Apuntes de Álgebra Lineal

Mariano Echeverría

Introducción al Curso

El álgebra lineal se caracteriza por estudiar estructuras matemáticas en las que es posible tomar "sumas" entre distintos elementos de cierto conjunto y "multiplicar" tales elementos por números reales o complejos. Tales conjuntos se conocerán como espacios vectoriales y sus elementos serán llamados vectores.

El primer uso que se le dará durante el curso a las técnicas del álgebra lineal va a ser para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Tales problemas tienen gran importancia para aplicaciones como hallar las corrientes en circuitos eléctricos o hacer códigos en informática. Al ir resolviendo este tipo de problemas, una de los propiedades más ventajosas del álgebra lineal irá apareciendo: la existencia de algoritmos bien definidos para resolver una gran cantidad de problemas. El algoritmo más importante del curso aparecerá desde el inicio con el fin de resolver tales sistemas de ecuaciones lineales. Tal algoritmo es el método de Gauss-Jordan y consistirá en asociarle a cada sistema de ecuaciones lineales un cierto objeto llamado matriz para el cual el algoritmo producirá una matriz reducida que dará inmediatamente la información sobre la solución del sistema.

Esto motivará estudiar las matrices como fines en sí mismos y realizar operaciones algebraicas (como suma y producto de matrices) entre ellas. Una de las características más importantes del producto matricial que se definirá es que es *no conmutativo,* es decir, si A,B son matrices y AB representa el producto de matrices, no siempre se tiene que $AB = BA$. Esta propiedad es de importancia fundamental no solo para el álgebra lineal. Por ejemplo, en la *mecánica cuántica* se le asocia a cada cantidad física que se puede medir (a veces se le llama *observable*) una matriz y la no conmutatividad del producto de matrices se interpreta como la imposibilidad de medir simultáneamente ciertas cantidades físicas (ahí está el origen del famoso *principio de incertidumbre de Heisenberg*).

Otra propiedad de las matrices es que hay una matriz llamada la *matriz identidad* que es el análogo del número 1, es decir, si I representa la matriz identidad entonces se tiene que $AI = IA = A$ al igual que si a es un número real se tiene que $a1 = 1a = a$. Gran parte del curso se dedicará a encontrar las condiciones para las cuales una matriz es *invertible*, es decir, cuándo existe una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (el análogo para los números reales es el número $\frac{1}{a}$ ya que $a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$). Tal estudio conduce al concepto de determinante, que es un número que se le asigna a las matrices y que cumple que si es distinto de cero entonces la matriz posee una inversa.

La segunda parte del curso se dedicará a estudiar el concepto de vector y espacio vectorial como estructura abstracta. Este concepto generalizará el uso del concepto de vector que se da en los primeros cursos de física general como una cantidad física con magnitud y dirección. Se verá que muchas propiedades que poseen los vectores estudiados en tales cursos de física pueden generalizarse a los vectores abstractos que se definirán, por ejemplo, todavía podrá hablarse de la norma (tamaño) de un vector y el ángulo entre dos vectores. Con respecto a los espacios vectoriales el concepto de transformación lineal va a ser de suma importancia ya que serán las funciones que preservan la estructura algebraica de un espacio vectorial. La relación que posee esta parte del curso con la primera parte será que a una transformación lineal se le puede asociar una matriz por lo que se podrá utilizar toda la teoría de matrices para estudiar las transformaciones lineales.

En este sentido, el concepto de valor y vector propio serán los últimos ingredientes de la teoría de transformaciones lineales que se estudiará en el curso; tales objetos darán condiciones de cuándo se le puede asociar a una transformación lineal una matriz diagonal. A manera de aplicación de esto último se estudiarán las secciones cónicas (elipses, parábolas, hipérbolas) y se verán como encontrar la forma canónica de tales curvas.

Índice

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales y su Interpretación Geométrica

La primera parte del curso consistirá en resolver **sistemas de ecuaciones lineales**. Estos sistemas son un grupo de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \tag{1}$$

o bien

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Utilizando una notación más general, otros sistemas de ecuaciones lineales podrían ser

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_4 = 10 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 = 6 \end{cases} \tag{4}$$

De los ejemplos anteriores se pueden concluir ciertas características de los sistemas de ecuaciones lineales:

1. **Las variables (incógnitas) del problema siempre aparecen "elevadas" a la potencia 1 y nunca elevadas a otra potencia**: por ejemplo, una ecuación como $x^2+y=0$ no es aceptable como ecuación lineal porque la variable x aparece elevada al cuadrado.

2. **No aparecen "términos mixtos" en las ecuaciones:** por ejemplo, una ecuación como $x + 3xy - 5y = 0$ no va a ser considerada una ecuación lineal porque si bien todas las variables están elevadas a la potencia 1 se tiene un término mixto $3xy$ que hace que la ecuación no se considere lineal.

3. **No hay relación entre el número de ecuaciones del sistema y el número de incógnitas:** Por ejemplo, en (1) y (2) se tienen sistemas de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como ecuaciones (dos en el primer caso y tres en el segundo caso) mientras que en (3) hay cuatro incógnitas y tres ecuaciones (es decir, más incógnitas que ecuaciones) y en (4) hay dos incógnitas y tres ecuaciones (es decir, más ecuaciones que incógnitas).

4. **El sistema de ecuaciones puede ser consistente o inconsistente:** Es decir, puede ser que el sistema posea solución o no la posea. Por ejemplo, pronto se verá que la solución de (1) es $x = 2, y = 3$ mientras que (4) no tiene solución pues sustituyendo $x_1 = 6$ en las otras dos ecuaciones se tiene $\begin{cases} 6 + 5x_2 = 0 \\ 6 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ lo cual da $x_2 = \frac{-6}{5}$ y $x_2 = 2$ y esto es imposible.

1.1.1. Resolviendo Sistemas de Ecuaciones Lineales

Como es bien sabido, hay varias formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales, los dos métodos más populares siendo los siguientes:

1. **Método de sustitución:** Este se puede ver fácilmente en (1). De la primera ecuación de ese sistema se tiene que $x+1=y$ y se puede sustituir este valor de y en la segunda ecuación del sistema para obtener $3x+x+1=9$ o bien $4x=8$ de lo cual se obtiene $x=2$. Ahora se sustituye este valor en $x+1=y$ para obtener $2+1=y$ o $y=3$ que fue lo que se dijo anteriormente.

2. **Método de combinaciones lineales:** Como este será el método empleado a lo largo del curso se describirá con mayor detalle. Se resolverá el mismo sistema de ecuaciones lineal 1

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+y=9 \end{cases} \tag{5}$$

En vez de usar el método de sustitución se multiplica la segunda ecuación por $\frac{1}{3}$ y se tiene el sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+\frac{1}{3}y=3 \end{cases} \tag{6}$$

Ahora se va a restar a la ecuación 2 la ecuación 1 para obtener

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ \frac{4}{3}y=4 \end{cases} \tag{7}$$

Claramente el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ y=3 \end{cases} \tag{8}$$

Finalmente, se suma la ecuación 2 a la ecuación 1 para obtener que

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \tag{9}$$

que fue lo que se halló anteriormente.
Del método anterior se concluye que **las siguientes operaciones son válidas:**

- **multiplicar una ecuación del sistema lineal por un número real distinto de cero** (pues si se multiplicara por 0 quedaría $0=0$ lo cual no es de mucha utilidad)

- **sumar (restar) ecuaciones distintas del mismo sistema lineal**

Es importante notar también que **en cada paso se debe mantener el mismo número de ecuaciones lineales con los que se empezó**, esto para no perder información del sistema. Así, por ejemplo, cuando se tenía el sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ y=3 \end{cases} \tag{10}$$

y se sumó la segunda ecuación a la primera se obtiene la ecuación $x=2$ pero siempre es importante mantener la ecuación $y=3$ en el siguiente paso que fue justamente lo que se hizo en (9).

1.1.2. Interpretación Geométrica de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1.2.1. Sistemas con dos incógnitas: Ahora que se conoce un poco mejor que es un sistema de ecuaciones lineales, se procederá a su interpretación geométrica, quizás uno de los aspectos más importantes de la teoría. Retomando nuestro sistema original (1)

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \tag{11}$$

se puede escribir en una forma más familiar como

$$\begin{cases} y = f(x) = x + 1 \\ y = f(x) = 9 - 3x \end{cases} \tag{12}$$

que como se sabe corresponde a funciones lineales que tienen por gráfica una línea recta cuando se dibujan en el plano cartesiano (esto justifica el nombre "sistema de ecuaciones lineales"). Si se grafican estas dos funciones en el plano se tiene la siguiente figura

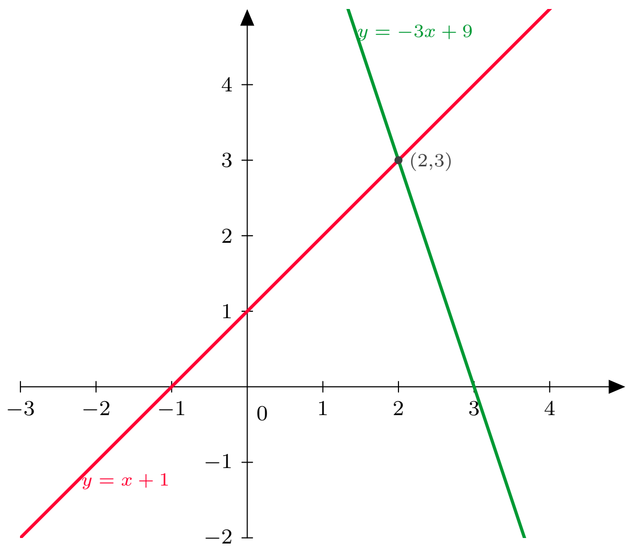


Figura 1: Intersección de dos rectas en un único punto

Como se ve de la figura las dos rectas se intersecan en el punto $x = 2, y = 3$ que corresponde a la solución que se había obtenido para el sistema de ecuaciones lineales, lo cual significa que **resolver un sistema de dos incógnitas es equivalente a encontrar los puntos de intersección de las rectas correspondientes que representan tales ecuaciones lineales.**

Ahora bien, como se sabe de geometría elemental, dos o más rectas en el plano pueden:

1. intersecarse en ningún punto (por ejemplo si todas son paralelas entre sí) en cuyo caso no hay solución
2. intersecarse todas en mismo punto en cuyo caso hay una única solución

3. intersecarse en puntos distintos (como se muestra en la siguiente figura) en cuyo caso no hay solución pues el punto de intersección debe ser el mismo

4. intersecarse en infinitos puntos en el caso que representen la misma recta (como por ejemplo $x + y = 2$ y $2x + 2y = 4$) en cuyo caso habrían infinitas soluciones.

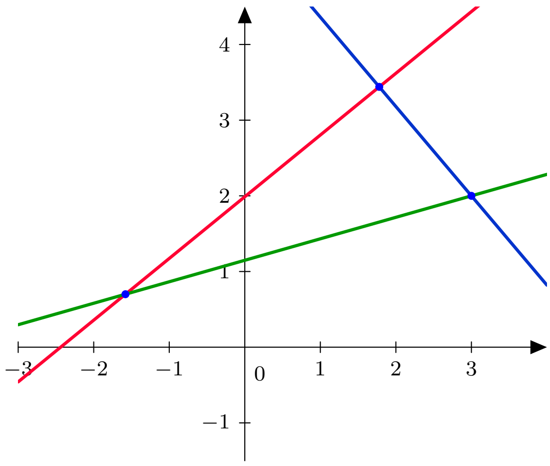


Figura 2: Intersección de tres rectas en puntos distintos

De lo anterior y la interpretación geométrica puede concluirse que **el número de soluciones para un sistema de dos incógnitas con cualquier número de ecuaciones son cero soluciones, una solución o infintas soluciones.**

1.1.2.2. Sistemas con tres incógnitas: Como en el caso anterior se puede tomar empezar analizando el sistema (2)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases} \tag{13}$$

En este caso las ecuaciones lineales deben dibujarse en el espacio (es decir, utilizar tres ejes x, y, z) y en vez de ser rectas son planos. También, el sistema de ecuaciones tiene por solución $x = 1, y = -2, z = -2$ y al representar las ecuaciones en el espacio se ven como la figura siguiente

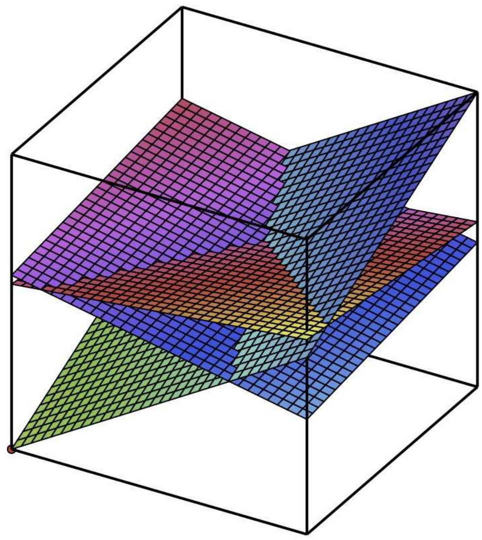


Figura 3: Intersección de tres planos en un punto

Al igual que en el caso anterior, se tiene que los planos se intersecan en un único punto que corresponde a la solución del sistema de ecuaciones lineales por lo que vuelve a concluirse que **resolver un sistema de tres incógnitas es equivalente a encontrar los puntos de intersección de los planos correspondientes que representan tales ecuaciones lineales.** Nuevamente, de geometría se sabe que dos o más planos pueden:

1. no intersecarse en ningún punto (si son paralelos) en cuyo caso no hay solución
2. intersecarse en un único punto en cuyo caso solo hay una solución
3. intersecarse en líneas rectas (como muestra la figura siguiente) en cuyo caso podrían haber infinitas soluciones si todos los planos se intersecan en la misma recta, una solución si las distintas rectas se intersecan en un punto o ninguna solución si las distintas rectas se intersecan en puntos distintos.

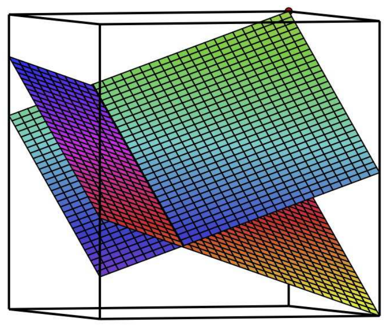


Figura 4: Intersección de dos planos en una recta

Así al igual que antes se concluye que **el número de soluciones para un sistema de tres**

incógnitas con cualquier número de ecuaciones son cero soluciones, una solución o infintas soluciones.

1.1.2.3. Caso con n incógnitas:

Lamentablemente ya no es posible representar visualmente el sistema de ecuaciones lineales pero las conclusiones halladas para el caso de dos y tres incógnitas se extienden fácilmente a varias incógnitas por lo que se mencionarán sin intentar justificarlas geométricamente (más adelante en el curso se justificarán algebraicamente tales aseveraciones).

- **Resolver un sistema de n incógnitas es equivalente a encontrar los puntos de intersección de los "hiperplanos" correspondientes que representan tales ecuaciones lineales.**
- **El número de soluciones para un sistema de n incógnitas con cualquier número de ecuaciones son cero soluciones, una solución o infintas soluciones.**

1.2. Representación Matricial de un Sistema $n \times m$

De (3) un sistema general de ecuaciones lineales se ve como

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_4 = 10 \end{cases} \tag{14}$$

De aquí es fácil generalizar la representación de un sistema de ecuaciones lineales y diremos que un **sistema de ecuaciones lineales $n \times m$ de n ecuaciones y m incógnitas** consiste en cualquier arreglo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & b_n \end{cases} \tag{15}$$

donde los a_{ij} representan los coeficientes (números reales) que multiplican a cada incógnita: el valor de i indica la fila en la que se encuentra a_{ij} y el valor de j indica frente a cual variable aparece. Los b_i por otro lado representan los números reales que no van multiplicados por ninguna incógnita. Así, comparando con (14) tendríamos que

$$\begin{array}{lllll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 & b_1 = 7 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = -7 & a_{24} = 1 & b_2 = 8 \\ a_{31} = 1 & a_{32} = 0 & a_{33} = 0 & a_{34} = 5 & b_3 = 10 \end{array} \tag{16}$$

Una solución del sistema $n \times m$ (15) es cualquier m-tupla $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ de números reales que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Se denotará por S el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales. Es decir,

$$S = \{x = (\ x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad | \quad x \quad \text{es} \quad \text{solución} \quad \text{de} \quad (15)\} \tag{17}$$

Por ejemplo, como se verá más adelante el sistema (14) posee infinitas soluciones. En particular $(10, -\frac{3}{2}, -\frac{19}{14}, 0)$ es una solución como puede verificarse sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones.

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & b_n \end{cases} \tag{18}$$

diremos que la **representación matricial del sistema de coeficientes** $A = (a_{ij})$ es el siguiente arreglo cuadrado de números

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Por otro lado, se dirá que la **representación matricial aumentada** del sistema de ecuaciones lineales $(A \mid b)$ es el siguiente arreglo de números

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right) \tag{20}$$

Se denotará el sistema de ecuaciones (18) como $Ax = b$ donde A es la matriz (19), $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, es decir, $Ax = b$ significa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

Una vez se haya estudiado el producto matricial, se entenderá mejor el uso particular de esta notación.

1.3. Operaciones Elementales

Ahora que se ha introducido la matriz de un sistema de ecuaciones lineales, la idea será trabajar sobre la matriz aumentada en vez del sistema de ecuaciones como una forma de realizar los cálculos en forma más algorítmica. Se aprovechará lo mencionado al inicio sobre el método de combinaciones lineales puesto que de ahí se pueden extraer las operaciones básicas que forman el algoritmo de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Como se recordará las operaciones que se extrajeron de ese método fueron:

- multiplicar una ecuación del sistema lineal por un número real distinto de cero
- sumar (restar) ecuaciones distintas del mismo sistema lineal

De aquí se pueden definir las tres operaciones elementales que sirven para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

1. **Multiplicación de una fila (ecuación) por un número real distinto de cero:** Por ejemplo, si tenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_4 = 10 \end{cases} \tag{22}$$

que ahora representamos por la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \tag{23}$$

si se busca multiplicar la fila 2 por 3 se denotará como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -21 & 3 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \tag{24}$$

2. **Multiplicación de una fila por un número real distinto de cero y sumarla a otra fila:** Por ejemplo, si seguimos con nuestra matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \tag{25}$$

y deseamos multiplicar la fila 2 por 3 y luego sumarla a la fila 3 se denotará según

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -21 & 8 & 34 \end{array}\right) \tag{26}$$

3. **Intercambio de dos filas:** Esta operación consiste en intercambiar de lugar dos filas en la matriz. Por ejemplo, si se desea intercambiar la fila 2 y 3 de nuestra matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \tag{27}$$

se denotará la operación según

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2,f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \end{array}\right) \tag{28}$$

La idea para resolver un sistema de ecuaciones lineales será utilizar únicamente una combinación de estas tres operaciones elementales con el fin de llegar a la matriz escalonada reducida, que se introduce a continuación.

1.4. Matriz Escalonada y Matriz Escalonada Reducida

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** si poseen las mismas soluciones o bien, si al representar los sistemas de ecuaciones por sus matrices aumentadas respectivas, es posible realizar operaciones elementales que lleven de una matriz a la otra.

Por ejemplo, como se ha visto

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -21 & 8 & 34 \end{array}\right) \tag{29}$$

son matrices equivalentes pues la segunda se obtenía a partir de la primera a través de la operación elemental $3f_2+f_3$..La siguiente definición indica las características que una matriz debe satisfacer para ser llamada matriz escalonada.

Definición 1. Una matriz es **escalonada** si es nula (es decir, todas sus entradas son 0) o si cumple las siguientes condiciones

- Si una fila posee algún coeficiente distinto de 0, el primero de estos coeficientes debe ser un 1
- El primer 1 de cualquier fila debe estar a la derecha del primer 1 de las filas anteriores (es decir, las que están por encima de la fila)
- Las filas que son nulas aparecen al final de la matriz

A continuación se dan ejemplos de matrices y se dirán cuales son escalonadas y cuales no:

- $$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esta matriz no es escalonada puesto que el primer coeficiente no nulo de la primera fila es un 2 en vez de un 1. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

es una matriz escalonada equivalente a la anterior pues se obtuvo a partir de la operación elemental $\frac{1}{2}f_1$.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esta matriz tampoco es una matriz escalonada puesto que el primer uno de la tercera fila se encuentra antes del primer uno de la segunda fila. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

es una matriz escalonada equivalente a la anterior que se obtuvo a través de la operación de intercambiar filas f_2, f_3

➬ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

no es una matriz escalonada puesto que la fila nula debería aparecer al final. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

es una matriz escalonada equivalente a la anterior que se obtiene nuevamente a partir del intercambio de filas f_2, f_3. Una clase particular de matriz escalonada es la matriz escalonada reducida.[1]

> Una matriz es **escalonada reducida** si es escalonada y si por encima del primer uno de cada fila solo hay ceros.

A continuación se dan unos ejemplos de cuales matrices son escalonadas reducidas y cuales no:

➬ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

esta matriz es escalonada como se vio antes pero no escalonada reducida pues sobre el 1 de la segunda fila se encuentra $\frac{1}{2}$ en vez de 0 y sobre el 1 de la tercera fila se encuentra un 1 en la primera fila. Sin embargo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

es una matriz escalonada reducida equivalente a la primera que se logra a través de las operaciones elementales $\frac{-1}{2} f_2 + f_1$ y $-f_3 + f_1$.

➬ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{3} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

esta matriz es escalonada como se mencionó antes pero no es escalonada reducida pues por encima del primer 1 de la tercera fila se encuentra un 3 en la primera fila. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

es una matriz escalonada reducida equivalente a la anterior que se obtiene a través de la operación elemental $-3f_3 + f_1$. Nótese que no hay que quitar el 5 puesto que está encima del segundo 1 de la segunda fila y no sobre el primer 1 de la segunda fila.

➬ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

esta matriz que ya se encuentra en su forma escalonada reducida.

[1] Una de las ventajas de trabajar con la matriz escalonada reducida es que esta siempre es única mientras que pueden haber varias matrices que sean solo reducidas

1.5. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan consiste en un algoritmo para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales en una forma que la solución del sistema sea evidente. El algoritmo puede describirse en los siguientes pasos:

Método de Gauss-Jordan:

1. Dado un sistema de ecuaciones lineales **encontrar la matriz aumentada** $(A \mid b)$ que representa al sistema
2. Mediante la aplicación de operaciones elementales **reducir la matriz aumentada** a su forma escalonada reducida
3. Una vez que se tiene su forma escalonada reducida se procede a **reescribir la matriz escalonada reducida como un sistema de ecuaciones lineales** para el cual se despejan las incógnitas

Se va a ilustrar el método de Gauss-Jordan con tres casos: un sistema con una solución, un sistema con ninguna solución y un sistema con infinitas soluciones.

1.5.1. Sistema con solución única

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \tag{35}$$

Siguiendo el algoritmo, primero representamos el sistema con su matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \tag{36}$$

El siguiente paso es realizar operaciones elementales hasta tener la forma escalonada reducida de la matriz aumentada. Las operaciones realizadas son las siguientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_1+f_3} \tag{37}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{6f_2+f_3} \tag{38}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_3+f_1} \tag{39}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \tag{40}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \tag{41}$$

(41) es la forma escalonada reducida que se buscaba según indica el algoritmo. Finalmente, se escribe (41) como un sistema de ecuaciones lineales y se obtiene

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \tag{42}$$

y de esta representación es que el conjunto solución S es

$$S = \{(2, -1, 3)\} \tag{43}$$

1.5.2. Sistema con ninguna solución

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases} \tag{44}$$

Siguiendo nuevamente el algoritmo se considera su matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \tag{45}$$

y se encuentra la forma escalonada reducida de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_3} \tag{46}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_2+f_3} \tag{47}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{7f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-6f_3+f_2} \tag{48}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{49}$$

$$\tag{50}$$

Ahora se representa nuevamente la matriz como un sistema de ecuaciones lineales para obtener

$$\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ y + 2z + 3w = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \tag{51}$$

pero como la última ecuación del sistema es claramente falsa es imposible que este posea solución por lo que se denota el conjunto solución como

$$S = \emptyset \tag{52}$$

1.5.3. Sistema con Infinitas Soluciones

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases} \tag{53}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \tag{54}$$

Nuevamente se procede a encontrar la forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-2f_1+f_2} \\ \xrightarrow{-2f_1+f_3} \\ \xrightarrow{-f_1+f_4} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2, f_4} \tag{55}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-f_2+f_1} \\ \xrightarrow{f_2+f_3} \\ \xrightarrow{-3f_2+f_4} \end{array} \tag{56}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_3+f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{5}f_3} \tag{57}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{58}$$

Esta última matriz representa la matriz escalonada reducida por lo que cambiándola por un sistema de ecuaciones se tiene que

$$\begin{cases} x + 2w = -5 \\ y - 3w = 2 \\ z - 2w = 3 \end{cases} \tag{59}$$

Como se puede observar hay 4 incógnitas y 3 ecuaciones por lo que es imposible encontrar una única solución al sistema. Sin embargo, una forma más útil de escribir el sistema anterior es como

$$\begin{cases} x = -5 - 2w \\ y = 2 + 3w \\ z = 3 + 2w \end{cases} \tag{60}$$

De aquí se puede observar que una vez que se le asigne a w un valor **arbitrario** $w = t$ para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $x = -5 - 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 2t$. Por ejemplo, cuando $w = t = 0$ se tiene que $x = -5, y = 2, z = 3$. Así, este sistema tiene infinitas soluciones y el conjunto solución se denota como

$$S = \{(-5 - 2t, 2 + 3t, 3 + 2t, t) : t \in \mathbb{R}\} \tag{61}$$

1.6. Rango de una Matriz y Tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 2. El **rango** de una matriz A es el número de filas ***no nulas*** de la **matriz escalonada reducida equivalente a** A. El **rango** de una matriz aumentada $(A \mid b)$ es el número de filas ***no nulas*** de la **matriz aumentada escalonada reducida equivalente** a $(A \mid b)$.

Como se verá de los siguientes ejemplos, hay una relación estrecha entre el rango de una matriz y las soluciones del sistema de ecuaciones lineales correspondientes. De entrada hay que notar que **siempre se cumple que** $\text{Rng}(A) \leq \text{Rng}(A \mid b)$ puesto que la matriz aumentada es la matriz de coeficientes más la columna b por lo que el número de filas no nulas no puede disminuir.

1.6.1. Rng(A) < Rng(A | b) :

En (45) se estudió la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \tag{62}$$

y se vio que la forma escalonada reducida correspondendiente era

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{63}$$

De aquí se observa fácilmente Rng(A) = 2 mientras que Rng(A | b) = 3. Esta matriz correspondía a un sistema sin soluciones por lo que podemos concluir que **para cualquier matriz tal que** $\text{Rng}(A) < \text{Rng}(A \mid b)$ **el sistema de ecuaciones lineales correspondientes no tiene solución.**

1.6.2. $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = m$:

Aquí m representa el número de columnas de la matriz A, es decir, el número de variables del sistema de ecuaciones lineales. Un caso como este se estudió en (36)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \tag{64}$$

que tenía por forma escalonada reducida la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \tag{65}$$

de aquí se observa que $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = m = 3$ y este sistema correspondía al caso en que había una única solución por lo que puede concluirse que **para cualquier matriz tal que** $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = m$ **el sistema de ecuaciones lineales correspondiente tiene una única solución.**

1.6.3. $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) < m$:

En (54) se estudió un caso como este

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \tag{66}$$

que tenía por matriz reducida

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{67}$$

Aquí se observa fácilmente que $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = 3$ mientras que $m = 4$. Como se vio en ese ejemplo el sistema poseía infinitas soluciones y habían $m - \text{Rng(A)} = 4 - 3 = 1$ variables cuyo valor no fue posible determinar en forma única (en el ejemplo la variable que quedó libre fue w). De aquí se concluye que **para cualquier matriz tal que** $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) < m$ **el sistema de ecuaciones correspondiente posee infinitas soluciones y se caracteriza por** $m - \text{Rng(A)}$ **variables libres.**

Se puede resumir lo hallado anteriormente en el siguiente teorema.

Teorema del Rango: Para cualquier sistema de ecuaciones lineales con m incógnitas siempre se tiene que $\text{Rng}(A) \leq \text{Rng}(A \mid b)$. Las soluciones de tal sistema se relacionan con el rango de su matriz correspondiente según:

- $\text{Rng}(A) < \text{Rng}(A \mid b)$: En este caso el sistema **no posee soluciones**
- $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = m$: En este caso el sistema **posee una única solución**.
- $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) < m$: En este caso el sistema **posee infinitas soluciones caracterizadas por** $m - \text{Rng(A)}$ **variables libres.**

Ejemplo 3. A manera de aplicación del teorema del rango, considere un sistema cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{68}$$

En este caso la matriz A es 2×5 y es claro que (dado que ya se encuentra en su forma escalonada reducida) $\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \,|b) = 2$. En este caso, como $m = 5$, el teorema del rango indica que el sistema posee infinitas soluciones con $m - \text{Rng}(A\,|b) = 5 - 2 = 3$ parámetros. Para identificar los parámetros, se reescribe la matriz anterior como un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{69}$$

de aquí es claro que dos parámetros podrían ser x_4, x_5 ya que se tendría $x_1 = -x_4$, $x_3 = -x_5$. Sin embargo, según el teorema del rango faltaría hallar un parámetro más; lo que pasa es el que como se observa del sistema de ecuaciones la variable x_2 no aparece, lo cual significa que su valor no está restringido, es decir, x_2 es el parámetro adicional. Este ejemplo indica que no necesariamente todos los parámetros van a aparecer en el sistema de ecuaciones. Finalmente, para escribir las soluciones se escribe

$$x_2 = t_1 \quad x_4 = t_2 \quad x_5 = t_3 \tag{70}$$

por lo que el conjunto solución sería

$$S = \{(-t_2, t_1, -t_3, t_2, t_3) : \ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\} \tag{71}$$

1.7. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales:

1.7.1. Sistemas homogéneos:

Estos sistemas se caracterizan por ser de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & \mathbf{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & \mathbf{0} \end{cases} \tag{72}$$

es decir, **todas las ecuaciones lineales están igualdas a cero**. En nuestra notación matricial se escribiría como $Ax = 0$. Como el lado derecho siempre es cero, es usual tomar como matriz aumentada simplemente la matriz de coeficientes. Por ejemplo, para hacer Gauss Jordan sobre el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = \mathbf{0} \\ y - 5z = \mathbf{0} \\ 3x - z = \mathbf{0} \end{cases} \tag{73}$$

se usaría como matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

es decir, en un sistema homogéneo no hay problema en ignorar la columna de constantes pues siempre va a ser un montón de ceros. La propiedad más importante de estos sistemas es la siguiente:

Teorema 4. ***Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo posee siempre una única solución o infinitas soluciones****, es decir, siempre es un sistema consistente de ecuaciones lineales.*

Demostración. Es claro que siempre existe al menos una solución puesto que puede tomarse $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ como solución trivial (basta hacer la sustitución). Por el teorema anterior, sabemos que hay tres casos para un sistema de ecuaciones lineales: ninguna solución (que es imposible que ocurra este caso para el sistema homogéneo por lo anterior), una única solución (que tendría que ser la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ pues todo sistema homogéneo posee tal solución) o infinitas soluciones con lo cual se ha demostrado el teorema. □

1.7.2. Sistemas no homogéneos:

En este caso el sistema de ecuaciones lineales es el más general posible, es decir,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & b_n \end{cases} \tag{75}$$

donde al menos uno de los b_i es distinto de cero, (pues si todos fueran igual a cero sería el caso de un sistema homogéneo).

Por ser el sistema más general, puede poseer ninguna solución, una única solución o infinitas soluciones como se fue mencionado en el Teorema del Rango.

1.7.3. Sistemas con uno o más parámetros:

Estos sistemas de ecuaciones lineales se caracterizan por el hecho de que **uno o más de los coeficientes que aparecen en el sistema de ecuaciones son desconocidos por lo que la soluciones del sistema van a depender en los valores que tomen tales coeficientes.** Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - y + (b-2)z = a - 2 \\ -2x - ay - 2z = -a^2 + 3a - 4 \end{cases} \tag{76}$$

las incógnitas siguen siendo x, y, z pero ahora hay ciertos valores de los coeficientes que se desconocen y que dependen de los parámetros a y b. La única complicación que tienen este tipo de problema con respecto a lo anteriores es que al no saber el valor de a y b a veces hay que trabajar con casos para realizar una operación elemental sobre la matriz; por ejemplo, podría hacerse la operación elemental $\frac{1}{a}f_2$ pero esto solo es posible si a no es 0, por lo que habría que trabajar el caso $a = 0$ y $a \neq 0$ para poder seguir reduciendo la matriz. A manera de ilustración, se resolverá el siguiente problema

Problema 5. *(primer examen parcial reposición 2007, 2ndo ciclo)*: **estudie el sistema** (58) **según los dos parámetros. Es decir, determine para qué valor o valores de a y b el sistema tiene solución única o tiene infinitas soluciones o no tiene soluciones.**

Para resolver esa pregunta se procede como siempre a construir la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & b-2 & a-2 \\ -2 & -a & -2 & -a^2+3a-4 \end{array}\right) \tag{77}$$

y se realizan las operaciones elementales hasta encontrar la matriz escalonada reducida del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & b-2 & a-2 \\ -2 & -a & -2 & -a^2+3a-4 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_1+f_3]{2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & -a+2 & 0 & -a^2+3a-2 \end{array}\right) \xrightarrow[(a-2)f_2+f_3]{-f_2+f_1} \tag{78}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-b & 1-a \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & (a-2)b & a-2 \end{array}\right) \tag{79}$$

Una vez que se ha llegado a este punto es necesario hacer casos sobre los valores de a y b para poder seguir reduciendo la matriz:

- **Caso** $a \neq 2, b \neq 0$: Si suponemos esto podemos realizar la siguiente operación elemental:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-b & 1-a \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & (a-2)b & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{(a-2)b}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-b & 1-a \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{array}\right) \xrightarrow[-bf_3+f_2]{(b-1)f_3+f_1} \tag{80}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a-\frac{1}{b} \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/b \end{array}\right) \tag{81}$$

y es claro que hay una solución única para un valor particular de a y b .

- **Caso** $a \neq 2, b = 0$: Reemplazando en (79) se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right) \tag{82}$$

y como $a \neq 2$ por el Teorema del Rango no hay solución al sistema.

- **Caso** $a = 2$**:** Reemplazando en (79) se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-b & -1 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{83}$$

por el Teorema del Rango se tienen infinitas soluciones para cada valor de b dadas por el sistema

$$\begin{cases} x = -1 + (b-1)z \\ y = 2 - bz \end{cases} \tag{84}$$

donde $z = t$ es el parámetro, es decir, las soluciones son de la forma $(-1+(b-1)t, 2-bt, t)$.

Podemos resumir toda la información obtenida en la siguiente tabla

	Conjunto solución S
Valores de los parámetros	
$a \neq 2, b \neq 0$	$S = \{(2-a-\frac{1}{b}, a-1, \frac{1}{b})\}$
$a \neq 2 \parallel b = 0$	$S = \emptyset$
$a = 2,\ b \in \mathbb{R}$	$S = \{(-1+(b-1)t, 2-bt, t) : t \in \mathbb{R}\}$

2. Teoría Elemental de Matrices

En el capítulo anterior se estudiaron las matrices como una forma de representar un sistema de ecuaciones lineales. De ahora en adelante se estudiarán las matrices como objetos por su propia cuenta, sin tomar en cuenta si representan o no a un sistema de ecuaciones lineales. De esta forma, una matriz $n \times m$ es cualquier arreglo rectangular de n filas y m columnas con nm números reales

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{85}$$

Se representará por $M(n, m, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes reales.

2.1. Operaciones entre Matrices

2.1.1. Suma y resta de matrices:

Si $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$ son dos matrices $n \times m$ se define la suma de matrices $A + B$ como la matriz $n \times m$ cuyos coeficientes corresponden a la suma de los coeficientes respectivos de A y B. Así, si

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = (b_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \tag{86}$$

entonces

$$C = A + B = (c_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} \tag{87}$$

es decir, para sumar matrices se suma "entrada por entrada". El método es análogo para la resta de matrices $A - B$.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & \mathbf{11} & 2 \\ 12 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & \mathbf{7} & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{88}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 & 7 \\ 3 & 16 & \mathbf{18} & 9 \\ 20 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -4 & 7 \\ 3 & 0 & \mathbf{4} & -5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{89}$$

2.1.2. Multiplicación de una matriz por un número real

Si $A = (a_{ij})_{n\times m}$ es una matriz $n \times m$ y t es un número real cualquiera, se define la matriz tA como la matriz $n \times m$ cuyas entradas corresponden a multiplicar cada entrada de A por t, es decir, si

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{90}$$

$$C = tA = (c_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1m} \\ ta_{21} & ta_{22} & \cdots & ta_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & ta_{nm} \end{pmatrix} \tag{91}$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 11 & 2 \\ 12 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

entonces

$$\mathbf{3}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 & 21 \\ 9 & 24 & 33 & 6 \\ 36 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \tag{93}$$

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades de la suma de matrices y el producto de matrices por un número real.

Teorema 6. *Si $A, B, C \in M(n, m, \mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces*

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

2.1.3. Producto de Matrices

Definir el producto de matrices es una operación mucho más complicada que definir la suma de matrices. Primero que todo, la definición parecerá arbitraria y además el producto matricial no posee todas las propiedades que poseen el producto de números reales (en particular, el producto de matrices es no conmutativo, es decir $AB \neq BA$). Debido a la dificultad del producto se irá explicando como realizarlo con las siguientes dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{5} & 3 & 2 \\ 7 & \mathbf{6} & 5 & 8 \end{pmatrix} \tag{94}$$

- Si $A \in M(n, m, \mathbb{R}), B \in M(r, s, \mathbb{R})$ el producto de matrices AB está bien definido únicamente cuando $m = r$, es decir, **el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz**. En caso de que eso se cumpla,

$AB \in M(n, s, \mathbb{R})$, es decir, **va a ser una matriz con el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la segunda matriz**. En nuestro ejemplo A es una matriz 2×3 y B una matriz 3×4 por lo que el producto matricial está bien definido y va a ser una matriz AB de tamaño 2×4. De lo anterior también se puede notar que no hubiera sido posible realizar el producto al revés, es decir la matriz BA no existe ya que el número de columnas de B no es igual al número de filas de A.

- Para definir el producto se utilizará nuestro ejemplo 94. Ya sabemos que AB tiene que ser una matriz 2×4

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \tag{95}$$

y la pregunta que queda es cómo calcular esas entradas c_{ij}. El método es el siguiente:

- Para hallar la entrada c_{ij} busque la fila i de la matriz A, que escribiremos como $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im})$ y busque la columna j de la matriz B, que escribiremos como $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ y entonces c_{ij} es el "producto punto"[2] entre la fila y la columna, es decir,

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj} \tag{96}$$

La siguiente figura[3] ilustra la multiplicación matricial

[2] este nombre se utilizará en anticipación del producto punto entre vectores que se estudiará más adelante

[3] tomado de http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/

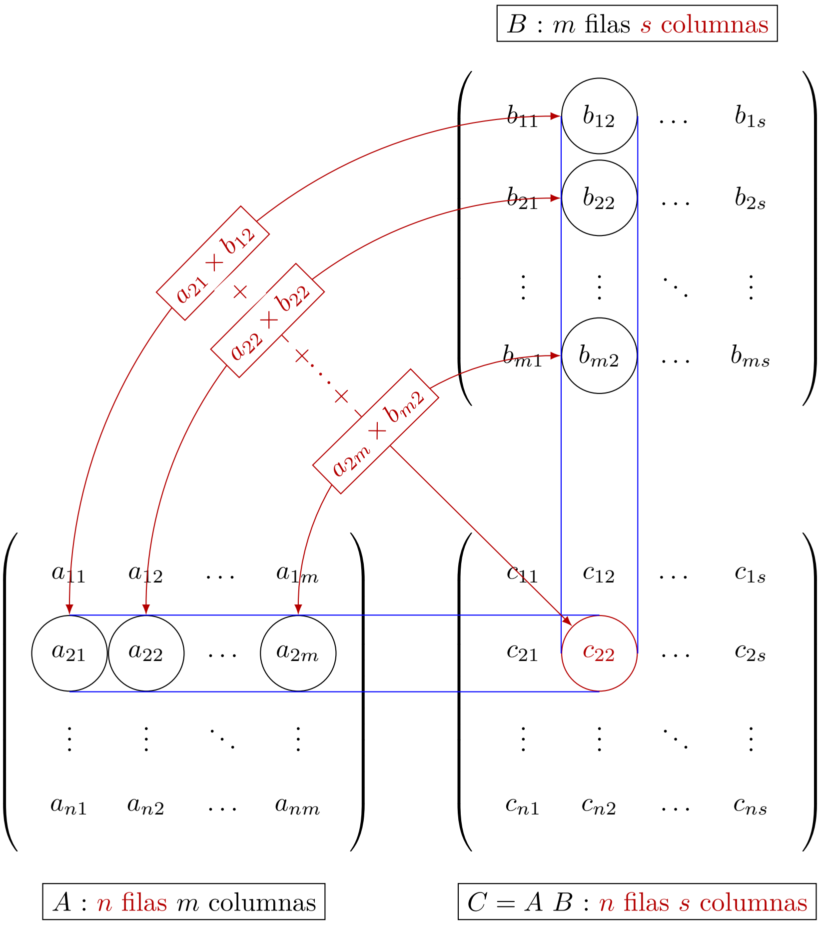


Figure 5: Multiplicación matricial

- Para ilustrar esto con el ejemplo, suponga que se busca hallar c_{12}, según lo expuesto primero se encuentra la fila 1 de A que es $(1, 9, 0)$ y luego se busca la columna 2 de B que es $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y entonces

$$c_{12} = (1, 9, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 0 \cdot 6 = 49 \tag{97}$$

y en forma análoga se llega a que

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 49 & 27 & 18 \\ 35 & 47 & 29 & 38 \end{pmatrix} \tag{98}$$

- Para enfatizar la no conmutatividad del producto de matrices, tome las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{99}$$

es fácil verificar que u

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \quad (100)$$

con lo cual es claro que en general $AB \neq BA$.

El siguiente teorema enuncia alguna de las propiedades del producto entre matrices.

Teorema 7. *Si $A \in M(n,m,\mathbb{R}), B \in M(m,s,\mathbb{R}), C \in M(s,t,\mathbb{R}), D \in M(m,s,\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que*

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+D) = AB + AD$
- $(B+D)C = BC + DC$
- $\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$

2.1.4. Errores comunes con la multiplicación matricial

1. ***En general** AB **no es lo mismo que** BA* como se mencionó anteriormente. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (102)$$

2. ***Si se tiene que** $AB = 0$ **no se tiene necesariamente que** $A = 0$ **o** $B = 0$.* Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (103)$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (104)$$

pero ninguna de las dos matrices es la matriz nula.

3. ***Si** $AB = AC$ **no necesariamente** $B = C$.* Por ejemplo, tome

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (105)$$

Entonces

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (106)$$

pero B y C son matrices distintas.

4. **En general,** *$(A+B)^2$ **no es igual a** $A^2 + 2AB + B^2$.* De hecho

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \quad (107)$$

y esto último es igual a $A^2 + 2AB + B^2$ solo cuando $AB = BA$

2.1.5. Sistemas de ecuaciones y multiplicación matricial

Como se había mencionado en el capítulo anterior existe una relación estrecha entre la notación $Ax = b$ para un sistema de ecuaciones y la multiplicación matricial. Por ejemplo, si se tiene el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_4 = 10 \end{cases} \tag{108}$$

entonces según la notación del capítulo anterior se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{109}$$

así, como A es una matriz 3×4 y x una matriz 4×1 se puede realizar Ax y se tiene que

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 \\ x_1 + 5x_4 \end{pmatrix} \tag{110}$$

y las filas de Ax corresponden al lado izquierdo del sistema de ecuaciones. De esta forma, $Ax = b$ significa

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 \\ x_1 + 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{111}$$

e igualando las filas respectivas se recupera el sistema de ecuaciones.

Otra forma útil de representar los sistemas de ecuaciones es mediante la **representación de columnas del sistema.** La idea es nombrar las columnas de A como v_1, v_2, v_3, v_4 (pues son 4 columnas) como

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{112}$$

En este caso se escribe $A = (v_1 v_2 v_3 v_4)$ para indicar que las columnas de A son v_1, v_2, v_3, v_4. De esta forma, Ax se puede escribir como

$$Ax = (v_1 v_2 v_3 v_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{113}$$

y así el sistema $Ax = b$ se puede escribir como

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{114}$$

Esta escritura será muy importar más adelante por lo que es bueno tener este resultado como un teorema.

