.

De hecho, la siguiente identidad en la lista de identidades de Macdonald, descubierta previamente por Winquist [8], ya había sido empleada para lograr "una prueba de tipo Ramanujan" para $p(11m + 6) \equiv 0 \pmod{11}$. Creemos firmemente que *toda congruencia de tipo Ramanujan* que pueda ser probada mediante el bello algoritmo de Radu [7] (que hace uso de la teoría de formas modulares), ha de tener o bien una prueba "de tipo Ramanujan", o bien una "de tipo Hirschhorn", mediante el uso de una de las identidades de Macdonald, que a pesar de su "sofisticado" pedigrí (teoría de Lie) son **meramente elementales**.

4.3. El paquete HIRSCHHORN para Maple

Todo (y más) está implementado en el paquete Maple `HIRSCHHORN` disponible en `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/HIRSCHHORN`.

La página web
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarmim/mamarimhtml/mh.html`
contiene varios artículos generados por ordenador mediante el uso de dicho paquete.

4.4. Gröbner para casos especiales

Para $\ell > 11$, tanto POL como $\{Q_m\}$ se hacen demasiado grandes para Maple. Pero realizando las suficientes especializaciones (mód ℓ) para un subconjunto de las variables $J_i's$ puede obtenerse una prueba **completamente rigurosa** de la pertenencia al ideal. Véanse `TerseMikeProof, TerseMikeProofG, TerseMikeProofGviaSC`, que hacen uso de, respectivamente, coeficientes indeterminados, bases de Gröbner, y bases de Gröbner para casos especiales. Como señalamos anteriormente, no siempre hay garantía de éxito.

5. Direcciones futuras

Creemos que nuestra extensión del método de Hirschhorn podría generalizarse a q-series más generales, incluyendo las que no son funciones modulares.

5.1. PRIMER bis: El paquete BOYLAN para Maple

El paquete Maple `BOYLAN` disponible en
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/BOYLAN`
reproduce y amplía el Teorema 1.3 de [Bo], no obstante de forma empírica. Véase
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/oBOYLAN1`
para una reproducción del original (en menos de dos segundos), y
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/oBOYLAN2`
para muchas más congruencias (hasta $a = 399$).

5.2. SEGUNDO bis: Infinitas congruencias (*¡Todas con prueba de tipo Ramanujan!*)

Ahora que, gracias a Radu [7], cualquier congruencia *específica* de la forma $p_{-a}(\ell n + r) \equiv 0 \pmod{\ell}$, es *meramente rutina* (o, más cortésmente, *verificable algorítmicamente*, o *shaloshable*), el siguiente paso sería conseguir “infinitas congruencias”.

Existe, desde luego, una forma *barata* de logar “infinitas” de esas congruencias, concretamente cuando $a = \ell - 3$, ya que

$$\frac{1}{E(q)^{\ell-3}} \equiv \frac{E(q)^3}{E(q^\ell)} \pmod{\ell},$$

y como el conjunto $\mathrm{Jset}(\ell)$ contiene al menos la mitad de todas las clases residuales, se obtienen muchos r (todos los miembros del complementario de $\mathrm{Jset}(\ell)$).

Pero, de forma algo menos trivial, podemos generalizar la prueba de Ramanujan de $p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}$, a la siguiente proposición

Proposición: Sea ℓ un primo congruente con 7 o bien con 11 módulo 12 y sea $r := (\ell - 6)/24 \pmod{\ell}$, entonces

$$p_{-(\ell-6)}(n\ell + r) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

Esbozo de una prueba de tipo Ramanujan. Es fácil comprobar que $r := (\ell - 6)/24 \pmod{\ell} \notin \mathrm{Jset}(\ell) + \mathrm{Jset}(\ell) \pmod{\ell}$, gracias al siguiente lema (cuya prueba se encuentra en `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/MikeHirschhornsProofOfLemma.pdf`).

Lema Elemental: Sea ℓ un primo cuyo resto sea 7 o 11 al dividirlo por 12. Entonces para cualesquiera $0 \le n_1, n_2 < \ell$ tales que

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{n_2(n_2+1)}{2} \equiv r \pmod{\ell},$$

debe cumplirse o bien $n_1 = (\ell - 1)/2$ o bien $n_2 = (\ell - 1)/2$.

Del lema sigue que

$$\frac{1}{E(q)^{\ell-6}} = \frac{(E(q)^3)^2}{E(q^\ell)} \equiv \frac{(\sum_{i \in \mathrm{Jset}(\ell)} J_i)^2}{E(q^\ell)} \pmod{\ell}$$

y las potencias de q que son congruentes con r módulo ℓ no aparecen. □

¡Sería interesante obtener una familia infinita demostrable mediante pruebas de tipo Hirschhorn!

Agradecimientos: Damos las gracias a George Andrews, Bruce Berndt, Lev Borisov, Shaun Cooper, Frank Garvan, y Michael Hirschhorn, por sus útiles consejos, y a Silviu Radu por su autorización para publicar [6].

REFERENCIAS

[1] M. BOYLAN. Exceptional congruences for powers of the partition function. *Acta Arith.*, 111(2):187–203, 2004.

[2] F. J. DYSON. Missed opportunities. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78:635–652, 1972.

[3] G. H. HARDY. *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1940.

[4] M. D. HIRSCHHORN. A short and simple proof of Ramanujan's mod 11 partition congruence. Preprint available from `http://web.maths.unsw.edu.au/~mikeh/webpapers/paper184.pdf`, 2013.

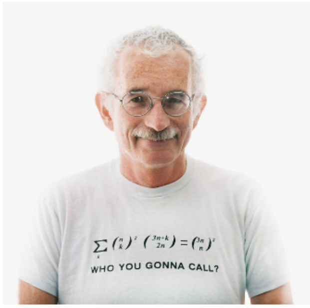
[5] I. G. MACDONALD. Affine root systems and Dedekind's η-function. *Invent. Math.*, 15:91–143, 1972.

[6] S. RADU. Email message to Doron Zeilberger. `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/SilviuRaduMessageJune2013.pdf`.

[7] S. RADU. An algorithmic approach to Ramanujan's congruences. *Ramanujan J.*, 20(2):215–251, 2009.

[8] L. WINQUIST. An elementary proof of $p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$. *J. Combinatorial Theory*, 6:56–59, 1969.

E.K. Gnang



D. Zeilberger

Los autores

Edinah K. Gnang, Computer Science Department, Rutgers University (New Brunswick), Piscataway, NJ 08854, USA.
Correo electrónico: gnang@cs.rutgers.edu
Página web: http://paul.rutgers.edu/~gnang/

Doron Zeilberger, Mathematics Department, Rutgers University (New Brunswick), Piscataway, NJ 08854, USA.
Correo electrónico: zeilberg@math.rutgers.edu
Página web: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/