6.

De compositione numerorum primorum formae $4\lambda+1$ ex duobus quadratis.

(Scrips. *Henr. Jo. Smith*, Oxoniensis.)

Sit

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3} + \dots + \cfrac{1}{q_n}}$$

fractio continua, cujus numerator, qui determinanti

$$\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & q_n \end{vmatrix}$$

aequalis est, per hujusmodi formulam $(q_1 q_2 q_3 \dots q_{n-1} q_n)$ exprimatur. Erit ergo

$$[q_1 q_2 \dots q_{i-1} q_i] = [q_i q_{i-1} \dots q_2 q_1] \quad \text{et}$$
$$[q_1 \dots q_n] = [q_1 q_2 \dots q_i].[q_{i+1} \dots q_n] + [q_1 q_2 \dots q_{i-1}].[q_{i+2} \dots q_n];$$

quae aequationes pendent ab illa forma determinantali, ambae autem *L. Eulero* debentur.

Itaque, si quantitatum q *par* sumatur numerus, ipsae que ita serie symmetrica disponantur, ut binae inter se aequales fiant, elucet, quantitatem $[q_1 q_2 \dots q_i q_i \dots q_2 q_1]$ summam fore duorum quadratorum inter se primorum; fit enim

$$[q_1 q_2 \dots q_i q_i \dots q_2 q_1] = [q_1 q_2 \dots q_i]^2 + [q_1 q_2 \dots q_{i-1}]^2 \dots$$

Contra in numero quotientium *impari*, erit

$$[q_1 \dots q_{i-1} q_i q_{i-1} \dots q_2 q_1] = (q_1 \dots q_{i-1}).\{[q_1 \dots q_i] + [q_1 \dots q_{i-2}]\},$$

unde colligis, numerum $[q_1 \dots q_i \dots q_1]$ primum esse non posse, nec duplicem numeri primi; si quidem casus excipis, in quibus, aut i unitati aequatur, aut i binario, q_1 unitati.

Sit p numerus integer datus; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ series numerorum, qui ad p primi sunt, ipsius que p dimidio minores. Formentur fractiones continuae $\frac{p}{\mu_1}, \frac{p}{\mu_2}, \ldots \frac{p}{\mu_s}$; quae omnes ita terminentur, ut is quotiens qui in extremo loco ponatur, unitatem superet. Hinc patet, quanta fuerit numerorum $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ multitudo, tantum fore numerum determinantium $[q_1 \ldots q_n]$, qui dato numero p aequales erunt, neque praeter illos ullum dare ejusdem formae determinantem, cujus et primus et extremus quotiens unitate major sit, qui que numero p aequalis esse possit.

Jam vero, quum duo determinantes $[q_1 \ldots q_n]$ et $[q_n \ldots q_1]$ aequales sint, quum que ipsum q_n unitate majus sit, apparet $[q_n \ldots q_1]$ ex una aliqua fractionum $\frac{p}{\mu}$ oriri. Unde sequitur, data quavis fractione $\frac{p}{\mu}$, inveniri posse aliam in eadem serie, quae quotientes eosdem, ordine inverso, repraesentet.

Sit p primus, formae $4\lambda+1$; ut numerus determinantium ipsi p aequalium par existat. Quum ipse p unus e determinantium serie fiat, unus certo alius inveniri poterit in quo quotientium ordo invertendo non mutatur. Cum sit ergo

$$p = [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2 q_1]$$

erit denique

$$p = [q_1 q_2 \ldots q_i]^2 + [q_1 q_2 \ldots q_{i-1}]^2.$$

Quam theorematis Fermatiani demonstrationem maxime elementarem esse patet, quum pendeat a conversione fractionum vulgarium in fractiones continuas.

Singulos autem formae $1+x^2$ divisores ex duobus quadratis conflari, eodem modo demonstrare in promptu est. Sit enim

$$\mu\nu = 1 + x^2 \ldots$$

apparet fore

$$\begin{aligned} \mu &= [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2 q_1], \\ \nu &= [q_2 q_3 \ldots q_i q_i \ldots q_3 q_2], \\ x &= [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2]. \end{aligned}$$

Oxford, Maio 1854.