Teorema 8. *Suponga que A es una matriz $n \times m$ y se representa como $A = (v_1 v_2 \cdots v_m)$* ***donde $v_1, v_2, \cdots, v_m$ son las m columnas de A. Entonces, el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es equivalente a***

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m = b \tag{115}$$

$$\tag{116}$$

2.2. Tipos de Matrices

2.2.1. Matriz Transpuesta

Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ es una matriz $n \times m$ la matriz transpuesta A^T es la matriz $m \times n$ que cumple $A^T = (a_{ji})_{m \times n}$, es decir, se intercambian las filas de la matriz con la columnas de ella.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \tag{117}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{118}$$

El siguiente teorema da algunas de las propiedades de la transposición de matrices.

Teorema 9. *La transposición de matrices tiene las siguientes propiedades:*

- $\mathrm{Rng(A)} = \mathrm{Rng(A^T)}$
- Si $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$,
$$(A + B)^T = A^T + B^T \tag{119}$$
- Si $A \in M(n, m, \mathbb{R}), B \in M(m, s, \mathbb{R})$
$$(AB)^T = B^T A^T \tag{120}$$
- Si $A \in M(n, m, \mathbb{R})$,
$$(A^T)^T = A \tag{121}$$
- Si $t \in \mathbb{R}$ entonces
$$(tA)^T = tA^T \tag{122}$$

2.2.2. Matrices cuadradas:

Estas son las matrices más importantes y se caracterizan por el hecho de que tienen el mismo número de filas que de columnas. Hay varios tipos de matrices cuadradas, algunas de las cuales son:

2.2.2.1. Matriz nula 0_n Es simplemente la matriz de tamaño $n \times n$ cuyas todas entradas son 0.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{123}$$

Es claro que para las matrices A en que la suma y multiplicación con 0_n tiene sentido se cumple que

- $A + 0_n = 0_n + A = A$
- $A0_n = 0_nA = 0_n$

2.2.2.2. Matriz identidad 1_n Es la matriz de tamaño $n \times n$ que tiene 1 sobre toda la diagonal y 0 fuera de la diagonal

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{124}$$

no es difícil ver que cuando tiene sentido la multiplicación con la matriz A se tiene que

$AI_n = I_nA = A$

2.2.2.3. Matriz diagonal Es cualquier matriz de tamaño $n \times n$ cuyas únicas entradas no nulas se encuentran sobre la diagonal. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{125}$$

a veces se denota la matriz anterior como

$$A = \mathrm{diag}(1, 0, 3, 5) \tag{126}$$

En particular el producto de dos matrices diagonales es muy sencillo. Si

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n), B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) \tag{127}$$

entonces

$$AB = \mathrm{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n) \tag{128}$$

2.2.2.4. Matriz triangular Una matriz es **triangular inferior** si todos sus elementos no nulos están por debajo o sobre la diagonal. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{129}$$

es una matriz triangular inferior.

En cambio, una matriz es **triangular superior** si todos sus elementos no nulos están por encima o sobre la diagonal. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{130}$$

es una matriz triangular superior.

2.2.2.5. Matriz simétrica

Una matriz $n \times n$ A es **simétrica** si se cumple que $A = A^T$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 9 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 8 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

es una matriz simétrica.

2.2.2.6. Matriz antisimétrica

Una matriz $n \times n$ A es **antisimétrica** si se cumple que $A = -A^T$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 & 9 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ -9 & -8 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -9 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{132}$$

Una propiedad importante de estas matrices es que **una matriz antisimétrica solo puede tener entradas nulas sobre la diagonal.**

2.3. Matrices Invertibles y Matrices Elementales

2.3.1. Matrices Invertibles

Para los números reales, si $a \in \mathbb{R}$ y a no es cero, el inverso multiplicativo de a es el número $\frac{1}{a}$ ya que $a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$. Queremos generalizar el concepto de inverso para poder hablar de la inversa de una matriz. Una de las características que habrá que tomar en cuenta es que **solo se considerarán matrices cuadradas**. También como el producto de matrices es no conmutativo hay que ser cuidadosos con que la definición tome en cuenta la no conmutatividad del producto matricial.

Definición 10. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz cuadrada se dice que $B \in M(n, \mathbb{R})$ es una **inversa izquierda** de A si $BA = 1_n$. Por otro lado, $C \in M(n, \mathbb{R})$ es una **inversa derecha** de A si $AC = 1_n$.

Nótese que la definición no presupone que siempre hay matrices que sean inversas a la izquierda o a la derecha, de hecho, más adelante se darán condiciones para que existan tales matrices. En principio B y C pueden ser matrices diferentes por lo que es bastante importante el siguiente resultado.

Teorema 11. *Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matriz cuadrada.*

1. Si B, B' son dos matrices inversas a la izquierda de A entonces $B = B'$
2. Si C, C' son dos matrices inversas a la derecha de A entonces $C = C'$
3. Si B es inversa a la izquierda y C es inversa a la derecha entonces $B = C$.

Demostración. 1) Por hipótesis $BA = 1_n$ y $B'A = 1_n$ por lo que

$$B = 1_n B = (B'A)B = B'(AB) = B'1_n = B' \tag{133}$$

2) Por hipótesis $AC = 1_n$ y $AC' = 1_n$ por lo que

$$C = C1_n = C(AC') = (CA)C' = 1_n C' = C' \tag{134}$$

3) Por hipótesis $BA = 1_n$ y $AC = 1_n$. Así,

$$B = B1_n = B(AC) = (BA)C = 1_n C = C \tag{135}$$

□

El resultado anterior sugiere la siguiente definición.

Definición 12. $A \in M(n, \mathbb{R})$ se llama **invertible o no singular** si existe una matriz $B \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $AB = BA = 1_n$ y se dice que B es una inversa de A.

El siguiente resultado muestra que a lo sumo existe una inversa para A.

Teorema 13. *Si A es una matriz $n \times n$ y B es una inversa de A y C es otra inversa de A entonces $B = C$.*

Demostración. Por hipótesis $AB = BA = 1_n$ y $AC = CA = 1_n$. Así $B = B1_n = B(AC) = (BA)C = 1_n C = C$. □

Por el teorema anterior como a lo sumo hay una matriz inversa se denotará $B = A^{-1}$ si B es la inversa de A. Es decir, A^{-1} es la única matriz tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = 1_n$.

Las siguientes propiedades de la inversa son importantes a la hora de hacer cálculos.

Teorema 14. *Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ y A, B son invertibles se tiene que:*

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- Si $t \neq 0$ es número real $(tA)^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1}$

Demostración. Por definición $(A^{-1})^{-1}$ es una matriz C tal que $CA^{-1} = A^{-1}C = 1_n$. Por uniciad de la inversa basta encontrar una matriz C que cumpla lo anterior. Es claro que $C = A$ cumple lo anterior por lo que $(A^{-1})^{-1} = A$

Para la segunda propiedad $(AB)^{-1}$ es la matriz C que hace que $CAB = ABC = 1_n$. Si se toma $C = B^{-1}A^{-1}$ se nota que $CAB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}1_n B = B^{-1}B = 1_n$ y por otro lado $ABC = ABB^{-1}A^{-1} = A1_n A^{-1} = AA^{-1} = 1_n$ por lo que se ha verificado lo buscado y de esta forma $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Para la tercera propiedad $(A^T)^{-1}$ es la matriz C que cumple $CA^T = A^TC = 1_n$. Nuevamente si se toma $C = (A^{-1})^T$ y se recuerda las propiedades del producto de transpuestas entonces $CA^T = (A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = (1_n)^T = 1_n$ y $A^TC = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (1_n)^T = 1_n$ por lo que se ha verificado nuevamente la condición buscada y así puede concluirse que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

La última propiedad se muestra análogamente. □

Observación 15. Es importante notar que **si A y B son matrices invertibles, no se tiene necesariamente que $A+B$ es invertible**. Por ejemplo, como se verá luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \tag{136}$$

son matrices invertibles, pero

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \tag{137}$$

no lo es.

2.3.2. Matrices Elementales

Antes de caracterizar las matrices invertibles es hora de relacionar las operaciones elementales del capítulo anterior con el producto de matrices.

Definición 16. Las **matrices elementales de tamaño n** son las matrices que resultan de aplicar una operación elemental a la matriz identidad 1_n. Dado que habían tres operaciones elementales distintas, las matrices elementales de tamaño n se denotarán según

$$E_n(af_i), E_n(f_i, f_j), E_n(af_i + f_j) \tag{138}$$

donde se supone que $a \neq 0$.

Por ejemplo, si $n = 4$ las siguientes son algunos ejemplos de matrices elementales.

$$E_n(3f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{139}$$

$$E_n(f_1, f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{140}$$

$$E_n(4f_1 + f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{141}$$

El siguiente resultado establece la importancia de las matrices elementales y su relación con las operaciones elementales del capítulo anterior.

Teorema 17. *Si $A \in M(n,m,\mathbb{R})$ hacer una operación elemental fila sobre A es equivalente a multiplicar a A por la izquierda por la correspondiente matriz elemental de orden n. Es decir,*

$$\begin{gathered} B = E_n(af_i)A \longleftrightarrow A \xrightarrow{af_i} B \\ B = E_n(f_i,f_j)A \longleftrightarrow A \xrightarrow{f_i,f_j} B \\ B = E_n(af_i+f_j)A \longleftrightarrow A \xrightarrow{af_i+f_j} B \end{gathered} \tag{142}$$

Además, cada una de las matrices elementales son invertibles y sus inversas son

$$\begin{gathered} (E_n(af_i))^{-1} = E_n(\tfrac{1}{a}f_i) \\ (E_n(f_i,f_j))^{-1} = E_n(f_i,f_j) \\ (E_n(af_i+f_j))^{-1} = E_n(-af_i+f_j) \end{gathered} \tag{143}$$

Por ejemplo, en (36) se estudió la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{144}$$

y se vio que se podía reducir a la matriz escalonada reducida según las operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3f_1+f_3} \tag{145}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{5}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{6f_2+f_3} \tag{146}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3f_3+f_1} \tag{147}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_2+f_1} \tag{148}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{149}$$

Por el teorema anterior tenemos entonces que

$$B = 1_3 = E_3(-2f_2+f_1)E_3(-f_3+f_2)E_3\left(\frac{-1}{4}f_3\right)E_3(6f_2+f_3)E_3\left(\frac{-1}{5}f_2\right)E_3(-3f_1+f_3)E_3(-2f_1+f_2)A \tag{150}$$

2.3.3. Cálculo de Matrices Inversas

Con la teoría desarrollada hasta el momento es posible establecer ahora las condiciones que garantizan que una matriz $n \times n$ sea invertible.

Teorema 18. *Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. A es invertible
2. El sistema de ecuaciones$Ax = b$ tiene solución única para todo b
3. El sistema homogéneo$Ax = 0$ tiene solución única
4. $\text{Rng}(A) = n$
5. A es equivalente a 1_n
6. A es un producto de matrices elementales

Demostración. Se demostrará $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$

$1 \to 2)$: Suponga que A es invertible, es decir, existe A^{-1}. Gracias al producto matricial, el sistema $Ax = b$ se puede interpretar como el producto de la matriz A por la matriz $n \times 1$ x que da como resultado la matriz $n \times 1$ b. Así como $Ax = b$ multiplicando a ambos lados de la ecuación por A^{-1} por la izquierda se tiene que $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ o lo que es igual a $x = A^{-1}b$ la cual es la única solución del sistema de ecuaciones.

$2 \to 3)$: Esto es trivial ya que 3) se sigue de 2) tomando $b = 0$

$3 \to 4)$: Esto también es trivial de la caracterización que se había hecho en el capítulo anterior sobre la relación entre el rango de una matriz y el número de sus soluciones del sistema asociado.

$4 \to 5)$: Si el rango de una matriz cuadrada A $n \times n$ es n esto significa que la forma escalonada reducida de la matriz A tiene todas sus filas distintas de cero con un único 1 por fila que están colocados sobre la diagonal, es decir, la matriz escalonada reducida de A debe ser la identidad.

$5 \to 6)$: Si A es equivalente a 1_n esto significa que es posible realizar una serie de operaciones elementales con las que se puede pasar de A a 1_n. Por el teorema sobre operaciones elementales se sigue que existen matrices elementales $E_n(1), E_n(2), ..., E_n(m)$ tal que

$$1_n = E_n(m) \cdots E_n(2)E_n(1)A \tag{151}$$

y como cada operación elemental es invertible y su inversa es nuevamente una operación elemental se tiene de lo anterior que

$$A = (E_n(1))^{-1}(E_n(2))^{-1} \cdots (E_n(m))^{-1} \tag{152}$$

que era lo que se buscaba mostrar.

$6 \to 1)$: Si A es un producto de matrices elementales entonces

$$A = E_n(m) \cdots E_n(2)E_n(1) \tag{153}$$

y de aquí se obtiene fácilmente que

$$1_n = (E_n(1))^{-1}(E_n(2))^{-1} \cdots (E_n(m))^{-1}A \tag{154}$$

lo cual es justamente la condición de que exista una serie de operaciones elementales que lleven de A a 1_n. $\square$

2.3.3.1. Algoritmo de la Matriz Inversa: El método para calcular la inversa de una matriz puede obtenerse de (151)

$$1_n = E_n(m)\cdots E_n(2)E_n(1)A \tag{155}$$

Sabemos por el teorema anterior que esto significa que A es invertible y de hecho multiplicando la ecuación anterior por A^{-1} por la derecha se tiene que

$$A^{-1} = E_n(m)\cdots E_n(2)E_n(1)1_n \tag{156}$$

Por lo anterior, se puede resumir el algoritmo de la siguiente forma:

1. Si A es una matriz $n \times n$ formar la matriz $n \times 2n$ $[A \mid 1_n]$ que se obtiene al adjuntar la matriz identidad con la matriz dada A
2. Reducir mediante operaciones elementales la matriz A a su forma escalonada reducida C y aplicar las mismas operaciones elementales a la matriz 1_n para producir una matriz D
3. Al final del algoritmo se ha pasado entonces $[A \mid 1_n] \longrightarrow [C \mid D]$ y se tienen dos casos:

- **caso 1:** si $C = 1_n$ entonces $D = A^{-1}$
- **caso 2:** si $C \neq 1_n$ entonces A no es invertible y no existe A^{-1}.

A manera de ejemplo se va a calcular la matriz inversa de (144)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

Según el algoritmo, hay que aumentar la matriz anterior con la identidad y comenzar a aplicar las operaciones elementales sobre ambas matrices

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_1+f_3} \tag{158}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{6f_2+f_3} \tag{159}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{-3}{5} & \frac{-6}{5} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_3+f_1} \tag{160}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{11}{20} & \frac{-9}{10} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{11}{20} & \frac{-9}{10} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \tag{161}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{4} \end{array}\right) \tag{162}$$

y como se logró reducir A a la identidad se concluye que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \tag{163}$$

3. El Determinante de una Matriz Cuadrada

Al final del capítulo anterior se estudió un método para determinar cuando una matriz cuadrada era invertible o no. Sin embargo, tenía la desventaja de ser bastante largo pues había que utilizar Gauss Jordan. En cambio, el concepto de determinante permitirá saber rápidamente si una matriz cuadrada es invertible o no, aparte de que también puede utilizarse para calcular la matriz inversa y resolver sistemas de ecuaciones lineales con el método de Cramer.

Debido a que el determinante de una matriz es difícil de definir (parecido al producto matricial) se comenzará con el caso de matrices 2×2, 3×3 y a partir de ahí se definirá para matrices de tamaño $n \times n$.

3.1. Determinante de una matriz 2×2

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{164}$$

es una matriz 2×2 se define su **determinante** como

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{165}$$

Ejemplo 19. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $|A| = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 3$ mientras que $|B| = 9 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

3.2. Determinante de una matriz 3×3

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \tag{166}$$

es una matriz 3×3 se define su **determinante** como

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \tag{167}$$

A partir de esta fórmula es posible realizar ciertas observaciones antes de dar la definición general.

- Nótese de que para calcular el determinante de una matriz 3×3 se tomaron los coeficientes de la primera fila a, b, c y se escribió el determinante como una **suma alternada** de los coeficientes multiplicados por tres determinantes. Se dice que fue una suma alternada pues el b aparece con un menos en la fórmula, es decir se realizó la suma con los signos $(+, -, +)$

- Para hallar los tres determinantes que aparecen en (167) nótese que el coeficiente a se encuentra en la primera fila y en la primera columna y el determinante que lo multiplica es la matriz que resulta de eliminar la fila 1 y la columna 1, es decir, el **determinante que multiplica a cada coeficiente es el determinante de la matriz que queda después de eliminar la fila y la columna a la que pertenece el coeficiente.**

➥ Por la forma en que se definió el determinante se dice que se expandió a lo largo de la primera fila puesto que se tomaron los coeficientes de la primera fila. Sin embargo, es posible realizar la expansión a lo largo de cualquier fila bajo el mismo método siempre que se tenga en cuenta la siguiente tabla de signos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \tag{168}$$

esta tabla indica el signo con el cual aparece el coeficiente de la fila que busca desarrollarse. Por ejemplo, el determinante de la matriz A a lo largo de la segunda fila sería

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = -d(bi-ch)+e(ai-cg)-f(ah-bg) \tag{169}$$

el lector podrá verificar que (167) y (169) coinciden lo cual significa que el valor de un determinante de una matriz puede calcularse "expandiendo" a lo largo de cualquier fila. Nótese que las nuevas matrices 2×2 se hallan igual que antes; por ejemplo, como e se encuentra en la fila 2 y la columna 2 entonces aparace multiplicado por el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila 2 y la columna 2.

Con la información anterior ya se está listo para introducir el concepto de general de determinante.

3.3. Determinante de una matriz $n \times n$

Definición 20. Si A es una matriz $n \times n$ se define **el determinante de la matriz A a lo largo de la i-ésima fila** como

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \tag{170}$$

donde A_{ij} significa la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j. Para tal matriz A los signos en los que aparecen los coeficientes pueden leerse de la matriz de signos alternados correspondientes

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \end{pmatrix} \tag{171}$$

Como ejemplo se va a calcular el determinante de la siguiente matriz 4×4 a lo largo de la **tercera fila**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{172}$$

por la fórmula vista se toma $i = 3$ en (168) o bien se ve que la matriz de signos es

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \tag{173}$$

$$\det A = (-1)^{3+1}a_{31}\det(A_{31})+(-1)^{3+2}a_{32}\det(A_{32})+(-1)^{3+3}a_{33}\det(A_{33})+(-1)^{3+4}a_{34}\det(A_{34}) \tag{174}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{175}$$

$$= 2\left[2\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right] - 4\left[1\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right] \tag{176}$$

$$+ 5\left[1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right] - 6\left[1\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right] \tag{177}$$

$$= 2\left[2\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right] - 4\left[\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right] + 5\left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right] - 6\left[\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right] \tag{178}$$

$$= 4 \cdot 35 - 4 \cdot 35 + 5[0 - 2 \cdot 45] - 6[-2(-7)] \tag{179}$$

$$= -450 - 84 = -534 \tag{180}$$

Note que este procedimiento fue un poco tedioso en parte porque se escogió la peor fila posible, es decir una donde ningún coeficiente era 0. En cambio, si se hubiera expandido a lo largo de la cuarta fila el determinante se ve que

$$\det A = -1\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{181}$$

$$= -\left[2\det\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right] + 5\left[\det\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right] \tag{182}$$

$$= -2 \cdot 42 + 5[-28 - 2(45 - 14)] = -84 + 5[-28 - 62] \tag{183}$$

$$= -84 - 5 \cdot 90 = -534 \tag{184}$$

lo cual fue un cálculo mucho más rápido pues se escogió una fila más útil. Ahora que se han visto la forma de calcular un determinante es hora de ver algunas de sus propiedades.

3.4. Propiedades de los Determinantes

Teorema 21. *Sean*

$$A = (a_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{185}$$

y

$$B = (b_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{186}$$

dos matrices $n\times n$*. Suponga que se representan las filas de* A *y* B *como* $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$*. Entonces se tiene que*

- **Si alguna fila de A solo tiene ceros entonces** $\det A = 0$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{187}$$

se tiene que $|A| = 0$ ya que se podría expandir a lo largo de la segunda fila pero ahí todos sus coeficientes son 0 por lo que el determinante también da cero.

- **Si alguna columna de A solo tiene ceros entonces** $\det A = 0$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{188}$$

se tiene que $|A| = 0$ pues la segunda columna tiene puros ceros y pronto se verá que también es posible desarrollar el determinante a lo largo de cualquier columna en forma análoga a como se desarrolla a lo largo de filas.

- si

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ \alpha \mathbf{A_r} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{189}$$

  es la matriz que resulta de multiplicar toda una fila de A por un número real entonces

$$\det A' = \alpha \det A \tag{190}$$

  es decir, **el determinante "factoriza" a lo largo de cada fila**. En particular

$$\det(\alpha A) = \alpha^{\mathbf{n}} \det A \tag{191}$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{192}$$

como todos los números de la tercera fila son múltiplos de 3 se puede factorizar un 3 y así

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{193}$$

es decir, el determinante saca una constante por cada fila. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 18 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{194}$$

como cada fila es múltiplo de 2 se puede sacar un 2 por cada fila y así se tendría que

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 18 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{195}$$

- **si se intercambian dos filas de A entonces el determinante cambia de signo**, es decir

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A_k} \\ \vdots \\ \mathbf{A_r} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_r \\ \vdots \\ \mathbf{A_k} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{196}$$

  Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{197}$$

  entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \tag{198}$$

  que resulta de intercambiar las primeras dos filas

- **si se realiza una combinación lineal de filas el determinante no cambia**, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A_k} \\ \vdots \\ \mathbf{A_r} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A_k} \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{A_k}+\mathbf{A_r} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{199}$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} \tag{200}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} \overset{2f_1+f_2}{\xrightarrow[=]{}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & 26 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} \tag{201}$$

donde se realizó la operación $2f_1 + f_2$. **Es importante notar que la combinación lineal se reemplaza en la fila que no fue multiplicada por un número real.** En este caso, como se multiplicó la primera fila por 2 entonces debe reemplazarse la operación en la segunda fila ya que esta no está multiplicada por nada.

- **la función determinante es lineal en cada fila** es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} + \mathbf{b_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} + \mathbf{b_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} + \mathbf{b_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{202}$$

entonces

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{b_{i1}} & \mathbf{b_{i2}} & \cdots & \mathbf{b_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{203}$$

nótese que todas las filas salvo la i-ésima son las mismas en los tres determinantes que es la que se separa en dos partes.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{204}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0+0 & 1+1 & 1+8 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{205}$$

donde se usó la linealidad en la segunda fila.

- **El determinante de la matriz identidad es** 1, es decir,

$$\det 1_n = 1 \tag{206}$$

- **Si A es una matriz triangular (superior o inferior) el determinante de A es igual al producto de los coeficientes sobre la diagonal,** por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{207}$$

es una matriz triangular superior entonces

$$\det A = 1 \cdot 8 \cdot 3 = 24 \tag{208}$$

Como caso particular de lo anterior se tiene que si A es una matriz diagonal

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n) \tag{209}$$

entonces

$$\det A = a_1 \cdots a_n \tag{210}$$

- **El determinante de una matriz es igual a de su transpuesta**, es decir

$$\det A = \det A^T \tag{211}$$

- **El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes respectivos**, es decir,

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B \tag{212}$$

- Si A es invertible, entonces

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{213}$$

3.5. El Determinante de una Matriz y su Inversa

3.5.1. *La matriz adjunta*

Uno de los resultados más importantes del álgebra lineal relaciona el determinante de una matriz con el cálculo de su inversa. Recuérdese que se había definido

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \tag{214}$$

Definiendo el **cofactor** c_{ij} de a_{ij} como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \tag{215}$$

de esta forma el determinante de una matriz puede reescribirse como

$$\det A = a_{i1} c_{i1} + \cdots + a_{in} c_{in} \tag{216}$$

Por ejemplo, considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{217}$$

entonces algunos cofactores son

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = (-1)(-34) = 34 \tag{218}$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = (-1)(10) = -10 \tag{219}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)(-16) = -16 \tag{220}$$

Definición 22. Si A es una matriz $n \times n$ se define la **matriz adjunta de A** como la transpuesta de la matriz de cofactores, es decir,

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{221}$$

3.5.2. Condiciones para la invertibilidad de una matriz

Con lo anterior, se obtiene el siguiente resultado que es de gran importancia.

Teorema 23. *Sea A una matriz $n \times n$. A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. En tal caso,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\, A \tag{222}$$

En particular, las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es invertible
2. $Ax = b$ tiene solución única para todo b
3. $Ax = 0$ tiene solución única
4. $Rng(A) = n$
5. A es equivalente a 1_n
6. A es un producto de matrices elementales
7. $\det A \neq 0$
8. A tiene inversa derecha
9. A tiene inversa izquierda

Por ejemplo, gracias al teorema anterior es posible hallar la inversa de cualquier matriz 2×2 con determinante distinto de 0. Suponga que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{223}$$

y que

$$\det A = ad - bc \neq 0 \tag{224}$$

Según el teorema para hallar A^{-1} se debe construir la matriz de cofactores.

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\det(d) = d \tag{225}$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\det(c) = -c \tag{226}$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\det(b) = -b \tag{227}$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\det(a) = a \tag{228}$$

Así, según el teorema

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T \tag{229}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \tag{230}$$

Esta fórmula resulta muy útil para calcular la inversa de una matriz de este tipo.

3.5.3. *Cálculo de Determinantes para matrices en Bloque*

➡ Suponga que A es una matriz $n \times n$ escrita como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ o } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{231}$$

donde A está escrita como matriz en bloques, es decir, A_{11} y A_{22} no son números sino matrices cuadradas y 0 es una matriz rectangular de puros ceros. Entonces

$$\det A = \det A_{11} \det A_{22} \tag{232}$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{233}$$

tomando

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 6 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{234}$$

entonces por lo anterior

$$\det A = \det A_{11} \det A_{22} = 24 \cdot 6 = 144 \tag{235}$$

➭ Suponga que A es una matriz $n \times n$ escrita como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{236}$$

donde A_{11} es una matriz $k \times k$ y A_{22} una matriz $(n-k) \times (n-k)$.

1. Si A_{22} es invertible entonces

$$\det A = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \det A_{22} \tag{237}$$

2. Si A_{11} es invertible entonces

$$\det A = \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \det A_{11} \tag{238}$$

3.6. Regla de Cramer

Otra aplicación del concepto de determinante es para resolver sistemas de ecuaciones lineales con el mismo números de ecuaciones que de incógnitas, es decir, un sistema de ecuaciones $n \times n$

Teorema 24. *Suponga que A es una matriz $n \times n$. $A = (A_1, ..., A_n)$* ***donde*** *A_i* ***es la i-ésima columna de** A.* *Suponga que $\det A \neq 0$* ***y que*** *$Ax = b$. Denote como $(A_1, \cdots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \cdots, A_n)$* ***la matriz que tiene las mismas columnas que*** *A* ***salvo la i-ésima que ha sido sustituida por la columna*** *b. Entonces el sistema anterior tiene solución única $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ donde*

$$x_i = \frac{\det(A_1, \cdots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \cdots, A_n)}{\det A} \tag{239}$$

Por ejemplo, suponga que se busca resolver el sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \tag{240}$$

Por la regla de Cramer se construye la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{241}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{242}$$

es fácil verificar que

$$\det A = -2 \tag{243}$$

y por (239)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-4}{-2} = 2 \tag{244}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-6}{-2} = 3 \tag{245}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-8}{-2} = 4 \tag{246}$$

3.7. Otros ejemplos:

A continuación se darán algunos ejemplos del material visto hasta el momento.

Problema 25. *(primer examen parcial segundo semestre 2003)*
Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ y sea x_0 una solución de dicho sistema. Demuestre que si $x_0 + tu$ es también solución del sistema, entonces u es solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.

Por hipótesis x_0 es solución de $Ax = b$, es decir

$$Ax_0 = b \tag{247}$$

como $x_0 + tu$ también es solución del sistema $Ax = b$ se tiene que

$$A(x_0 + tu) = b \tag{248}$$

Realizando (248)−(247) se obtiene que

$$A(x_0 + tu) - Ax_0 = b - b \tag{249}$$

Expandiendo el producto del lado izquierdo

$$Ax_0 + A(tu) - Ax_0 = 0 \tag{250}$$

simplificando la ecuación anterior

$$tAu = 0 \tag{251}$$

y suponiendo que $t \neq 0$ (de lo contrario el problema no tendría gracia el ejercicio) se llega a

$$Au = 0 \tag{252}$$

lo cual significa que u es solución del sistema homogéneo que era lo que se buscaba mostrar.

Problema 26. *(primer examen parcial segundo semestre 2003)*

Muestre que $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b)$**. Utilice este hecho para demostrar que la matriz** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 25 & 16 \end{pmatrix}$ **es invertible.**

Para demostrar la primera parte se utilizarán las propiedades del teorema sobre las propiedades del determinante. Primero se recuerda que el valor del determinante es el mismo bajo combinaciones lineales de las filas

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{-f_1+f_2} \\ = \\ \xrightarrow{-f_1+f_3} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \tag{253}$$

Llegado a este punto hay dos opciones: la primera es desarrollar este determinante a lo largo de la primera columna (que se hace en forma análoga al desarrollo por filas) y aprovechar que hay 2 ceros sobre la columna, la otra forma (que es la que vamos a utilizar) aprovecha que el determinante de una matriz es igual al de su transpuesta.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \tag{254}$$

y desarrollamos este último determinante a largo de la primera fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) \tag{255}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \tag{256}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(a-c)(c-b) \tag{257}$$

que era lo que se buscaba mostrar.

Para la segunda parte observe que transponiendo la matriz

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 25 & 16 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \end{pmatrix} \tag{258}$$

y por comparación con el resultado anterior se toma $a = 2, b = 5, c = -4$ y así

$$\det M = (a - b)(a - c)(c - b) = (2 - 5)(2 + 4)(-4 - 5) = 162 \tag{259}$$

y como el determinante es distinto de cero la matriz es invertible.

Problema 27. *(primer examen parcial del primer semestre del 2001):*
Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A^2 - A - I = 0$. Muestre que a) $(A - I)^{-1} = A$, b) Si X es una matriz $n \times n$ para la cual $(XA^T)^T = X^T + A$ determine X en función de A. c) Para la siguiente matriz B calcule $B^2 - B$ y use el resultado en a) para deducir el valor de B^{-1}. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por hipótesis

$$A^2 - A - I = 0 \tag{260}$$

de lo cual se concluye que

$$A^2 - A = I \tag{261}$$

a) Para ver que A es la inversa de $A - I$ basta mostrar que $A(A - I) = I$ pues esa es la propiedad de la matriz inversa. Observe que por (261)

$$A(A - I) = A^2 - A = I \tag{262}$$

que era lo que ocupaba mostrarse.

$$\tag{263}$$

b) Suponga que

$$(XA^T)^T = X^T + A \tag{264}$$

hay que despejar de la ecuación anterior X. Para eso hay que recordar las propiedades de la transpuesta, en particular, recordando la fórmula para la transpuesta de un producto

$$(A^T)^T X^T = X^T + A \tag{265}$$

como la transpuesta de la transpuesta es la matriz original

$$AX^T = X^T + A \tag{266}$$

multiplicando X^T por la identidad (esto siempre se puede hacer) y pasando a restar IX^T

$$AX^T - IX^T = A \tag{267}$$

factorizando X^T por la derecha

$$(A - I)X^T = A \tag{268}$$

multiplicando a la izquierda por A

$$A(A - I)X^T = A^2 \tag{269}$$

y como A era la inversa de $A - I$ por la primera parte

$$IX^T = A^2 \tag{270}$$

es decir

$$X^T = A^2 \tag{271}$$

transponiendo

$$X = (A^2)^T \tag{272}$$

c) Como $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.** Es fácil ver que $B^2 - B = I$, es decir $B^2 - B - I = 0$ y por a) sabemos que

$$B = (B - I)^{-1} \tag{273}$$

y tomando inversas a ambos lados se sigue que

$$B^{-1} = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{274}$$

Problema 28. *(primer examen parcial del primer semestre 2007)*:

Suponga que $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = 3$. **Calcule** $\begin{vmatrix} 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix}$

Para calcular los determinantes anteriores hay que utilizar las propiedades de estos.

a) $\begin{vmatrix} 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix}$

Observe primero que hay dos filas que están multiplicadas por 3 y se pueden sacar del determinante

$$\begin{vmatrix} 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} r & p & q \\ q & r & p \\ p & q & r \end{vmatrix} \tag{275}$$

luego podemos intercambiar la fila 1 con la 3 del determinante anterior y recordar que cambia el signo del determinante

$$9 \begin{vmatrix} r & p & q \\ q & r & p \\ p & q & r \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{f_1, f_3}}{=} -9 \begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = -9 \cdot 3 = -27 \tag{276}$$

y así

$$\begin{vmatrix} 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix} = -27 \tag{277}$$

b) $\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix}$

Primero utilizaremos las propiedad de linealidad del determinante en la primera fila

$$\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & r \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2q & 2r & 2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} \tag{278}$$

y ahora se utilizará la propiedad de linealidad en la segunda fila de cada determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2q & 2r & 2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} = \tag{279}$$

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ -3q & -3r & -3p \\ q & r & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2q & 2r & 2p \\ 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2q & 2r & 2p \\ -3q & -3r & -3p \\ q & r & p \end{vmatrix} \tag{280}$$

ahora se sacan las constantes de los determinantes

$$= 3\begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ q & r & p \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} q & r & p \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} q & r & p \\ q & r & p \\ q & r & p \end{vmatrix} \tag{281}$$

los últimos tres son cero puesto que tienen filas repetidas

$$= 3\begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} \tag{282}$$

y para este último se cambian las filas dos y tres

$$= 3\begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{f_2, f_3}}{=} -3\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = -9 \tag{283}$$

Así,

$$\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix} = -9 \tag{284}$$

3.8. Vectores e Independencia Lineal

Para terminar este capítulo de determinantes falta todavía dar una caracterización de cuando una matriz es invertible o no. Esta involucra los vectores fila y columna de una matriz.

Definición 29. Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ es una matriz $1 \times n$ se dice que x es un **vector fila de tamaño n.** Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es una matriz $n \times 1$ se dice que x es un **vector columna de tamaño n.**

Si $v_1, v_2, \cdots, v_m$ son m vectores (fila o columna) de tamaño n y $c_1, \cdots, c_m$ son m números reales a cualquier vector de la forma

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m \tag{285}$$

se le llamará una **combinación lineal de los vectores $v_1, ..., v_m$.**

Por ejemplo, si

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{286}$$

entonces

$$v = 2v_1 - v_2 + v_3 = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{287}$$

es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, v_3.$

A la inversa, suponga ahora que alguien nos da el vector $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ y nos pregunta si este vector es combinación lineal de $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Claramente sabemos que la respuesta es sí por lo anterior, pero suponiendo que no conociéramos la respuesta de antemano se desearía tener un método que determine que si un vector dado es combinación lineal o no de ciertos vectores.

Por definición de combinación lineal, para que v sea combinación lineal de v_1, v_2, v_3 ocupamos tres números reales c_1, c_2, c_3 tal que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \tag{288}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{289}$$

un simple cálculo muestra que la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 \\ c_1 + c_2 \\ 4c_1 + 3c_3 \end{pmatrix} \tag{290}$$

que de hecho equivale al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 3 \\ c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 + 3c_3 = 11 \end{cases} \tag{291}$$

que puede representarse como el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{292}$$

es decir, **determinar si un vector es una combinación lineal de otros vectores es equivalente al problema de determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución o no** tal como indica el siguiente resultado

Teorema 30. *Suponga que se tiene que un vector v y se quiere determinar si es combinación lineal de los vectores $v_1, \cdots, v_m$. Entonces se escriben los vectores $v, v_1, \cdots, v_m$ como* ***vectores columna*** *y se construye el sistema aumentado $(A \mid v)$ donde A es la matriz cuyas columnas son $v_1, \cdots, v_m$. Luego, si el sistema tiene* ***solución única o solución infinita****, entonces v* ***sí es combinación lineal*** *de los vectores $v_1, \cdots, v_m$. Por otro lado, si el sistema es* ***inconsistente****, v* ***no es combinación lineal*** *de $v_1, \cdots, v_m$.*

Para que dar un ejemplo explícito de lo anterior, considere el siguiente problema.

Problema 31. *(primer examen parcial segundo semestre 2003)*
Determine si v_4 es combinación lineal de v_1, v_2, v_3 donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{293}$$

Al igual que el ejemplo anterior, para determinar si v_4 es combinación lineal (a veces se le dirá *c.l*) de v_1, v_2, v_3 basta resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{294}$$

Esto se puede resolver utilizando Gauss-Jordan y el resultado de la matriz aumentada da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -15 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{295}$$

por lo que

$$v_4 = 2v_1 - v_2 - 2v_3 \tag{296}$$

es decir, sí es *c.l* de esos vectores.

El último concepto de este capítulo es el de independencia y dependencia lineal. La idea es que si **se tiene cualquier conjunto de vectores siempre se tiene que el vector nulo es combinación lineal de tales vectores.**

Por ejemplo, si

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{297}$$

entonces claramente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 \tag{298}$$

Sin embargo, también ocurre que para tales vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \tag{299}$$

lo cual significa que es posible escribir el vector nulo como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 en más de una forma. Cuando esto ocurra se dirá que los vectores son linealmente dependientes como indica la siguiente definición.

Definición 32. Sean $v_1, \cdots, v_m$ vectores de tamaño n.

- $v_1, \cdots, v_m$ son vectores **linealmente dependientes** ($l.d$) si el vector nulo puede escribirse como combinación lineal de $v_1, \cdots, v_m$ en más de una forma
- $v_1, \cdots, v_m$ son vectores **linealmente independientes** ($l.i$) si el vector nulo solo puede escribirse como combinación lineal de $v_1, \cdots, v_m$ según la ecuación $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m$

Ahora es necesario buscar una caracterización útil para poder determinar si $v_1, \cdots, v_m$ son $l.i$ o $l.d$. Suponga que $v_1, \cdots, v_m$ son $l.d$ y que por lo tanto el vector nulo puede escribirse como combinación lineal del resto de vectores, es decir, existen números $c_1, c_2, \cdots, c_m$ no todos nulos tal que

$$0 = cv_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m \tag{300}$$

donde suponemos que los vectores son vectores columna y denotamos con 0 al vector $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

. Entonces si formamos la matriz con columnas $A = (v_1, \cdots, v_m)$ por lo visto en los ejercicios anteriores tenemos que llamando $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m, \end{pmatrix}$

$$Ax = 0 \tag{301}$$

$$\tag{302}$$

como no todos los números $c_1, c_2, \cdots, c_m$ son cero se ha encontrado lo siguiente.

Teorema 33. *Suponga que $v_1, \cdots, v_m$ son m vectores columna de tamaño n. Si A es la matriz con vectores columna v_i, es decir, $A = (v_1, \cdots, v_m)$. Tales vectores son l.d si y solo si el sistema homogéneo*

$$Ax = 0 \tag{303}$$

tiene una solución no nula, es decir, tiene infinitas soluciones.
En caso contrario, es decir, si $Ax = 0$ solo tiene la solución trivial $x = 0$ entonces $v_1, \cdots, v_m$ son vectores l.i.

Con el teorema anterior podemos describir todas las condiciones que caracterizan una matriz invertible.

Teorema 34. *Sea A una matriz $n \times n$. A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. En tal caso,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A \tag{304}$$

En particular, las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es invertible
2. $Ax = b$ tiene solución única para todo b
3. $Ax = 0$ tiene solución única
4. $Rng(A) = n$
5. A es equivalente a 1_n
6. A es un producto de matrices elementales
7. $\det A \neq 0$
8. A tiene inversa derecha
9. A tiene inversa izquierda
10. Los vectores fila de A son linealmente independientes
11. Los vectores columna de A son linealmente independientes

Problema 35. *(primer examen parcial de reposición primer semestre 2007)*
Determine para qué valores de p los siguientes vectores son linealmente dependientes $(1, p, 1, p)$ $(2, p+1, p+1, 2)$ $(p-1, p, p-1, p)$

Para utilizar el teorema sobre dependencia lineal escribimos los vectores como vectores columna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ p+1 \\ p+1 \\ 2 \end{pmatrix} .v_3 = \begin{pmatrix} p-1 \\ p \\ p-1 \\ p \end{pmatrix} \tag{305}$$

y se forma la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ p & p+1 & p \\ 1 & p+1 & p-1 \\ p & 2 & p \end{pmatrix} \tag{306}$$

ahora hay que aplicar Gauss Jordan para determinar su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ p & p+1 & p \\ 1 & p+1 & p-1 \\ p & 2 & p \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-pf_1+f_2} \\ \xrightarrow{-f_1+f_3} \\ \xrightarrow{-pf_1+f_4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ 0 & -p+1 & -p^2+2p \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 2-2p & -p^2+2p \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_3+f_2} \\ \xrightarrow{2f_3+f_4} \end{matrix} \tag{307}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ 0 & 0 & -p^2+2p \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2+2p \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ 0 & 0 & -p^2+2p \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2,f_3} \tag{308}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2+2p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{309}$$

en este punto se proceden a hacer casos sobre el valor de p:

- **caso $p = 1$:** sustituyendo en (309) da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{310}$$

  en este caso $\mathrm{Rng}(A) = 2$ y el número de incógnitas era 3 lo cual significa que hay infinitas soluciones, es decir, los vectores son $l.d$ para $p = 1$

- **caso $p = 0$:** sustituyendo en (309) da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{311}$$

  y nuevamente es muy fácil observar que $\mathrm{Rng}(A) = 2$ por lo que nuevamente los vectores son $l.d$

- **caso $p = 2$:** sustituyendo en (309) da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{312}$$

  e igual que antes los vectores van a ser $l.d$

- **caso $p \neq 0, 1, 2$:** ahora es posible dividir la fila 2 de (309) por $p - 1$ y dividir la fila 3 por $-p^2 + 2p$ lo cual da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & p-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{313}$$

  y de aquí es muy fácil ver que $\mathrm{Rng}(A) = 3$ lo cual significa que la única solución es trivial, es decir, los vectores son $l.i.$

De esta forma concluimos que los únicos valores de p para los cuales los vectores son $l.d$ son $p = 0, 1, 2$

3.9. Problemas Adicionales

Ejemplo 36. *Problema 3 primer examen parcial reposición III ciclo 2010*

Si $|A| = |B| \neq 0$ **y** $|C| = 4, |D| = 2$ **donde** $A, B, C, D \in M(5, \mathbb{R})$ **calcule**

$$\left|A^T C^{-1} B^{-1} (3D^T)^{-1}\right| - \left|4CD^{-1}(A^{-1}B)^T\right| \tag{314}$$

Las propiedades fundamentales del determinante que se van a utilizar son:

1. $|A| = \left|A^T\right|$
2. $|AB| = |A|\,|B|$ (en general esto dice que el determinante de un producto es el producto de los determinantes, por ejemplo, $|ABC| = |A|\,|B|\,|C|$)
3. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$
4. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es decir, si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ entonces $|tA| = t^n\,|A|$ donde $t \in \mathbb{R}$

Primero se va a utilizar la propiedad 2.

$$\left|A^T C^{-1} B^{-1} (3D^T)^{-1}\right| - \left|4CD^{-1}(A^{-1}B)^T\right| \tag{315}$$

$$= \left|A^T\right| \left|C^{-1}\right| \left|B^{-1}\right| \left|(3D^T)^{-1}\right| - |4C| \left|D^{-1}\right| \left|(A^{-1}B)^T\right| \tag{316}$$

Ahora se utiliza 1.

$$= |A| \left|C^{-1}\right| \left|B^{-1}\right| \left|(3D^T)^{-1}\right| - |4C| \left|D^{-1}\right| \left|(A^{-1}B)\right| \tag{317}$$

Ahora se utiliza 3.

$$= |A| \frac{1}{|C|} \frac{1}{|B|} \frac{1}{|3D^T|} - |4C| \frac{1}{|D|} \left|(A^{-1}B)\right| \tag{318}$$

Ahora se utiliza 4. sabiendo que las matrices son de tamaño 5×5

$$= |A| \frac{1}{|C|} \frac{1}{|B|} \frac{1}{3^5\,|D^T|} - 4^5\,|C| \frac{1}{|D|} \left|(A^{-1}B)\right| \tag{319}$$

Ahora se utiliza 2.

$$= |A| \frac{1}{|C|} \frac{1}{|B|} \frac{1}{3^5\,|D^T|} - 4^5\,|C| \frac{1}{|D|} \left|A^{-1}\right| |B| \tag{320}$$

Ahora se utiliza 3.

$$= |A| \frac{1}{|C|} \frac{1}{|B|} \frac{1}{3^5\,|D^T|} - 4^5\,|C| \frac{1}{|D|} \frac{1}{|A|} |B| \tag{321}$$

Ahora se usa que $|A| = |B|$ y 1.

$$= \frac{1}{|C|} \frac{1}{3^5\,|D|} - 4^5\,|C| \frac{1}{|D|} \tag{322}$$

Ahora se usa que $|C| = 4, |D| = 2$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{2} - 4^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1944} - 2048 \tag{323}$$

3.9.1. Solución Primer Examen Parcial I Ciclo 2012

Problema 37. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + y + z = 0 \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \tag{324}$$

Utilizando el método de eliminación gaussiana:
a) Determine los valores de a para el cual el sistema no tiene solución
b) Resuelva el sistema para el valor de a en los cuales el sistema tiene infinitas soluciones
c) Encuentre los valores de a para los cuales, el sistema posee solución única, para el caso $a = 2$ calcule el valor de "y" utilizando la regla de Cramer

La matriz asociada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \tag{325}$$

haciendo Gauss-Jordan queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \xrightarrow[\xrightarrow{-f_1+f_3}]{-af_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1+a & -a^2 \\ 0 & 1-a & 1+a & a^2-a \end{array}\right) \xrightarrow{-f_3+f_2} \tag{326}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 0 & a-a^2 & 0 & a-2a^2 \\ 0 & 1-a & 1+a & a^2-a \end{array}\right) \xrightarrow{f_2, f_3} \tag{327}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1-a & 1+a & a(a-1) \\ 0 & a(1-a) & 0 & a(1-2a) \end{array}\right) \tag{328}$$

Ahora se proceden a hacer casos:
caso $a = 1$*:* (1) queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{329}$$

el cual es inconsistente.

$$\tag{330}$$

caso $a = 0$*:* (1) queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{331}$$

el sistema queda

$$\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \tag{332}$$

por lo que la solución es $S = \{(x,y,z) = (t,-t,t) : t \in \mathbb{R}\}$
caso $a \neq 0,1$ haciendo $\frac{1}{a(1-a)}f_3$ (1) queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1-a & 1+a & a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & (1-2a)/(1-a) \end{array}\right) \xrightarrow{f_2, f_3} \tag{333}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & (1-2a)/(1-a) \\ 0 & 1-a & 1+a & a(a-1) \end{array}\right) \xrightarrow[(a-1)f_2+f_3]{-af_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a^2/(1-a) \\ 0 & 1 & 0 & (1-2a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 1+a & a^2+a-1 \end{array}\right) \tag{334}$$

si $a = -1$ claramente el sistema es inconsistente. Si $a \neq -1$ se realiza $\frac{1}{a+1}f_3$ y queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a^2/(1-a) \\ 0 & 1 & 0 & (1-2a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2+a-1)/(a+1) \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & [a^2/(1-a)] + [(a^2+a-1)/(a+1)] \\ 0 & 1 & 0 & (1-2a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2+a-1)/(a+1) \end{array}\right) \tag{335}$$

Es decir,
a) El sistema no tiene solución si $a = 1, -1$
b) El sistema tiene infinitas soluciones si $a = 0$
c) El sistema tiene solución única si $a \neq 1, -1, 0$
Para el caso de $a = 2$ el sistema original es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \tag{336}$$

Para la regla de Cramer se toma $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ luego

$$y = \frac{\det Y}{\det A} \tag{337}$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2f_1+f_2 \\ -f_1+f_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{338}$$

desarrollando a lo largo de la primera columna

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 6 = -18 \tag{339}$$

Luego

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2f_1+f_2 \\ -f_1+f_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \tag{340}$$

desarrollando a lo largo de la primera columna

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 3 = -6 \tag{341}$$

Luego

$$y = \frac{-18}{-6} = 3 \tag{342}$$

Problema 38. Considere las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{343}$$

a) Aplicando el álgebra de matrices, determine la matriz numérica X que satisface la ecuación $(XC^t)^t = (3X)^t + A$

b) ¿Es el vector $(2, -3, 6)^t$ combinación lineal de los vectores columna de la matriz C?

$$(XC^t)^t = (3X)^t + A \tag{344}$$

transponiendo a ambos lados y usando que $(B^t)^t = B$ y $(A + B)^t = A^t + B^t$ se tiene que

$$XC^t = 3X + A^t \tag{345}$$

$$XC^t - 3X = A^t \tag{346}$$

$$X(C^t - 3I_3) = A^t \tag{347}$$

Luego

$$C^t - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{348}$$

desarrollando a lo largo de la tercera fila se tiene que

$$\left|C^t - 3I_3\right| = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \tag{349}$$

luego la matriz es $C^t - 3I_3$ es invertible y en (2) se tiene que

$$X = A^t(C^t - 3I_3)^{-1} \tag{350}$$

Luego para calcular $(C^t - 3I_3)^{-1}$ considere la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{351}$$

y reduciéndola se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \tag{352}$$

por lo que

$$(C^t - 3I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{353}$$

y

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \tag{354}$$

b) Considere la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \tag{355}$$

reduciéndola se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 43/8 \end{array}\right) \tag{356}$$

como lo anterior tiene solución el vector sí es combinación lineal de los vectores columna.

Problema 39. Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \tag{357}$$

a) ¿Para qué valores de x la matriz B es equivalente a la identidad?
b) Determine B^{-1} cuando $x = 2$
c) Si $x = -1$, ¿cuál es el rango de B?

a) Observe que

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-f_1 + f_3} \tag{358}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = x^2(x-1)(x+1) \tag{359}$$

Luego, $|B| = 0$ si y solo si $x = 0, 1, -1$, es decir, la matriz es invertible cuando $x \neq 0, 1, -1$ y en este caso (cuando es invertible) B es equivalente con la identidad.

$$\tag{360}$$

b) Cuando $x = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{361}$$

y se llega a

$$B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{362}$$

c) Con $x = -1$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{363}$$

y la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{364}$$

por lo que el rango es 2.

Problema 40. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **con** $|A| = 4$

a) Calcule $\left|3AA^tA^{-1}\right|$

b) Encuentre el determinante de la siguiente matriz B **aplicando únicamente propiedades del determinante**

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 4+2x & 5+2y & 6+2z \end{pmatrix} \tag{365}$$

a) Se van a usar las propiedades $|AB| = |A|\,|B|$, $|A| = |A^t|\,, \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$ y $|tA| = t^n\,|A|$ si $t \in \mathbb{R}, A \in M(n, \mathbb{R})$

$$\left|3AA^tA^{-1}\right| = 3^3\left|AA^tA^{-1}\right| = 27\,|A|\left|A^t\right|\left|A^{-1}\right| = 27\,|A|\,|A|\,\frac{1}{|A|} = 27\,|A| = 108 \tag{366}$$

b) Observe que

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 4+2x & 5+2y & 6+2z \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4+2x & 5+2y & 6+2z \end{vmatrix} \xrightarrow{-2f_2+f_3} \tag{367}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1,f_2} = -12\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -12\,|A| = -48 \tag{368}$$

3.9.2. Reposición Primer Examen Parcial I Ciclo 2012

Problem 41. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{369}$$

a) Calcule el determinante de A en términos de a
b) Usando el valor del determinante obtenido en a) responda:
I) ¿Para que valores de a A es invertible?
II) Calcule la inversa de A para $a = 0$
III) Si $a = -2$ ¿cuál es el rango de A?
IV) ¿Qué valores debe tomar a para que las columnas de A sean linealmente dependiente?

a) Como el valor del determinante no cambia al realizar una combinación lineal de filas

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2f_4 + f_3 =} \begin{vmatrix} 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{370}$$

y desarrollando a lo largo de la cuarta columna

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{371}$$

y desarrollando a lo largo de la primera columna

$$= (a-2) \begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)(a+2) \tag{372}$$

Es decir,

$$|A| = (a-2)(a+2) \tag{373}$$

I) A es invertible cuando $a \neq \pm 2$
II) Cuando $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{374}$$

y se considera

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{375}$$

haciendo Gauss-Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \tag{376}$$

Por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{377}$$

III) Cuando $a = -2$ la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{378}$$

haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{379}$$

por lo que el rango de A es 3

IV) Las columnas son linealmente dependientes cuando la matriz no es invertible, es decir, cuando $a = \pm 2$

Problema 42. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases} \tag{380}$$

Utilizando Gauss-Jordan determine

a) El valor de a para el cual el sistema no tiene solución

b) Resuelva el sistema para el valor de a en el que hay infinitas soluciones y encuentre estas soluciones

c) Encuentre los valores de a para los cuales, el sistema posee solución única

d) Para el caso $a = 0$ calcule el valor de y utilizando la regla de Cramer

La matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{array}\right) \tag{381}$$

se utiliza Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-f_1 + f_2} \\ \xrightarrow{-f_1 + f_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{array}\right) \tag{382}$$

$$\xrightarrow{-f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+2) & a - 2 \end{array}\right) \tag{383}$$

Ahora se analizan los casos

a) Caso $a = -2$: La matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \tag{384}$$

y claramente es inconsistente

b) Caso $a = 2$: La matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{385}$$

y el sistema es

$$\begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \tag{386}$$

es decir

$$S = \{(x, y, z) = (1 + 3t, 1 - 2t, t) \quad t \in \mathbb{R}\} \tag{387}$$

que es el caso de infinitas soluciones con un parámetro

c) Caso $a \neq \pm 2$: Se puede hacer $\frac{1}{(a-2)(a+2)} f_3$ y queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right) \tag{388}$$

y la matriz escalonada reducida es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{3}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right) \tag{389}$$

por lo que la solución es única

d) Cuando $a = 0$ la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \tag{390}$$

y

$$|A| = -4 \tag{391}$$

si

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \tag{392}$$

entonces

$$|Y| = 0 \tag{393}$$

Luego

$$y = \frac{|Y|}{|A|} = 0 \tag{394}$$

Problema 43. Considere un número real a distinto de 0 y de 1 y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{395}$$

a) Calcule $A^T(B + C)$

b) Encuentre $(aA + B)^{-1}$

c) Encuentre el valor de la matriz X que satisface $(XB)^T = C - (aXA)^T$

a)

$$A^T(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{396}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{397}$$

b)

$$(aA+B) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{398}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \tag{399}$$

Para hallar la inversa se toma

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{400}$$

y se hace Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-f_1+f_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \end{array} \right) \tag{401}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a}f_1} \xrightarrow{\frac{1}{a-1}f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -1/(a-1) & 1/(a-1) \end{array} \right) \tag{402}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{a}f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a/a(a-1) & -1/a(a-1) \\ 0 & 1 & -1/(a-1) & 1/(a-1) \end{array} \right) \tag{403}$$

Por lo que

$$(aA+B)^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & a \end{pmatrix} \tag{404}$$

c) De

$$(XB)^T = C - (aXA)^T \tag{405}$$

tomando transpuestas a ambos lados

$$XB = C^T - aXA \tag{406}$$

$$XB + aXA = C^T \tag{407}$$

$$X(B+aA) = C^T \tag{408}$$

$$X = C^T(aA+B)^{-1} \tag{409}$$

Sustituyendo

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a-1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & a \end{pmatrix} \tag{410}$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a^2-a & 0 \\ a^2-a & -(a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/a \end{pmatrix} \tag{411}$$

Problema 44. Considere $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ con $|A| = 6$. Usando solamente propiedades del determinantes calcule el determinante de $B = \begin{pmatrix} 3b+3c & c+a & 2b+2a \\ 3a+3b & c+b & 2a+2c \\ 3c+3a & b+a & 2b+2c \end{pmatrix}$

Tomando

$$|B| = \begin{vmatrix} 3b+3c & c+a & 2b+2a \\ 3a+3b & c+b & 2a+2c \\ 3c+3a & b+a & 2b+2c \end{vmatrix} \tag{412}$$

se factoriza un 3 y un2 de la primera y tercera columna respectivamente

$$|B| = 6 \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a+b & c+b & a+c \\ c+a & b+a & b+c \end{vmatrix} \tag{413}$$

usando la linealidad en la primera fila

$$|B| = 6 \left[\begin{vmatrix} b & c & a \\ a+b & c+b & a+c \\ c+a & b+a & b+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ a+b & c+b & a+c \\ c+a & b+a & b+c \end{vmatrix} \right] \tag{414}$$

haciendo $-f_1 + f_2$ en el primer determinante y $-f_1 + f_3$ en el tercer determinante

$$|B| = 6 \left[\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c+a & b+a & b+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ a+b & c+b & a+c \\ a & b & c \end{vmatrix} \right] \tag{415}$$

haciendo $-f_2 + f_3$ en el primer determinante y $-f_3 + f_2$ en el segundo

$$|B| = 6 \left[\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix} \right] \tag{416}$$

haciendo f_1, f_2 en el primer determinante y f_1, f_3 en el segundo determinante el valor del determinante cambia de signo en ambos y comparando con $|A|$ se llega a

$$|B| = 6\,[-6 - 6] = -72 \tag{417}$$

Problema 45. Considere la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ¿son los vectores columna de la matriz D linealmente independientes?

Observe que por Gauss Jordan la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{418}$$

como la matriz es 4×3 y el rango es 3 los vectores columna son linealmente independientes pues el sistema homogéneo tiene solución única

$$\tag{419}$$

3.9.3. Primer Examen Parcial II Ciclo 2012

Problema 46. Aplicando solamente el álgebra matricial, determine la matriz numérica X que satisface la ecuación

$$(3A + XB)^T = -(2X)^T + B \tag{420}$$

suponiendo que la matriz $2I + B$ es invertible.
Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{421}$$

Calcule X.

Si

$$(3A + XB)^T = -(2X)^T + B \tag{422}$$

transponiendo a ambos lados

$$3A + XB = -2X + B^T \tag{423}$$

pasando a sumar $-2X$ y a restar $3A$

$$XB + 2X = B^T - 3A \tag{424}$$

factorizando X por la izquierda

$$X(B + 2I) = B^T - 3A \tag{425}$$

como $B + 2I$ es invertible

$$X(B + 2I)(B + 2I)^{-1} = (B^T - 3A)(B + 2I)^{-1} \tag{426}$$

o bien

$$X = (B^T - 3A)(B + 2I)^{-1} \tag{427}$$

Reemplazando con los valores de A y B se tiene primero que

$$B^T - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 8 & -9 & 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ -1 & 7 & -15 \\ 11 & -15 & 6 \end{pmatrix} \tag{428}$$

y

$$B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{429}$$

por lo que para hallar la inversa de $B + 2I$ se considera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{430}$$

y haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{72}{216} & -\frac{40}{216} & -\frac{117}{216} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{24}{216} & \frac{27}{216} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{216} \end{array}\right) \tag{431}$$

y se obtiene que

$$(B+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{72}{216} & -\frac{40}{216} & -\frac{117}{216} \\ 0 & \frac{24}{216} & \frac{27}{216} \\ 0 & 0 & \frac{27}{216} \end{pmatrix} \tag{432}$$

Finalmente,

$$X = (B^T - 3A)(B+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ -1 & 7 & -15 \\ 11 & -15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{72}{216} & -\frac{40}{216} & -\frac{117}{216} \\ 0 & \frac{24}{216} & \frac{27}{216} \\ 0 & 0 & \frac{27}{216} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{144}{216} & -\frac{136}{216} & -\frac{9}{216} \\ -\frac{72}{216} & \frac{208}{216} & -\frac{99}{216} \\ \frac{792}{216} & -\frac{800}{216} & -\frac{1530}{216} \end{pmatrix} \tag{433}$$

(434)

Problema 47. Suponga que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & a & 2b \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \tag{435}$$

Usando únicamente propiedades del determinante calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & a+7 & 14 \\ 2 & a+5 & 10 \\ 0 & 2b+3 & 6 \end{vmatrix} \tag{436}$$

Utilizando la Regla de Cramer calcule el valor de y del siguiente sistema

$$\begin{cases} x + (a+7)y + 14z = 0 \\ 2x + (a+5)y + 10z = 2 \\ (2b+3)y + 6z = -5 \end{cases} \tag{437}$$

Recordando que el determinante de una matriz es igual al de su transpuesta se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & a+7 & 14 \\ 2 & a+5 & 10 \\ 0 & 2b+3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a+7 & a+5 & 2b+3 \\ 14 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a+7 & a+5 & 2b+3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \tag{438}$$

y haciendo la operación $-f_3 + f_2$ se obtiene

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a+7 & a+5 & 2b+3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & a & 2b \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \tag{439}$$

Para resolver el sistema observe que se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+7 & 14 \\ 2 & a+5 & 10 \\ 0 & 2b+3 & 6 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{440}$$

por la primera parte se tiene que

$$|A| = 6 \tag{441}$$

y si

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{442}$$

observe que

$$|Y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2f_1 + f_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} \tag{443}$$

desarrollando por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -18 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -78 \tag{444}$$

por lo que

$$y = \frac{|Y|}{|A|} = \frac{-78}{6} = -13 \tag{445}$$

Problema 48. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases} \tag{446}$$

Utilizando el método de eliminación gaussiana encuentre los valores de a para los cuales el sistema posee solución única, encuentre dicha solución.

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right) \tag{447}$$

Haciendo Gauss Jordan se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-3f_1+f_2} \\ \xrightarrow{-4f_1+f_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{array}\right) \tag{448}$$

$$\xrightarrow{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & (a-4)(a+4) & a - 4 \end{array}\right) \tag{449}$$

De aquí es claro que si $a = 4$ entonces el rango de la matriz aumentada es 2 por lo que el sistema tiene infinitas soluciones y si $a = -4$ el sistema es incosistente por lo que el sistema tiene solución única cuando $a \neq -4, 4$.

$$\xrightarrow[\frac{1}{(a-4)(a+4)}f_3]{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+4} \end{array}\right) \xrightarrow[2f_3+f_2]{-f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{7} - \frac{1}{a+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+4} \end{array}\right) \tag{450}$$

por lo que la solución única es $x = \frac{8}{7} - \frac{1}{a+4}$, $\quad y = \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4} \quad z = \frac{1}{a+4}$

Problema 49. Encuentre los valores de a para los cuales los vectores $v = (1, 3, -3, 5)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, a+4, a, 3)$ $v_2 = (1, 5, 0, 4)$ y $v_3 = (3, a^2 + 3a + 3, 3a, a^2)$

Se forma la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ a+4 & 5 & a^2+3a+3 & 3 \\ a & 0 & 3a & -3 \\ 3 & 4 & a^2 & 5 \end{array}\right) \tag{451}$$

y se realiza Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ a+4 & 5 & a^2+3a+3 & 3 \\ a & 0 & 3a & -3 \\ 3 & 4 & a^2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-(a+4)f_1+f_2} \\ \xrightarrow{-af_1+f_3} \\ \xrightarrow{-3f_1+f_4} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1-a & a^2-9 & -a-1 \\ 0 & -a & 0 & -3-a \\ 0 & 1 & a^2-9 & 2 \end{array}\right) \tag{452}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-f_4+f_1} \\ \xrightarrow{(a-1)f_4+f_2} \\ \xrightarrow{af_4+f_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12-a^2 & -1 \\ 0 & 0 & a(a^2-9) & a-3 \\ 0 & 0 & a(a^2-9) & a-3 \\ 0 & 1 & a^2-9 & 2 \end{array}\right) \tag{453}$$

reacomodando un poco se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12-a^2 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-9 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-3)(a+3) & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{454}$$

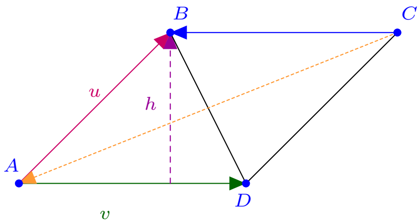
De aquí es claro que si $a = 0$ o $a = -3$ el sistema es inconsistente por lo que el vector no es combinación lineal. En cambio, si $a = 3$ el sistema tiene infinitas soluciones y si $a \neq 0, 3, -3$ el sistema tiene solución única por lo que el vector sí es combinación lineal en estos dos últimos casos.

Es decir, el vector es combinación lineal para $a \neq 0, -3$

Problema 50. Considere el paralelogramo cuyos vértices son $A = (0, 0, 1)$ $B = (1, 2, 2)$ $C = (5, 2, 2)$ $D = (4, 0, 1)$
a) Calcule el área del paralelogramo de vértices $ABCD$
b) ¿Es el triángulo formado por los vértices A, B, C rectángulo?

c) Encuentre el perímetro del paralelogramo $ABCD$
d) Calcule la altura de $\overrightarrow{AB}$ **sobre** $\overrightarrow{AD}$
e) Encuentre el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{CB}$ **y** $\overrightarrow{CA}$

Considere la siguiente figura



a) Sea

$$u = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,2) - (0,0,1) = (1,2,1) \tag{455}$$

$$v = \overrightarrow{AD} = D - A = (4,0,1) - (0,0,1) = (4,0,0) \tag{456}$$

Luego

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,4,-8) \tag{457}$$

y el área es

$$\text{área} = \|u \times v\| = 4\sqrt{5} \tag{458}$$

b) Observe que el ángulo en B es

$$\cos B = \frac{(-u)\cdot v}{\|-u\|\,\|v\|} = -\frac{4}{4\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \tag{459}$$

por lo que el ángulo es 114 grados. Luego, el triángulo ABC es obtusángulo y no rectángulo.
c) El perímetro es la suma de los lados del paralelogramo, como los lados opuestos miden igual

$$per\acute{i}metro = 2\,\|u\| + 2\,\|v\| = 2\sqrt{6} + 8 \tag{460}$$

d) Primero se calcula la proyección de u sobre v

$$\text{proy}_v u = \frac{u\cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{4}{16}(4,0,0) = (1,0,0) \tag{461}$$

y luego

$$h = u - \text{proy}_v u = (1,2,1) - (1,0,0) = (0,2,1) \tag{462}$$

y

$$\|h\| = \sqrt{5} \tag{463}$$

e) Si θ es el ángulo entre $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} \tag{464}$$

ahora bien

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (1,2,2) - (5,2,2) = (-4,0,0) \tag{465}$$

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (0,0,1) - (5,2,2) = (-5,-2,-1) \tag{466}$$

por lo que

$$\cos\theta = \frac{20}{4\sqrt{30}} \tag{467}$$

y

$$\theta = 24{,}09^\circ \tag{468}$$

Problema 51. Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & b & 1 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix} \tag{469}$$

a) ¿Para qué valores de b es la matriz A invertible?
b) ¿Cuáles valores de b hacen que el rango de A sea menor a 3?
c) ¿Qué valores de b hacen que los vectores columna de A sean linealmente dependientes?
d) Calcule A^{-1} para $b = 0$
e) Encuentre $\left|3A^{-1}A^T\right|$ para $b = 2$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & b & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} \xrightarrow[\xrightarrow{-3f_1+f_3}]{2f_1+f_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & b-4 & -3 \\ 0 & 7 & b+6 \end{vmatrix} \tag{470}$$

desarrollando por la primera columna

$$= \begin{vmatrix} b-4 & -3 \\ 7 & b+6 \end{vmatrix} = b^2 + 2b - 24 + 21 = b^2 + 2b - 3 = (b+3)(b-1) \tag{471}$$

por lo que la matriz es invertible cuando $b \neq 1, -3$

b) El rango de A es menor que 3 cuando la matriz no es invertible, es decir, cuando $b = 1, -3$

c) Las columnas son linealmente dependientes cuando A no es invertible, es decir, cuando $b = 1, -3$

d) Se considera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{472}$$

y haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \tag{473}$$

por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{474}$$

e)

$$\left|3A^{-1}A^T\right| = 3^3 \left|A^{-1}\right| \left|A^T\right| = 27 \tag{475}$$

3.9.4. Parte 1 Examen Ampliación I Ciclo 2012

Problema 52. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 3y + (1-a)z = 0 \\ x + ay - z = 0 \\ (2-a) + 3y = 0 \end{cases} \tag{476}$$

a) Determine los valores de a para el cual el sistema tiene solamente la solución nula
b) Resuelva el sistema para el valor de a en los cuales el sistema tiene infinitas soluciones

Se forma la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-a \\ 1 & a & -1 \\ 2-a & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{477}$$

y se reduce por Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-a \\ 1 & a & -1 \\ 2-a & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{(a-2)f_1+f_3}{\xrightarrow{-f_1+f_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-a \\ 0 & a-3 & a-2 \\ 0 & 3a-3 & (1-a)(a-2) \end{pmatrix} = A \tag{478}$$

Ahora deben hacerse casos sobre los valores de a
caso $a = 3$
La matriz A sería

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \tag{479}$$

y es claro que el rango de esta matriz es 3 por lo que el sistema homogéneo solo tiene solución nula.
caso $a \neq 3$
Ahora se puede hacer $\frac{f_2}{a-3}$ sobre la matriz A y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-a \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{a-3} \\ 0 & 3a-3 & (1-a)(a-2) \end{pmatrix} \underset{(3-3a)f_2+f_3}{\xrightarrow{-3f_2+f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a-3\frac{a-2}{a-3} \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{a-3} \\ 0 & 0 & (1-a)(a-2)+3(1-a)\frac{a-2}{a-3} \end{pmatrix} \tag{480}$$

y como $(1-a)(a-2)+3(1-a)\frac{a-2}{a-3} = (1-a)(a-2)\frac{a}{a-3}$ se tiene la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a-3\frac{a-2}{a-3} \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{a-3} \\ 0 & 0 & (1-a)(a-2)\frac{a}{a-3} \end{pmatrix} \tag{481}$$

y se vuelven a hacer casos sobre los valores de a

subcaso $a = 1$

La matriz B se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{482}$$

y la solución es infinita de la forma

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases} \tag{483}$$

o bien $\left\{(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$

subcaso $a = 2$

La matriz B se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{484}$$

y la solución es infinita de la forma

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \tag{485}$$

o bien $\{(x, y, z) = (t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$

subcaso $a = 0$

La matriz B se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{486}$$

y la solución es infinita de la forma

$$\begin{cases} x = z \\ y = -\frac{2z}{3} \end{cases} \tag{487}$$

o bien $\left\{(x, y, z) = \left(t, -\frac{2}{3}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$

subcaso $a \neq 0, 1, 2$

Aquí es claro que la matriz B va a terminar con rango 3 por lo que la solución del sistema es la nula. Así A tiene solución nula cuando $a \neq 0, 1, 2$ y cuando $a = 0, 1, 2$ las soluciones infinitas son las anteriores.

Problema 53. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{488}$$

a) Exprese AC como combinación lineal de las columnas de A

Observe que

$$AC = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{489}$$

y para escribir AC como combinación lineal de las columnas de A hay que considerar el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{490}$$

y haciendo Gauss-Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{491}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{492}$$

b) ¿Son las filas de A linealmente dependientes?
Desarrollando $\det A$ a lo largo de la tercera fila se tiene que $\det A = 2 \neq 0$ se tiene que las filas son linealmente independientes
c) Calcule $\det(2AA^T)$
Por las propiedades se tiene que

$$\det(2AA^T) = 2^3 \det A \det A = 2^5 = 32 \tag{493}$$

d) ¿Es A invertible? En caso afirmativo calcule su inversa
Como $\det A \neq 0$ se tiene que es invertible y para calcularla se considera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{494}$$

y haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \tag{495}$$

por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{496}$$

Problema 54. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-a \\ 4-a & 3 & -3 \\ 4 & -a & 2 \end{pmatrix} \tag{497}$$

a) Calcule $\det A$ en términos de a
Desarrollando por la primera fila

$$\det A = (2-a)(a^2 - 4a - 12) = (2-a)(a-6)(a+2) \tag{498}$$

b) ¿Para qué valores de a el rango de A es menor que 3?

Si $\det A = 0$ entonces A no es invertible por lo que su rango es menor que 3. Así, cuando $a = -2, 2, 6$ el rango de A es menor que 3

Problema 55. Sean $u = (1, 0, -1)$ $v = (-1, 1, 0)$ **vectores de** $\mathbb{R}^3$
a) Cálcule el ángulo θ **entre** $2u$ **y** $3v$

$$\cos\theta = \frac{2u \cdot 3v}{\|2u\| \, \|3v\|} = -\frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \tag{499}$$

por lo que

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \tag{500}$$

b) ¿Encuentre un vector que sea ortogonal tanto a u **como a** v?
Para esto se toma

$$w = u \times v = (1, 1, 1) \tag{501}$$

c) Calcule el área del paralelogramo que determinan $2u$ **y** $3v$
Se tiene que

$$\text{área} = \|(2u) \times (3v)\| = 6\,\|u \times v\| = 6\,\|w\| = 6\sqrt{3} \tag{502}$$

4. Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^n$

En la primera parte del curso se estudiaron sistemas de ecuaciones lineales y las matrices aparecieron como una forma conveniente de estudiar si un sistema poseía solución o no. En particular, un tipo particular de matrices que apareció al final del capítulo anterior fueron las matrices de tamaño $n \times 1$ y $1 \times n$ que fueron llamadas vectores columna y fila respectivamente. El conjunto de todos los vectores (sean fila o columna) se denota como $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \tag{503}$$

Los vectores ocuparán gran parte de lo que quedan del curso puesto que poseen propiedades geométricas muy importantes que generalizan las geometría del plano y del espacio estudiadas en un curso básico de geometría euclídea.

Hay varias formas de denotar un vector, en este capítulo se representará a un vector la mayor parte del tiempo como una letra con flecha, por ejemplo, $\overrightarrow{v}$, lo cual enfatizará el sentido geométrico que poseen los vectores.

4.1. Representación Geométrica de Vectores

4.1.1. Vectores en el Plano

Suponga que $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$, es decir, $\overrightarrow{a} = (x, y)$ donde x y y son números reales. Queremos encontrar una representación geométrica para tal vector. El método más fácil para realizar esto es siguiente: tome una hoja en blanco y sobre ella marque un punto como O (que llamaremos el origen). Luego sobre tal punto dibuje un sistema de coordenadas cartesianas x, y (es decir, dos líneas rectas que son perpendiculares y se intersecan en O). Luego $\overrightarrow{a}$ es el punto sobre el plano que representa el par ordenado (x, y). Por ejemplo, si $\overrightarrow{a} = (2, 3)$ representaríamos el vector como indica la figura siguiente:

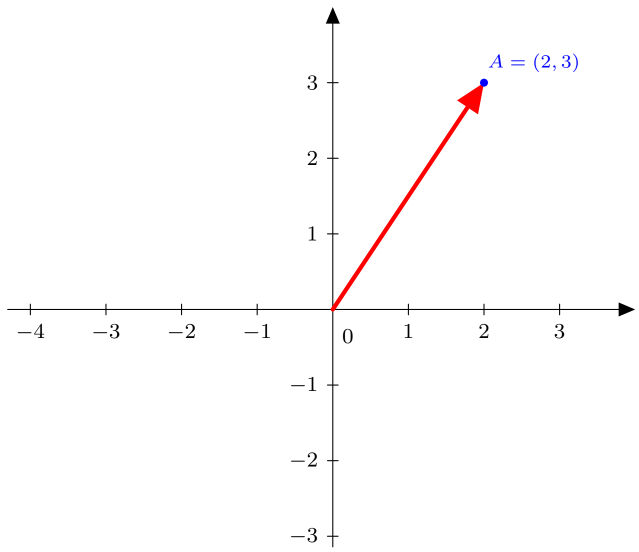


Figura 6: Vector como punto sobre el plano

La discusión anterior quiere decir que **geométricamente un vector es un punto sobre el plano cartesiano x, y.**

Ahora bien, como se notó de la construcción anterior la elección del punto O fue arbitraria, es decir, alguien pudo haber escogido otro punto sobre la hoja como su origen. Debido a esa arbitrariedad, existe otra caracterización de un vector que no depende de esa elección de un sistema cartesiano (es decir, es independiente del sistema de coordenadas). Tal caracterización se puede ver del dibujo anterior donde se trazó una flecha azul desde el origen al punto A. En vez de pensar en el vector como el punto A, pensaremos en el vector $\overrightarrow{a}$ como la flecha azul que sale del origen y termina en el punto A. Más aún, lo único importante es la flecha en sí, es decir, la dirección que esta tiene y la longitud que esta posee. Es decir, **geométricamente un vector es una flecha dirigida, es decir, un objeto con dirección y longitud (magnitud).** Para que quede claro lo que significa lo anterior, considérese la siguiente figura

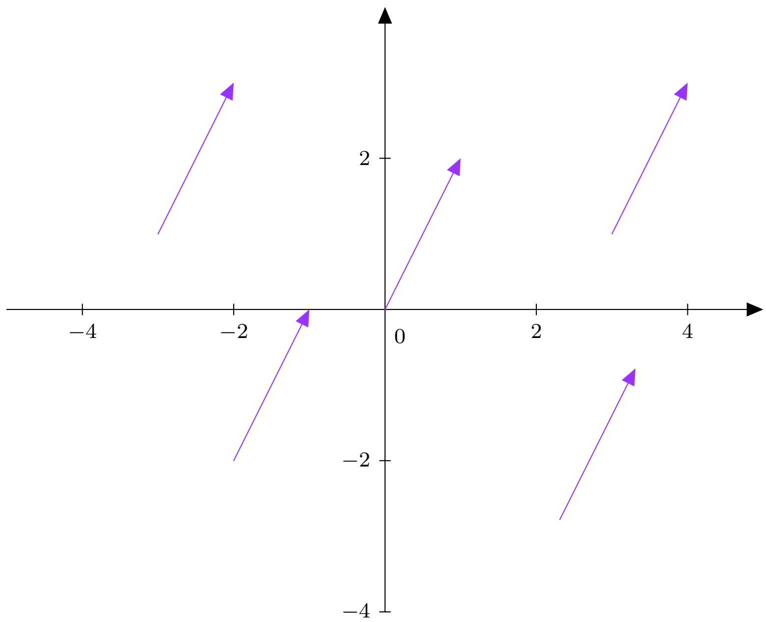


Figura 7: Vector como flecha dirigida sobre el plano

Como puede verse en la figura, todas los vectores anteriores tienen el mismo tamaño y la misma dirección por lo que bajo nuestra segunda definición serán considerados los mismos vectores, es decir, **dos vectores en el plano serán considerados el mismo si poseen la misma longitud y dirección.**

De lo anterior se tiene que hay dos formas de representar un vector: como un punto y como una flecha dirigida. Alguien podría preguntarse cuál es más correcta, es decir, cuál es la verdadera. La respuesta es: ¡ambas lo son! Es decir, hay momentos en que es más útil pensar en un vector como un punto y otros en los que es más útil en pensar en un vector como una flecha, solo la práctica ayudará a determinar cual es más conveniente en cada instante.

4.1.2. Vectores en el espacio

Al igual que antes, si $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$, podemos escribir $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$. Nuevamente existen las dos representaciones geométricas para $\overrightarrow{a}$, es decir, pensar en el vector como un punto en un sistema cartesiano x, y, z (que es lo que se indica en la siguiente figura)

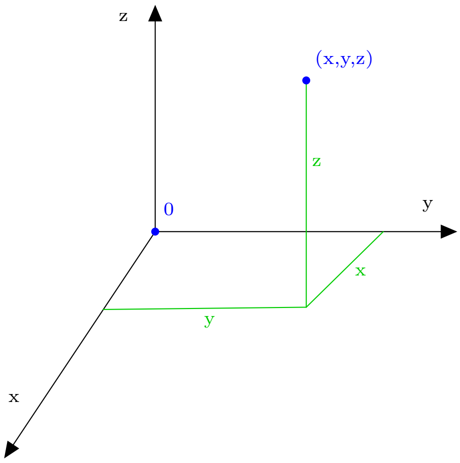


Figura 8: Vector como punto en el espacio

o bien como una flecha en el espacio (que es lo que se indica en la siguiente figura)

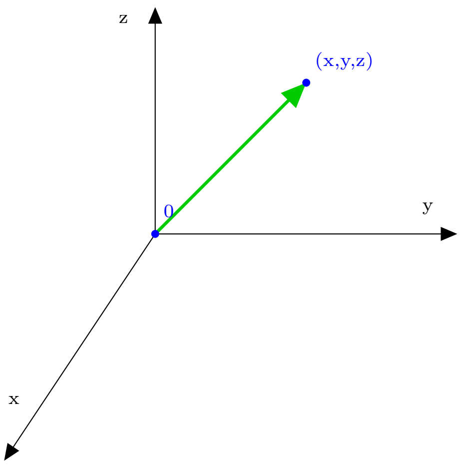


Figura 9: Vector como flecha dirigida en el espacio

4.1.3. Vectores en $\mathbb{R}^n$

Cuando n es mayor que tres, lamentablemente no es posible hacer una representación visual de un vector en tal espacio de más dimensiones. Sin embargo, la discusión anterior se sigue en el sentido de que pensamos en esos vectores como representantes de "puntos" y "flechas" en un espacio de dimensionalidad más grande que en el que vivimos.

4.2. Operaciones Algebraicas entre Vectores

4.2.1. Multiplicación de un vector por un número real

Suponga que $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Podemos escribir $\overrightarrow{v} = (x_1, \cdots, x_n)$. Suponga ahora que $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $\lambda\overrightarrow{v}$ en forma análoga en que se definió la multiplicación de una matriz por un número real,

es decir,

$$\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{504}$$

Para el significado geométrico de tal operación es mejor pensar en un vector como una flecha. De esta forma, se tienen los siguientes casos:

- $\lambda > 1$: En este caso $\lambda\overrightarrow{v}$ representa un vector con la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ pero que se ha expandido, es decir, su longitud ha aumentado por un factor de λ
- $0 < \lambda < 1$: En este caso $\lambda\overrightarrow{v}$ representa un vector con la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ pero que se ha contraído, es decir, su longitud ha disminuido en un factor de λ
- $\lambda = 0$: En este caso $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ es decir, es el vector nulo, el cual se representa sencillamente como un punto pues no tiene tamaño
- $-1 < \lambda < 0$: En este caso $\lambda\overrightarrow{v}$ representa un vector con dirección opuesta a $\overrightarrow{v}$ y que se ha contraído, es decir, su longitud ha disminuido en un factor de λ
- $\lambda < -1$: En este caso $\lambda\overrightarrow{v}$ representa un vector con dirección opuesta a $\overrightarrow{v}$ pero que se ha expandido, es decir, su longitud ha aumentado por un factor de λ

Los casos anteriores se ilustran en la siguiente figura

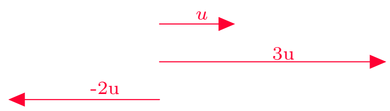


Figura 10: Multiplicación de un vector por un número real

4.2.2. Suma y Resta de Vectores

Definir la suma y resta de vectores es igual de fácil a la definición que se dió para las matrices. Si $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\overrightarrow{w} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ se define

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \tag{505}$$

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) - (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n) \tag{506}$$

Lo difícil será interpretar geométricamente la suma y resta de vectores. Para hacer esto se considera el caso sobre $\mathbb{R}^2$. Si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ la siguiente figura representa $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

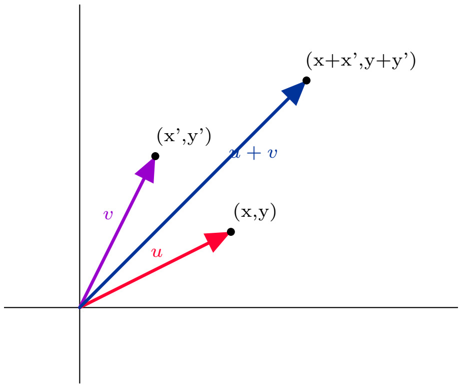


Figura 11: Suma de vectores en el plano

De la figura anterior pueden inferirse dos métodos para definir la suma de vectores:

- **Método 1: suma de vectores como la completación del triángulo:** De la figura se nota que para construir $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ primero se puede tomar el vector $\overrightarrow{a}$ y mover el vector $\overrightarrow{b}$ de forma que el origen del vector $\overrightarrow{b}$ coincida con la flecha del vector $\overrightarrow{a}$ (es decir, con el lugar donde termina) y así $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ es el vector que resulta de completar el triángulo que tiene lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Note que como $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ se pudo haber tomado primero el vector $\overrightarrow{b}$ y haber movido el vector $\overrightarrow{a}$ de forma que coincidiera su inicio con el final del vector $\overrightarrow{b}$ y de esa forma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ es nuevamente el vector que resulta de completar ese triángulo

- **Método 2: suma de vectores como la diagonal del paralelogramo:** De la figura puede verse que es posible formar un paralelogramo con dos lados siendo $\overrightarrow{a}$ y los otros dos siendo $\overrightarrow{b}$. Bajo esta interpretación, la diagonal indicada en la figura representaría $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. (la otra diagonal del paralelogramo representa de hecho al vector $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ o $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ dependiento de donde se coloque la flecha del vector)

De lo anterior se tiene entonces que la suma de vectores de mayor tamaño debería comportarse similarmente lo cual se representa de la siguiente forma

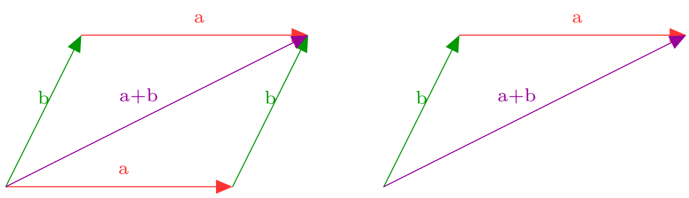


Figura 12: Ambos métodos para la suma de vectores

Para restar vectores se aprovecha el hecho de que

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{w}) \tag{507}$$

es decir, **para hacer $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ primero se construye $-\overrightarrow{w}$ como el vector opuesto a $\overrightarrow{w}$ y luego se realiza la suma de vectores (con el método geométrico anterior)** $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{w})$. La siguientes figura ilustra el método

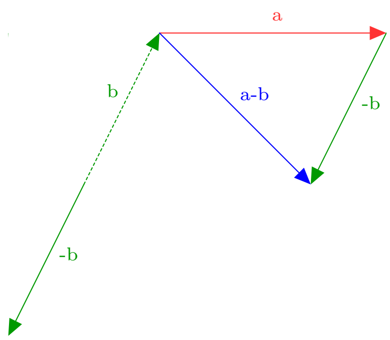


Figura 13: Resta de vectores

La siguiente figura ilustra tanto la suma como la resta de vectores según el método del paralelogramo

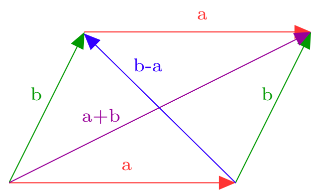


Figura 14: Suma y Resta de vectores

4.2.3. Vectores paralelos

De lo visto en las secciones anteriores se tiene:

- Si $\overrightarrow{a} = t\overrightarrow{b}$ con $t > 0$ se puede interpretar el vector $\overrightarrow{a}$ como el vector tiene la misma dirección que $\overrightarrow{b}$ y una longitud modificada por un factor de t. En tal caso decimos que $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son **paralelos.** Es decir, dos vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son paralelos si existe $t > 0$ tal que $\overrightarrow{a} = t\overrightarrow{b}$. Si $t < 0$ se llaman **antiparalelos**

- Recordando que es posible interpretar los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ como puntos en el espacio entonces de define $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ como el vector que comienza en el punto b y termina en el punto a y similarme $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ es el vector que comienza en el punto a y termina en el punto b. Esta es la interpretación geométrica para la resta entre vectores vistos como puntos.

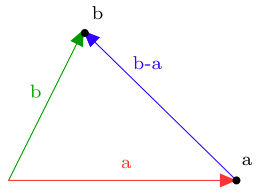


Figura 15: Resta de vectores vistos como puntos en el espacio

4.3. Interpretación Geométrica de la Combinación Lineal de Vectores

Considere un sistema de ecuaciones como

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \tag{508}$$

Al inicio del curso se vio que tales sistemas corresponden a los puntos de intersección de las rectas que representan las ecuaciones. Ahora se introducirá otra interpretación posible de los sistemas de ecuaciones. Primero que todo, gracias al producto matricial el sistema anterior puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{509}$$

y ya se vio que esto último también es igual a

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{510}$$

Ahora bien, si se utiliza la siguiente notación

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{511}$$

la última ecuación es lo mismo que

$$xu + yv = b \tag{512}$$

que corresponde a determinar si el vector b es combinación lineal de los vectores u, v. Un cálculo sencillo muestra que la solución del sistema de ecuaciones originales era $x = 2, y = 3$, es decir,

$$2u + 3v = b \tag{513}$$

La nueva interpretación geométrica es la siguiente: como u, v, b son vectores en el plano se pueden representar geométricamente tal como indica la siguiente figura

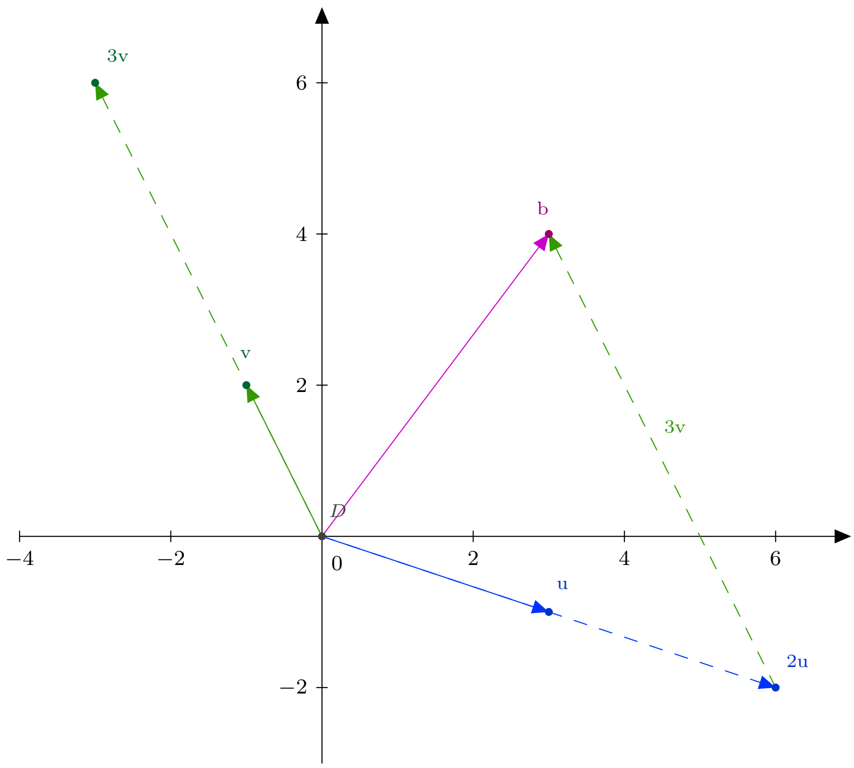


Figura 16: Combinación lineal de vectores

Luego, xu y yv se representarían como vectores paralelos a u y v respectivamente. Es decir, se están buscando por cuales números x, y hay que multiplicar u y v para que al sumarlos den el vector b. Como la solución era $x = 2$ y $y = 3$ entonces había que hacer 2 veces más grande u y 3 veces más grande v. Lo anterior se puede decir de la siguiente forma:

- Determinar si un vector b es combinación lineal de vectores $v_1, \cdots, v_m$ es equivalente a encontrar "factores de escala" $x_1, \cdots, x_m$ que hagan que b se pueda escribir como la suma vectorial de $xv_{11}, \cdots, x_m v_m$.
- Equivalentemente, resolver el sistema $Ax = b$ es lo mismo que determinar si existen "factores de escala" $x_1, \cdots, x_m$ que hagan que b se pueda escribir como la suma vectorial de $xv_{11}, \cdots, x_m v_m$ donde $v_1, \cdots, v_m$ son las columnas de la matriz A.

4.4. Producto Escalar de Vectores

El producto escalar o producto punto entre dos vectores es uno de los conceptos más importantes del álgebra lineal puesto que permite definir la longitud de cualquier vector de cualquier tamaño así como el ángulo entre dos vectores del mismo tamaño. Implícitamente se utiliza a la hora de realizar la multiplicación entre matrices pero la motivación principal para el producto punto es el teorema de Pitágoras y la ley de cosenos como se verá adelante.

4.4.1. Producto Escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Suponga que $\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{r} = (x, y)$. Sabemos representar $\overrightarrow{r}$ como un punto en el plano de la siguiente forma

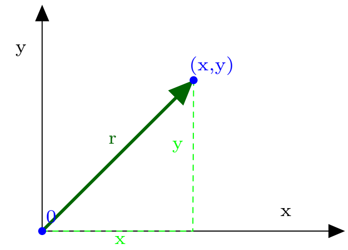


Figura 17: Vector en el plano y triángulo rectángulo asociado

De esta figura es muy claro que podemos pensar en $\overrightarrow{r}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y por el teorema de Pitágoras sabemos que su hipotenusa mide $\sqrt{x^2 + y^2}$. Así es natural definir la magnitud (longitud) de $\overrightarrow{r}$ como

$$\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{514}$$

donde $\|\overrightarrow{r}\|$ va a ser una notación que se utilizará para hablar de la norma (magnitud) de un vector. Claramente

$$\|\overrightarrow{r}\|^2 = x^2 + y^2 \tag{515}$$

y definimos el producto punto (escalar) de un vector consigo mismo como $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}$ y que viene dado por la fórmula.

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r} = \|\overrightarrow{r}\|^2 = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2 \tag{516}$$

es decir, el producto punto de un vector consigo mismo corresponde a multiplicar cada entrada del vector consigo mismo y luego sumarlas.

Ahora suponga que $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ como se indica en la figura siguiente

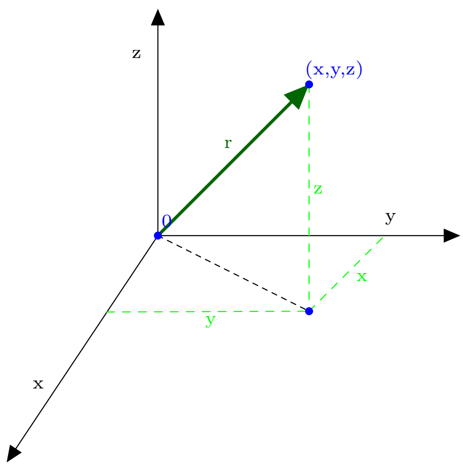


Figura 18: Vector en el espacio y componentes asociadas

Nuevamente sabemos por el teorema de Pitágoras que si pensamos en $\overrightarrow{r}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo entonces

$$\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{517}$$

Y nuevamente podríamos definir el producto escalar de $\overrightarrow{a}$ consigo mismo como

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{518}$$

La idea ahora será considerar el producto escalar como una noción más fundamental que el concepto de magnitud de un vector y definir a partir del producto escalar la magnitud de este tal como indica la siguiente definición.

Definición 56. Sean $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el **producto escalar** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ como

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{519}$$

a su vez, se define la **norma de** $\overrightarrow{u}$ como

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{520}$$

Por ejemplo, si

$$\overrightarrow{u} = (1, -2, 5, 6) \quad \overrightarrow{v} = (-1, 0, 1, 4) \tag{521}$$

entonces

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1)(-1) + (-2)(0) + (5)(1) + (6)(4) = -1 + 5 + 24 = 28 \tag{522}$$

Es fácil mostrar las siguientes propiedades del producto punto entre vectores.

Teorema 57. *Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Las siguientes propiedades son válidas para el producto escalar y la magnitud de un vector:*

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ si y solo si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\|\overrightarrow{u}\| \geq 0$
- $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si y solo si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\left\|\overrightarrow{\lambda u}\right\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\|$
- $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$
- **Desigualdad Triangular:** $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$

4.4.2. Distancia entre dos puntos:

Con la definición de norma de un vector se puede definir la distancia entre dos puntos. Sabemos que dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ pueden representarse como dos vectores $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}$. Por otro lado, $\overrightarrow{PQ}$ se había interpretado geométricamente como la flecha que sale desde P y termina en Q y es natural pensar que la norma de tal vector representaría entonces la distancia entre los puntos P y Q por lo que se define

$$d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \|Q - P\| = \|P - Q\| \tag{523}$$

4.4.3. Ángulo entre vectores:

Al inicio se había mencionado que el producto escalar era una generalización del teorema de Pitágoras y de la ley de cosenos. Ya se vió como aparece el teorema de Pitágoras, ahora es hora de entender la relación entre el producto escalar y la ley de cosenos.

Si se tiene el siguiente triángulo

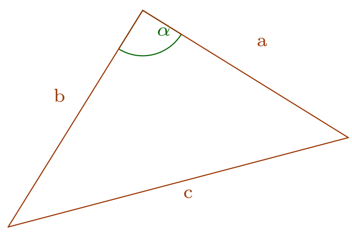


Figura 19: Triángulo arbitrario de lados a, b, c

la ley de cosenos establecía que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \tag{524}$$

Queremos traducir la ley de cosenos en un enunciado sobre vectores. La idea va a ser utilizar la ley de cosenos como una forma de definir el ángulo entre dos vectores, pero, **para medir el ángulo entre dos vectores es necesario que estos inicien en el mismo punto del espacio.** Por ejemplo, en la siguiente figura

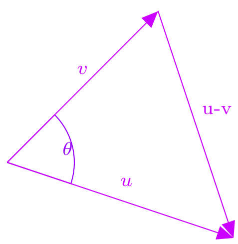


Figura 20: Ángulo entre dos vectores

θ sí representa el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ ya que ambos tienen el mismo origen en la figura, por lo que aplicando la ley de cosenos a este triángulo tenemos que

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta \tag{525}$$

y recordando que $\|\overrightarrow{w}\|^2 = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}$ tenemos que

$$\tag{526}$$

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta \tag{527}$$

y usando la distributividad del producto punto

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta \tag{528}$$

cancelando los términos comunes a ambos lados de la igualdad

$$-\,2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta \tag{529}$$

o bien

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} \tag{530}$$

es decir, hemos logrado definir el coseno de un ángulo únicamente utilzando el concepto de producto escalar. El resultado anterior motiva la siguiente definición.

Definición 58. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, se define el ángulo θ entre los vectores como

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}\right] \tag{531}$$

Siempre se toma el ángulo entre 0 radianes y π radianes

Ahora que hemos definido el ángulo entre dos vectores, podemos preguntarnos cuando dos vectores son perpendiculares. Obviamente esto debería ocurrir cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y sustituyendo en (531) se tendría que

$$\frac{\pi}{2} = \cos^{-1}\left[\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}\right] \tag{532}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} \tag{533}$$

$$0 = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} \tag{534}$$

y como el denominador no puede ser 0 se concluye que

$$0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \tag{535}$$

de lo anterior entonces se motiva la siguiente definición.

Definición 59. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, se dice que son **ortogonales o perpendiculares** si

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \tag{536}$$

4.4.4. Proyecciones Ortogonales

Suponga que tenemos dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y deseamos descomponer el vector $\vec{a}$ como una suma de dos vectores

$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} \tag{537}$$

tal que $\vec{a_1}$ “yace” sobre $\vec{b}$ y $\vec{a_2}$ es perpendicular a $\vec{b}$.

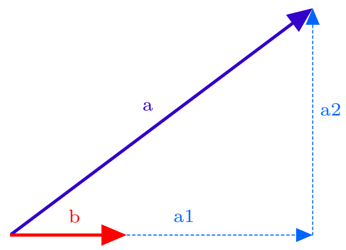


Figura 21: Proyección de un vector sobre otro vector

De ser posible tal descomposición (537) diremos que $\vec{a_1}$ es la **proyección ortogonal de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$.** El objetivo de esta sección es mostrar que tal descomposición existe para cualesquiera vectores no nulos.

De las condiciones mencionadas para la descomposición podemos concluir que:

1. $\vec{a_1} = t\vec{b}$ para algún número real t ya que queremos que $\vec{a_1}$ sea un vector a lo largo del vector $\vec{b}$ lo cual significa que es esencialmente una contracción o dilatación de $\vec{b}$
2. $\vec{a_2} \cdot \vec{b} = 0$ ya que queríamos que esos dos vectores fueran perpendiculares
3. $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$ pues eso es sencillamente la descomposición buscada.

Sustituyendo 1) en 3) tenemos que

$$\vec{a} = t\vec{b} + \vec{a_2} \tag{538}$$

Ahora multiplicamos (con el producto punto) la ecuación anterior por $\vec{b}$ para obtener

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a_2} \cdot \vec{b} \tag{539}$$

y por 2) tenemos que $\vec{a_2} \cdot \vec{b} = 0$ por lo que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t\,\|b\|^2 \tag{540}$$

es decir,

$$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2} \tag{541}$$

con este valor de t sustituimos en 1) para obtener

$$\vec{a_1} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}\vec{b} \tag{542}$$

y sustituyendo la última ecuación en 3) tenemos

$$\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{b} \right\|^2} \overrightarrow{b} \tag{543}$$

De lo anterior hemos resuelto completamente el problema por lo que definimos a continuación.

Definición 60. Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$ no nulos se define la **proyección ortogonal de $\overrightarrow{a}$ sobre $\overrightarrow{b}$** como

$$Proy_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{b} \right\|^2} \overrightarrow{b} \tag{544}$$

y $\overrightarrow{a} - Proy_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$ se conoce como la **componente de $\overrightarrow{a}$ ortogonal a $\overrightarrow{b}$.**

4.5. El Producto Cruz en $\mathbb{R}^3$

El producto escalar tiene la particularidad de que es el producto entre dos vectores que da como resultado un número real. Ahora bien, en $\mathbb{R}^3$ existe un producto adicional entre vectores, llamado el producto cruz, que produce otro vector (y no un número real). Se enfatiza que **el producto cruz solo se definirá en $\mathbb{R}^3$[4].**

Observe que si $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ entonces $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ y puede descomponerse según

$$\overrightarrow{u} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \tag{545}$$

$$= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \tag{546}$$

$$= xe_1 + ye_2 + ze_3 \tag{547}$$

donde

$$e_1 = (1, 0, 0) \tag{548}$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \tag{549}$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \tag{550}$$

los vectores e_1, e_2, e_3 se conocen como los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ (a veces reciben otra notación, por ejemplo, $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$). El producto cruz tendrá como una de sus consecuencias que permitirá hallar un vector perpendicular a cualesquiera dos vectores dados.

[4]Es posible generalizar el producto cruz a más dimensiones pero no todas las propiedades siguen siendo válidas por lo que no se explorará más este tema

Definición 61. Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define el **producto cruz** entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{551}$$

la fórmula anterior puede obtenerse desarrollando el siguiente “determinante”

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{552}$$

donde estrictamente hablando lo anterior no es un determinante pues en la primera fila hay vectores en vez de números, pero si se desarrolla el determinante anterior a lo largo de la primera fila y se tratan los vectores canónicos como si fueran números entonces se recupera la fórmula anterior.

Por ejemplo, si

$$\vec{u} = (1, -2, 3) \quad \vec{v} = (0, 5, 6) \tag{553}$$

entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \tag{554}$$

$$= -27e_1 - 6e_2 + 5e_3 = (-27, -6, 5) \tag{555}$$

4.5.1. Interpretación Geométrica del Producto Cruz

Antes de decir como obtener geométricamente el producto cruz, la siguiente figura ilustra la idea de como se ve un producto cruz entre dos vectores[5]

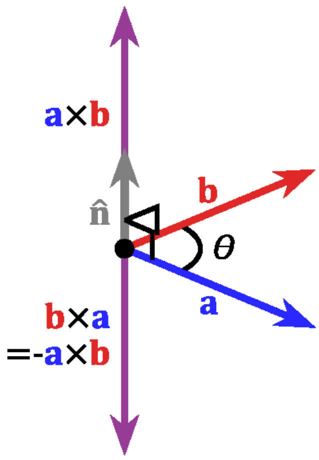


Figura 22: Representación visual del producto cruz entre dos vectores

[5]tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

Recordando que un vector tiene dirección y magnitud, primero indicaremos la magnitud y luego la dirección del producto cruz.

4.5.1.1. Magnitud del producto cruz

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son dos vectores entonces la magnitud del producto cruz es

$$\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin\theta \tag{556}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

De la fórmula anterior se tiene que cuando dos vectores son paralelos o antiparalelos $\theta = 0, \pi$ entonces $\sin\theta = 0$ y en la fórmula anterior la magnitud del producto cruz daría 0 por lo que se concluye lo siguiente: **si dos vectores son paralelos o antiparalelos el producto cruz entre ellos da el vector nulo.**

Es importante mencionar que cuando se desea calcular el ángulo entre dos vectores es necesario usar la fórmula del producto punto y no la del productro cruz. Esto ya que como se está considerando el ángulo definido entre 0 y π, la función seno no es inyectiva en ese intervalo, por ejemplo, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ lo cual significa que habría más de un ángulo al tomar $\sin'^{1}$

4.5.1.2. Dirección del producto cruz

Ahora falta determinar la dirección del producto cruz, para lo cual son útiles las siguientes reglas

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ siempre es un vector **perpendicular** tanto a $\overrightarrow{a}$ como a $\overrightarrow{b}$ (como se puede apreciar en la figura anterior)
- para determinar la dirección de $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ se utiliza la **regla de la mano derecha:** es decir, se colocan todos los dedos de la mano derecha salvo el pulgar en dirección del vector $\overrightarrow{a}$ y luego se giran los 4 dedos restantes hacia el vector $\overrightarrow{b}$, el pulgar indicará la dirección en la que apunta $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (hay más de una versión de la regla de la mano derecha)

4.5.2. Propiedades del Producto Cruz

Hay dos aspectos muy importantes del producto cruz:

- **el producto cruz no es asociativo:** es decir, es importante mantener los paréntesis en las operaciones del producto cruz ya que en general

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \tag{557}$$

  por ejemplo, si se toma $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = e_1$ y $\overrightarrow{c} = e_2$ entonces el lado izquierdo da $\overrightarrow{0}$ puesto que $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (e_1 \times e_1) \times e_2 = \overrightarrow{0} \times e_2 = \overrightarrow{0}$ mientras que el lado derecho da $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$.

- **el producto cruz es anticonmutativo:** es decir,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} \tag{558}$$

Las propiedades más importantes del producto cruz son las siguientes:

Si $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ son tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y t es un número real entonces

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
- $t\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = t(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
- $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
- $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$
- $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$

4.5.3. Usos del producto cruz e Interpretación Geométrica del Determinante

4.5.3.1. El área de un paralelogramo En esta sección se verá el significado geométrico del determinante de una matriz y su relación con el producto punto y cruz en el caso de que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Primero suponga que se tiene un paralelogramo de lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ como el que indica la siguiente figura

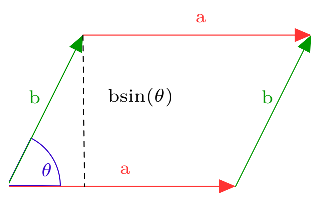


Figura 23: Paralelogramo de lados a, b

De geometría sabemos que el área de un paralelogramo es “base × altura” Como base podemos tomar el vector $\overrightarrow{a}$, o mejor dicho, su magnitud $\|\overrightarrow{a}\|$. Como altura podemos tomar la componente de $\overrightarrow{b}$ ortogonal a $\overrightarrow{a}$, que de la sección de proyecciones ortogonales sabemos que es $\left\|\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|^2}\overrightarrow{b}\right\|$ por lo que el área de un paralelogramos con lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ es

$$\|\overrightarrow{a}\| \left\| \overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a} \right\| \tag{559}$$

Ahora bien, si bien esta fórmula siempre es válida, cuando los vectores están en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ toma una forma muy sencilla.

4.5.3.1.1. Caso $\mathbb{R}^2$ Como los vectores están en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir

$$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1) \quad \overrightarrow{b} = (x_2, y_2) \tag{560}$$

Para calcular 559se observa que

$$\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2} \tag{561}$$

$$\overrightarrow{b}-\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a}=(x_2,y_2)-\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}(x_1,y_1)=(x_2,y_2)-\left(\frac{x_1^2x_2+y_1y_2x_1}{x_1^2+y_1^2},\frac{x_1x_2y_1+y_1^2y_2}{x_1^2+y_1^2}\right) \tag{562}$$

$$=\left(\frac{x_1^2x_2+x_2y_1^2-\left(x_1^2x_2+y_1y_2x_1\right)}{x_1^2+y_1^2},\frac{y_2x_1^2+y_2y_1^2-\left(x_1x_2y_1+y_1^2y_2\right)}{x_1^2+y_1^2}\right)=\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\left(x_2y_1^2-x_1y_1y_2,y_2x_1^2-x_1x_2y_1\right) \tag{563}$$

$$=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{\|\overrightarrow{a}\|^2}(y_1,-x_1) \tag{564}$$

Sustituyendo todo esto en 559 se tiene que

$$\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}-\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a}\right\|=\|\overrightarrow{a}\|\left\|\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}(-y_1,x_1)\right\|=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|\,\|(-y_1,x_1)\|}{\|\overrightarrow{a}\|}=|x_1y_2-x_2y_1| \tag{565}$$

Ahora bien, si se forma la matriz

$$A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix} \tag{566}$$

se tiene que

$$\det A=x_1y_2-x_2y_1 \tag{567}$$

y comparando con 565 se concluye que

Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ el área de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ escritos en fila. Es decir, si $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ entonces

$$\text{área}=\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\right|=|x_1y_2-x_2y_1| \tag{568}$$

De la misma forma, el área de un triángulo con lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ es igual a $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\right|$, pues el paralelogramo de lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ puede considerarse como dos triángulos congruentes de lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Así el determinante de una matriz 2×2 se interpreta geométricamente como el área (con signo) del paralelogramo formado por las filas (o columnas) de la matriz.

Por ejemplo, si

$$\overrightarrow{a}=(1,3) \qquad \overrightarrow{b}=(-2,6) \tag{569}$$

entonces el área del paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es

$$\text{área}=\left|\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 6\end{pmatrix}\right|=12 \tag{570}$$

4.5.3.1.2. Caso $\mathbb{R}^3$ De la figura claramente la componente ortogonal de $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{a}$ tiene magnitud $\left\|\overrightarrow{b}\right\|\sin\theta$, es decir el área de un paralelogramo de lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ es

$$\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|\sin\theta \tag{571}$$

y esto coincide precisamente con la magnitud de $\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|$ por lo que se ha llegado al siguiente resultado:[6]

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ el área de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ es igual a la magnitud del producto cruz de los lados, es decir, a $\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|$. De la misma forma, el área de un triángulo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ es igual a $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|$, pues el paralelogramo de lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ puede considerarse como dos triángulos congruentes de lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

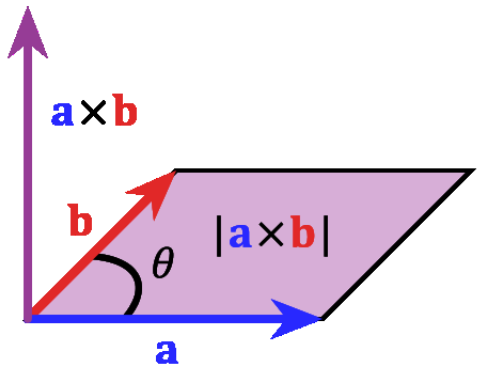


Figura 24: Relación entre el producto cruz y el área de un paralelogramo

4.5.3.2. El volumen de un paralelepípedo: Ahora queremos calcular el volumen de un paralelepípedo de lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$

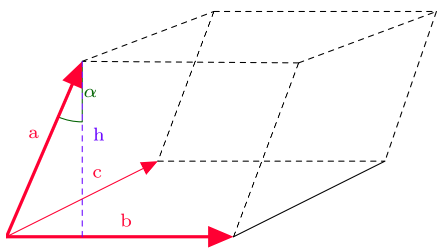


Figura 25: Volumen de un paralelepípedo de lados a, b, c

[6]La siguiente figura fue tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

el volumen de un paralelepípedo puede tomarse como "área $\times$altura". Por razones de simplicidad solo estudiará el caso en que los vectores estén en $\mathbb{R}^3$. De la figura y de la sección anterior el área de la base sería $\left\|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right\|$. Ahora bien, de la figura es claro que $h = \|\overrightarrow{a}\| \cos\alpha$ donde α en este caso es el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y el lado h. Ocupamos describir el lado h como un vector y para eso recordamos que su propiedad más importante es que es perpendicular al paralelogramo formado por $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$. Pero ya conocemos un vector que tiene tal propiedad el cual es $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Luego α es el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Finalmente, tenemos entonces que el volumen del paralelepípedo es

$$V = \left\|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right\| \|h\| = \left\|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right\| \|\overrightarrow{a}\| \cos\alpha = \left\|(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}\right\| \tag{572}$$

donde la última igualdad es cierta puesto que la magnitud de un producto punto es igual al producto de las magnitudes de los vectores respectivos por el coseno del ángulo entre ellos. Es decir, **el volumen del paralelepípedo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ es** $\left\|(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}\right\|$.

Ahora bien al igual que el caso del paralelogramo, se tiene que

Si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$ son tres vectores en $\mathbb{R}^3$ el volumen del paralelepípedo que forman es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas son los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, es decir,

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| \tag{573}$$

Por lo que el determinante de una matriz 3×3 se interpreta geométricamente como el volumen (con signo) del paralelepípedo formado por las filas (o columnas) de la matriz.

En general, **el determinante de una matriz $n \times n$ se interpreta geométricamente como el "hipervolumen" (con signo) del "hiper-paralelepípedo" formado por las filas o columnas de la matriz.**

4.6. Problemas Resueltos

A continuación se resolverán algunos ejercicios sobre los temas estudiados en este capítulo

Problema 62. *Problema 4 primer examen parcial primer ciclo 2011*

Considere el cuadrilátero con vértices A, B, C, D que se muestra a continuación

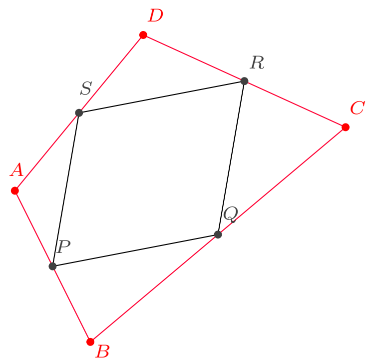


Figura 26: Cuadrilátero con vértices A, B, C, D

Si P, Q, R, S **son los puntos medios de los lados** $AB, BC, CD,$ **y** DA **respectivamente muestre que** $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ **y** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

Como P es el punto medio de AB se tiene que

$$\overrightarrow{AP} = P - A = \overrightarrow{PB} = B - P = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(B - A) \tag{574}$$

Como Q es el punto medio de BC se tiene que

$$\overrightarrow{BQ} = Q - B = \overrightarrow{QC} = C - Q = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(C - B) \tag{575}$$

Como R es el punto medio de CD se tiene que

$$\overrightarrow{CR} = R - C = \overrightarrow{RD} = D - R = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(D - C) \tag{576}$$

Como S es el punto medio de DA se tiene que

$$\overrightarrow{DS} = S - D = \overrightarrow{SA} = A - S = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(A - D) \tag{577}$$

Ahora bien, de la interpretación de suma de vectores se tiene que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0 \tag{578}$$

y diviendo la ecuación anterior por 2 se tiene que

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = 0 \tag{579}$$

por las ecuaciones de arriba esto puede escribirse como

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{SA} = 0 \tag{580}$$

pero de la interpretación geométrica también se tiene que A

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{SP} \qquad \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{QR} \tag{581}$$

y sustituyendo arriba se llega a

$$\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{QR}=0 \tag{582}$$

es decir,

$$\overrightarrow{QR}=-\overrightarrow{SP} \tag{583}$$

o bien

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR} \tag{584}$$

que era lo que quería mostrarse. Ahora bien

$$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{SR}=Q-P-(R-S)=Q-P-R+S=-(R-Q)+S-P=-\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{PS}=0 \tag{585}$$

donde la última igualdad se da por (584). Así se tiene que

$$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{SR}=0 \tag{586}$$

es decir

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR} \tag{587}$$

que era lo que quería mostrarse.

Problema 63. *Problema 3 primer examen parcial segundo semestre 2003*

Considere los puntos $A=(2,3,-1,1)$***,*** $B=(3,2,2,-1)$ $C=(0,2,-1,2)$ ***. 1) Calcule*** $Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$***. 2) Encuentre dos vectores*** $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ***ortogonales,*** $\overrightarrow{a}$ ***paralelo a*** $\overrightarrow{BC}$ ***y*** $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{BA}$***. 3) Determine el área del triángulo de vértices A,B,C.***

1) De (544) tenemos que

$$Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}\overrightarrow{BC} \tag{588}$$

Para mayor facilidad es mejor calcular cada cosa por aparte

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(2,3,-1,1)-(3,2,2,-1)=(-1,1,-3,2) \tag{589}$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(0,2,-1,2)-(3,2,2,-1)=(-3,0,-3,3) \tag{590}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1,1-3,2)\cdot(-3,0,-3,3)=(-1)(-3)+(1)(0)+(-3)(-3)+(2)(3)=18 \tag{591}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=(-3,0,-3,3)\cdot(-3,0,-3,3)=(-3)(-3)+(0)(0)+(-3)(-3)+(3)(3)=27 \tag{592}$$

sustituyendo todo esto en (588)

$$Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}\overrightarrow{BC}=\frac{18}{27}(-3,0,-3,3)=2(-1,0,-1,1)=(-2,0,-2,2) \tag{593}$$

2) Por la teoría del capítulo sabemos que $\overrightarrow{a} = Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$ y que

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BA} - Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = (-1, 1, -3, 2) - (-2, 0, -2, 2) = (1, 1, -1, 0) \tag{594}$$

basta verificar que $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son ortogonales

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (-2, 0, -2, 2) \cdot (1, 1, -1, 0) = (-2)(1) + (0)(1) + (-2)(-1) + (2)(0) = -2 + 2 = 0 \tag{595}$$

que era lo que se buscaba.

3) Considere la siguiente figura

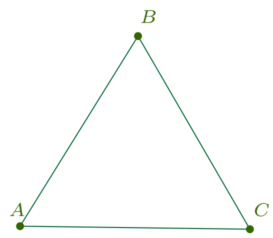


Figura 27: Triángulo con vértices A,B,C

Es claro que los tres lados del triángulo son $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Para encontrar el área del triángulo utilizamos que el área de este es $\frac{1}{2}$base $\times$ altura.

Aprovechando nuestros resultados anteriores tomaremos como base al lado $\overrightarrow{BC}$. El candidato para la altura sería el vector $\overrightarrow{b}$ del inciso anterior, ya que este es el vector perpendicular a $\overrightarrow{a}$ (y por ende a $\overrightarrow{BC}$) que inicia en la base y termina en el vértice A. Así, el área sería

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{27}\sqrt{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}} = \frac{1}{2}3\sqrt{3}\sqrt{3} = \frac{9}{2} \tag{596}$$

5. Rectas y Planos en $\mathbb{R}^n$

Ahora que se ha introducido el método geométrico para el estudio de los vectores, es posible analizar como escribir la ecuación de una recta y un plano a través del uso de vectores.

Por ejemplo, en el plano la ecuación de una recta es $y = mx + b$. Así, si $p = (0, b)$, $\overrightarrow{r} = (x, y)$ son dos puntos sobre la recta se tiene que

$$y = mx + b \tag{597}$$

y de esta forma

$$\overrightarrow{r} = (x, y) = (x, mx + b) = (0, b) + x(1, m) = p + x(1, m) \tag{598}$$

Ahora bien, dado que la pendiente m es una propiedad de la recta, el vector $\overrightarrow{v} = (1, m)$ de alguna forma es un vector que indica la dirección de la recta en el espacio por lo que la ecuación anterior puede escribirse según

$$\overrightarrow{r} = p + x\overrightarrow{v} \tag{599}$$

y obviamente x es sencillamente un número real, que podemos llamar t. De esta forma, hemos encontrado el siguiente resultado: si $\overrightarrow{r}$ es un punto sobre una recta l con pendiente m en el plano, entonces existe un número real t (que depende del punto) de forma que

$$\overrightarrow{r} = p + t\overrightarrow{v} \tag{600}$$

El propósito de esta primera parte del capítulo será generalizar este resultado para $\mathbb{R}^n$.

5.1. Ecuaciones de rectas

5.1.0.3. Ecuación vectorial de una recta En la parte anterior se utilizó un enfoque algebraico para caracterizar las rectas en el plano en forma vectorial. Ahora el problema será definir lo que queremos decir por una recta en $\mathbb{R}^n$ por lo que será bueno considerar la siguiente figura:

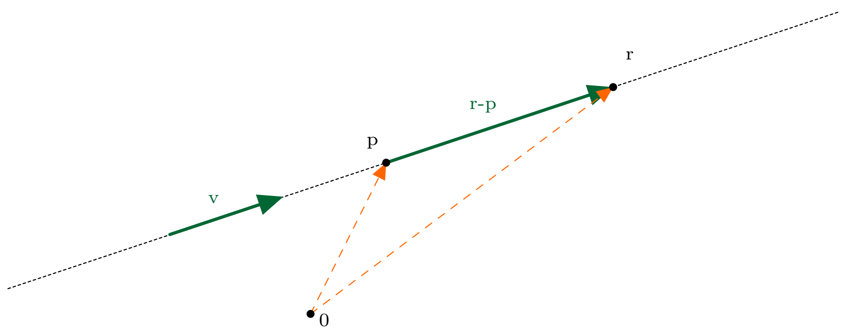


Figura 28: Recta con puntos p, r y vector director v

Suponga que se conoce una cierta recta l que tiene un vector que indica su dirección $\overrightarrow{v}$ y se conoce un punto p que está sobre la recta. Queremos caracterizar todos los demás puntos sobre la recta en función de $p, \overrightarrow{v}$. (es decir, encontrar el análogo de (600))

Suponga que se toma otro punto $\overrightarrow{r}$ sobre la recta por lo visto de la resta vectorial el vector $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{p}$ representa el vector que va desde p hasta $\overrightarrow{r}$. Tal vector debe yacer sobre la recta l

y como tal vector es paralelo (o antiparalelo) a $\overrightarrow{v}$ (puesto que yacen sobre la misma recta) por la definición de ser paralelo (antiparalelo) existe un número t tal que $\overrightarrow{pr} = t\overrightarrow{v}$ o bien

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{p} = t\overrightarrow{v} \tag{601}$$

Si se pasa a sumar el vector p se nota que (601) es el análogo perfecto de (600) lo cual justifica la siguiente definición:

Definición 64. La **recta** l con dirección $\overrightarrow{v}$ y punto p son todos los puntos $\overrightarrow{r}$ tal que $\overrightarrow{r} = p+t\overrightarrow{v}$ para algún número t. Se denota la recta según

$$l(p, \overrightarrow{v}) = \{\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{r} = p + t\overrightarrow{v}\} \tag{602}$$

La relación $\overrightarrow{r} = p + t\overrightarrow{v}$ se conoce como la **ecuación vectorial para la recta** $l(p, \overrightarrow{v})$**.**
Dos rectas $l_1(p_1, \overrightarrow{v_1})$ y $l_2(p_2, \overrightarrow{v_2})$ son **paralelas** si $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son paralelos y las rectas son **perpendiculares** si $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son perpendiculares.

Por ejemplo, si l_1, l_2 son dos rectas en el plano por (600) pueden tomarse $\overrightarrow{v_1} = (1, m_1), \overrightarrow{v_2} = (1, m_2)$ donde m_1, m_2 son las pendientes respectivas de las rectas. Entonces l_1 es perpendicular a l_2 si y solo si $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ es decir $1 + m_1 m_2 = 0$ o bien $m_1 m_2 = -1$. Es decir, *dos rectas son perpendiculares en el plano si y solo si el producto de sus pendientes es* -1. De lo anterior se observa que esta definición contiene la caracterización usual de rectas perpendiculares.

5.1.0.4. Forma Paramétrica de una recta Suponga que $l(p, \overrightarrow{v})$ es una recta en $\mathbb{R}^3$. Entonces $p = (p_1, p_2, p_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Si escribimos $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ por (601) tenemos que

$$\overrightarrow{r} = p + t\overrightarrow{v} \tag{603}$$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3) \tag{604}$$

como es una ecuación vectorial se iguala entrada por entrada y se llega a las **ecuaciones paramétricas de la recta** $l(p, \overrightarrow{v})$

$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases} \tag{605}$$

5.1.0.5. Forma Simétrica de una recta Para poder escribir esta forma, hay que asumir, $v_1, v_2, v_3 \neq 0$. Luego de (605) se resuelve la ecuación para t y se obtiene la **forma simétrica de una recta**

$$t = \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3} \tag{606}$$

Problema 65. *segundo examen parcial (reposición) II ciclo 2007*

Considere las rectas L_1, L_2 de ecuaciones respectivas:

$$L_1 : (x, y, z) = (t + 2, -t + 4, 2t + 6) \tag{607}$$

$$L_2 : (x, y, z) = (-t + 1, t + 5.t + 7) \tag{608}$$

a) Determine el punto Q donde se cortan las rectas

Denotando el punto Q como $Q = (q_1, q_2, q_3)$ al ser el punto de intersección Q está tanto en L_1 como en L_2. Por estar Q en L_1 existe t_1 tal que

$$(q_1, q_2, q_3) = (t_1 + 2, -t_1 + 4, 2t_1 + 6) \tag{609}$$

por estar Q en L_2 existe t_2 tal que

$$(q_1, q_2, q_3) = (-t_2 + 1, t_2 + 5, t_2 + 7) \tag{610}$$

luego igualando ambas ecuaciones se llega a

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ -t_1 - t_2 = 1 \\ 2t_1 - t_2 = 1 \end{cases} \tag{611}$$

observe que este sistema es tan fácil de resolver que no es necesario usar matrices. Por ejemplo, sumando la primera y tercera ecuación se llega a $t_1 = 0$ y reemplazando esto en la primera ecuación se llega a $t_2 = -1$ por lo que de (609) tenemos que

$$(q_1, q_2, q_3) = (2, 4, 6) \tag{612}$$

b) Verifique si A es un punto arbitrario en L_1 y B es un punto arbitrario en L_2 entonces $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QB}$ son ortogonales

Se tiene que si $A \in L_1$ entonces existe t_1 tal que $A = (t_1 + 2, -t_1 + 4, 2t_1 + 6)$ y si $B \in L_2$ existe t_2 tal que $B = (-t_2 + 1, t_2 + 5.t_2 + 7)$

$$\overrightarrow{QA} = A - Q = (t_1 + 2, -t_1 + 4, 2t_1 + 6) - (2, 4, 6) = (t_1, -t_1, 2t_1) \tag{613}$$

$$\overrightarrow{QB} = B - Q = (-t_2 + 1, t_2 + 5, t_2 + 7) - (2, 4, 6) = (-t_2 - 1, t_2 + 1, t_2 + 1) \tag{614}$$

por lo que

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (t_1, -t_1, 2t_1) \cdot (-t_2 - 1, t_2 + 1, t_2 + 1) = t_1(-t_2 - 1) - t_1(t_2 + 1) + 2t_1(t_2 + 1) \tag{615}$$

$$= -2t_1(t_2 + 1) + 2t_1(t_2 + 1) = 0 \tag{616}$$

c) Sea $C = (3, 3, 8)$; verifique que C pertenece a la recta L_1

Basta tomar $t = 1$ en $L_1 : (x, y, z) = (t + 2, -t + 4, 2t + 6)$.

d) Encuentre un punto D en la recta L_2 tal que el área del triángulo CQD sea igual a $\sqrt{18}$.

Ya sabemos que C y Q están en L_1 y el vector $\overrightarrow{CQ} = Q - C = (2, 4, 6) - (3, 3, 8) = (-1, 1, -2)$ el tiene magnitud $\sqrt{6}$. Este vector sirve como la base del triángulo CQD.

Como Q también está en L_2 y las rectas son ortogonales (por el inciso b)) entonces se tiene que el triángulo es un triángulo rectángulo y el vector para la altura va a ser $\overrightarrow{DQ} = (2, 4, 6) - (-t + 1, t + 5, t + 7) = (t + 1, -t - 1, -t - 1)$ el cual tiene magnitud $\sqrt{3}\,|t + 1|$. Luego hay que resolver la ecuación

$$\sqrt{18} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{3}\,|t + 1| \tag{617}$$

lo cual tiene como solución $t = 1$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta para L_2 da el punto $(0, 6, 8)$.

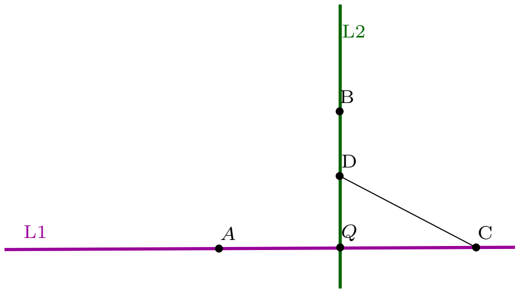


Figura 29: ejercicio líneas perpendiculares

Problema 66. Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que tiene que contiene a los punto $P = (4, 6, 7)$ y $Q = (3, 6, 9)$

Por lo visto antes de la ecuación (601), $\overrightarrow{PQ}$ es un vector que yace sobre L_1 por lo que sirve como un vector que indica la dirección de la recta

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 6, 9) - (4, 6, 7) = (-1, 0, 2) \tag{618}$$

Luego por la ecuación vectorial para una recta si $\overrightarrow{r}$ es cualquier punto sobre L_1 debe tenerse que

$$L_1 : \overrightarrow{r} = (x, y, z) = P + t\overrightarrow{PQ} = (4, 6, 7) + t(-1, 0, 2) \tag{619}$$

Muestre que la recta L_2, dada por ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{7} = y - 3 = \frac{5-z}{3} \tag{620}$$

no interseca a L_1.

Observe que la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-3} \tag{621}$$

y por comparación con (606) se tiene que $(v_1, v_2, v_3) = (7, 1, -3)$ y $(p_1, p_2, p_3) = (1, 3, 5)$. Luego, la ecuación vectorial para L_2 es

$$L_2 : \overrightarrow{r} = (x, y, z) = (1, 3, 5) + s(7, 1, -3) \tag{622}$$

para que hubiera intersección el sistema siguiente tendría que tener solución (pues (x, y, z) cumpliría ambas ecuaciones de L_1 y L_2 simultáneamente)

$$\begin{cases} 4 - t = 1 + 7s \\ 6 = 3 + s \\ 7 + 2t = 5 - 3s \end{cases} \tag{623}$$

simplificando un poco se llega al sistema:

$$\begin{cases} t + 7s = 3 \\ s = 3 \\ 2t + 3s = -2 \end{cases} \tag{624}$$

pero sustituyendo $s = 3$ en las otras dos ecuaciones es fácil ver que es imposible satisfacerlas simultáneamente por lo que el sistema no tiene solución y luego no hay intersección.

5.2. Planos en $\mathbb{R}^n$

5.2.1. Ecuación vectorial de un plano

Una línea recta es representada por una ecuación del tipo $ax + by = c$. La ecuación lineal que sigue es la de un plano, que es básicamente de la forma $ax + by + cz = d$. Geométricamente la recta era especificada con un punto y un vector que especificaba la dirección de la recta en el espacio. Tanto el punto como el vector no eran únicos, es decir, cualquier otro punto de la recta servía y cualquier vector de diferente magnitud pero que fuera paralelo o antiparalelo al primer vector también sería útil.

El plano es especificado de forma similar. Al igual que la recta, es necesario dar un punto (que nuevamente no es único), pero a diferencia de la recta, ahora es necesario dar dos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ para especificar el plano[7].

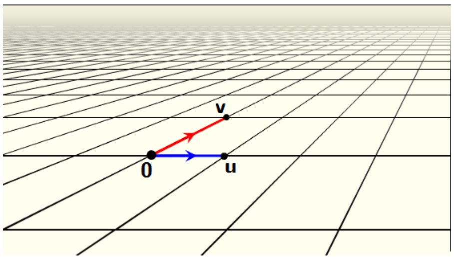


Figura 30: Plano especificado por los vectores u, v y el punto O

Nuevamente los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ no son únicos, solo se exigirá que no sean paralelos o antiparalelos pues si lo fueran yacerían sobre la misma recta del plano. Luego, si r es cualquier punto en el plano y p otro punto en el plano, $\overrightarrow{pr}$ es un vector que yace sobre el plano y por un argumento similar al de las rectas puede escribirse como

$$r - p = \overrightarrow{pr} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \tag{625}$$

Luego

$$r = p + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \tag{626}$$

lo cual sugiere la siguiente definición.

Definición 67. El plano $\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ con punto p y vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ es el conjunto de puntos

$$\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid r = p + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\} \tag{627}$$

y la ecuación $r = p + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ es la **ecuación vectorial del plano** $\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

5.2.2. Ecuación normal de un plano

Ahora se van a caracterizar los planos en $\mathbb{R}^n$ con una ecuación distinta a la vectorial. La idea va a ser especificar el plano a través de un punto de este y un vector que sea perpendicular a cualquier punto del plano.

[7] Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_subspace

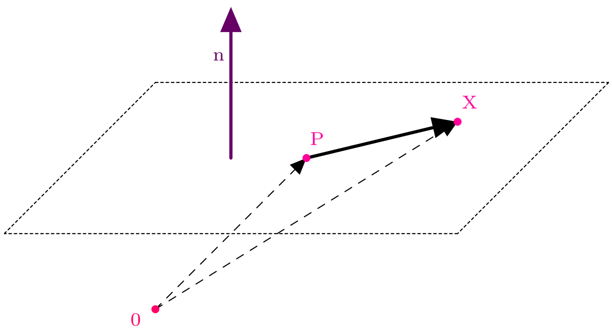


Figura 31: Plano con puntos P, X y vector $\overrightarrow{n}$ perpendicular a él

Suponga que $\pi(P, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ es un plano como el que se indica en la figura y que $\overrightarrow{n}$ es un vector normal al plano (por ejemplo, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ sirve cuando se está en $\mathbb{R}^3$). Si X es otro punto sobre el plano, entonces $\overrightarrow{PX}$ yace sobre el plano y como $\overrightarrow{n}$ es normal al plano se tiene que

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \tag{628}$$

es decir,

$$(X - P) \cdot \overrightarrow{n} = 0 \tag{629}$$

o bien

$$X \cdot \overrightarrow{n} = P \cdot \overrightarrow{n} \tag{630}$$

En el caso de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir $X = (x, y, z)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. La ecuación anterior se transforma en

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \tag{631}$$

definiendo $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ se tiene la **ecuación normal de un plano en** $\mathbb{R}^3$

$$ax + by + cz = d \tag{632}$$

Y de generalizando la idea anterior a $\mathbb{R}^n$ se define

Definición 68. Dado $P \in \mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^n$, el **hiperplano** que contiene a P y es ortogonal a $\overrightarrow{n}$ son todos los puntos $X = (x_1, \cdots, x_n)$ tal que

$$n_1x_1 + \cdots + n_nx_n = n_1p_1 + \cdots + n_np_n \tag{633}$$

con $\overrightarrow{n} = (n_1, \cdots, n_n)$, $\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_n)$.
En el caso en que $n = 3$ se toma $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ y $P = (p_1, p_2, p_3)$ y la ecuación normal es

$$ax + by + cz = d \tag{634}$$

donde $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$
De forma análoga con el caso de una recta, dos planos se dicen **paralelos** o **perpendiculares** si sus respectivos vectores normales son paralelos o perpendiculares respectivamente.

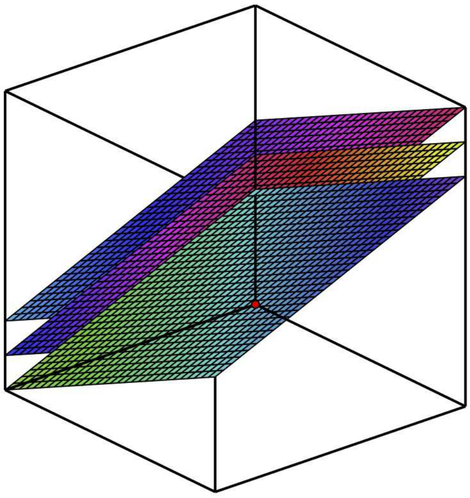


Figura 32: Planos paralelos en el espacio

5.2.3. Intersección entre dos planos

Suponga que se conocen dos planos con ecuaciones normales $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$. Si se quiere determinar la intersección de los planos, un punto que esté en la intersección debe satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente, es decir, debe estudiarse la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right) \tag{635}$$

Por ejemplo, si se quiere determinar la intersección entre $x + 3y - 5z = 2$ y $2x - 3z = 0$ debe construirse la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \tag{636}$$

y se llega a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{637}$$

lo cual tiene como sistema asociado

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}z = 0 \\ y - \frac{7}{6}z = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{638}$$

lo cual puede escribirse con $z = t$ como

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}t, \frac{7}{6}t + \frac{2}{3}, t\right) = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right) + t\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, 1\right) \tag{639}$$

lo cual es de paso la ecuación vectorial para la recta.

5.2.4. Ecuaciones de planos

Suponga que se conoce la ecuación normal de un plano, ¿cómo se obtiene la ecuación vectorial?

Por ejemplo, si el plano es $2x - y + 7z = 10$ entonces puede despejarse una variable en función de las otras, por ejemplo, $y = 2x + 7z - 10$. De esa forma con $x = t$, y $z = s$

$$(x, y, z) = (t, 2t + 7s - 10, s) = (0, -10, 0) + t(1, 2, 0) + s(0, 7, 1) \tag{640}$$

y de ahí se obtiene la ecuación vectorial para el plano.

Por otro lado, si se tiene la ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (0, -10, 0) + t(1, 2, 0) + s(0, 7, 1) \tag{641}$$

¿cómo se obtiene la ecuación normal?

Se debe tomar un punto sobre el plano que puede ser $P = (0, -10, 0)$ y como vector normal se hace el producto cruz entre los dos vectores directores del plano, es decir,

$$n = (1, 2, 0) \times (0, 7, 1) = (2, -1, 7) \tag{642}$$

y luego la ecuación normal es

$$(x, y, z,) \cdot n = (x, y, z) \cdot P \tag{643}$$

$$2x - y + 7z = 10 \tag{644}$$

5.3. Fórmulas de Distancia

A continuación se darán algunas fórmulas para calcular las distancias entre planos, rectas y puntos.

5.3.1. Distancia entre dos puntos:

Si P y Q son dos puntos fue visto anteriormente que

$$d(P, Q) = \|P - Q\| \tag{645}$$

5.3.2. Distancia entre un punto y una recta:

Suponga que $l(A, \overrightarrow{u})$ es una recta y que P es un punto fuera de ella para el cual se quiere calcular la distancia entre ambos como se indica en la figura.

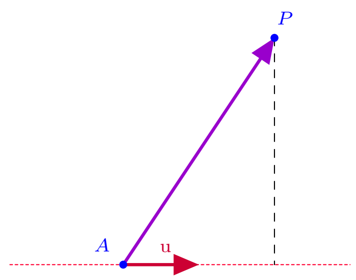


Figura 33: Distancia entre un punto P y una recta l

La idea es que $\overrightarrow{AP}$ es un vector que une a A con P y que la componente ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{u}$ es el vector cuya norma da la distancia, es decir,

$$d(P, l(A, \overrightarrow{u})) = \left\| \overrightarrow{AP} - proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{AP} \right\| \tag{646}$$

5.3.3. Distancia entre un punto y un plano

Suponga que $\pi(P, \overrightarrow{n})$ es un plano caracterizado por un punto P en él y un vector normal a él mientras que Q es un vector fuera del plano para el cual se busca hallar la distancia.

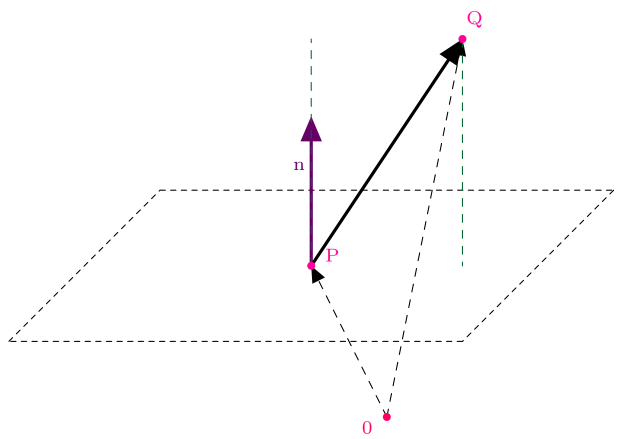


Figura 34: Distancia entre un punto Q y un plano

Como puede verse de la figura, $\overrightarrow{PQ}$ es un vector que une a los puntos P y Q y la proyección de tal vector a lo largo de $\overrightarrow{n}$ da un vector que cumple la característica de ser perpendicular al plano y tener la magnitud deseada, es decir,

$$d(Q, \pi(P, \overrightarrow{n})) = \left\| Proy_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PQ} \right\| \tag{647}$$

5.3.4. Distancia entre dos rectas en $\mathbb{R}^3$:

Obviamente si las rectas se intersecan la distancia es cero. Si no se intersecan hay dos casos importantes.

5.3.4.1. Rectas paralelas: Si $l_1(P, \overrightarrow{u})$,$l_2(Q, \overrightarrow{v})$ son dos rectas paralelas como se indica en la figura

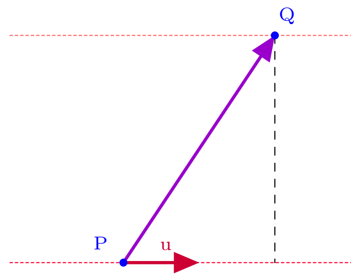


Figura 35: Distancia entre rectas paralelas

es claro que

$$d(l_1, l_2) = \left\| \overrightarrow{PQ} - Proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{PQ} \right\| \tag{648}$$

5.3.4.2. Rectas no paralelas: Si $l_1(P, \overrightarrow{u})$,$l_2(Q, \overrightarrow{v})$ son dos rectas no paralelas como se indica en la figura

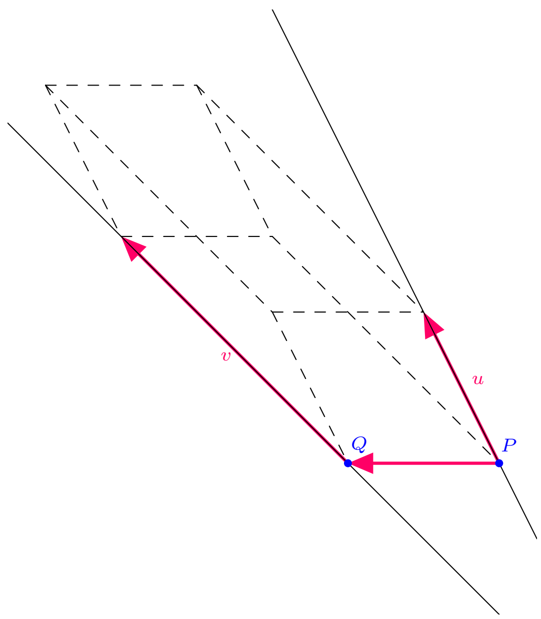


Figura 36: Paralelepípedo con lados $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{PQ}$

entonces los puntos $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ forman un paralelepípedo con volumen (ver (572))

$$V = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \right| \tag{649}$$

Ahora bien, para el volumen del paralelepípedo se cumple que $V = A \times h$ donde A es el área y h la altura. Podemos tomar como base al paralelogramo formado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que tiene área

$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ y la altura en este caso funcionaría como la distancia entre las rectas l_1, l_2 por lo que $d = h = \frac{V}{A}$ y así se tendría

$$d(l_1(P, \overrightarrow{u}), l_2(Q, \overrightarrow{v})) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|} \tag{650}$$

5.3.5. Distancia entre una recta y un plano

Si una recta y un plano se intersecan entonces claramente la distancia es cero.

Si una recta y un plano no se intersecan entonces se dice que la recta es paralela al plano (si además se cumple que el vector director de la recta es paralela al vector normal del plano entonces se dice que son perpendiculares). En tal caso suponga que la recta es $l(Q, \overrightarrow{v})$ y el plano es $\pi(P, \overrightarrow{n})$.

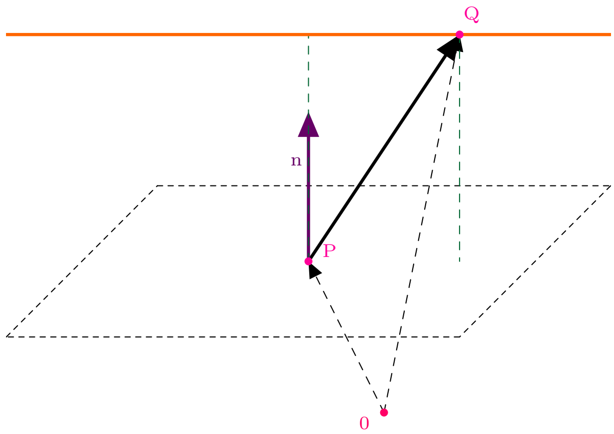


Figura 37: Distancia entre una recta y un plano paralelos

En este caso la distancia es

$$d(l(Q, \overrightarrow{v}), \pi(P, \overrightarrow{n})) = \left\|Proy_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PQ}\right\| \tag{651}$$

5.3.6. Distancia entre dos planos

Los planos en $\mathbb{R}^3$ son como las rectas en $\mathbb{R}^2$: o bien se intersecan o bien son paralelos. Si se intersecan claramente la distancia entre ellos es cero, si son paralelos la fórmula de la distancia es bastante sencilla.

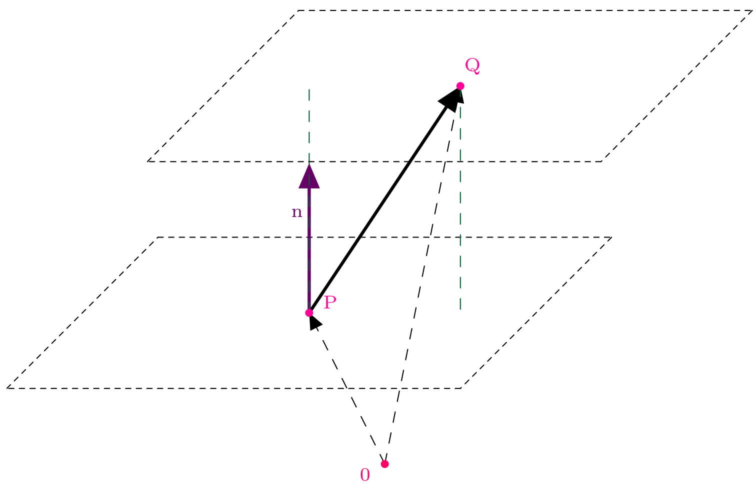


Figura 38: Distancia entre planos paralelos

Suponga que $\pi_1(P, \overrightarrow{n})$ y $\pi_2(Q, \overrightarrow{m})$ son dos planos paralelos. De la figura es fácil ver que la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\overrightarrow{n}$ es el vector cuya magnitud da la distancia entre los planos, es decir,

$$d(\pi_1(P, \overrightarrow{n}), \pi_2(Q, \overrightarrow{m})) = \left\| Proy_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PQ} \right\| \tag{652}$$

Problema 69. *(problema 2 segundo examen parcial I ciclo 2007)*

Considere las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones

$$L_1 : (x, y, z) = (1 - t, 2 + t, 3 - 2t) \tag{653}$$

$$L_2 : (x, y, z) = (2 + 2t, 3 - t, 10 + t) \tag{654}$$

a) Determine la ecuación normal del plano P que contiene a la recta L_1 y es paralelo a la recta L_2

Observe que la ecuación vectorial para la recta L_1 es

$$L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(-1, 1, -2) \tag{655}$$

es decir, $A = (1, 2, 3)$ es un punto de L_1 y $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -2)$ es un vector que indica la dirección de L_1. Observe además que $A \notin L_2$ ya que no existe t tal que $(1, 2, 3) = (2 + 2t, 3 - t, 10 + t)$.

Para construir el plano P que contiene a L_1 ocupamos especificar un punto para el plano y un vector normal. Claramente A es un candidato para el punto del plano Para el vector normal observe que la ecuación vectorial de la recta L_2 es

$$L_2 : (x, y, z) = (2, 3, 10) + t(2, -1, 1) \tag{656}$$

De aquí se ve que $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$ es un vector que indica la dirección de la recta L_2 y $B = (2, 3, 10)$ un punto de L_2.

Observe que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (1,3,1)$ es un vector que es perpendicular tanto a $\overrightarrow{u}$ como a $\overrightarrow{v}$ por lo que sería un vector normal al plano generado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Luego el candidato para el plano P va a ser en su forma normal $P(A, \overrightarrow{w})$, es decir, los puntos

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{w} = A \cdot \overrightarrow{w} \tag{657}$$

o bien

$$x + 3y + z = 10 \tag{658}$$

Observe que L_1 está contenida en el plano P ya que si $(x, y, z) \in L_1$ entonces $(x, y, z) = (1 - t, 2 + t, 3 - 2t)$ y sustituyendo en (658) se tiene que

$$1 - t + 3(2 + t) + 3 - 2t = 10 \tag{659}$$

es decir

$$0 = 0 \tag{660}$$

lo cual significa que cualquier valor de t hace que (x, y, z) cumpla la ecuación del plano lo cual significa que en efecto L_1 está contenido en $P(A, \overrightarrow{w})$

Luego falta ver que L_2 y P no se intersecan (que es la definición de que un plano y una recta sean paralelos). Si hubiera intersección habría $(x, y, z) \in L_2$ que también pertenecería al plano, es decir, con $(x, y, z) = (2 + 2t, 3 - t, 10 + t)$ tal punto tendría que satisfacer (658)

$$2 + 2t + 3(3 - t) + 10 + t = 10 \tag{661}$$

es decir

$$11 = 0 \tag{662}$$

lo cual es imposible. Luego no hay intersección entre L_2 y el plano P.

b) Determine la distancia entre L_2 y el plano P

Para esto basta usar (651)

$$d(l(B, \overrightarrow{u}), \pi(A, \overrightarrow{w})) = \left\| Proy_{\overrightarrow{w}} \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w} \right|}{\|\overrightarrow{w}\|} \tag{663}$$

Luego

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3, 10) - (1, 2, 3) = (1, 1, 7) \tag{664}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w} = (1, 1, 7) \cdot (1, 3, 1) = 11 \tag{665}$$

$$\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{11} \tag{666}$$

y sustituyendo la distancia da

$$d(l(B, \overrightarrow{u}), \pi(A, \overrightarrow{w})) = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \tag{667}$$

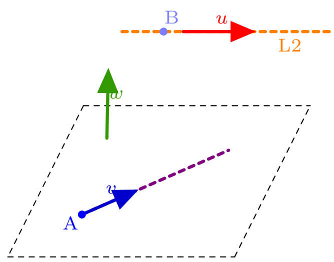


Figura 39: ejemplo rectas-planos

Problema 70. *(problema 2 segundo parcial II ciclo 2007)*

En $\mathbb{R}^3$ **considere los puntos** $A = (1, -1, 1), B = (1, 2, 3), C = (3, 2, 1), D = (5, 5, 5)$
a) Determine la ecuación de la recta L_1 **que pasa por los puntos** A **y** B**.**

Para dar la recta ocupamos dar un punto de la recta y un vector sobre la recta. Como punto se toma $A = (1, -1, 1)$ y como vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (1, -1, 1) = (0, 3, 2)$. Así, la ecuación vectorial para L_1 es

$$L_1 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(0, 3, 2) \tag{668}$$

b) Determine la ecuación vectorial del plano P **que pasa por** C **y contiene la recta** L_1**.**

Para especificar un plano ocupamos dar un punto y dos vectores sobre el plano. Para asegurar que el plano P contenga a L_1 se toma como punto a A y como un vector a $\overrightarrow{AB}$. Como queremos que también pase por C se toma el otro vector como $\overrightarrow{AC} = C - A = (3, 2, 1) - (1, -1, 1) = (2, 3, 0)$. Así, la ecuación del plano es:

$$P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(0, 3, 2) + s(2, 3, 0) \tag{669}$$

Observe que L_1 está en P con solo tomar $s = 0$ mientras que C está en P tomando $t = 0$ y $s = 1$.
c) Determine la ecuación de la recta L_2 **que pasa por** D **y es perpendicular a** P**.**

Observe que un vector perpendicular al plano P es el vector

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 4, -6) \tag{670}$$

y la condición de que una recta sea perpendicular a un plano es que la dirección de la recta sea paralela (o antiparalela) con el vector normal al plano por lo que L_2 puede escribirse como

$$L_2 : \overrightarrow{r} = D + t\overrightarrow{n} \tag{671}$$

o bien

$$L_2 : (x, y, z) = (5, 5, 5) + t(-6, 4, -6) \tag{672}$$

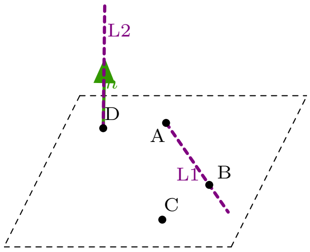


Figura 40: ejemplo plano que contiene a varios puntos

6. Espacios Vectoriales

6.1. Definición y algunos ejemplos

Hasta el momento se ha explotado el concepto de vector desde dos aspectos. Primero la suma entre dos vectores se podía realizar en una forma algebraica según

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \tag{673}$$

Por otro lado, la misma operación de suma se interpretó geométricamente según la ley del paralelogramo.

La segunda operación importante entre vectores fue la multiplicación de un vector por un número real. La forma algebraica de realizar tal operación era según

$$\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{674}$$

Geométricamente, se interpretó la operación anterior como un vector que podía dilatarse, contraerse, mantener su dirección o cambiar su dirección dependiendo del signo del número real.

A partir de este momento se va a generalizar el concepto de vector de forma que pueda mantenerse su estructura algebraica (es decir, la posibilidad de sumar dos vectores y la posibilidad de multiplicar un vector por un número real o “escalar”) y se abandonará su interpretación geométrica como una flecha dirigida.

La discusión anterior motiva la siguiente definición:

Definición 71. Un conjunto V se llama un **espacio vectorial real** si es posible definir dos operaciones sobre el conjunto: una operación de suma entre sus elementos (que será llamada sumada de vectores) y una operación de multiplicación de un elemento (vector) por un número real (escalar).

De esta forma si $u, v, w \in V$, los elementos de V se llamarán vectores (ya no es necesario utilizar la flecha sobre el vector puesto que no se pensarán en estos como flechas) y si $a, b \in \mathbb{R}$ son escalares entonces la operación de suma entre vectores y multiplicación de un vector por un escalar deben satisfacer los siguientes axiomas:

1. $u + v \in V$ (la suma de vectores es un vector)
2. $au \in V$ (multiplicar un escalar por un vector da un vector)
3. $u + v = v + u$ (la suma de vectores es conmutativa)
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (la suma de vectores es asociativa)
5. Existe un vector $0 \in V$ llamado el vector nulo tal que $u + 0 = 0 + u = u$
6. Para todo vector u existe un vector $-u$ tal que $u + (-u) = 0$
7. $(a + b)u = au + bu$
8. $a(u + v) = au + av$
9. $(ab)u = a(bu)$
10. $1u = u$

Nótese que la resta de vectores no aparece en los axiomas. Esto ocurre pues al igual que antes, es posible definir la resta entre vectores según

$$u - v = u + (-v) \tag{675}$$

donde $-v$ es el vector que aparece en el axioma 6.

También es importante notar que el vector 0 del axioma 5 es distinto del número real 0, sin embargo, es muy común utilizar la misma notación para estos dos objetos pues difícilmente aparecerá alguna situación donde la notación se preste a confusión ya que para todos los efectos ambos se comportan formalmente de la misma forma. Por ejemplo, de los axiomas anteriores es posible mostrar que

$$0u = 0 \tag{676}$$

Aquí u es un vector y el 0 del lado izquierdo debe ser el 0 como número real puesto que no hemos definido el producto entre dos vectores pero sí el producto entre un vector y un número real. Luego como tal producto debe dar un vector (por el axioma 2) el 0 del lado derecho es el vector nulo.

En todo caso, si existiera alguna confusión, se denotará el vector nulo como 0_v. Así, usando esta notación por el momento, algunas otras propiedades del espacio vectorial V son:

- $0u = 0_v$
- $a0_v = 0_v$
- $(-a)u = -(au) = a(-u)$
- $au = 0_v$ implica que $a = 0$ o $u = 0_v$
- $au = av$ con $a \neq 0$ implica que $u = v$
- $au = bu$ y $u \neq 0_v$ entonces $a = b$

Es hora de dar algunos ejemplos de espacios vectoriales para ver cómo la definición anterior generaliza el concepto de vector.

6.1.1. $\mathbb{R}^n$ y $M(m, n, \mathbb{R})$

Es claro que tomando $V = \mathbb{R}^n$ se tiene que los elementos de V cumplen los 10 axiomas anteriores (de hecho, $\mathbb{R}^n$ fue nuestro modelo para generalizar el concepto de espacio vectorial).

También el conjunto $V = M(m, n, \mathbb{R}^n)$ de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales es un espacio vectorial: las operaciones de suma entre matrices y multiplicación de una matriz por un número real satisfacen los 10 axiomas anteriores.

6.1.2. Espacio de funciones de variable real con valores reales:

En este caso vamos a considerar el conjunto $V = \{u(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ que representan todas las funciones de variable real con valor real. Es decir, si $u \in V$ entonces u es una función $u(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Para ver que es un espacio vectorial se van a revisar todos los axiomas:

1) Si $u, v \in V$ entonces u y v son dos funciones. Claramente la suma de funciones $u+v$ definida como$(u+v)(x) = u(x)+v(x)$ es otra función de variable real con valor real, es decir, $(u+v) \in V$.

2) Si $a \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ entonces au es nuevamente una función definida según $(au)(x) = au(x)$. Es decir, $(au) \in V$.

3) La conmutatividad de funciones se sigue de que $(u + v)(x) = u(x) + v(x) = v(x) + u(x) = (v + u)(x)$

4) La asociatividad se sigue de que $u(x)+(v+w)(x) = u(x)+v(x)+w(x) = (u+v)(x)+w(x)$
5) En este caso el vector nulo es la función nula $0_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida según $0_v(x) = 0$
6) Si u es una función se define $-u$ según $(-u)(x) = -u(x)$
7) Tal propiedad se sigue de que $(a+b)u(x) = au(x) + bu(x)$
8) Tal propiedad se sigue de que $a(u+v)(x) = a(u(x)+v(x)) = au(x) + av(x)$
9) Se sigue de $(ab)u(x) = a(bu(x))$
10) Se sigue de $1u(x) = u(x)$

6.1.3. Espacio vectorial de polinomios

Recuérdese que un polinomio de grado n es una función $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Se va a mostrar que $V = \{ \ p(x) \quad | \quad p(x) \quad \text{es} \quad \text{un} \quad \text{polinomio} \ \}$, el conjunto de todos los polinomios de cualquier grado es un espacio vectorial mostrando que se cumplen los 10 axiomas.

1) Si $p, q \in V$ y p es un polinomio de grado n y q es un polinomio de grado m entonces $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Suponiendo que $m \geq n$ se tiene que

$$p(x)+q(x) = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (677)$$

$$= b_m x^m + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \quad (678)$$

es decir $p+q$ es otro polinomio, $(p+q) \in V$.

2) Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces $ap(x) = aa_n x^n + aa_{n-1}x^{n-1} + \cdots + aa_1 x + aa_0$ por lo que $ap(x)$ es otro polinomio, es decir, $ap \in V$.

3) La conmutatividad de la suma se prueba igual que en el ejemplo anterior.

4) La asociatividad de la suma se prueba igual que en el ejemplo anterior.

5) En este caso el polinomio 0 es la misma función nula que en el ejemplo anterior $0_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida según $0_v(x) = 0$

6) Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se define $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x - a_0$

7) Tal propiedad se prueba igual que en el ejemplo anterior.

8) Tal propiedad se prueba igual que en el ejmplo anterior.

9) Tal propiedad se prueba igual que en el ejemplo anterior.

10) Tal propiedad se prueba igual que en el ejemplo anterior.

6.2. Subespacios Vectoriales

Como pudo haberse notado del ejemplo anterior, el conjunto de polinomios es un subconjunto del conjunto de funciones reales ya que cada polinomio es una función. A su vez, ambos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial, es decir, un subconjunto de un espacio vectorial puede ser a su vez un espacio vectorial. Esta situación no es atípica por lo que la siguiente definición indica cuando ocurre esto:

Definición 72. Suponga que V es un espacio vectorial y W es un subconjunto no vacío de V ($W \subseteq V$). Se dice que W es un **subespacio vectorial** de V si W es a su vez un espacio vectorial. Se denota $W \leq V$.

De la definición anterior siempre hay al menos dos subespacios vectoriales para cualquier espacio vectorial V: el mismo espacio vectorial, es decir, $W = V$ y el **subespacio trivial** $W = \{0\}$

El siguiente resultado caracteriza los subespacios vectoriales de un espacio vectorial.

Teorema 73. *Si V es un espacio vectorial y $W \subseteq V$ (W no vacío) entonces W es un subespacio vectorial de V si y solo si se tiene que: si $u, v \in W$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $(u + av) \in W$.*

Demostración. Suponga primero que W es un subespacio vectorial y que $u, v \in W$ y $a \in \mathbb{R}$. Como W es un espacio vectorial por el axioma 2) $(av) \in W$ y por el axioma 1) $(u + av) \in W$ y esto era lo que quería mostrarse.

Ahora suponga que *si $u, v \in W$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $(u + av) \in W$.* Se va a mostrar que W es un espacio vectorial, es decir, que se cumplen los 10 axiomas (es mejor mostrar las 10 condiciones en desorden)

1) Si $u, v \in W$ tomando $a = 1$ en * entonces $(u + v) \in W$

3) $u + v = v + u$ ya que W es un subconjunto de V y V es un espacio vectorial por lo que la propiedad se cumple al ver la suma de los elementos como elementos en V.

4) La asociatividad de la suma se cumple por razones análogas a las anteriores, es decir, la asociatividad se sigue puesto que V ya es un espacio vectorial que contiene a W.

5) Como W es no vacío existe al menos un elemento $x \in W$. Luego tomando $u = v = x$ y $a = -1$ por * se tiene que $u + av = x - x = 0 \in W$, es decir, **todo subespacio posee el vector nulo.**

2) Si $v \in W$ tomando $u = 0$ en * se tiene que $u + av = 0 + av = av \in W$

6) Si $u \in W$ tomando $a = -1$ en la propiedad 2) anterior se sigue que $-u \in W$

7), 8), 9), 10) se cumplen por razones similares a 3) y 4), es decir, son propiedades heredadas del hecho de que V es un espacio vectorial.

□

Problema 74. *(problema 2 segundo examen parcial primer semestre 2011)*

Indique, justificando, cual de los siguientes conjuntos S es un subespacio vectorial del espacio vectorial dado V

a) $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{a} \cdot X = 0\}$ **con** $\overrightarrow{a}$ **un vector fijo de** $V = \mathbb{R}^n$

Primero observe que $S \neq \varnothing$ puesto que $\overrightarrow{a} \cdot 0 = 0$, es decir, $0 \in S$. Suponga que $X, Y \in S$ y $c \in \mathbb{R}$. Por el teorema anterior basta con ver que $(X + cY) \in S$. Observe que

$$\overrightarrow{a} \cdot (X + cY) = \overrightarrow{a} \cdot X + \overrightarrow{a} \cdot (cY) = \overrightarrow{a} \cdot X + c\overrightarrow{a} \cdot Y \tag{679}$$

como $X, Y \in S$ $\overrightarrow{a} \cdot X = 0$ y $\overrightarrow{a} \cdot Y = 0$ por lo que sustituyendo en lo anterior se llega a

$$\overrightarrow{a} \cdot (X + cY) = 0 \tag{680}$$

luego $(X + cY) \in S$ y S **sí es un subespacio vectorial.**

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 3z + 2\}, V = \mathbb{R}^3$

Observe que $(0, 0, 0) \notin S$ y se indicó en el teorema anterior que todo subespacio vectorial posee al vector nulo por lo que S **no es un subespacio vectorial**

c) $S = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 0\}, V = M(n, \mathbb{R})\}$

Si $n = 1$ entonces $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y en este caso $S = \{0\}$ es un subespacio (trivial).

Ahora si $n \geq 2$ tome $u = \operatorname{diag}(0, 1, 1, \cdots, 1)$ es decir una matriz $n \times n$ diagonal con un 0 en la primera entrada y el resto de entradas sobre la diagonal iguales a 1. Tome $v = \operatorname{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0)$ es decir una matriz $n \times n$ diagonal con un 0 en la última entreada y el resto de entradas sobre la diagonal iguales a 1. Por las propiedades del determinante para las matrices diagonales, es claro que $u, v \in S$. Sin embargo $u + v = \text{diag}(1, 2, 2, \cdots, 2, 1)$ y $\det(u + v) = 2^{n-2} \neq 0$. Luego $u + v \notin S$. Es decir, S **es un subespacio solo si** $n = 1$.

d) $S = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\}, V = M(n, \mathbb{R})\}$

Primero observe que $S \neq \varnothing$ puesto que $0 = 0^T$. Suponga que $A, B \in S$ y $a \in \mathbb{R}$. Observe que

$$(A + aB)^T = A^T + aB^T \tag{681}$$

y como $A = A^T$ y $B = B^T$ pues son elementos de S se sigue que

$$(A + aB)^T = A + aB \tag{682}$$

luego $A + aB \in S$ y por lo tanto S **sí es un subespacio.**

6.3. Combinaciones Lineales e Independencia Lineal

Al final del capítulo de determinantes se estudió el concepto de combinación lineal de un conjunto de vectores. Tal concepto solo requería la posibilidad de sumar vectores y multiplicar un vector por escalares. Debido a que en cualquier espacio vectorial pueden realizarse tales operaciones es posible dar una definición de una combinación lineal de vectores en cualquier espacio vectorial.

Definición 75. Si V es un espacio vectorial y $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto de vectores de V se dice que el vector $v \in V$ es una **combinación lineal de los vectores** $\{v_1, \cdots, v_p\}$ si existen escalares $a_1, \cdots, a_p$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p \tag{683}$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_1, \cdots, v_p\}$ se denota como $Cl\{v_1, \cdots, v_p\}$, es decir,

$$Cl\{v_1, \cdots, v_p\} = \{v = a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p \mid a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{R}\} \tag{684}$$

Por ejemplo, sea V el espacio vectorial de polinomios y $p_1(x) = 3x + 5$, $p_2(x) = x^2 - 7$, $p_3(x) = x^3 - 5x$. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces $Cl(p_1, p_2, p_3\}$ consiste en todos los polinomios de la forma

$$p(x) = ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) \tag{685}$$

$$= a(3x + 5) + b(x^2 - 7) + c(x^3 - 5x) = cx^3 + bx^2 + (3a - 5c)x + 5a - 7b \tag{686}$$

Así,

$$Cl\{p_1, p_2, p_3\} = \{cx^3 + bx^2 + (3a - 5c)x + 5a - 7b \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \tag{687}$$

6.3.1. Conjunto Generador y Base de un Espacio Vectorial

Suponga que $V = M(2, 2, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices 2×2. Observe que si $A \in M(2, 2, \mathbb{R})$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{688}$$

y se puede descomponer como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{689}$$

y definiendo

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{690}$$

entonces

$$A = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} \tag{691}$$

es decir, $A \in Cl\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. Como A era completamente arbitraria, acaba de mostrarse que $M(2, 2, \mathbb{R}) = Cl\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$.

La situación anterior motiva la siguiente definición.

Definición 76. Si V es un espacio vectorial y $\{v_1, \cdots, v_p\}$ un conjunto de vectores se dice que el conjunto es un **conjunto generador** si

$$V = Cl\{v_1, \cdots, v_p\} \tag{692}$$

es decir, todo vector puede escribirse como combinación lineal de vectores en $\{v_1, \cdots, v_p\}$.

Por ejemplo, sabemos que un conjunto generador para $V = M(2, 2, \mathbb{R})$ es $Cl\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ donde

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{693}$$

Ahora bien, suponga que se toma $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y se considera $Cl\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, A\}$. Obviamente sigue teniéndose que $M(2, 2, \mathbb{R}) = Cl\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, A\}$ pero pareciera ser que este conjunto generador es más grande lo necesario. Una forma de ver esto es que es posible escribir una matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, A\}$ en más de una forma, por ejemplo,

$$B = e_{11} + 3e_{12} \tag{694}$$

$$B = 3A - 2e_{11} \tag{695}$$

En cambio, B solo puede escribirse de una forma si el conjunto generador es $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 77. Si V es un espacio vectorial y $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto generador de V se dice que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una **base para el espacio vectorial** V si todo vector $v \in V$ puede escribirse de forma **única** como combinación lineal de vectores en $\{v_1, \cdots, v_p\}$. Se dice que la **dimensión de la base** es el número de vectores del conjunto generador.

El concepto de base de un espacio vectorial es uno de los más importantes del álgebra lineal, por lo que es importante dar condiciones que caracterizan cuando un conjunto dado es base o no. Para esto es necesario recordar otra definición vista en el capítulo de determinantes, aquella de independencia lineal de vectores. Se había dicho que si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V entonces el conjunto es **linealmente dependiente** si el vector nulo

0 es combinación lineal no trivial de $\{v_1, \cdots, v_p\}$, es decir, existen escalares **no todos nulos** $a_1, \cdots, a_p$ tal que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \tag{696}$$

El conjunto se llama **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir, si

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \tag{697}$$

entonces necesariamente se tiene que $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$.

Teorema 78. *Suponga que V es un espacio vectorial y que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto generador de V. Entonces $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una base si y solo si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Suponga primero que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una base para V. Hay que mostrar que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es linealmente independiente. Para ello suponga que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \tag{698}$$

Es claro que

$$0 v_1 + \cdots + 0 v_p = 0 \tag{699}$$

como $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una base entonces el vector 0 solo puede escribirse en un única forma como combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_p\}$, es decir, (698) y (699) representan la misma combinación lineal del vector 0 por lo que debe tenerse $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ lo cual significa que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es linealmente independiente.

Por otro lado, suponga que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto generador linealmente independiente. Hay que mostrar que es una base para V. Suponga que $v \in V$ tiene dos descomposiciones

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = v \tag{700}$$

$$b_1 v_1 + \cdots + b_p v_p = v \tag{701}$$

tomando la resta de las dos ecuaciones se tiene que

$$(a_1 - b_1) v_1 + \cdots + (a_p - b_p) v_p = 0 \tag{702}$$

y como $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es linealmente independiente la ecuación anterior implica que

$$a_1 - b_1 = \cdots = a_p - b_p = 0 \tag{703}$$

es decir, $a_1 = b_1, \cdots, a_p = b_p$ lo cual significa que todo vector v puede escribirse en forma única como combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_p\}$, es decir, $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una base. □

Cuando se definió el concepto de base se dijo que la dimensión de la base era el número de elementos que esta poseía. El siguiente resultado (que no se mostrará) caracteriza algunas propiedades de la base de un espacio vectorial, entre ellas la unicidad de la dimensión de la base.

Teorema 79. *Sea V un espacio vectorial.*

- Si $V = Cl\{v_1, \cdots, v_p\}$ entonces cualquier conjunto de $p+1$ vectores en V es linealmente dependiente.

- Si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ y $\{u_1, \cdots, u_l\}$ son bases de un espacio vectorial V entonces $p = l$. En tal caso se dice que V tiene dimensión p ($\dim V = p$)

- Si $\dim V = p$ y $\{u_1, \cdots, u_l\}$ son l vectores $l.i$ (linealmente independientes) con $l < p$ entonces existen vectores $u_{l+1}, \cdots, u_p$ de forma que $\{u_1, \cdots, u_l, u_{l+1}, \cdots, u_p\}$ es una base.

Definición 80. Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V de dimensión n y si $v \in V$ entonces

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{704}$$

y se dice los escalares $a_1, \cdots, a_n$ son las **coordenadas del vector v en la base B.** El vector de coordenadas para v en la base B es el vector

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{705}$$

Antes de dar algunos ejemplos sobre la teoría de este capítulo, es necesario mencionar algunas propiedades del espacio de filas y el espacio de columnas de una matriz.

6.4. Subespacios Asociados a una Matriz

Desde el inicio se han estudiado los sistemas de ecuaciones y la interpretación geométrica que estos poseían; ahora se va a estudiar la interpretación en términos de la teoría de espacios vectoriales que estos poseen. De aquí apareceran tres de los subespacios más importantes hasta el momento; el espacio columna, fila y nulo de una matriz.

6.4.1. Espacio Columna de una Matriz

Suponga que se tiene la matriz 4×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{706}$$

Observe que tiene tres vectores columnas

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{707}$$

En este caso el **espacio columna de A** sería el subespacio generado por las columnas de A, es decir,

$$C_A = \mathrm{Cl}\{C_1, C_2, C_3\} \tag{708}$$

De forma más general, si A es una matriz $k \times n$ con vectores columna $v_1, \cdots, v_n$ entonces

$$C_A = Cl\{v_1, \cdots, v_n\} \tag{709}$$

Ahora bien, para saber si un vector v está en el espacio columnas de A o no, hay que determinar si es combinación lineal o no de los vectores $v_1, \cdots, v_n$. Como se vio anteriormente lo que se hace es formar la matriz cuyos vectores columna son $v_1, \cdots, v_n$, es decir la matriz A y considerar la matriz aumentada $(A|v)$. Luego v era combinación lineal si y solo si el sistema $Ax = v$ tenía solución única o infinitas.

Es decir, **el espacio de columnas C_A de una matriz A son los vectores v para los cuales el sistema $Ax = v$ tiene solución.**

$$C_A = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \text{el sistema } Ax = v \text{ tiene solución}\} \tag{710}$$

6.4.2. Espacio Fila de una Matriz

En analagía con lo anterior si A es una matriz $k \times n$ con filas $v_1, \cdots, v_k$ entonces el **espacio fila de A** F_A es

$$F_A = Cl\{v_1, \cdots, v_k\} \tag{711}$$

Por ejemplo, con la matriz de antes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{712}$$

se tendría que $v_1 = (1, 2, 0)$ $\quad v_2 = (-3, 5, 6)$ $\quad v_3 = (9, 0, 1)$ $\quad v_4 = (5, 3, 1)$ y $F_A = Cl\{v_1, v_2, v_3\}$. Ahora bien, si se quieren ver los vectores anteriores como vectores columna, lo hay que hacer es transponer la matriz A, es decir,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{713}$$

y luego se puede observar que

$$F_A = C_{A^T} \tag{714}$$

y por la sección anterior

$$F_A = C_{A^T} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \text{el sistema } A^T x = v \text{ tiene solución}\} \tag{715}$$

Es decir, **el espacio de filas F_A de una matriz A son los vectores v para los cuales el sistema $A^T x = v$ tiene solución.**

En la práctica, los cálculos se harán sobre los espacios fila de las matrices, pues sobre aquellos se puede realizar Gauss-Jordan. Los resultados más importantes sobre el espacio fila de una matriz vienen resumidos en el teorema siguiente.

Teorema 81. *1) Si A y B son dos matrices $k \times n$ tal que B se obtiene por medio de operaciones elementales a partir de A entonces $F_A = F_B$.*

2) Si $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son dos matrices $k \times n$ donde B es la matriz escalonada reducida de A $(s \leq k)$ entonces $\mathcal{B} = \{w_1, \cdots, w_s\}$ es una base del subespacio $F_A = Cl\{v_1, \cdots, v_k\}$.

Es decir,

1. Para hallar el espacio de filas F_A de la matriz A, reduzca la matriz A según Gauss-Jordan. Las filas no nulas de la matriz escalonada reducida formarán una base para F_A
2. Para hallar el espacio de columnas C_A, reduzca la matriz A^T según Gauss-Jordan. Las filas no nulas de la matriz escalonada reducida formarán una base para C_A
3. $\dim F_A = \dim C_A = \text{Rng(A)}$

Problema 82. *problema 3 segundo examen parcial primer ciclo 2011*

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $W = \{Y \in \mathbb{R}^4 \mid Y = AX, \text{ para algún } X \in \mathbb{R}^5\}$

a) Determine un conjunto $\{w_1, \cdots, w_k\}$ **de vectores de** $\mathbb{R}^4$ **tal que** $W = Cl\{w_1, \cdots, w_k\}$

Observe que si v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 denotan las columnas de A con $v_i \in \mathbb{R}^4$ entonces por el teorema anterior $W = Cl\{v_1, \cdots, v_k\}$. Así, si se trabaja con

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{716}$$

entonces si se reduce la matriz (por Gauss Jordan) se llega a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{717}$$

y por el teorema anterior se tiene que

$$w_1 = (1, 0, 1, 0), w_2 = (0, 1, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1) \tag{718}$$

y $W = Cl\{w_1, w_2, w_3\}$

b) ¿Qué condiciones debe cumplir un vector (x, y, z, w) **para pertenecer al subespacio** W**?**

Para que (x, y, z, w) esté en W deben haber escalares a, b, c tal que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{719}$$

es decir debe hallarse una solución al sistema

$$\begin{cases} a = x \\ b = y \\ a + b = z \\ c = w \end{cases} \tag{720}$$

de lo cual se concluye que $(x, y, z, w) \in W$ si y solo si $z = x + y$

c) Complete la base que obtuvo para W a una base de $\mathbb{R}^4$

Para completar la base de W a una base de $\mathbb{R}^4$ basta tomar un vector en $\mathbb{R}^4$ que no esté en W ya que necesariamente será linealmente independiente de $\{w_1, w_2, w_3\}$ puesto que $W = Cl\{w_1, w_2, w_3\}$. Así $w_4 = (1, 0, 2, 0)$ no cumple la condición de estar en W que fue hallada en b) y por ende debe tenerse que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$.

d) Halle una base para el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de la matriz A

Se aplica el método de Gauss Jordan a A y se llega a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{721}$$

y así

$$u_1 = \left(1, 0, 1, 0, \frac{1}{3}\right), u_2 = \left(0, 1, -1, 0, \frac{1}{3}\right), u_3 = \left(0, 0, 0, 1, \frac{-4}{3}\right) \tag{722}$$

son los vectores que forman una base para el subespacio generado por las filas de la matriz A.

6.4.3. Espacio nulo u homogéneo de una Matriz

Si A es una matriz $k \times n$ se define su **espacio nulo** como

$$N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \tag{723}$$

es decir, el espacio nulo de una matriz los vectores que son solución del sistema homogéneo.

Para ver que N_A es un subespacio observe primero que N_A no es vacío pues $x = 0 \in N_A$. Luego, si $x_1, x_2 \in N_A$ entonces $Ax_1 = 0$ y $Ax_2 = 0$ por lo que $A(x_1 + tx_2) = Ax_1 + tAx_2 = 0$, es decir, $x_1 + tx_2 \in N_A$.

Ahora bien, hallar una base para el espacio nulo es muy fácil utilizando el siguiente resultado

Teorema 83. *Si A es una matriz $k \times n$ entonces una base para N_A se halla escribiendo el conjunto solución para el sistema homogéneo asociado tal como se hizo en el tema de sistemas de ecuaciones.*
Por el teorema del rango, se sigue entonces que la dimensión del espacio nulo es el número de parámetros cuando se escribe el conjunto solución del sistema homogéneo, es decir, $\dim N_A = n - \mathrm{Rng}(A)$

Por ejemplo, considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{724}$$

.Para hallar N_A se reduce la matriz por Gauss-Jordan y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{725}$$

Luego, el sistema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \tag{726}$$

por lo que la solución viene dado por un parámetro y sería tomando $z = t$

$$(x, y, z) = (-t, -t, t) = t(-1, -1, 1) \tag{727}$$

Luego,

$$N_A = \mathrm{Cl}\{(-1, -1, 1)\} \tag{728}$$

Problema 84. *problema 4 segundo examen parcial tercer ciclo 2010*

Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid c - 3a + 2b = 0, 2a - 3b + d = 0 \right\}$

a) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $M(2, \mathbb{R})$

Suponga que $A, B \in S$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \tag{729}$$

con

$$c - 3a + 2b = 0,\ 2a - 3b + d = 0 \tag{730}$$

$$g - 3e + 2f = 0,\ 2e - 3f + h = 0 \tag{731}$$

Para ver que S es un subespacio basta mostrar que $(A + tB) \in S$ con t un escalar cualquiera.

$$A + tB = \begin{pmatrix} a + te & b + tf \\ c + tg & d + th \end{pmatrix} \tag{732}$$

y observe que

$$(c + tg) - 3(a + te) + 2(b + tf) = (c - 3a + 2b) + t(g - 3e + 2f) = 0 + t0 = 0 \tag{733}$$

$$2(a + te) - 3(b + tf) + (d + th) = (2a - 3b + d) + t(2e - 3f + h) = 0 + t0 = 0 \tag{734}$$

por lo que $(A + tB) \in S$ y por ende S es un subespacio.

b) Halle una base de S

Observe que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $c - 3a + 2b = 0, 2a - 3b + d = 0$. Es decir,

$$c = 3a - 2b \tag{735}$$

$$d = -2a + 3b \tag{736}$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a - 2b & -2a + 3b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{737}$$

y así si $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$A = aA_1 + bA_2 \tag{738}$$

y es fácil verificar que A_1, A_2 son linealmente independientes por lo que $\mathcal{B} = \{A_1, A_2\}$ forma una base para S

c) Verifique que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in S$**.**

Es fácil ver que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 2A_1 + 3A_2 \tag{739}$$

d) Calcule el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **en la base** $\mathcal{B}$ **hallada en la parte b).**

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{740}$$

Problema 85. *problema 5 segundo examen parcial tercer ciclo 2010*

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$**,** $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ **y** U **el subespacio vectorial de** $\mathbb{R}^2$ **formado por todos los vectores** b **tal que** $A^T X = b$ **tiene solución.**

a) Encuentre una base para U

Por lo visto en (**??**) basta reducir la matriz A y se encuentra que su forma escalonada reducida es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{741}$$

lo cual significa que $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ es una base para U, es decir, $U = \mathbb{R}^2$.

b) Sin realizar cálculos adicionales, diga cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A**. Justifique su respuesta.**

Sabemos que $Rng(A) = Rng(A^T)$ por lo que la dimensión del espacio vectorial generado por las columnas de A es también 2.

c) Sin realizar ningún cálculo diga si las filas de A **son linealmente independientes o son linealmente dependientes. Justifique su respuesta.**

Como hay tres filas en la matriz A y la dimensión del espacio que generan es 2 entonces las filas son linealmente dependientes.

d) Sin hacer cálculos adicionales, diga cual es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ **formado por todos los vectores** x **que son solución del sistema** $Ax = 0$ **con** $0 \in \mathbb{R}^3$**. Justifique su respuesta.**

Como $\text{Rng}(A) = 2$ el sistema $Ax = 0$ solo tiene la solución trivial $x = 0$, luego el subespacio de las soluciones es $S = \{(0,0)\}$ el cual tiene dimensión 0.

7. Ortogonalidad y Proyecciones en $\mathbb{R}^n$

7.1. Bases Ortonormales

En este capítulo se trabajará nuevamente sobre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$. La idea será encontrar un método sistemático para transformar cualquier base de vectores en una base "ortonormal" de vectores. El concepto fundamental de este capítulo es el concepto de ortogonalidad (lo que antes se estuvo llamando como vectores perpendiculares). Si $u, v \in R^n$ el producto punto entre ellos $u \cdot v$ servía para definir cuando los vectores eran ortogonales, es decir, cuando $u \cdot v = 0$.

Si $\{u_1, \cdots, u_k\}$ son k vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces tales vectores son un **conjunto ortogonal** si los vectores son mutuamente ortogonales, es decir,

$$i \neq j \longrightarrow u_i \cdot u_j = 0 \tag{742}$$

Si además de ser ortogonal $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto que cumple

$$\forall i, \|u_i\| = 1 \tag{743}$$

se dice que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un **conjunto ortonormal.**

Por ejemplo, si $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (-2, 0, 1)$ y $u_3 = (0, 1, 0)$ es fácil verificar que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es un conjunto ortogonal, es decir,

$$u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0 \tag{744}$$

Por otro lado la base canónica $e_1 = (1, 0, 0)$,$e_2 = (0, 1, 0)$,$e_3 = (0, 0, 1)$ es una base ortonormal, es decir,

$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0 \tag{745}$$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1 \tag{746}$$

El siguiente resultado muestra la utilidad de los conjuntos ortogonales.

Teorema 86. *Si $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto ortogonales de vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto es linealmente independiente.*

Demostración. Suponga que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots a_ku_k = 0 \tag{747}$$

y tomando el producto punto en la ecuación anterior con el vector u_1 se tiene

$$a_1(u_1 \cdot u_1) + a_2(u_2 \cdot u_1) + \cdots a_k(u_k \cdot u_1) = 0 \tag{748}$$

y como el conjunto es ortogonal se tiene

$$a_1 \|u_1\|^2 = 0 \tag{749}$$

o bien

$$a_1 = 0 \tag{750}$$

Similiarmente se muestra que todos los escalares son 0, es decir

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \tag{751}$$

por lo que el conjunto es linealmente independiente. □

El teorema anterior indica que si un conjunto es ortogonal entonces es $l.i.$ En el caso de que el conjunto tenga n elementos lo anterior indica que el conjunto sería una base para el espacio vectorial de dimensión n. De hecho, la ortonormalidad también permite hallar fácilmente el vector de coordenadas de cualquier vector.

Teorema 87. *Si S es un subespacio vectorial de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base ortonormal para S entonces:*

1) Si A es la matriz $n \times k$ cuyas columnas son los vectores u_i, $A = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ entonces $A^T A = 1_k$.

2) Si $u \in S$ entonces $[u]_B = \begin{pmatrix} u \cdot u_1 \\ u \cdot u_2 \\ \vdots \\ u \cdot u_k \end{pmatrix}$

Demostración. 1) Note que si $A = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ es una matriz $n \times k$ entonces A^T es una matriz $k \times n$ con filas u_i es decir, $A^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$. De esta forma

$$A^T A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} (u_1, u_2, \cdots, u_k) = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & \cdots & u_1 \cdot u_k \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & \cdots & u_2 \cdot u_k \\ \vdots & & & \\ u_k \cdot u_1 & u_k \cdot u_2 & \cdots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix} = 1_k \tag{752}$$

2) Suponga que $u \in S$, como B es base entonces

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_k u_k \tag{753}$$

Por definición $[u]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ y así hay que hallar los coeficientes. Por ejemplo, multiplicando la ecuación anterior por u_1 se tiene

$$u \cdot u_1 = a_1(u_1 \cdot u_1) + a_2(u_2 \cdot u_1) + \cdots a_k(u_k \cdot u_1) \tag{754}$$

y como la base es ortonormal

$$u \cdot u_1 = a_1 \tag{755}$$

y el resto se halla en forma análoga por lo que $[u]_B = \begin{pmatrix} u \cdot u_1 \\ u \cdot u_2 \\ \vdots \\ u \cdot u_k \end{pmatrix}$. $\square$

Por ejemplo, suponga que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ con

$$u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}. \frac{-2}{3}\right), u_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{756}$$

y $u = (3, 4, 5)$. Para hallar $[u]_B$ se aplica el teorema anterior y se tiene que

$$u \cdot u_1 = 1, u \cdot u_2 = 0, u \cdot u_3 = 7 \tag{757}$$

por lo que $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ o bien $u = u_1 + 7u_3$.

7.2. Subespacios Ortogonales

Debido a que casi siempre se trabaja sobre subespacios de $\mathbb{R}^n$ es útil saber cuando dados dos subespacios S y T, todo vector de S es ortogonal con todo vector de T y vice-versa. En tal circunstancia se dice que los subespacios S y T son ortogonales, es decir, si S y T son dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ se dice que son **subespacios ortogonales** si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T y vice-versa

$$x \in S, y \in T \longrightarrow x \cdot y = 0 \tag{758}$$

En tal caso se denota $S \perp T$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se puede tomar la base canónica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ y tomar $S = Cl\{e_1, e_2\}$ y $T = \{e_3\}$. Geométricamente S sería el plano x, y y T el eje z por lo que claramente debe tenerse $S \perp T$.

Nótese que la definición anterior de subespacio ortogonal requiere verificar que todo vector de S es ortogonal a todo vector de T lo cual en principio es un proceso infinito. Para evitar esto se utilizan las bases de un espacio vectorial. Por ejemplo si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base de S y $B_2 = \{v_1, \cdots, v_l\}$ es una base de T entonces si $u \in S, v \in T$ se tiene que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \tag{759}$$

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_l v_l \tag{760}$$

Luego

$$u \cdot v = (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) \cdot (b_1 v_1 + \cdots + b_l v_l) = a_1 u_1 \cdot (b_1 v_1 + \cdots + b_l u_l) + \cdots + a_k u_k \cdot (b_1 v_1 + \cdots + b_l v_l) \tag{761}$$

$$= a_1 b_1 (u_1 \cdot v_1) + \cdots + a_1 b_l (u_1 \cdot v_l) + \cdots + a_k b_1 (u_k \cdot v_1) + \cdots + a_k b_l (u_k \cdot v_l) \tag{762}$$

Así, para garantizar que $u \cdot v = 0$ basta con que que cada elemento de $B_1 = \{u_1, \cdots, u_k\}$ sea ortogonal con cada elemento de $B_2 = \{v_1, \cdots, v_l\}$, es decir, **para verificar que dos subespacios son ortogonales, basta verificar la ortogonalidad entre las bases respectivas de los subespacios.**

Por otro lado, suponga que $S \perp T$ y que $u \in S \cap T$ es decir, u es un vector en ambos subespacios. Como $u \in S$ y $u \in T$ u debe ser ortogonal a sí mismo, es decir,

$$\|u\|^2 = u \cdot u = 0 \tag{763}$$

el único vector que cumple que es ortogonal a sí mismo es $u = 0$ y de hecho como S y T son subespacios siempre poseen al 0 por lo que **la intersección de dos subespacios ortogonales S y T es únicamente el vector nulo 0.**

7.3. Complemento Ortogonal de un Subespacio

Si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ el **complemento ortogonal de** S es el conjunto de todos los vectores ortogonales a cualquier vector de S, es decir,

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in S, u \cdot v = 0\} \tag{764}$$

Obviamente por un argumento similar al de antes para que un vector u esté en el complemento ortogonal de S basta que sea ortogonal a todos los vectores de cierta base de S. De hecho, basta con que sea ortogonal a algún conjunto generador de S.

Por ejemplo si $S = Cl\{v_1, \cdots, v_k\}$ y $u \in S^\perp$ entonces la condición de que

$$\forall i,\ u \cdot v_i = 0 \tag{765}$$

es equivalente a

$$Au = 0 \tag{766}$$

donde A es la matriz $k \times n$ cuyas filas son los vectores $v_1, \cdots, v_k$, es decir, $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\} = N_A \tag{767}$$

De la caracterización anterior es sencillo ver que **el complemento ortogonal de cualquier subespacio es a su vez un subespacio** y

- Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim S = k$ entonces $\dim(S^\perp) = n - k$
- Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base de S y $B_2 = \{v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ es una base de $S^\perp$ entonces $B = \{u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.
- $S^\perp = N_A$ donde A es la matriz cuyas filas son una base de S

Problema 88. *problema 2 segundo examen parcial reposición I ciclo 2006*

Sea el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - w = 0, z - 2x = 0\}$**.**
a) Determine una base para W
Las condiciones para estar en W pueden escribirse como

$$y = w \tag{768}$$

$$z = 2x \tag{769}$$

y así si $(x, y, z, w) \in W$

$$(x, y, z, w) = (x, y, 2x, y) = x(1, 0, 2, 0) + y(0, 1, 0, 1) \tag{770}$$

Definiendo $u_1 = (1, 0, 2, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ se tiene que una base para W es $B_W = \{u_1, u_2\}$
b) Determine una base para el complemento ortogonal de W
Si $v = (x, y, z, w) \in W^\perp$ debe tenerse que $v \cdot u_1 = v \cdot u_2 = 0$ es decir,

$$v \cdot u_1 = x + 2z = 0 \tag{771}$$

$$v \cdot u_2 = y + w = 0 \tag{772}$$

Luego

$$x = -2z \tag{773}$$

$$y = -w \tag{774}$$

Así,

$$(x, y, z, w) = (-2z, -w, z, w) = z(-2, 0, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1) \tag{775}$$

Definiendo $v_1 = (-2, 0, 1, 0)$ y $v_2 = (0, -1, 0, 1)$ entonces una base para el complemento ortogonal de W es $B_{W^\perp} = \{v_1, v_2\}$

7.4. Subespacios Ortogonales de una Matriz

Ahora que se han estudiado la ortogalidad entre subespacios, se puede analizar la relación que existe entre los distintos subespacios de una matriz. Para esto suponga que se tiene una matriz $m \times n$ tal como se indica en la siguiente figura. Se va a considerar la relación que existe entre cuatro subespacios asociados a la matriz: el espacio de filas F_A, el espacio de columnas C_A, el espacio nulo N_A y el espacio nulo N_{A^T}. Se van a estudiar los subespacios anteriores en parejas.

Como A es una matriz $m \times n$ esto quiere decir que hay m vectores fila y cada vector fila es de tamaño n, es decir, F_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Ya se sabe que para hallar una base para F_A se reduce la matriz A por Gauss-Jordan y los vectores no nulos de la matriz escalonada reducida forman una base. Así que suponga que $\dim F_A = r$.

Se puede notar que como A es una matriz $m \times n$ entonces el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene sentido cuando x es un vector en $\mathbb{R}^n$. Luego, N_A también es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. También por la forma en que se realiza la multiplicación matricial, si $Ax = 0$ esto quiere decir que el vector x es ortogonal a todas las filas de A y por ende a F_A. De hecho, como $\dim N_A = n - r$ y razonando en forma idéntica a la anterior para C_A y N_{A^T} se tiene el siguiente resultado:

Teorema 89. *Suponga que A es una matriz $m \times n$ y considere los subespacios F_A, C_A, N_A, N_{A^T}. Se tiene lo siguiente:*

1. F_A y N_A son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y un subespacio es el complemento ortogonal del otro subespacio, es decir, $(F_A)^\perp = N_A$. Si $\dim F_A = r$ entonces $\dim N_A = n - r$ y si se poseen bases B_1 para F_A y B_2 para N_A entonces $B_1 \cup B_2$ es una base para el espacio completo $\mathbb{R}^n$ y cada vector v en $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer en forma única como la combinación lineal de un vector v_1 en F_A y v_2 en N_A, es decir, $v = v_1 + v_2$. Lo anterior se escribe como
$$\mathbb{R}^n = F_A \oplus N_A \tag{776}$$

2. C_A y N_{A^T} son subespacios de $\mathbb{R}^m$ y un subespacio es el complemento ortogonal del otro subespacio, es decir, $(C_A)^\perp = N_{A^T}$. Si $\dim C_A = r$ entonces $\dim N_{A^T} = m - r$ y si se poseen bases B_1 para C_A y B_2 para N_{A^T} entonces $B_1 \cup B_2$ es una base para el espacio completo $\mathbb{R}^m$ y cada vector v en $\mathbb{R}^m$ se puede descomponer en forma única como la combinación lineal de un vector v_1 en C_A y v_2 en N_{A^T}, es decir, $v = v_1 + v_2$. Lo anterior se escribe como
$$\mathbb{R}^m = C_A \oplus N_{A^T} \tag{777}$$

Finalmente, suponga que b está en el espacio C_A, es decir, existe una solución para el sistema $Ax = b$. Suponga que esa solución es llamada x_p (se conocerá como la solución particular), es decir,

$$Ax_p = b \tag{778}$$

Ahora bien, puede haber otra solución para el sistema anterior, es decir, un vector x tal que

$$Ax = b \tag{779}$$

Tomando la resta de las dos ecuaciones anteriores, se tiene que

$$Ax - Ax_p = b - b \tag{780}$$

o bien

$$A(x - x_p) = 0 \tag{781}$$

Si se define el vector

$$x_h = x - x_p \tag{782}$$

lo anterior quiere decir

$$Ax_h = 0 \tag{783}$$

es decir, x_h es una solución del sistema homogéneo. Claramente de la definición se tiene que

$$x = x_p + x_h \tag{784}$$

y lo anterior puede resumirse en el siguiente resultado

Teorema 90. *Suponga que se quiere hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$. Entonces, si se conoce una solución específica x_p del sistema anterior, es decir, $Ax_p = b$ y la solución general del sistema $Ax = 0$ (por ejemplo, hallar una base para N_A) entonces la solución general para el sistema $Ax = b$ puede escribirse como*

$$x = x_p + x_h \tag{785}$$

donde x_h es la solución general del sistema homogéneo.

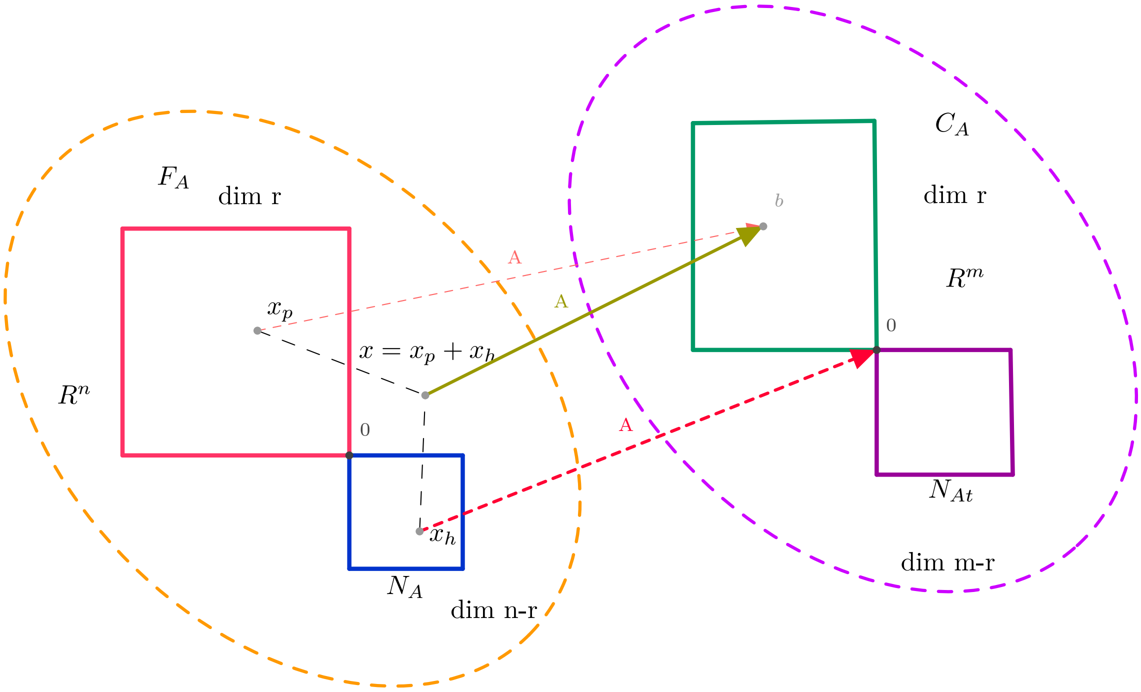


Figura 41: Ortogonalidad entre Subespacios de una Matriz

7.5. Proyección Ortogonal sobre un Subespacio

En capítulos anteriores se definió el concepto de la proyección de un vector sobre otro vector $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$. Ahora bien, cada vector $\overrightarrow{u}$ genera un subespacio uno-dimensional según la fórmula $W = Cl\{\overrightarrow{u}\}$. Por lo tanto, proyectar un vector a lo largo de otro vector puede interpretarse como proyectar un vector sobre un subespacio uno dimensional. En esta sección se buscará generalizar el concepto de proyección de un vector, es decir, se buscará definir la proyección de un vector sobre un subespacio W de cualquier dimensión, como se indica en la siguiente figura.

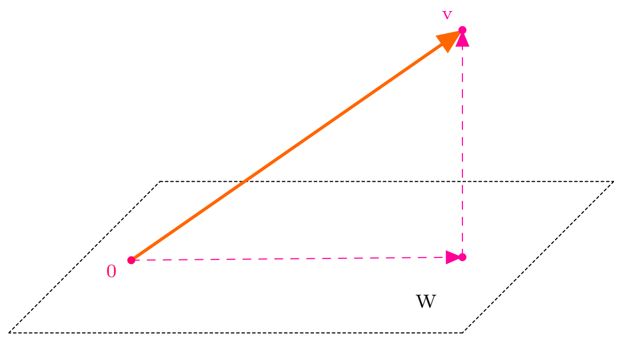


Figura 42: Proyección de un vector sobre un subespacio

Así, suponga que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k y que $v \in \mathbb{R}^n$. Si $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ es una *base ortonormal* buscamos definir un vector $Proy_W v$ tal que (ver figura) $v - Proy_W v$ es ortogonal a W. Como se ocupa que $(Proy_W v) \in W$ se puede escribir este vector en términos de la base B para W

$$Proy_W v = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k \tag{786}$$

Como $v - Proy_W v$ debe ser ortogonal a W entonces debe ser ortogonal a cada vector de la base w_i

$$(v - Proy_W v) \cdot w_i = 0 \tag{787}$$

es decir,

$$v \cdot w_i = (Proy_W v) \cdot w_i \tag{788}$$

y sustituyendo de la ecuación (786)

$$v \cdot w_i = (c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k) \cdot w_i \tag{789}$$

y como la base es ortonormal

$$c_i = v \cdot w_i \tag{790}$$

Así se define la **proyección ortogonal de v sobre el subespacio W**

$$Proy_W v = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k \tag{791}$$

Lo hallado anteriormente puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 91. *Suponga que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k y $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ es una base ortonormal de W. Si $v \in \mathbb{R}^n$ se define*

$$Proy_W v = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k \tag{792}$$

*El vector $v - Proy_W v$ se denomina la **componente ortogonal de** v **a** W. Este vector cumple que es ortogonal a todo W, es decir,*

$$\forall w \in W \quad , (v - Proy_W v) \perp w \tag{793}$$

Y la proyección ortogonal el vector más cercano de W a v, es decir, la distancia de v a W es

$$d(v, W) = \|v - \mathrm{Proy}_W v\| \tag{794}$$

7.6. Ortonormalización de Gram-Schmidt

La definición de proyección ortogonal sobre un subespacio requería conocer de antemano una base $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ ortonormal de W. Ahora bien, puede ser que se conozca solamente una base $\{u_1, \cdots, u_k\}$ de W y no una base ortonormal. El método de ortonormalización de Gram-Schmidt consiste en un algoritmo para construir una base ortonormal $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ a partir de una base normal $\{u_1, \cdots, u_k\}$.

7.6.1. Algoritmo de Gram-Schmidt

7.6.1.1. Paso 1 Suponga que W es un subespacio y que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base para W. Defina

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \tag{795}$$

$$W_1 = Cl\{w_1\} \tag{796}$$

Obviamente $\|w_1\| = 1$ y $Cl\{w_1\} = Cl\{u_1\}$

7.6.1.2. Paso 2 Tome ahora u_2 y considere la proyección de u_2 sobre W_1, es decir,

$$u_2 = Proy_{W_1} u_2 + (u_2 - Proy_{W_1} u_2) \tag{797}$$

Como queremos una base ortonormal eliminamos la “parte común” entre u_2 y w_1 que es $Proy_{W_1} u_2$ y nuestro candidato para el segundo vector de la base sería $u_2 - Proy_{W_1} u_1$. Sin embargo, como en principio tal vector no tiene norma 1 dividimos por su norma y definimos

$$w_2 = \frac{u_2 - Proy_{W_1} u_2}{\|u_2 - Proy_{W_1} u_2\|} \tag{798}$$

$$W_2 = Cl\{w_1, w_2\} \tag{799}$$

Nuevamente $\|w_2\| = 1$ y $Cl\{w_1, w_2\} = Cl\{u_1, u_2\}$ y $w_1 \cdot w_2 = 0$.

7.6.1.3. Paso 3 Es bastante claro lo que sigue ahora. Se toma u_3 y se considera la proyección sobre W_2 y se define

$$w_3 = \frac{u_3 - Proy_{W_2} u_3}{\|u_3 - Proy_{W_2} u_3\|} \tag{800}$$

$$W_3 = Cl\{w_1, w_2, w_3\} \tag{801}$$

Nuevamente $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto ortonormal.

7.6.1.4. Paso k-ésimo Se procede de esta forma hasta llegar a u_k y se define

$$w_k = \frac{u_k - Proy_{W_{k-1}} u_k}{\|u_k - Proy_{W_{k-1}} u_k\|} \tag{802}$$

$$W_k = Cl\{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{k-1}, w_k\} \tag{803}$$

En este caso $W = W_k$ y la base ortonormal buscada es $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$.

Problema 92. *problema 5 segundo examen parcial II ciclo 2007*

Sea $W = Cl\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,0,1,2)\}$
a) Determine una base ortonormal para W
Sea aplicará Gram-Schmidt sobre

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,-1,1,-1), u_3 = (1,0,1,2) \tag{804}$$

paso 1
Defina

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1,1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{805}$$

$$W_1 = Cl\{w_1\} \tag{806}$$

paso 2
Por (791)

$$Proy_{W_1} u_2 = (u_2 \cdot w_1) w_1 = 0 \tag{807}$$

Luego defina

$$w_2 = \frac{u_2 - Proy_{W_1} u_2}{\|u_2 - Proy_{W_1} u_2\|} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(1,-1,1,-1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{808}$$

$$W_2 = Cl\{w_1, w_2\} \tag{809}$$

paso 3
Al igual que antes

$$Proy_{W_2} u_3 = (u_3 \cdot w_1) w_1 + (u_3 \cdot w_2) w_2 = 2w_1 = (1,1,1,1) \tag{810}$$

Luego

$$w_3 = \frac{u_3 - Proy_{W_2} u_3}{\|u_3 - Proy_{W_2} u_3\|} = \frac{(1,0,1,2) - (1,1,1,1)}{\|(1,0,1,2) - (1,1,1,1)\|} = \frac{(0,-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tag{811}$$

De esta forma $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortonormal para W.

b) Determine la proyección de $v = (3, 0, 3, 6)$ sobre W

Por (791) se utiliza la base ortonormal recién hallada

$$Proy_W v = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + (v \cdot w_3)w_3 \tag{812}$$

$$= 6w_1 + 3\sqrt{2}w_3 = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 3\sqrt{2}\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(3, 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3, 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tag{813}$$

c) Determine el complemento ortogonal de W

Si $(x, y, z, w) \in W^{\perp}$ entonces

$$(x, y, z, w) \cdot w_1 = (x, y, z, w) \cdot w_2 = (x, y, z, w) \cdot w_3 = 0 \tag{814}$$

lo cual da las siguientes condiciones

$$x + y + z + w = 0 \tag{815}$$

$$x - y + z - w = 0 \tag{816}$$

$$y = w \tag{817}$$

Se puede escribir lo anterior como una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{818}$$

y reduciendo la matriz se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{819}$$

es decir

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \tag{820}$$

Por lo que

$$(x, y, z, w) = (-z, 0, z, 0) = z(-1, 0, 1, 0) \tag{821}$$

y así $W^{\perp} = Cl\{(-1, 0, 1, 0)\}$

7.7. Problemas Adicionales

7.7.1. Solución Segundo Examen Parcial I Ciclo 2012

Problema 93. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Considere los vectores $x = 2u - 3v$ y $z = 5u + 2v$. Sabiendo que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ y que el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{6}$ calcule

a) $\|x\|$

b) $x \cdot z$

➭ a)

$$\|x\| = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{(2u-3v)\cdot(2u-3v)} \tag{822}$$

$$= \sqrt{4u\cdot u - 6u\cdot v - 6v\cdot u + 9v\cdot v} = \sqrt{4\|u\|^2 - 12u\cdot v + 9\|v\|^2} \tag{823}$$

$$= \sqrt{16 - 12\|u\|\|v\|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 81} \tag{824}$$

$$= \sqrt{97 - 36\sqrt{3}} \tag{825}$$

Es decir, $\|x\| = \sqrt{97-36\sqrt{3}} \simeq 5{,}89$

➥ b)

$$x\cdot z = (2u-3v)\cdot(5u+2v) \tag{826}$$

$$= 10u\cdot u + 4u\cdot v - 15v\cdot u - 6v\cdot v \tag{827}$$

$$= 10\|u\|^2 - 11u\cdot v - 6\|v\|^2 \tag{828}$$

$$= 40 - 11\|u\|\|v\|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 54 \tag{829}$$

$$= -14 - 33\sqrt{3} \tag{830}$$

es decir, $x\cdot z = -14-33\sqrt{3} \cong -71{,}16$

Problema 94. Considere el conjunto $\Omega \subseteq M(2\times 2,\mathbb{R})$ definido por

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : 2x = z, \quad y = -w \right\} \tag{831}$$

a) Pruebe que Ω es un subespacio vectorial de $M(2\times 2,\mathbb{R})$
b) Determine una base B para Ω
c) Encuentre la dimensión de Ω
d) Calcule las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ en la base B de Ω

a) Suponga que $u, v \in \Omega$.

$$u = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \qquad 2x = z, \quad y = -w \tag{832}$$

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad 2a = c, \quad b = -d \tag{833}$$

Observe que

$$u + tv = \begin{pmatrix} x+ta & y+tb \\ z+tc & w+td \end{pmatrix} \tag{834}$$

y por lo anterior

$$2(x+ta) = 2x + t(2a) = z + tc \tag{835}$$

$$y + tb = -w + t(-d) = -(w+td) \tag{836}$$

por lo que la matriz $u + tv$ cumple las condiciones para estar nuevamente en el conjunto Ω lo cual significa que sí es un subespacio vectorial.

b) Para hallar una base observe que si $u \in \Omega$

$$u = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \qquad 2x = z, \quad y = -w \tag{837}$$

es decir,

$$u = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -w \\ 2x & w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{838}$$

por lo que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman un conjunto generador de Ω y como son claramente linealmente independientes son una base del subespacio.

c) La dimensión del subespacio es 2 pues la base tiene dos elementos

d) Es fácil ver que

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1u_1 + 3u_2 \tag{839}$$

por lo que

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{840}$$

Problema 95. Considere las siguientes rectas l_1 y l_2 , donde

$$l_1 : (x,y,z) = (0,2,0) + t(1,-1,1) \qquad l_2 : \frac{x-2}{-1} = y = \frac{1+z}{2} \tag{841}$$

a. Compruebe que estas rectas se intersecan ortogonalmente.

b. Encuentre una ecuación vectorial para el plano P_1 que contiene ambas rectas.

c. Encuentre una ecuación normal para el plano P_2 que contiene la recta l_2 y es perpendicular al plano P_1

a. Observe que un punto sobre la recta l_1 es $(0,2,0)$ y un vector para esa recta es $(1,-1,1)$. Para l_2 observe que su forma simétrica es

$$s = \frac{x-2}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-(-1)}{2} \tag{842}$$

por lo que un punto sobre la recta es $(2,0,-1)$ y un vector para la recta es $(-1,1,2)$. Para hallar el punto de intersección un punto (x,y,z) debe cumplir ambas ecuaciones a la vez, es decir, debe cumplir el siguiente sistema

$$\begin{cases} t = 2 - s \\ 2 - t = s \\ t = -1 + 2s \end{cases} \tag{843}$$

y tiene solución $t = s = 1$ por lo que el punto de intersección es $(1,1,1)$. Para ver que se intersecan ortogonalmente observe que los vectores directores de las rectas son ortogonales, es decir, $(1,-1,1)\cdot(-1,1,2) = 0$ y esto significan que las rectas son perpendiculares.

b) Para la ecuación vectorial del plano que contiene ambas rectas se necesita un punto y dos direcciones. Como punto se puede tomar el punto de intersección de ambas rectas y como vectores los dos vectores directores de las rectas, es decir, la ecuación del plano es

$$P_1 : (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,-1,1) + s(-1,1,2) \tag{844}$$

c) Observe que un vector perpendicular al plano P_1 es

$$a = (1,-1,1) \times (-1,1,2) = (-3,-3,0) \tag{845}$$

Como el plano P_2 es perpendicular al plano P_1 los vectores normales respectivos deben ser perpendiculares y a su vez el vector normal del plano P_2 es perpendicular al vector director de la recta l_2 pues debe contenerla por lo que se puede tomar

$$n = (-3,-3,0) \times (-1,1,2) = (-6,6,-6) \tag{846}$$

funciona como el vector normal del plano P_2. Como punto para la ecuación normal se puede tomar el punto de la recta $(2,0,-1)$ por lo que la ecuación normal del plano es

$$P_2 : \quad (x,y,z)\cdot(-6,6,-6) = (-6,6,-6)\cdot(2,0,-1) \tag{847}$$

es decir

$$-6x + 6y - 6z = -12 + 6 \tag{848}$$

o bien

$$x - y + z = 1 \tag{849}$$

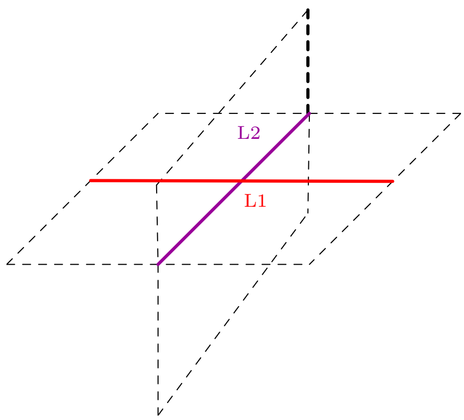


Figura 43: ejemplo planos perpendiculares

Problema 96. En $\mathbb{R}^3$ consideremos el subconjunto $V = \{(0,2x,x-z) : x,z \in \mathbb{R}\}$. Se pide:

a. Considere el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$**. Verifíquese que** B **es una base para** V**.**
b. Encuentre una base ortonormal para V**.**
c. Determine una base para el subespacio $V^{\perp}$
d. Sea $u = (1,1,0)$**. Calcule la proyección ortogonal de** u **sobre** V**.**
e. Encuentre vectores $v \in V$**,** $t \in V^{\perp}$ **que cumplen** $u = v + t$

a) Para ver que es una base observe que si $v \in V$

$$v = (0, 2x, x - z) = x(0,2,1) + z(0,0,-1) \tag{850}$$

lo cual significa que B es un conjunto generador de V. Basta ver que son linealmente independientes por lo que suponga que

$$a(0,0,-1) + b(0,2,1) = (0,0,0) \tag{851}$$

es decir

$$(0, 2b, -a + b) = (0,0,0) \tag{852}$$

lo cual dice que $a = b = 0$ y esto es la condición de independencia lineal.
b) Se aplica Gram-Schmidt con $u_1 = (0,0,-1)$ y $u_2 = (0,2,1)$. Así,

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = u_1 = (0,0,-1) \tag{853}$$

$$w_2 = \frac{u_2 - \text{Proy}_{w_1} u_2}{\left\|u_2 - \text{Proy}_{w_1} u_2\right\|} \tag{854}$$

por un lado

$$\text{Proy}_{w_1} u_2 = (u_2 \cdot w_1) w_1 = -w_1 = (0,0,1) \tag{855}$$

y

$$w_2 = \frac{(0,2,1) - (0,0,1)}{\|(0,2,1) - (0,0,1)\|} = \frac{1}{2}(0,2,0) = (0,1,0) \tag{856}$$

c) Si $r = (x,y,z) \in V^{\perp}$ entonces $r \cdot w_1 = 0$ y $r \cdot w_2 = 0$ es decir

$$-z = 0 \qquad y = 0 \tag{857}$$

es decir

$$r = (x,y,z) = (x,0,0) = x(1,0,0) \tag{858}$$

por lo que una base para $V^{\perp}$ es $\{(1,0,0)\}$.
d) Si $u = (1,1,0)$ se tiene que

$$\text{Proy}_V u = (u \cdot w_1) w_1 + (u \cdot w_2) w_2 \tag{859}$$

$$= w_2 = (0,1,0) \tag{860}$$

e) Se toma $v = \text{Proy}_V u$ y $t = u - v = (1,0,0)$. Es claro que $v \in V, t \in V^{\perp}$ y $u = v + t$.

Problema 97. Considere los planos $P_1 : \quad x - 2y + z - 1 = 0$ y $P_2 : \quad x - 2y + z + 6 = 0$.
a. ¿Son los planos anteriores paralelos?
b. Encuentre la distancia que los separa.

a) El vector normal de ambos planos es $n = (1, -2, 1)$ por lo que los planos sí son paralelos
b) Para encontrar la distancia observe que $P = (0, 0, 1)$ es un punto del plano P_1 y $Q = (0, 0, -6)$ es un punto del plano P_2 por lo que

$$d(P_1, P_2) = \left\| \text{Proy}_n \overrightarrow{PQ} \right\| \tag{861}$$

$$= \left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n \right\| \tag{862}$$

$$= \left\| \frac{(0, 0, -7) \cdot (1, -2, 1)}{6} n \right\| = \frac{7}{6} \|n\| \tag{863}$$

$$= \frac{7\sqrt{6}}{6} \cong 2{,}85 \tag{864}$$

7.7.2. Reposición Segundo Examen Parcial I Ciclo 2012

Problema 98. Considere los triángulos de vértices A, B, C dos de cuyos lados están dados por los vectores $v = (1, -1, -2)$ y $w = (-2, 1, -6)$. Si $A = (0, 5, -1)$ es el extremo común de los vectores v, w determine
a) Los vértices B y C
b) El perimétro del triángulo ABC
c) El área del triángulo ABC
d) El vector correspondiente a la altura sobre el lado AC
e) El coseno del ángulo en el vértice B

a) Considere la siguiente figura

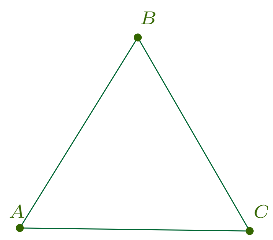


Figura 44: Triángulo con vértices A,B,C

Del enunciado se tiene que

$$v = \overrightarrow{AB} = B - A \qquad w = \overrightarrow{AC} = C - A \tag{865}$$

o bien

$$B = A + v = (0,5,-1) + (1,-1,-2) = (1,4,-3) \tag{866}$$

$$C = A + w = (0,5,-1) + (-2,1,-6) = (-2,6,-7) \tag{867}$$

y estos serían los otros dos vértices.

b) El perímetro del triángulo es la suma de las longitudes de los tres lados. El tercer lado es

$$\overrightarrow{BC} = C - B = C - A + A - B = w - v = (-2,1,-6) - (1,-1,-2) = (-3,2,-4) \tag{868}$$

y así el perímetro sería

$$P = \|v\| + \|w\| + \|w - v\| \tag{869}$$

$$= \|(1,-1,-2)\| + \|(-2,1,-6)\| + \|(-3,2,-4)\| \tag{870}$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{41} + \sqrt{29} \simeq 14{,}23 \tag{871}$$

c) El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}\|v \times w\| = \frac{1}{2}\|(8,10,-1)\| = \frac{\sqrt{165}}{2} \simeq 6{,}42 \tag{872}$$

d) La altura sobre AC es la componente ortogonal de la proyección de AB sobre AC, es decir,

$$h = \overrightarrow{AB} - \operatorname{Proy}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} \tag{873}$$

$$= v - \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \tag{874}$$

$$= (1,-1,-2) - \frac{9}{41}(-2,1,-6) = \left(\frac{59}{41}, -\frac{50}{41}, -\frac{28}{41}\right) \tag{875}$$

e) Para el coseno del ángulo se utiliza la fórmula del producto punto

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{(-1,1,2)\cdot(-3,2,-4)}{\sqrt{6}\sqrt{29}} = -\frac{3}{\sqrt{174}} \simeq -0{,}22 \tag{876}$$

Problema 99. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **y sea** $W = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\right\}$

a) Determine B_1, B_2 bases ortonormales de W y $W^\perp$ respectivamente

Se reduce A por Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{877}$$

Luego el sistema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \tag{878}$$

es decir

$$\begin{cases} x = z \\ y = 4z \end{cases} \tag{879}$$

o bien

$$(x, y, z) = (z, 4z, z) = z(1, 4, 1) \tag{880}$$

por lo que una base de W es $B_1 = \{(1, 4, 1)\}$

Para una base para $W^{\perp}$ si $(x, y, z) \in W^{\perp}$ entonces

$$(x, y, z) \cdot (1, 4, 1) = 0 \tag{881}$$

$$x + 4y + z = 0 \tag{882}$$

o bien

$$z = -x - 4y \tag{883}$$

por lo que

$$(x, y, z) = (x, y, -x - 4y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -4) \tag{884}$$

por lo que $B_2 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -4)\}$

b) Encuentre dos vectores $a \in W$ y $b \in W^{\perp}$tal que $a + b = (2, -2, 1)$

De la teoría hay que tomar

$$a = \text{Proy}_W(2, -2, 1) = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 4, 1)}{\|(1, 4, 1)\|^2}(1, 4, 1) \tag{885}$$

es decir,

$$a = -\frac{5}{18}(1, 4, 1) \tag{886}$$

por lo que

$$b = (2, -2, 1) - a = (2, -2, 1) + \frac{5}{18}(1, 4, 1) = \left(\frac{41}{18}, -\frac{8}{9}, \frac{23}{18}\right) \tag{887}$$

c) Encuentre la distancia de $(2, -2, 1)$ a $W^{\perp}$

En este caso como la componente ortogonal de $(2, -2, 1)$ sobre $W^{\perp}$ es a, se tiene que

$$\text{distancia} = \|a\| = \frac{5\sqrt{2}}{6} \simeq 1{,}17 \tag{888}$$

Problema 100. Considere las rectas l_1, l_2 donde $l_1(x, y, z) = (-2t + 1, 1 - t, 3t)$ y l_2 : $x - 5 = -6 + y = -3 - z$

a) Determine si las rectas anteriores se intersecan

La ecuación de la recta l_2 es

$$\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 6}{1} = \frac{z - (-3)}{-1} \tag{889}$$

por lo que un punto sobre la recta es $(5, 6, -3)$ y la dirección $(1, 1, -1)$. En forma vectorial sería $(x, y, z) = (5, 6, -3) + s(1, 1, -1)$. Para determinar la intersección, hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} -2t + 1 = 5 + s \\ 1 - t = 6 + s \\ 3t = -3 - s \end{cases} \tag{890}$$

sumando las dos últimas ecuaciones se tiene que $2t = 2$ o bien $t = 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene que $s = -6$. Luego la intersección de las rectas es el punto $(-1, 0, 3)$

c) Encuentre una ecuación vectorial del plano π_2 que contiene a las rectas l_1, l_2
Aquí se puede tomar el punto de intersección y las dos direcciones de las rectas

$$\pi_2 : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(1, 1, -1) + s(-2, -1, 3) \tag{891}$$

d) Determine una ecuación normal del plano π_2
Para el vector normal se puede tomar

$$n = (-2, -1, 3) \times (1, 1, -1) = (-2, 1, -1) \tag{892}$$

y como punto se tomar $(-1, 0, 3)$ y la ecuación sería

$$(x, y, z) \cdot (-2, 1, -1) = (-2, 1, -1) \cdot (-1, 0, 3) \tag{893}$$

$$-2x + y - z = -1 \tag{894}$$

Problema 101. Considere el conjunto $W \subseteq M(2, 2)$ definido por $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : A = A^T \right\}$

a) Pruebe que W es un subespacio vectorial de $M(2, 2)$
Observe que si $A, B \in W$ entonces $A = A^T, B = B^T$ y

$$(A + tB)^T = A^T + tB^T = A + tB \tag{895}$$

es decir, $(A + tB) \in W$ por lo que es un subespacio vectorial.

b) Determine una base B para W
Si $A \in W$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = A^T \tag{896}$$

por lo que $y = z$, es decir,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{897}$$

por lo que una base para W está formada por las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcule las coordenadas de $u = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ en la base B de W
Claramente

$$u = A_1 - 3A_2 + 3A_3 \tag{898}$$

por lo que

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{899}$$

Problema 102. En $\mathbb{R}^3$ considere los planos $w_1 : x - y + 3z = 0$ y $w_2 : x + z = 0$

a) Determine la intersección entre el plano w_1 y el plano w_2
Para la intersección hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \tag{900}$$

que tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{901}$$

que tiene por matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{902}$$

es decir

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases} \tag{903}$$

o bien

$$(x, y, z) = (-z, 2z, z) = z(-1, 2, 1) \tag{904}$$

por lo que la intersección es la recta

$$(x, y, z) = t(-1, 2, 1) \tag{905}$$

b) Encuentre la dimensión de la intersección
Claramente la intersección es 1 pues es una recta

7.7.3. Reposición II Segundo Examen Parcial I 2012

Problema 103. Considere el paralelogramo de lados $A = (2, 1, 2)$ $B = (3, 4, 5)$ $C = (7, 3, 4)$ $D = (6, 0, 1)$ tal como se indica en la siguiente figura

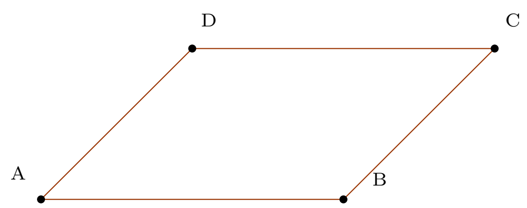


Figura 45: ejercicio paralelogramo

➥ **Determine el área del paralogramo**

Observe que

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,3,3) \qquad \overrightarrow{AD} = D - A = (4,-1,-1) \tag{906}$$

por lo que el área sería

$$\text{área} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{2}\|(0,13,-13)\| = \frac{13\sqrt{2}}{2} \tag{907}$$

➫ **Determine el perímetro del paralelogramo**

El perímetro es la suma de los lados del paralelogramo, es decir,

$$\text{perímetro} = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + 2\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2\sqrt{19} + 2\sqrt{10} \cong 15 \tag{908}$$

➫ **Determine el punto donde se intersecan las diagonales del paralelogramo**

Observe primero que

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (5,2,2) \qquad \overrightarrow{BD} = D - B = (3,-4,-4) \tag{909}$$

luego las ecuaciones de las diagonales son

$$d_1 : (x,y,z) = A + t\overrightarrow{AC} = (2+5t, 1+2t, 2+2t) \tag{910}$$

$$d_2 : (x,y,z) = B + s\overrightarrow{BD} = (3+3s, 4-4s, 5-4s) \tag{911}$$

la intersección de ambas rectas se halla resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2+5t = 3+3s \\ 1+2t = 4-4s \\ 2+2t = 5-4s \end{cases} \tag{912}$$

que tiene por matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \tag{913}$$

haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{914}$$

es decir $t = s = \frac{1}{2}$ por lo que el punto donde se intersecan es $\left(\frac{9}{2}, 2, 3\right)$

➫ **Determine el ángulo en el vértice** A

El ángulo viene dado por la fórmula del producto punto

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = -\frac{2}{190} \tag{915}$$

por lo que

$$A = 90{,}6^\circ \tag{916}$$

Problema 104. Considere el plano π con ecuación normal $x - 5y + 3z = 0$

- **Demuestre que los puntos $P = (1, 2, 0)$ y $Q = (-1, 0, 5)$ no pertenecen al plano (6 pts)**

P no pertenece al plano pues $1 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = -9 \neq 0$ y Q no pertenece al plano pues $-1 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 14 \neq 0$, es decir, no satisfacen la ecuación normal del plano

- **Halle la ecuación vectorial de una recta l que pasa por P y Q**

Como vector director se toma $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, -2, -5)$ y como punto P

$$l : (x, y, z) = P + t\overrightarrow{PQ} = (1 - 2t, 2 - 2t, -5t) \tag{917}$$

- **Determine la intersección de la recta anterior l con el plano π**

Si (x, y, z) es el punto de intersección cumple la ecuación del plano y de la recta a la vez. Es decir $(x, y, z) = (1 - 2t, 2 - 2t, -5t)$ por estar en la recta y$x - 5y + 3z = 0$ por estar en el plano. Luego

$$1 - 2t - 5(2 - 2t) + 3(-5t) = 0 \tag{918}$$

o bien

$$t = -\frac{9}{7} \tag{919}$$

por lo que

$$(x, y, z) = \left(\frac{25}{7}, \frac{32}{7}, \frac{45}{7}\right) \tag{920}$$

- **Halle la ecuación normal del plano ω que contiene la recta l y es perpendicular al plano π**

Como ω debe ser perpendicular a π, su vector normal n debe ser perpendicular al vector normal de π, es decir, n debe ser perpendicular a $(1, -5, 3)$. Como ω debe contener l, n debe ser perpendicular al vector director de l,es decir a $\overrightarrow{PQ}$, luego

$$n = (-2, -2, -5) \times (1, -5, 3) = (-31, 1, 12) \tag{921}$$

y como punto para ω se puede tomar P. Finalmente, la ecuación normal es

$$n \cdot (x, y, z) = P \cdot n \tag{922}$$

$$-31x + y + 12z = -27 \tag{923}$$

- **Determine la distancia del punto P al plano π**

La fórmula de la distancia es

$$d(P, \pi) = \left\|\text{Proy}_u \overrightarrow{RP}\right\| = \left\|\frac{(P - R) \cdot u}{\|u\|^2} u\right\| \tag{924}$$

donde R es cualquier punto en π y u el vector normal de π.

Se puede tomar $R = (0, 0, 0)$ y $u = (1, -5, 3)$. Luego

$$d(P, \pi) = \left\|\frac{-9}{35} u\right\| = \frac{9}{\sqrt{35}} \tag{925}$$

Problema 105. Considere el subconjunto W de $M(2,2,\mathbb{R})$ definido por

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d \quad b = -c \right\} \tag{926}$$

➯ **Demuestre que W es un subespacio $M(2,2,\mathbb{R})$**

Primero observe que W no es vacío pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$. Luego, si $A, B \in W$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \tag{927}$$

con

$$a = d \quad b = -c \tag{928}$$

$$e = h \quad f = -g \tag{929}$$

por lo que

$$A + tB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+te & b+tf \\ c+tg & d+th \end{pmatrix} \tag{930}$$

y

$$a + te = d + th \tag{931}$$

$$b + tf = -c - tg = -(c + tg) \tag{932}$$

por lo que $A + tB \in W$, es decir, es un subespacio

➯ **Calcule una base B para W**

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ está en W entonces

$$a = d \quad b = -c \tag{933}$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{934}$$

Luego

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{935}$$

forman una base para W pues claramente son linealmente independientes y por lo anterior generan W.

➯ **¿Cuánto es la dimensión de W?**

Es 2 pues la base está formada por dos vectores

➯ **Calcule el vector de coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B**

Claramente

$$A = 1A_1 - 5A_2 \tag{936}$$

por lo que

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{937}$$

Problema 106. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{938}$$

➥ **Determine una base para el espacio de filas de A, F_A**

Se reduce A por Gauss Jordan (no es indispensable llegar a la forma escalonada reducida, simplemente a una matriz cuyo rango no vaya a disminuir más) y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{939}$$

Luego una base para F_A es

$$v_1 = (1, 0, -2) \quad v_2 = (0, 5, 2) \tag{940}$$

➥ **Determine una base para el complemento ortogonal $(F_A)^{\perp}$ de F_A**

Si $(x, y, z) \in F_A^{\perp}$ entonces $(x, y, z) \cdot v_1 = 0$ y $(x, y, z) \cdot v_2 = 0$ por lo que

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -\frac{2}{5}z \end{cases} \tag{941}$$

y de esta forma

$$(x, y, z) = \left(2z, -\frac{2}{5}z, z\right) = z\left(2, -\frac{2}{5}, 1\right) \tag{942}$$

por lo que una base para el complemento ortogonal es

$$v_3 = \left(2, -\frac{2}{5}, 1\right) \tag{943}$$

➥ **Construya una base ortonormal para F_A**

Se utiliza Gramm-Schmidt

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \tag{944}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \mathrm{Proy}_{u_1} v_2}{\left\|v_2 - \mathrm{Proy}_{u_1} v_2\right\|} \tag{945}$$

como

$$\text{Proy}_{u_1} v_2 = (v_2 \cdot u_1)\, u_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}} u_1 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) \tag{946}$$

y

$$u_2 = \frac{\left(\frac{4}{5}, 5, \frac{2}{5}\right)}{\frac{\sqrt{645}}{5}} = \left(\frac{4}{\sqrt{645}}, \frac{25}{\sqrt{645}}, \frac{2}{\sqrt{645}}\right) \tag{947}$$

➭ **Determine la proyección ortogonal de $u = (1, 1, 1)$ sobre F_A**

Se toma

$$\text{Proy}_{F_A} u = (u \cdot u_1)\, u_1 + (u \cdot u_2)\, u_2 \tag{948}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} u_1 + \frac{31}{\sqrt{645}} u_2 = \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{124}{645}, \frac{775}{645}, \frac{62}{645}\right) \tag{949}$$

$$= \left(-\frac{1}{129}, \frac{155}{129}, \frac{64}{129}\right) \tag{950}$$

➭ **Halle $a \in F_A$ y $b \in (F_A)^{\perp}$ tal que $u = a + b$**

Se toma

$$a = \text{Proy}_{F_A} u = \left(-\frac{1}{129}, \frac{155}{129}, \frac{64}{129}\right) \tag{951}$$

$$b = u - a = \left(\frac{130}{129}, -\frac{26}{129}, \frac{65}{129}\right) \tag{952}$$

7.7.4. Examen 2 II Ciclo 2012

Problema 107. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios o no

a) $U = \{A \in M(2, \mathbb{R}) :$ A **es invertible**$\}$**:** No es un subespacio ya que la matriz nula no es invertible

b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = z\}$**:** Sí es un subespacio. Una forma de ver la condición es $x + 2y - z = 0$ lo cual es un plano que pasa por el origen por lo que el cero está en el subconjunto. Luego si $u = (x, y, z)$ y $v = (a, b, c)$ están en U entonces

$$x + 2y - z = 0 \quad a + 2b - c = 0 \tag{953}$$

y de esta forma

$$u + tv = (x + at, y + tb, z + tc) \tag{954}$$

y se verifica que

$$x + at + 2(y + tb) - (z + tc) = (x + 2y - z) + t(a + 2b - c) = 0 \tag{955}$$

lo cual significa que $u + tv \in S$

Problema 108. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halle una base para F_A

Se reduce A por Gauss Jordan y se llega a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{956}$$

por lo que una base sería $u = (1, 0, 0, 1)$ $v = (0, 1, 0, 0)$ $w = (0, 0, 1, -2)$

b) Halle una base para N_A

Se reduce nuevamente A por Gauss Jordan y en este caso se resuelve el sistema homogéneo asociado

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ y = 0 \\ z - 2w = 0 \end{cases} \tag{957}$$

por lo que $(x, y, z, w) = (-w, 0, 2w, w) = w(-1, 0, 2, 1)$ y de esta forma $r = (-1, 0, 2, 1)$ sería una base para N_A

c) Demuestre que $(F_A)^{\perp} = N_A$

Como $r \cdot u = r \cdot v = r \cdot w = 0$ los subespacios son ortogonales y como $\dim F_A + \dim N_A = \dim \mathbb{R}^4$ entonces uno es el complemento ortogonal del otro.

Problema 109. Dados los hiperplanos $U = \{(x, y, z, w)/2x - 3y - z + 5w = 0\}$ **y** $V = \{(x, y, z, w)/x - 2y + 3w = 0\}$

a) Determine la intersección $U \cap V$

Si un punto está en la intersección cumple ambas ecuaciones es decir, hay que resolver el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{958}$$

y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{959}$$

y el sistema homogéneo es

$$\begin{cases} x - 2z + w = 0 \\ y - z - w = 0 \end{cases} \tag{960}$$

por lo que

$$(x, y, z, w) = (2z - w, z + w, z, w) = z(2, 1, 1, 0) + w(-1, 1, 0, 1) \tag{961}$$

y de esta forma

$$U \cap V = Cl\{(2, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\} \tag{962}$$

b) Calcule una base ortonormal de $(U \cap V)^{\perp}$ **sabiendo que** $B = \{(1, 0, -2, 1), (0, 1, -1, -1)\}$ **es una base de** $(U \cap V)^{\perp}$

Se usa Gram-Schmidt para $u_1 = (1, 0, -2, 1)$ $u_2 = (0, 1, -1, -1)$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1, 0, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \tag{963}$$

$$w_2 = \frac{u_2 - \text{proy}_{w_1} u_2}{\left\| u_2 - \text{proy}_{w_1} u_2 \right\|} \tag{964}$$

como $\text{proy}_{w_1} u_2 = (u_2 \cdot w_1)\, w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} w_1 = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$ y luego

$$w_2 = \frac{\left(-\frac{1}{6}, 1, -\frac{4}{6}, -\frac{7}{6}\right)}{\frac{\sqrt{102}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{102}} (-1, 6, -4, -7) \tag{965}$$

y w_1, w_2 sería la base ortonormal.

c) Calcule la distancia de $(2, -1, 1, 0)$ **al subespacio** $(U \cap V)^{\perp}$

Si $u = (2, -1, 1, 0)$ primero se calcula $\text{proy}_{(U \cap V)^{\perp}} u = (u \cdot w_1) w_1 + (u \cdot w_2) w_2$ es decir

$$\text{proy}_{(U \cap V)^{\perp}} u = -\frac{12}{\sqrt{102}} w_2 = -\frac{2}{17} (-1, 6, -4, -7) \tag{966}$$

Luego la distancia es

$$d = \left\| u - \text{proy}_{(U \cap V)^{\perp}} u \right\| = \left\| \frac{1}{17} (32, -5, 9, -14) \right\| = \frac{\sqrt{1326}}{17} \cong 2{,}14 \tag{967}$$

Problema 110. Considere las siguientes rectas

$$l_1 : \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = 1 - z \tag{968}$$

$$l_2 : \quad (x, y, z) = (4 - 4t, 5 + 4t, -2 + t) \tag{969}$$

a) Muestre que las dos rectas no se intersecan

La primera recta está en forma simétrica y como $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1}$ un punto sobre la recta sería $P = (2, 5, 1)$ y un vector sobre la recta es $u = (3, 2, -1)$. Un punto sobre la segunda recta es $Q = (4, 5, -2)$ y un vector sobre la recta es $v = (-4, 4, 1)$. Luego como el sistema

$$\begin{cases} 2 + 3s = 4 - 4t \\ 5 + 2s = 5 + 4t \\ 1 - s = -2 + t \end{cases} \tag{970}$$

es inconsistente entonces las rectas no se intersecan (es fácil ver la inconsistencia porque la segunda ecuación dice que $s = 2t$ y luego la primera ecuación diría que $t = \frac{1}{5}$ y la tercera ecuación dice que $t = 1$).

b) Encuentre dos planos paralelos P_1, P_2 **tales que** $l_1 \subseteq P_1 \qquad l_2 \subseteq P_2$

Se pueden dar en forma vectorial o normal. Para la normal se toma $n = u \times v = (6, 1, 20)$ y como puntos se toman los encontrados antes

$$P_1 : \quad 6x + y + 20z = 37 \tag{971}$$

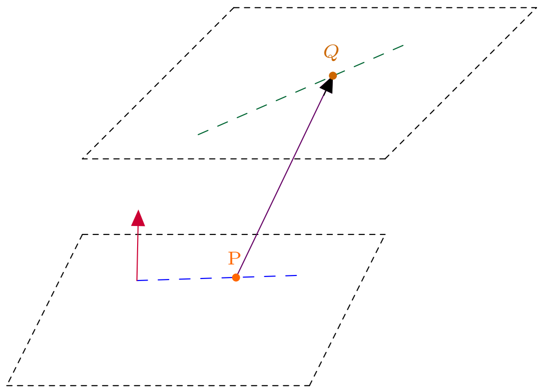
$$P_2 : \quad 6x + y + 20z = -11 \tag{972}$$

c) Encuentre la distancia entre l_1 y l_2
Del dibujo es claro que se tiene que

$$d = \left\| \text{proy}_n \overrightarrow{PQ} \right\| \tag{973}$$

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 0, -3)$ y $\text{proy}_n \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n = -\frac{48}{437} n$ por lo que

$$d = \left\| -\frac{48}{437} n \right\| = \frac{48\sqrt{437}}{437} \cong 2{,}29 \tag{974}$$



Problema 111. Considere el subespacio vectorial

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{975}$$

a) Justifique que $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S
Si $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 \tag{976}$$

por lo que cualquier matriz de S es combinación lineal de A_1, A_2, es decir, esas matrices generan el subespacio. Falta ver que son linealmente independientes.
Si

$$aA_1 + bA_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{977}$$

y es fácil ver que $a = 0$ y $b = 0$ lo cual dice que son linealmente independientes.

b) Encuentre las coordenadas de $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ con respecto la base anterior

Es claro que

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1 + 4A_2 \tag{978}$$

y de esta forma

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{979}$$

7.7.5. Parte 2 Examen de Ampliación I Ciclo 2012

Problema 112. Considere el subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$

a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

b) Encuentre una base para S y justifique que el conjunto que usted propone es una base

a) Para que S es un subespacio vectorial observe primero que $(0, 0, 0) \in S$. Luego, si $u, v \in S$ entonces

$$u = (x_1, 0, z_1) \quad v = (x_2, 0, z_2) \tag{980}$$

y

$$u + tv = (x_1 + tx_2, 0, z_1 + tz_2) \tag{981}$$

por lo que claramente $u + tv \in S$ y de esta forma S es un subespacio vectorial.

b) Para hallar una base observe que si $u \in S$ entonces $u = (x, 0, z)$ por lo que

$$(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) \tag{982}$$

y así e_1, e_3 son generan S y como claramente son linealmente independientes son una base.

Problema 113. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por $S = \mathrm{Cl}\{(1, 0, -1, 2)\ (1, 1, 1, 0)\}$

a) Encuentre una base ortonormal para $S^\perp$

b) Sea $u = (1, 1, 0, 1)$. Calcule la proyección ortogonal de u sobre $S^\perp$

c) Encuentre vectores $s \in S, t \in S^\perp$ que cumplen $u = s + t$

Observe que si $(x, y, z, , w) \in S^\perp$ entonces

$$(x, y, z, w) \cdot (1, 0, -1, 2) = 0 \quad (x, y, z, w) \cdot (1, 1, 1, 0) = 0 \tag{983}$$

es decir,

$$\begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \tag{984}$$

y por Gauss-Jordan se debe resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{985}$$

que tiene por matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{986}$$

es decir

$$\begin{cases} x = z - 2w \\ y = -2z + 2w \end{cases} \tag{987}$$

por lo que

$$(x, y, z, w) = (z - 2w, -2z + 2w, z, w) = z(1, -2, 1, 0) + w(-2, 2, 0, 1) \tag{988}$$

y así una base para $S^{\perp}$ es $v_1 = (1, -2, 1, 0) \quad v_2 = (-2, 2, 0, 1)$. Como se busca una base ortonormal se aplica Gram-Schmidt.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, -2, 1, 0)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) \tag{989}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \text{proy}_{u_1} v_2}{\left\|v_2 - \text{proy}_{u_1} v_2\right\|} \tag{990}$$

como

$$\text{proy}_{u_1} v_2 = (v_2 \cdot u_1) u_1 = -\frac{6}{\sqrt{6}} u_1 = (-1, 2, -1, 0) \tag{991}$$

por lo que

$$v_2 - \text{proy}_{u_1} v_2 = (-2, 2, 0, 1) - (-1, 2, -1, 0) = (-1, 0, 1, 1) \tag{992}$$

y luego

$$u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{993}$$

b) Observe que

$$\text{proy}_{S^{\perp}} u = (u \cdot u_1) u_1 + (u \cdot u_2) u_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} u_1 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) \tag{994}$$

c) Se toma

$$t = \text{proy}_{S^{\perp}} u \qquad s = u - t = \left(\frac{7}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}, 1\right) \tag{995}$$

Problema 114. Considere los planos $x - 3y + z + 6 = 0$ **y** $-x + 3y - z + 1 = 0$

a) ¿Por qué los planos anteriores son paralelos?

Son paralelos porque el vector normal del primer plano es $(1, -3, 1)$ y el del segundo plano es $(-1, 3, -1)$ los cuales son paralelos.

b) Encuentre la distancia que los separa

Se toma $n = (1, -3, 1)$ y un punto P sobre el primer plano es $P = (0, 0, -6)$ y un punto Q sobre el segundo plano es $(0, 0, 1)$. Luego

$$d = \left\|\text{proy}_n \overrightarrow{PQ}\right\| \tag{996}$$

Como

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 0, 7) \tag{997}$$

y

$$\text{proy}_n \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n = \frac{7}{11} n \tag{998}$$

entonces

$$d = \frac{7}{11} \|n\| = \frac{7}{\sqrt{11}} \tag{999}$$

8. Teoría de Transformaciones Lineales

8.1. Definición y Características de una Transformación Lineal

Si $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ es una matriz $m \times n$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$ son dos vectores entonces se sabe que $Au \in \mathbb{R}^m$ y $Av \in \mathbb{R}^m$ son otros dos vectores. Una propiedad que no ha sido enfatizada por su naturalidad pero que ahora resultará crucial es el hecho de la linealidad del producto, es decir, si a es un escalar

$$A(u + av) = Au + aAv \tag{1000}$$

De hecho a cada matriz $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ se le puede asociar una función $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T_A(u) = Au \tag{1001}$$

por lo dicho antes, la función (transformación) debe ser lineal, es decir,

$$T_A(u + av) = T_A(u) + aT_A(v) \tag{1002}$$

Así, a cada matriz se le puede asociar una transformación lineal. La utilidad de esto es que el concepto de una transformación lineal es el que se utiliza para definir matrices entre espacios vectoriales que no son necesariamente $\mathbb{R}^n$ (por ejemplo, el espacio vectorial de funciones reales).

Definición 115. **Sean V y W espacios vectoriales reales, una transformación lineal $t.l$ (o aplicación lineal u operador lineal) entre V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y para cualquier escalar a se tiene**

$$T(u + av) = T(u) + aT(v) \tag{1003}$$

Se denota el conjunto de transformaciones lineales entre V y W como $L(V, W)$ y si $V = W$ se denota $L(V)$.

Ejemplo 116. Considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - 3y, y + 5z)$. Para ver que T es una transformación lineal, sea $u = (x, y, z)$ y $v = (x', y', z')$. Entonces

$$T(u + tv) = T((x, y, z) + t(x', y', z')) = T(x + tx', y + ty', z + tz') \tag{1004}$$

$$= (x + tx' - 3(y + ty'), y + ty' + 5(z + tz')) = (x - 3y, y + 5z) + t(x' - 3y', y' + 5z') = T(u) + tT(v) \tag{1005}$$

y por ende cumple la condición para ser una transformación lineal.

Otra transformación lineal es la **transformación identidad** $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de un espacio en sí mismo que se define según

$$I(v) = v \tag{1006}$$

En este caso es trivial verificar que la identidad es una transformación lineal y como se verá en muchos sentidos es el análogo a la matriz identidad para transformaciones.

Una de las ventajas de una transformación lineal es que su **valor sobre cualquier vector está fijado una vez que se conoce su valor sobre alguna base:**
Para ver esto suponga que $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base para V. Si $v \in V$ entonces

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \tag{1007}$$

y

$$T(v) = T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) \tag{1008}$$

luego como T es una transformación lineal se tiene

$$T(v) = T(c_1v_1) + \cdots + T(c_nv_n) = c_1T(v_1) + \cdots + c_nT(v_n) \tag{1009}$$

Es decir, **es suficiente definir una transformación lineal sobre alguna base del espacio vectorial para conocer el valor de la transformación lineal sobre cualquier vector.**
También **toda transformación lineal envía el vector nulo en el vector nulo.** Esto ocurre ya que

$$T(0_v) = T(00_v) = 0T(0_v) = 0_w \tag{1010}$$

Por ejemplo, suponga que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal. Por lo anterior basta definir T sobre alguna base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Se define

$$T(e_1) = (2, 0) \tag{1011}$$

$$T(e_2) = (0, 5) \tag{1012}$$

$$T(e_3) = (3, 1) \tag{1013}$$

Así, si $v = (x, y, z)$

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \tag{1014}$$

por lo que

$$T(x, y, z) = T(v) = xT(e_1)+yT(e_2)+zT(e_3) = x(2, 0)+y(0, 5)+z(3, 1) = (2x+3z, 5y+z) \tag{1015}$$

8.2. Representación de una Transformación Lineal por una Matriz

De ahora en adelante se considerarán transformaciones lineales entre los espacios $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$ se construirá una matriz que representará la acción de la transformación lineal T sobre cualquier vector.
Para hacer esto, se sigue con la idea de la sección anterior. Si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \tag{1016}$$

y

$$T(v) = c_1T(v_1) + \cdots + c_nT(v_n) \tag{1017}$$

Ahora bien, cada $T(v_i)$ es un vector en $\mathbb{R}^m$ por lo que puede escribirse como combinación lineal de la base B_2 de la siguiente forma

$$\begin{array}{c} T(v_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\ T(v_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \end{array} \tag{1018}$$

esta notación se justifica si se piensa en la representación de coordenadas de los vectores, es decir,

$$[T(v_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad [T(v_2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1019}$$

Luego,

$$T(v) = c_1T(v_1) + \cdots + c_nT(v_n) \tag{1020}$$

$$= c_1\left(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m\right) + \cdots + c_n\left(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m\right) \tag{1021}$$

$$= (c_1a_{11} + \cdots + c_na_{1n})u_1 + (c_1a_{21} + \cdots + c_na_{2n})u_2 + \cdots + (c_1a_{m1} + \cdots + c_na_{mn})u_m \tag{1022}$$

Esta expresión no es muy útil, por lo que una forma más fácil de escribirla es a través del vector de coordenadas, es decir,

$$[T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1a_{11} + \cdots + c_na_{1n} \\ c_1a_{21} + \cdots + c_na_{2n} \\ \vdots \\ c_1a_{m1} + \cdots + c_na_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{1023}$$

$$\tag{1024}$$

Para recordar la fórmula anterior se define la **representación matricial de T en las bases** B_1, B_2 como

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1025}$$

y así se ha hallado de (1023) y (1025) que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1026}$$

(cuando $B = B_1 = B_2$ se denota la representación matricial como $[T]_B$)

Ahora bien, para hallar la representación matricial de T hay que saber quienes son los $[T(v_i)]_{B_2}$. Por ejemplo, si se considera la matriz A que tiene por columnas los vectores u_i $A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{pmatrix}$ entonces para hallar $[T(v_1)]_{B_2}$ habría que considerar el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_1) \end{array} \right) \tag{1027}$$

y este tiene solución única al ser los coeficientes de la descomposición de un vector con respecto a una base, por lo que al realizar el método de Gauss Jordan el sistema aumentado cambia según

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_1) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_m & [T(v_1)]_{B_2} \end{array}\right) \tag{1028}$$

Como el razonamiento es completamente general se ha hallado el siguiente resultado

Teorema 117. ***Algoritmo para encontrar la representación de una transformación lineal***

Suponga que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$. Para hallar la representación matricial de T $[T]_{B_1}^{B_2}$ en las bases B_1, B_2 se construye el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \end{array}\right) \tag{1029}$$

y se aplica el método de Gauss Jordan hasta obtener

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_m & [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{array}\right) \tag{1030}$$

luego

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \left([T(v_1)]_{B_2} \quad [T(v_2)]_{B_2} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B_2} \right) \tag{1031}$$

y

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1032}$$

Definición 118. Si $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es otra base de $\mathbb{R}^n$ la matriz de cambio de base es la representación matricial de la transformación identidad en tales bases, es decir, $[I]_{B_1}^{B_2}$. Tal matriz cumple que

$$[v]_{B_2} = [I(v)]_{B_2} = [I]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1033}$$

es decir

$$[v]_{B_2} = [I]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1034}$$

Problema 119. *problema 2 tercer examen parcial reposición I ciclo 2011*

Considere la base $B = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1035}$$

a) Calcule $[I]_B^C$; siendo C la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Usando la notación anterior definimos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1036}$$

$$u_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1037}$$

$$I(v_1) = v_1 \qquad I(v_2) = v_2, \qquad I(v_3) = v_3 \tag{1038}$$

Según el algoritmo hay que considerar el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1 & u_2 & u_3 & I(v_1) & I(v_2) & I(v_3) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{1039}$$

y aplicar Gauss Jordan hasta que el lado izquierdo esté en su forma escalonada reducida. Sin embargo, en este caso ya se encuentra de entrada en tal forma por lo que el lado derecho de la matriz aumentada es la matriz de cambio de base buscada, es decir,

$$[I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1040}$$

b) Determine $T(x, y, z)$
Sea $v = (x, y, z)$. Por lo visto anteriormente con $B = B_1 = B_2$

$$[T(v)]_B = [T]_B^B [v]_B \tag{1041}$$

y

$$[v]_C = [I]_B^C [v]_B \tag{1042}$$

luego

$$[v]_B = \left([I]_B^C\right)^{-1} [v]_C \tag{1043}$$

un sencillo cálculo muestra que

$$\left([I]_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1044}$$

y de esta forma

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x - z \\ -x + y + z \end{pmatrix} \tag{1045}$$

Otra forma para hallar $[v]_B$ es formar el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array} \right) \tag{1046}$$

y hacer Gauss Jordan hasta llegar a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y \\ 0 & 1 & 0 & x - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + y + z \end{array} \right) \tag{1047}$$

por lo que

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ -x+y+z \end{pmatrix} \tag{1048}$$

Así

$$[T(v)]_B = [T]_B^B [v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ -x+y+z \end{pmatrix} \tag{1049}$$

o bien

$$[T(v)]_B = \begin{pmatrix} x-y-z \\ -z \\ y+2z \end{pmatrix} \tag{1050}$$

como esto último es el vector de cordenadas en la base B se tiene

$$T(x,y,z) = (x-y-z)v_1 - zv_2 + (y+2z)v_3 \tag{1051}$$

$$= (x-y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-z \\ x+z \end{pmatrix} \tag{1052}$$

Problema 120. *problema 2 tercer examen parcial III ciclo 2010*

Sea $B_1 = \{(1,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\}$ **una base de** $\mathbb{R}^4$ **y** $B_2 = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ **una base de** $\mathbb{R}^3$. **Considere la transformación lineal** $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **tal que** $T(1,0,1,1) = (1,2,3); T(0,1,1,0) = (0,1,1)$; $T(0,0,1,1) = (0,2,2)$; $T(0,1,0,1) = (2,4,6)$
a) Determine $[T]_{B_1}^{B_2}$
Se define

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1053}$$

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, T(v_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1054}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1055}$$

Nuevamente por el algoritmo se considera

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & | & T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) & T(v_4) \end{pmatrix} \tag{1056}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \tag{1057}$$

y se reduce el sistema por Gauss Jordan para obtener

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \tag{1058}$$

y de esto se concluye que

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1059}$$

b) **Utilice la parte** a) **para determinar la fórmula general de la transformación dada por** $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Nuevamente se usa que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1060}$$

Para calcular $[v]_{B_1}$ considere el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \tag{1061}$$

haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{array}\right) \tag{1062}$$

y de esta forma

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{pmatrix} \tag{1063}$$

y luego

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{pmatrix} \tag{1064}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ \frac{3}{2}x_2 - x_3 + 5x_4 \end{pmatrix} \tag{1065}$$

Finalmente,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0u_1 + (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)u_2 + \left(\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4\right) u_3 \tag{1066}$$

$$= (x_1 + x_2 - x_3 + x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 \end{pmatrix} \tag{1067}$$

8.3. Composición de Transformaciones Lineales

Dado que las transformaciones lineales son funciones, es posible tomar la composición de transformaciones lineales. Por ejemplo, si U, V, W son espacios vectoriales y $S \in L(U,V)$,$T \in L(V,W)$

$$U \overset{S}{\rightarrow} V \overset{T}{\rightarrow} W \tag{1068}$$

se define la **composición de transformaciones lineales** $T \circ S : U \longrightarrow W$ según

$$(T \circ S)(u) = T(S(u)),\ \forall u \in U \tag{1069}$$

Algunas propiedades de la composición de transformaciones lineales son

- Si S y T son transformaciones lineales entonces $T \circ S$ es una transformación lineal.
- Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_l\}$ es una base de U, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es una base de V y $B_3 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ es una base de W entonces

$$[T \circ S]_{B_1}^{B_3} = [T]_{B_2}^{B_3} [S]_{B_1}^{B_2} \tag{1070}$$

- En el caso en que $U = V = W$ y $T = S = I$ y $B_1 = B_3$ se concluye de lo anterior que

$$\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = [I]_{B_2}^{B_1} \tag{1071}$$

- Si $T : V \longrightarrow W$ y B_1, B_3 son bases de V y B_2, B_4 son bases de W entonces

$$[T]_{B_3}^{B_4} = [I_w]_{B_2}^{B_4} [T]_{B_1}^{B_2} [I_v]_{B_3}^{B_1} \tag{1072}$$

  en el caso en que $V = W$, $B_1 = B_2$,$B_3 = B_4$ lo anterior dice que

$$[T]_{B_3} = [I]_{B_1}^{B_3} [T]_{B_1} [I]_{B_3}^{B_1} = [I]_{B_1}^{B_3} [T]_{B_1} \left([I]_{B_1}^{B_3}\right)^{-1} \tag{1073}$$

  lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 121. Dos matrices A, B son **similares** si existe una matriz P invertible tal que

$$A = PBP^{-1} \tag{1074}$$

El resultado anterior establece básicamente que **si una transformación lineal T se representa por matrices A, B en bases distintas** $\left(B = [T]_{B_3}, A = [T]_{B_1}\right)$ **entonces las matrices son similares** $\left(P = [I]_{B_1}^{B_3}\right)$

Las fórmulas anteriores son especialmente útiles cuando se quiere pasar de una representación matricial de una transformación lineal a otra representación matricial.

Por ejemplo, suponga que B_1, B_3 son bases de $\mathbb{R}^3$, B_2, B_4 son bases de $\mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal cuya representación matricial en B_1, B_2 es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1075}$$

y se conoce que

$$[I]_{B_3}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1076}$$

$$[I]_{B_2}^{B_4} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1077}$$

Si se pide hallar $[T]_{B_3}^{B_2}$ se compone con la identidad por la derecha de la siguiente forma

$$[T]_{B_3}^{B_2} = [T \circ I]_{B_3}^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [I]_{B_3}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 3 & 22 & 11 \end{pmatrix} \tag{1078}$$

En cambio, si se pidiera $[T]_{B_1}^{B_4}$ se compone con la identidad por la izquierda de la siguiente forma

$$[T]_{B_1}^{B_4} = [I \circ T]_{B_1}^{B_4} = [I]_{B_2}^{B_4} [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 6 & 15 \\ 9 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{1079}$$

8.4. Inyectividad y Sobreyectividad

Como una transformación lineal es una función es posible definir el concepto de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una transformación lineal de la misma forma en que se define para una función.

8.4.1. Inyectividad y Núcleo de una Transformación Lineal

Si U y V son espacios vectoriales y $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se dice que **T es inyectiva** si

$$T(u) = T(v) \longrightarrow u{=}v \tag{1080}$$

Por ejemplo, si $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal definida según

$$L(x, y) = (x + y, x - y) \tag{1081}$$

Para determinar si L es inyectiva suponga que

$$L(u) = L(v) \tag{1082}$$

donde $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ entonces

$$(u_1 + u_2, u_1 - u_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2) \tag{1083}$$

y se tiene el sistema

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \\ u_1 - u_2 = v_1 - v_2 \end{cases} \tag{1084}$$

y sumando ambas ecuaciones se tiene que $2u_1 = 2v_1$ o bien $u_1 = u_2$. Si se restan las ecuaciones se llegan analógamente a $u_2 = v_2$, es decir, $u = v$.

Como el proceso de determinar si una transformación lineal es inyectiva o no puede volverse muy largo usando la definición de inyectividad, se buscará dar una condición equivalente. Suponga que

$$T(u) = T(v) \tag{1085}$$

como la transformación es lineal entonces

$$T(u-v)=0=T(0) \tag{1086}$$

y suponiendo que T es inyectiva se tiene que $u-v=0$. Si se define $w=u-v$ entonces lo anterior puede escribirse como

$$T(w)=0 \longrightarrow w=0 \tag{1087}$$

Para aclarar mejor esta situación se define:

Definición 122. Si $T:U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se define el núcleo de la transformación Tcomo el conjunto

$$\mathrm{Nuc}(T)=\{u \in U \mid T(u)=0\} \tag{1088}$$

Teorema 123. ***Si $T:U \longrightarrow V$ es una transformación lineal entonces***
1) $\mathrm{Nuc}(T)$ ***es un subespacio de*** U
2) T ***es inyectiva si y solo si*** $\mathrm{Nuc(T)}=\{0\}$

Demostración. 1) Para ver que $\mathrm{Nuc}(T)$ es un subespacio de U hay que mostrar dos cosas.

Primero, $\mathrm{Nuc}(T)$ debe ser no vacío. Esto es cierto puesto que $0 \in \mathrm{Nuc}(T)$

Segundo, suponga que $u,v \in \mathrm{Nuc}(T)$ y a es un escalar: hay que mostrar que $(u+av) \in \mathrm{Nuc}(T)$. Esto se sigue fácilmente de la linealidad de T ya que $T(u+av)=T(u)+aT(v)=0+a0=0$. De esta forma $\mathrm{Nuc}(T)$ es un subespacio.

2) Suponga que T es inyectiva y que $u \in \mathrm{Nuc}(T)$. Entonces $T(u)=0=T(0)$ y como T es inyectiva debe tenerse que $u=0$, es decir $\mathrm{Nuc}(T)=\{0\}$

Ahora suponga que $\mathrm{Nuc}(T)=\{0\}$ y que $T(u)=T(v)$. Al igual que la discusión de antes se tiene $T(u-v)=0$, es decir, $(u-v) \in \mathrm{Nuc}(T)$ y como $\mathrm{Nuc}(T)=\{0\}$ entonces $u-v=0$ o bien $u=v$. Esto último muestra la inyectividad. □

8.4.2. Sobreyectividad e Imagen de una Transformación Lineal

Si U y V son espacios vectoriales y $T:U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se dice que T **es sobreyectiva** si todo vector $v \in V$ tiene alguna preimagen, es decir, para cualquier $v \in V$ existe al menos un vector $u \in U$ tal que

$$T(u)=v \tag{1089}$$

Por ejemplo, defina $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ según

$$T(x,y,z)=(x,y) \tag{1090}$$

Para mostrar que T es sobreyectiva sea $v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$. Hay que encontrar $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u)=v$. Claramente $u=(v_1,v_2,0)$ es un candidato como también podría serlo $u=(v_1,v_2,1)$ pero basta con encontrar uno por lo que T es sobreyectiva.

El análogo del núcleo para determinar la sobreyectividad es la imagen de una transformación lineal.

Definición 124. **Si $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se define la imagen de la transformación T como**

$$\mathrm{Img(T)} = \{v = T(u) \mid u \in U\} \tag{1091}$$

Teorema 125. ***Si $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal entonces***
1) $\mathrm{Img(T)}$ ***es un subespacio de*** V
2) T ***es sobreyectiva si y solo si*** $V = \mathrm{Img(T)}$

Demostración. 1) Como $T(0) = 0$ entonces Img(T) no es vacío pues $0 \in Img(T)$. Ahora suponga que $v_1, v_2 \in \mathrm{Img(T)}$, es decir, existen $u_1, u_2 \in U$ tal que $v_1 = T(u_1), v_2 = T(u_2)$. Observe que por la linealidad de T $v_1 + av_2 = T(u_1 + au_2)$ por lo que $(v_1 + av_2) \in \mathrm{Img(T)}$ por lo que es un subespacio

2) Suponga primero que T es sobreyectiva y que $v \in V$. Por la sobreyectividad existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$, es decir, $v \in \mathrm{Img(T)}$ y por lo tanto $\mathrm{Img(T)} = V$

Ahora suponga que $\mathrm{Img(T)} = V$ y que $v \in V$. Por lo supuesto $v \in \mathrm{Img(T)}$ y entonces existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$ y esto es precisamente la condición de ser sobreyectiva. □

Problema 126. *problema 2 tercer examen parcial reposición II ciclo 2007*

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(1,1,1) = (3,-1,4)$, $T(1,1,0) = (3,1,2)$ y $T(1,0,0) = (1,0,1)$

a) Determine $T(x,y,z)$ para cualquier (x,y,z)

Sea $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ para encontrar $T(v)$ basta encontrar v como combinación lineal de esa base, es decir, $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Si B es la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ lo anterior es equivalente a encontrar $[v]_B$ .Una propiedad muy útil es que si C es la base canónica entonces $v = [v]_C$ y por ende se puede usar que $[v]_B = [I]_C^B [v]_C = \left([I]_B^C\right)^{-1} v$. Es decir, dado que

$$[I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1092}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1093}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} \tag{1094}$$

Luego

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1095}$$

Otra opción para encontrar $[v]_B$ es resolver el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \tag{1096}$$

que da como resultado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & y-z \\ 0 & 0 & 1 & x-y \end{array}\right) \tag{1097}$$

y que son los mismo coeficientes c_1, c_2, c_3 de antes. Así

$$T(v) = zT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-z)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y)T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1098}$$

$$= z\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \tag{1099}$$

es decir

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \tag{1100}$$

b) Determine el núcleo de T
Si $(x, y, z) \in \text{Nuc}(T)$ entonces

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1101}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1102}$$

se aplica Gauss Jordan a la matriz anterior y se encuentra que su forma escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1103}$$

Luego el sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$\begin{cases} x = -4z \\ y = 2z \end{cases} \tag{1104}$$

por lo que

$$(x, y, z) = (-4z, 2z, z) = z(-4, 2, 1) \tag{1105}$$

Y de esto último se sigue que

$$\text{Nuc}(T) = Cl\{(-4, 2, 1)\} \tag{1106}$$

c) **Determine una base** Img(T)

Si $(a,b,c) \in \text{Img(T)}$ entonces existe (x,y,z) tal que $T(x,y,z) = (a,b,c)$ es decir, hay que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{1107}$$

aplicando operaciones elementales al sistema aumentado se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & a-2b \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a+b \end{array}\right) \tag{1108}$$

y para que tenga solución se ocupa que

$$c - a + b = 0 \tag{1109}$$

es decir

$$c = a - b \tag{1110}$$

y por lo tanto la imagen está generada por

$$(a,b,c) = (a,b,a-b) = a(1,0,1) + b(0,1,-1) \tag{1111}$$

$$\text{Img}(T) = Cl\{(1,0,1),(0,1,-1)\} \tag{1112}$$

8.5. Teoremas de Dimensionalidad

Los siguientes teoremas facilitarán hacer cálculos sobre el núcleo y la imagen de una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$

Teorema 127. ***Si*** $T : V \longrightarrow W$ ***es una t.l***

a) ***Si*** $V = Cl\{v_1, \cdots, v_m\}$ ***entonces***

$$Img(T) = Cl\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\} \tag{1113}$$

b) Si T es inyectiva y $v_1, \cdots, v_m$ ***son l.i entonces*** $T(v_1), \cdots, T(v_m)$ ***son l.i y*** $\dim V = \dim(Img(T))$.

El teorema significa que para hallar una base para la imagen de T ***se pueden escribir los vectores*** $T(v_1), \cdots, T(v_m)$ ***como los vectores filas de una matriz y aplicar Gauss-Jordan hasta llegar a la matriz escalonada reducida. Una vez llegada a la matriz escalonada reducida, los vectores no nulos formarían una base para la imagen de*** T

Demostración. a) Suponga que $w \in \text{Img}(T)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$. Como $V = Cl\{v_1, \cdots, v_m\}$ entonces

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m \tag{1114}$$

y

$$w = T(v) = T(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = c_1T(v_1) + \cdots + c_mT(v_m) \tag{1115}$$

es decir, $w \in Cl\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ por lo que se sigue (dada que la otra inclusión es trivial) que

$$\text{Img}(T) = Cl\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\} \tag{1116}$$

b) Suponga que T es inyectiva. Por un teorema anterior $\text{Nuc}(T) = \{0\}$. Suponga que

$$c_1T(v_1) + \cdots + c_mT(v_m) = 0 \tag{1117}$$

por la linealidad se tiene que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = 0 \tag{1118}$$

es decir, $(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) \in \text{Nuc}(T)$ y como $\text{Nuc}(T) = \{0\}$ entonces

$$c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = 0 \tag{1119}$$

y como los $v_1, \cdots, v_m$ son $l.i$ entonces

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0 \tag{1120}$$

esto implica que $T(v_1), \cdots, T(v_m)$ son $l.i$ y como por $a)$ se tiene que $\text{Img}(T) = Cl\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ entonces $T(v_1), \cdots, T(v_m)$ son una base para la imagen por lo que $m = \dim V = \dim(\text{Img}(T))$

□

Ejemplo 128. Considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida según

$$T(1,1,0) = (2,0,1) \quad T(0,-1,1) = (0,-1,1), \quad T(1,0,-1) = (4,-1,3) \tag{1121}$$

Para hallar una base de la imagen de la transformación lineal se toma $v_1 = (1,1,0)$ $\quad v_2 = (0,-1,1)$, $\quad v_3 = (1,0,-1)$. v_1, v_2, v_3 son base puesto que el determinante de la matriz formado por v_1, v_2, v_3 es distinto de cero y el teorema anterior indica que una base de la imagen se halla reduciendo la matriz cuyas filas son $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$, es decir, considerando

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1122}$$

que tiene por matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1123}$$

por lo que $\text{Img(T)} = \text{Cl}\left\{(1,0,\frac{1}{2}), (0,1,-1)\right\}$

El teorema más importante en lo que se refiere a la dimensionalidad del núcleo y la imagen de T es el siguiente.

Teorema 129. ***Suponga que*** $T : V \longrightarrow W$ ***es una*** $t.l$ ***y*** V ***es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces***

$$\dim V = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Img}(T)) \tag{1124}$$

En el caso particular en que $\dim V = \dim W = n$ ***se tiene que*** T ***es inyectiva si y solo si*** T ***es sobreyectiva.***

Demostración. Se va a mostrar solo el caso particular. Primero que todo suponiendo la primera parte del teorema se tiene que

$$\dim V = n = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T)) \tag{1125}$$

Suponga que T es inyectiva. Entonces $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$ y por ende $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$ y de esa forma

$$n = \dim(\mathrm{Img}(T)) \tag{1126}$$

pero $\dim W = n$ por lo que

$$\dim W = \dim(\mathrm{Img}(T)) \tag{1127}$$

Ya sabíamos que $\mathrm{Img}(T)$ es un subespacio de W y por lo anterior tienen la misma dimensión y esto permite concluir que $W = \mathrm{Img}(T)$ y de esta forma T es sobreyectiva.

Suponga ahora que T es sobreyectiva, es decir, $W = \mathrm{Img}(T)$. Luego

$$n = \dim W = \dim(\mathrm{Img}(T)) \tag{1128}$$

y sustituyendo en $n = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T))$ se sigue que

$$0 = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) \tag{1129}$$

Es decir, $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$ por lo que T es inyectiva. □

8.6. Invertibilidad de una Transformación Lineal

Recuérdese que una función era biyectiva cuando era inyectiva y sobreyectiva y en tal caso existía una función inversa. Exactamente lo mismo ocurrirá con las transformaciones lineales. Si $T : V \longrightarrow W$ es una $t.l$ se dice que T **es biyectiva si** T **es inyectiva y sobreyectiva.**.Por otro lado T es **invertible** si existe una transformación lineal $T^{-1} : W \longrightarrow V$ tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ y $T^{-1} \circ T = I_V$.

El siguiente resultado establece que ambas nociones son básicamente equivalentes.

Teorema 130. ***Suponga que*** $T : V \longrightarrow W$ ***es una t.l.***
1) T es invertible si y solo si T ***es biyectiva***
2) Si $\dim V = \dim W = n$ ***y*** B_1 ***es una base de*** V ***y*** B_2 ***es una base de*** W ***entonces*** T ***es invertible si y solo si la matriz*** $[T]_{B_1}^{B_2}$ ***lo es. En tal caso*** $\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$

Problema 131. *problema 3 tercer examen parcial II ciclo 2010*

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **una** $t.l$ **tal que** $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **donde** $B = \{(1,0,1), (-1,0,1), (0,-1,1)\}$ **es una base de** $\mathbb{R}^3$ **y** C **es la base canónica de** $\mathbb{R}^3$**.**

a) **Compruebe** T **es invertible.**

Por el teorema anterior es suficiente ver que $\det [T]_B^C \neq 0$ pero esto es bastante claro por lo que la transformación es invertible.

b) Calcule $T(x,y,z)$

Sea $v = (x,y,z)$ Observe que

$$[T(v)]_C = [T]_B^C [v]_B \tag{1130}$$

y

$$[v]_B = [I]_C^B \, [v]_C \tag{1131}$$

Ahora bien si $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para hallar $[I]_C^B$ se forma la matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & | & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \tag{1132}$$

y se reduce hasta llegar al lado izquierdo a la identidad. Por construcción esto es equivalente a hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$es decir,

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1133}$$

y de esta forma

$$[v]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1134}$$

es decir,

$$[T(v)]_C = [T]_B^C \, [I]_C^B \, [v]_C = [T]_B^C \, [v]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1135}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2x+4y+4z \\ x-3y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} \tag{1136}$$

y entonces

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2}(-2x+4y+4z)e_1 + \frac{1}{2}(x-3y+z)e_2 + \frac{1}{2}(-x-y+z)e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2x+4y+4z \\ x-3y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} \tag{1137}$$

c) Calcule $\left([T]_B^C\right)^{-1}$

Como $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se utiliza el algoritmo para calcular la

$$\tag{1138}$$

inversa y se encuentra que

$$\left([T]_B^C\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1139}$$

Problema 132. *Problema 1 Tercer Examen Parcial II Ciclo 2006*

Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **tal que** $T(x,y,z)=(x-y,y+z,x+z)$

$a)$ **Pruebe que** T **es una transformación lineal**

método 1:

Suponga que $u=(x,y,z)$ y $v=(x',y',z')$ y sea a un escalar. Hay que mostrar que $T(u+av)=T(u)+aT(v)$.

$$T(u+av)=T((x,y,z)+a(x',y',z'))=T(x+ax',y+ay',z+az') \tag{1140}$$

$$=(x+ax'-(y+ay'),y+ay'+z+az',x+ax'+z+az') \tag{1141}$$

$$=(x-y,y+z,x+z)+a(x'-y',y'+z',x'+z')=T(u)+aT(v) \tag{1142}$$

método 2:

Darse cuenta de que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1143}$$

y verificar la linealidad en esta forma es trivial por las propiedades del producto matricial por un vector.

b) Determine una base del núcleo de T

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Nuc(T)$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1144}$$

y aplicando operaciones elementales sobre la matriz se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1145}$$

lo cual da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \tag{1146}$$

$$(x,y,z)=(-z,-z,z)=z(-1,-1,1) \tag{1147}$$

Luego

$$\mathrm{Nuc}(T)=Cl\{(-1,-1,1)\} \tag{1148}$$

c) ¿Es T **inyectiva? Justifique.**

No lo es puesto que $\mathrm{Nuc}(T)\neq\{0\}$

d) ¿Cuál es la dimensión de $Img(T)$**? Justifique**

Por el teorema del rango

$$\dim\mathbb{R}^3=3=\dim\mathrm{Nuc}(T)+\dim\mathrm{Img(T)} \tag{1149}$$

y como $\dim\mathrm{Nuc}(T)=1$ entonces

$$\dim(\mathrm{Im(T)})=2 \tag{1150}$$

8.7. Problemas Adicionales

Problem 133. ***problema 2 tercer examen parcial reposición II ciclo 2010***

Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1151}$$

donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine una base del núcleo

Observe que si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está en el núcleo de T entonces $T(v) = 0$. Luego $[T(v)]_C = 0$ y como

$$[T(v)]_C = [T]_C [v]_C \tag{1152}$$

entonces como $v = [v]_C$

$$0 = [T]_C v \tag{1153}$$

es decir, hay que considerar el sistema homogéneo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1154}$$

que tiene por matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1155}$$

o bien $x = -z$ y $y = -z$ por lo que

$$(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1) \tag{1156}$$

por lo que

$$\mathrm{Nuc(T)} = \mathrm{Cl}\{(-1, -1, 1)\} \tag{1157}$$

b) Determine una base de la imagen

Nuevamente, si $u \in \mathrm{Img(T)}$ entonces existe v tal que $T(v) = u$. Luego,

$$u = [u]_C = [T(v)]_C = [T]_C [v]_C = [T]_C v \tag{1158}$$

es decir, si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, debe ser solución del sistema $u = [T]_C v$ o bien

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 3 & 4 & 7 & b \\ -2 & 2 & 0 & c \end{array}\right) \tag{1159}$$

y se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{-4a+3b}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3a-b}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14a-8b-5c}{40} \end{array}\right) \tag{1160}$$

por lo que para que haya solución debe tenerse que

$$14a - 8b - 5c = 0 \tag{1161}$$

o bien

$$a = \frac{8b + 5c}{14} \tag{1162}$$

por lo que

$$(a, b, c) = \left(\frac{8b + 5c}{14}, b, c\right) = b\left(\frac{4}{7}, 1, 0\right) + c\left(\frac{5}{14}, 0, 1\right) \tag{1163}$$

y así una base para la imagen es $\left(\frac{4}{7}, 1, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{14}, 0, 1\right)$

c) Determine si la transformación es invertible o no

Para que sea invertible tendría que ser inyectiva pero no lo es ya que la dimensión del núcleo no es cero. Es decir, la transformación no es invertible.

Problema 134. ***problema 1 tercer examen parcial I ciclo 2009***

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **tal que** $T(x, y, z) = (-x + y + 2z, x - y, z)$

a) Prueba que T **es una transformación lineal**

Sea $u = (x, y, z)$ y $v = (x', y', z')$. Luego

$$T(u+tv) = T((x+tx', y+ty', z+tz')) = (-(x+tx')+y+ty'+2(z+tz'), x+tx'-(y+ty'), z+tz') \tag{1164}$$

$$= (-x+y+2z, x-y, z)+t(-x'+y'+2z', x'-y', z') = T(x, y, z)+tT(x', y', z') = T(u)+tT(v) \tag{1165}$$

por lo que es una transformación lineal.

b) Determine una base para el núcleo de T

Observe que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ x - y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1166}$$

por lo que para hallar el núcleo hay que considerar el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1167}$$

y por Gauss-Jordan se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1168}$$

es decir $x = y$ y $z = 0$ por lo que

$$(x, y, z) = (x, x, 0) = x(1, 1, 0) \tag{1169}$$

y una base para el núcleo sería entonces $(1, 1, 0)$

c) ¿Es T **inyectiva? Justifique**

No es inyectiva pues la dimensión del núcleo es 1 y tiene que ser 0 para que sea inyectiva.
d) Determine una base para $Img(T)$
En este caso debe considerarse el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \tag{1170}$$

reduciendo la matriz se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & a-2c+b \end{array}\right) \tag{1171}$$

por lo que se necesita que

$$a - 2c + b = 0 \tag{1172}$$

o bien

$$a = 2c - b \tag{1173}$$

es decir

$$(a,b,c) = (2c-b,b,c) = b(-1,1,0) + c(2,0,1) \tag{1174}$$

por lo que una base para la imagen es $(-1,1,0)$ y $(2,0,1)$

Problema 135. ***problema 2 tercer examen parcial II ciclo 2009***

Sea C la base canónica de $\mathbb{R}^4$, D una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[T]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1175}$$

a) Sea $v = (1,-2,-1,2)$ **determine** $[T(v)]_D$
Se tiene que

$$[T(v)]_D = [T]_C^D [v]_C \tag{1176}$$

es decir

$$[T(v)]_D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1177}$$

b) Si $D = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,-1)\}$ **determine** $T(0,1,0,0)$
Sea $u = (0,1,0,0)$, se tiene que

$$[T(u)]_D = [T]_C^D [u]_C \tag{1178}$$

es decir

$$[T(u)]_D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1179}$$

por lo que

$$T(u) = T(0,1,0,0) = 2(1,-1,0) + 3(0,1,-1) + 4(0,0,-1) = (2,1,-7) \tag{1180}$$

c) Siendo D la misma base del punto anterior y C' la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determine $[I]_D^{C'}$

Para hallar $[I]_D^{C'}$ se considera el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \tag{1181}$$

por lo que

$$[I]_D^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1182}$$

d) Determine $[T]_C^{C'}$

Se tiene que

$$[T]_C^{C'} = [I \circ T]_C^{C'} = [I]_D^{C'} \, [T]_C^D \tag{1183}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \tag{1184}$$

Problema 136. *problema 2 tercer examen parcial II Ciclo 2007*

Construya una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nuc}(T) = Cl\{(1,0,1)\}$ **y** $\mathrm{Img}(T) = Cl\{(1,1,1),(0,0,-1)\}$ **Determine $T(x,y,z)$ para cualquier** (x,y,z)

Aquí hay que utilizar el hecho de que es suficiente definir una transformación lineal sobre una base del espacio vectorial para que esté definida sobre todo el espacio vectorial. Llamando $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (1,1,1)$ $v_3 = (0,0,-1)$ es claro que estos tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ pues el determinante de la matriz formada por esos tres vectores es distinto de cero.

Luego basta definir T sobre v_1, v_2, v_3. Como se pide que $\mathrm{Nuc}(T) = Cl\{(1,0,1)\}$ se debe definir $T(v_1) = (0,0,0)$. Luego, como $\mathrm{Img}(T) = Cl\{(1,1,1),(0,0,-1)\}$ basta definir $T(v_2) = v_2$, $T(v_3) = v_3$ (hay más de una posibilidad sobre cómo definir T)

Para determinar $T(x,y,z)$, si $v = (x,y,z)$ hay que escribir v como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, es decir, considerar la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \tag{1185}$$

y se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{array}\right) \tag{1186}$$

o bien

$$v = (x-y)v_1 + yv_2 + (x-z)v_3 \tag{1187}$$

y así

$$T(v) = (x-y)T(v_1) + yT(v_2) + (x-z)T(v_3) \tag{1188}$$

$$= yv_2 + (x - z)v_3 \tag{1189}$$

es decir,

$$T(x, y, z) = (y, y, -x + y + z) \tag{1190}$$

Problema 137. *problema 3 tercer examen parcial II Ciclo 2007*
Sea una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1191}$$

a) Si $[v]_D = (2, 1, 0)^T$**encuentre** $[T(v)]_B$
Se utiliza que

$$[T(v)]_B = [T]_D^B \, [v]_D \tag{1192}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1193}$$

b) Si $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ **calcule las coordenadas de** $T(v)$ **en la base canónica** C **de** $\mathbb{R}^2$
Si $w = T(v)$ observe que por la fórmula de cambio de base

$$[w]_C = [I]_B^C \, [w]_B \tag{1194}$$

y lo que hay que calcular es la matriz de cambio de base $[I]_B^C$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \tag{1195}$$

por lo que $[I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y así

$$[T(v)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1196}$$

c) Determine $[T]_D^C$
Observe que

$$[T]_D^C = [I \circ T]_D^C = [I]_B^C \, [T]_D^B \tag{1197}$$

y como la anterior ya fue calculado se tiene que

$$[T]_D^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{1198}$$

Problema 138. *problema 3 tercer examen de reposición 2007* **Sea** $B = \{u, v, w, \}$ **base de** $\mathbb{R}^3$ **y** $D = \{(1, -1), (0, 2)\}$**. Sea** $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **una transformación lineal tal que**

$$[T]_B^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1199}$$

a) Calcule $T(u), T(v), T(w)$
Se utiliza que

$$[T(u)]_D = [T]_B^D [u]_B \tag{1200}$$

$$[T(v)]_D = [T]_B^D [v]_B \tag{1201}$$

$$[T(w)]_D = [T]_B^D [w]_B \tag{1202}$$

como

$$u = u + 0v + 0w \tag{1203}$$

se tiene que

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1204}$$

como

$$v = 0u + v + 0w \tag{1205}$$

se tiene que

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1206}$$

como

$$w = 0u + 0v + w \tag{1207}$$

se tiene que

$$[w]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1208}$$

por lo que

$$[T(u)]_D = [T]_B^D [u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1209}$$

y así

$$T(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1210}$$

de la misma forma

$$[T(v)]_D = [T]_B^D [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{1211}$$

y así

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1212}$$

Finalmente

$$[T(w)]_D = [T]_B^D [w]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1213}$$

y así

$$T(w) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1214}$$

b) Calcule $[T]_B^C$ donde C es la base canónica
Se utiliza el algoritmo para calcular la representación matricial

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} e_1 & e_2 & T(u) & T(v) & T(w) \end{array} \right) \tag{1215}$$

es decir,

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right) \tag{1216}$$

por lo que

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \tag{1217}$$

c) Si $u = (-1,1,1)$ $v = (0,-1,1)$ $w = (0,0,-1)$ determine la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base B
Piden calcular $[I]_C^B$ es decir, hay que resolver el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{1218}$$

y haciendo Gauss-Jordan se llega

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \tag{1219}$$

por lo que

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1220}$$

Problema 139. *problema 1 tercer examen primer ciclo 2006*
Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x,y,z) = (x-y+z, x+y-z)$. Sean $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $D = \{(-1,0),(0,-1)\}$.

a) Determine $[T]_B^D$
Si $v_1 = (1,1,0)$ $v_2 = (1,0,1)$ $v_3 = (0,1,1)$ y $u_1 = (-1,0)$ $u_2 = (0,-1)$ hay que considerar el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} u_1 & u_2 & T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{array} \right) \tag{1221}$$

o bien

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{1222}$$

haciendo Gauss-Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{1223}$$

y así

$$[T]_B^D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1224}$$

b) Use la parte $a)$ **para determinar** $[T(1,2,3)]_D$

Si $v = (1,2,3)$ se tiene que

$$[T(v)]_D = [T]_B^D [v]_B \tag{1225}$$

para $[v]_B$ hay que escribir v como combinación lineal de la base, es decir, resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \tag{1226}$$

y se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{1227}$$

es decir

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1228}$$

por lo que

$$[T(v)]_D = [T]_B^D [v]_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1229}$$

Problema 140. *problema 3 tercer examen parcial segundo ciclo 2008*

En $\mathbb{R}^3$ **considere las rectas** $L_1 : (x,y,z) = (t,0,t)$ **y** $L_2 : (x,y,z) = (s,3s,2s)$ **y los planos de ecuaciones** $P_1 : 2x - 2y - z = 0$ $P_2 : 2x - y + z = 0$

a) Construya una transformación lineal T **tal que el conjunto de imágenes de los puntos de la recta** L_1 **sea** L_2 **y el conjunto de imágenes de los puntos del plano** P_1 **sea el plano** P_2 **y determine** $T(x,y,z)$

Como las rectas y los planos pasan por el origen todos ellos son subespacios vectoriales. Una base para L_1 es $v_1 = (1,0,1)$ y una base para L_2 es $u_1 = (1,3,2)$.

Por otro lado, para hallar una base para el primer plano observe que de la ecuación normal se tiene que

$$z = 2x - 2y \tag{1230}$$

por lo que si $(x,y,z) \in P_1$ se tiene que

$$(x,y,z) = (x,y,2x-2y) = x(1,0,2) + y(0,1,-2) \tag{1231}$$

y así una base para P_1 es $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (0,1,-2)$.

De la misma forma, para hallar una base para el segundo plano observe que de la ecuación normal se tiene que

$$z = -2x + y \tag{1232}$$

por lo que si $(x,y,z) \in P_1$ se tiene que

$$(x,y,z) = (x,y,-2x+y) = x(1,0,-2) + y(0,1,1) \tag{1233}$$

y así una base para P_2 es $u_2 = (1, 0, -2),\ u_3 = (0, 1, 1)$.

Luego, como una transformación queda definida en el momento que se define sobre una base y v_1, v_2, v_3 son una base para $\mathbb{R}^3$ basta definir

$$T(v_1) = u_1,\ T(v_2) = u_2,\ T(v_3) = u_3 \tag{1234}$$

y esta transformación cumple los requisitos del problema.

Ahora bien, para decir quien es $T(x, y, z)$ se debe escribir (x, y, z) como combinación lineal de v_1, v_2, v_3. Para esto se forma el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & -2 & z \end{array}\right) \tag{1235}$$

y se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2x - 2y - z \\ 0 & 1 & 0 & -x + 2y + z \\ 0 & 0 & 1 & y \end{array}\right) \tag{1236}$$

por lo que

$$(x, y, z) = (2x - 2y - z)v_1 + (-x + 2y + z)v_2 + yv_3 \tag{1237}$$

y de esta forma

$$T(x, y, z) = (2x - 2y - z)u_1 + (-x + 2y + z)u_2 + yu_3 \tag{1238}$$

o bien

$$T(x, y, z) = (x, 6x - 5y - 3z, 6x - 7y - 4z) \tag{1239}$$

b) Determine $[T]_C$ donde C es la base canónica

Hay varias formas de hacer esto. La primera es usar el hecho de que se tiene tiene $T(x, y, z)$ y como se está pidiendo $[T]_C$ entonces solo hay que copiar los coeficientes que aparecen en $T(x, y, z)$ y ponerlos como matriz, es decir,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \tag{1240}$$

Se enfatiza de que solo se puede hacer esto ya que se está pidiendo $[T]_C$.

La otra forma es observar que

$$[T]_C = [T]_C^C = [T \circ I]_C^C = [T]_B^C\,[I]_C^B \tag{1241}$$

donde $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

Para hallar $[T]_B^C$ se construye el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e_1 & e_2 & e_3 & T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \tag{1242}$$

por lo que

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1243}$$

Para hallar $[I]_C^B$ se contruye el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & v_2 & v_3 & e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1244}$$

y se llega

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{1245}$$

por lo que

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1246}$$

y finalmente

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \tag{1247}$$

c) Determine $T^{-1}(x,y,z)$, la inversa de T
Sea $v = (x,y,z)$. Tenemos que

$$[T^{-1}(v)]_C = \left[T^{-1}\right]_C [v]_C = ([T]_C)^{-1} [v]_C \tag{1248}$$

como

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \tag{1249}$$

entonces

$$([T]_C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{42}{41} & \frac{-4}{41} & \frac{-3}{41} \\ \frac{-12}{41} & \frac{7}{41} & \frac{-5}{41} \end{pmatrix} \tag{1250}$$

Luego,

$$\left[T^{-1}(v)\right]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{42}{41} & \frac{-4}{41} & \frac{-3}{41} \\ \frac{-12}{41} & \frac{7}{41} & \frac{-5}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{42x-4y-3z}{41} \\ \frac{-12x+7y-5z}{41} \end{pmatrix} \tag{1251}$$

es decir,

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(x, \frac{42x-4y-3z}{41}, \frac{-12x+7y-5z}{41}\right) \tag{1252}$$

Problema 141. Suponga que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1253}$$

donde $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]_{B_2}$ donde $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$ que cumple

$$v_1 = 2u_1 - u_3 \quad v_2 = 5u_2 \quad v_3 = u_1 + u_3 \tag{1254}$$

Primero hay que utilizar la composición de la identidad para relacionar $[T]_{B_2}$ con $[T]_{B_1}$.

$$[T]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_2} = [T \circ I]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [I]_{B_2}^{B_1} = [I \circ T]_{B_1}^{B_2} [I]_{B_2}^{B_1} = [I]_{B_1}^{B_2} [T]_{B_1}^{B_1} [I]_{B_2}^{B_1} \tag{1255}$$

De la expresión anterior solo se conoce la matriz del medio por lo que faltarían hallar $[I]_{B_1}^{B_2}$ y $[I]_{B_2}^{B_1}$. Ahora bien, como no se tienen los valores de los vectores no es posible utilizar el algoritmo de siempre para hallar la representación matricial por lo que hay que utilizar la definición original de la representación matricial para hallar $[I]_{B_1}^{B_2}$ y $[I]_{B_2}^{B_1}$.

La definición original es básicamente que $[T]_{B_1}^{B_2}$ **son los vectores de coordenadas de la base B_1 con respecto a la base B_2.** En este caso se tendría que

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} [I(u_1)]_{B_2} & [I(u_2)]_{B_2} & [I(u_3)]_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [u_1]_{B_2} & [u_2]_{B_2} & [u_3]_{B_2} \end{pmatrix} \tag{1256}$$

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} [I(v_1)]_{B_1} & [I(v_2)]_{B_1} & [I(v_3)]_{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [v_1]_{B_1} & [v_2]_{B_1} & [v_3]_{B_1} \end{pmatrix} \tag{1257}$$

De las ecuaciones del enunciado $v_1 = 2u_1 - u_3 \quad v_2 = 5u_2 \quad v_3 = u_1 + u_3$ se observa que es más sencillo calcular $[I]_{B_2}^{B_1}$ y de esta forma

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1258}$$

y luego para hallar $[I]_{B_1}^{B_2}$ se puede usar el hecho de que $[I]_{B_1}^{B_2} = \left([I]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$ es decir

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1259}$$

Finalmente

$$[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1260}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{3} & 5 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \tag{1261}$$

9. Vectores y Valores Propios

9.1. Motivación geométrica y definición

En este capítulo se considerarán solo matrices cuadradas $n \times n$ denotadas por A. Una de los propiedades más básicas de la multiplicación matricial entre una matriz y un vector es que produce otro vector

$$Au = v \tag{1262}$$

En el caso en que la matriz es cuadrada, u y v tienen el mismo tamaño. En el caso que nos va a ocupar este capítulo los espacios vectoriales van a ser $\mathbb{R}^n$ por lo que puede volver a utilizarse el razonamiento geométrico de los vectores.

Así, la ecuación

$$Au = v \tag{1263}$$

geométricamente significa que la matriz A transforma una "flecha" en otra "flecha" por lo que uno puede preguntarse si existen vectores que quedan en el mismo lugar, es decir,

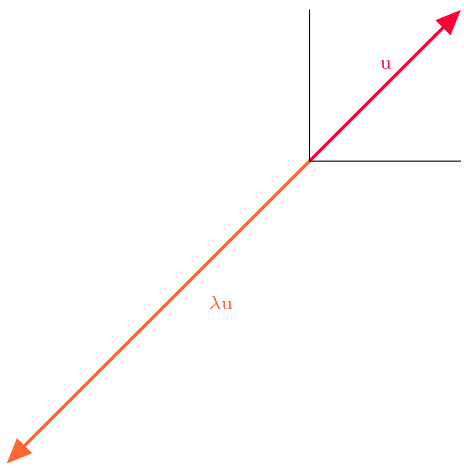


Figura 46: Vector propio **u** con valor propio λ

si $Au = v$ produce un vector v que esté en la misma recta que el vector original u. En tal caso ocurre que $v = \lambda u$ donde λ es un escalar y la siguiente definición se refiere precisamente a esta situación.

Definición 142. Suponga que A es una matriz $n \times n$. Un vector $u \neq 0$ se dice un **vector propio** de la matriz A si existe un número real λ tal que

$$Au = \lambda u \tag{1264}$$

en tal caso se dice que λ es un **valor propio** asociado al vector propio u.

Por ejemplo, considere la matriz identidad 1_n. Es claro que para cualquier vector no nulo u

$$1_n u = u \tag{1265}$$

por lo que **todo vector no nulo es un vector propio de la matriz identidad con valor propio** $\mathbf{1}$**.**

De hecho aquí se observa que el número 1 es el valor propio de una infinidad de vectores por lo que **un mismo número puede ser valor propio de varios vectores propios a la vez.**

9.2. Cálculo de Vectores Propios

9.2.1. Subespacios Propios

Como se dijo antes, un mismo número λ puede ser valor propio de varios vectores propios. Por ejemplo, si A es una matriz y u, v son vectores propios de A con valor propio λ y a es un escalar entonces

$$A(u + av) = Au + aAv = \lambda u + a\lambda v = \lambda(u + av) \tag{1266}$$

es decir, $u + av$ vuelve a ser otro vector propio de A con valor propio λ. Lo anterior sugiere la siguiente definición.

Definición 143. Suponga que A es una matriz $n \times n$ y que λ es un valor propio de A. Se define el **subespacio propio** (espacio característico) **del valor propio** λ como el subespacio de vectorios propios (junto con el vector nulo) con valor propio λ

$$V_\lambda = \{u \mid Au = \lambda u\} \tag{1267}$$

La **multiplicidad geométrica de** λ es $\dim V_\lambda$.

El siguiente teorema relaciona los vectores propios de distintos valores propios.

Teorema 144. *Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ son k valores propios de A distintos con vectores propios asociados $v_1, \cdots, v_k$ entonces $v_1, \cdots, v_k$ son linealmente independientes, es decir,* ***vectores propios que corresponden a distintos valores propios son linealmente independientes.***

Demostración. A manera de ilustración se hará el caso $k = 2$ pues la prueba requiere el método de inducción. Suponga que existen escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{1268}$$

multiplicando la ecuación anterior por A

$$c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0 \tag{1269}$$

como $Av_i = \lambda_i v_i$ pues son vectores propios entonces la ecuación anterior es

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{1270}$$

como los valores propios son distintos alguno de ellos tiene que ser no nulo (por ejemplo λ_1) por lo que multiplicando (1268) por λ_1 se tiene

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2 = 0 \tag{1271}$$

y realizando (1271)−(1270) se tiene que

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0 \tag{1272}$$

como los valores propios son diferentes y los vectores propios nunca son el vector nulo entonces $c_2 = 0$ y por ende $c_1 = 0$ lo cual significa que los vectores son linealmente independientes. □

9.2.2. Polinomios Característicos

A continuación se dará un método para calcular los valores y vectores propios de una matriz. La ecuación que un vector propio debe cumplir es

$$Av = \lambda v \tag{1273}$$

Si A es una matriz $n \times n$ entonces

$$Av = \lambda 1_n v \tag{1274}$$

$$(A - \lambda 1_n)v = 0 \tag{1275}$$

para que v sea un vector propio es necesario que sea no nulo, es decir, la ecuación $(A-\lambda 1_n)v = 0$ debe tener soluciones no triviales. Como esto puede verse como un sistema homogéneo de la teoría de determinantes de sabe que el determinante de $A - \lambda 1_n$ debe ser cero (para que sea no invertible), es decir

Teorema 145. *Si A es una matriz $n \times n$ entonces son equivalentes*
1) λ es un valor propio de A
2) $\det(A - \lambda 1_n) = 0$

Por ejemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1276}$$

Para hallar los valores propios de A se usa el teorema anterior. Suponga que λ es un valor propio y considere

$$A - \lambda 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \tag{1277}$$

y al ser valor propio debe cumplirse que

$$\det(A - \lambda 1_2) = 0 \tag{1278}$$

es decir

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0 \tag{1279}$$

simplificando un poca la ecuación anterior se llega a

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{1280}$$

factorizando el polinomio se tiene que

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \tag{1281}$$

los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = 2 \tag{1282}$$

$$\lambda_2 = 3 \tag{1283}$$

Del ejemplo anterior puede observarse que la ecuación $\det(A - \lambda 1_n) = 0$ se convierte en un polinomio de variable λ. Este polinomio recibe un nombre especial.

Definición 146. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz $n \times n$ el **polinomio característico** P_A de A es el polinomio de grado n

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n) \tag{1284}$$

Teorema 147. *Algunas propiedades del polinomio característico son:*
1) Si A es una matriz de grado n entonces el polinomio característico es un polinomio de grado n.
2) Las soluciones de la ecuación $P_A(\lambda) = 0$ son los valores propios de la matriz A
3) Como un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces entonces una matriz de tamaño n tiene a lo sumo n valores propios
4) Dos matrices con el mismo polinomio característico tienen los mismos valores propios
5) Si $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico de A entonces $\det A = (-1)^n a_0$

Por ejemplo, suponga que el polinomio característico de una matriz es $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Claramente el polinomio anterior no tiene soluciones reales pero sí complejas, de hecho, $P_A(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)$ donde $i^2 = -1$. De hecho, es sabido que todo polinomio tiene raíces si se consideran los números complejos por lo que **toda matriz tiene valores propios si se consideran valores propios complejos. En caso de que no se trabaje con los números complejos y solo se consideren números reales entonces no toda matriz tendrá valores propios** y su polinomio característico se verá de la siguiente forma (una vez que se ha factorizado)

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} Q(\lambda) \tag{1285}$$

donde $Q(\lambda)$ es un polinomio irreducible (como $\lambda^2 + 1$) y los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios reales de la matriz. La **multiplicidad algebraica del valor propio** λ_i es el número n_i.

Ahora bien, por lo que se vio del capítulo anterior una matriz A representa a una transformación lineal en cierta base del espacio vectorial. Si B representa la misma transformación lineal en otra base del espacio vectorial, se vio en (1074) que las matrices eran similares, es decir, $B = CAC^{-1}$. Es de esperar que estas matrices tengan los mismos valores propios pues representan a la misma transformación lineal y esto es precisamente lo que establece el siguiente resultado.

Teorema 148. *1) Si A y B son dos matrices similares entonces tienen los mismos valores propios*

2) Si A es una matriz triangular entonces los valores propios de A son los elementos sobre la diagonal de A

3) Una matriz A es invertible si y solo si 0 no es un valor propio de A

Demostración. 1) Como A y B son similares entonces $B = C^{-1}AC$. Luego

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda 1_n) = \det\left(C^{-1}AC - \lambda 1_n\right) \tag{1286}$$

$$= \det\left(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C\right) = \det\left(C^{-1}[AC - \lambda C]\right) = \det C^{-1} \det(AC - \lambda C) \tag{1287}$$

$$= \det C^{-1} \det([A - \lambda 1_n]C) = \det C^{-1} \det(A - \lambda 1_n) \det C = P_A(\lambda) \tag{1288}$$

es decir, A y B tienen los mismos polinomios característicos por lo que tienen los mismos valores propios.

2) Suponga que A es una matriz triangular,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1289}$$

Luego

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{1290}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \tag{1291}$$

y luego las raíces del polinomio característico de A son los elementos sobre la diagonal por lo que sus valores propios son los elementos sobre la diagonal.

3) Suponga primero que A es invertible y sea u un vector propio de A con valor propio λ

$$Au = \lambda u \tag{1292}$$

como A es invertible

$$u = \lambda A^{-1} u \tag{1293}$$

y si $\lambda = 0$ se tiene que $u = 0$ pero esto no es posible por lo que $\lambda \neq 0$.

Por otro lado, suponga que 0 no es un valor propio de A. Entonces 0 no es raíz del polinomio característico de A. Si se escribe el polinomio como $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ entonces necesariamente $a_0 \neq 0$ y por el sobre las propiedades del polinomio característico se tiene que $\det A \neq 0$ lo cual significa que A es invertible. □

9.2.3. Algunas propiedades de los valores propios

Suponga que se tiene una matriz cuadrada $n \times n$ A. Se define la **traza** de la matriz como la suma de las entradas sobre la diagonal de la matriz. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ entonces $\mathrm{tr}(A) = 3 + 0 + 8 = 11$. Como se mencionó antes toda matriz tienen valores propios si se consideran números complejos y esos valores propios corresponden a las raíces del polinomio característico. Así, si se escriben los valores propios (si un valor propio corresponde a una raíz que se repite como $(\lambda - 2)^3$ entonces se incluye sus repeticiones) como $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ se tiene el siguiente resultado que es de gran utilidad:

1. **la suma de los valores propios de una matriz (incluyendo repeticiones) es igual a la traza de la matriz**

2. **el producto de los valores propios de una matriz (incluyendo repeticiones) es igual al determinante de la matriz**

Este resultado es útil sobre todo cuando se quiere verificar que los valores propios hallados para matrices pequeñas son los correctos. Por ejemplo, antes se estudió la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Si se quisieran hallar los valores propios de esta matriz se tendría que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 5 \tag{1294}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 6 \tag{1295}$$

y se ve $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ satisfacen las dos ecuaciones por lo que los valores propios hallados anteriormente son los correctos.

9.2.4. Algoritmo para el cálculo de valores y vectores propios

1. Si A es una matriz $n \times n$ de la cual quieren hallarse los vectores propios y valores propios se resuelve primero la ecuación característica $\det(A - \lambda 1_n) = 0$. Las soluciones de tal ecuación son los valores propios de la matriz.

2. Para cada uno de los valores propios hallados en el paso anterior se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda 1_n)v = 0$ lo cual dará condiciones sobre el subespacio propio V_λ de cada uno de los valores propios y de esta forma se halla una base cada subespacio propio.

Por ejemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \tag{1296}$$

Para determinar los valores propios de A se calcula su polinomio característico

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \tag{1297}$$

Ahora se resuelve la ecuación característica

$$P_A(\lambda) = 0 \tag{1298}$$

que es equivalente a

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \tag{1299}$$

o bien hallar las raíces del siguiente polinomio

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \tag{1300}$$

Para resolver este tipo de polinomios se hace prueba y error con algunos valores pequeños de λ para encontrar raíces. Por ejemplo, si se pone $\lambda = 1$ la ecuación anterior da cero lo cual significa que $\lambda - 1$ es una factor de $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ es decir

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) \tag{1301}$$

donde a, b, c son números que se determinan igualando los coeficientes de las potencias a ambos lados,

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = a\lambda^3 + (b-a)\lambda^2 + (c-b)\lambda - c \tag{1302}$$

y se tiene el sistema (igualando los coeficientes potencia a potencia):

$$\begin{cases} 1 = a \\ -6 = b - a \\ 11 = c - b \\ -6 = -c \end{cases} \tag{1303}$$

y por lo tanto

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \tag{1304}$$

y de aquí se concluye que los valores propios son

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3 \tag{1305}$$

Ahora se van a calcular los vectores propios asociados:
***caso* $\lambda_1 = 1$:**
Se debe resolver el sistema

$$(A - 1_3)v = 0 \tag{1306}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1307}$$

y se reduce el sistema para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1308}$$

es decir

$$\begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \end{cases} \tag{1309}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z\right) = z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \tag{1310}$$

por lo que

$$V_{\lambda=1} = Cl\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\} \tag{1311}$$

***caso* $\lambda_2 = 2$**
Se debe resolver el sistema

$$(A - 2 \cdot 1_3)v = 0 \tag{1312}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1313}$$

y se reduce el sistema para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1314}$$

es decir

$$\begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{4} \end{cases} \tag{1315}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{z}{2}, \frac{z}{4}, z\right) = z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right) \tag{1316}$$

por lo que

$$V_{\lambda=2} = Cl\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1\right)\right\} \tag{1317}$$

caso $\lambda_3 = 3$
Se debe resolver el sistema

$$(A - 3\cdot 1_3)v = 0 \tag{1318}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1319}$$

y se reduce el sistema para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1320}$$

es decir

$$\begin{cases} x = -\frac{z}{4} \\ y = \frac{z}{4} \end{cases} \tag{1321}$$

$$(x,y,z) = \left(-\frac{z}{4},\frac{z}{4},z\right) = z\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1\right) \tag{1322}$$

por lo que

$$V_{\lambda=3} = Cl\left\{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1\right)\right\} \tag{1323}$$

Como se puede ver de lo anterior el cálculo de las raíces de un polinomio requiere un poco de imaginación por lo que el siguiente teorema ayuda a determinar las raíces de un polinomio en ciertas circunstancias.

Teorema 149. *Suponga que* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1x + a_0$ *es un polinomio con coeficientes enteros. Si* s *es una raíz entera de* $p(x)$*, es decir, si* $p(s) = 0$ *entonces* s *divide a* a_0.

A manera de aplicación de este teorema, en el ejemplo anterior habían que hallar las raíces de $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$. El teorema anterior dice que cualquier raíz entera del polinomio tiene que dividir al coeficiente que no está multiplicado por la variable, en este caso, cualquier raíz entera tiene que dividir a -6. Los candidatos son $1,-1,2,-2,3,-3,6,-6$ y de hecho se puede ver que las raíces son $1,2,3$.

9.3. Diagonalización de Matrices

Definición 150. Una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz C invertible y una matriz D diagonal tal que

$$D = C^{-1}AC \tag{1324}$$

Observe que como D es una matriz diagonal entonces por el teorema anterior sus valores propios son los elementos sobre la diagonal de D. Estos valores propios de D son los mismos que los de A ya que A y D son matrices similares. Para determinar la matriz C observe que si A es diagonalizable

$$CD = AC \tag{1325}$$

escribiendo C con sus vectores columna $C = (C_1, \cdots, C_n)$ entonces AC tiene por columnas

$$AC = (AC_1, AC_2, \cdots, AC_n) \tag{1326}$$

y como D tiene sobre la diagonal los valores propios de A

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1327}$$

donde los λ_i no tienen que ser distintos. CD tiene por columnas

$$CD = (\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \cdots, \lambda_n C_n) \tag{1328}$$

e igualando las columnas de la ecuación $CD = AC$ se tiene que

$$AC_i = \lambda_i C_i \tag{1329}$$

es decir, las columnas C_i son vectores propios de la matriz A con valor propio λ_i. También, como C es invertible sabemos que las columnas de C son linealmente independiente por lo que se llega al siguiente resultado.

Teorema 151. *Suponga que A es una matriz cuadrada $n \times n$ tal que el polinomio característico puede factorizarse como un producto de factores lineales con raíces reales*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \tag{1330}$$

con

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \tag{1331}$$

y los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios reales distintos de A y $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_r}$ los subespacios propios correspondientes. Entonces son equivalentes
1) La matriz A es diagonalizable
2) Existe una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vectores propios de A
3) La multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica, es decir, $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$
4) $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n}) = n$
5) Todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse en forma única como combinación lineal de vectores en los subespacios propios, es decir, $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$
Si una matriz de tamaño n tiene n valores propios distintos, entonces la matriz es diagonalizable

9.3.1. Algoritmo para Diagonalizar una Matriz

1. Si A es una matriz $n \times n$ se calculan todos sus valores propios y sus vectores propios correspondientes según el algoritmo anterior.
2. Si la matriz A tiene n vectores propios $l.i$ o cumple alguna de las condiciones del teorema anterior entonces A es diagonalizable, en caso contrario no lo es.
3. Cuando A es diagonalizable se construye la matriz C cuyas columnas son los vectores propios $l.i$ hallados anteriormente. En la matriz D diagonal se ponen los valores propios en forma que corresponda con las columnas de C, es decir, la columna uno de C debe ser vector propio de la primera entrada sobre la diagonal, etc.

Problema 152. *pregunta 3 tercer examen parcial primer semestre 2011*

$\lambda = 2$ es el único valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halle una base para el espacio propio V_2 asociado al valor propio $\lambda = 2$
Para hallar el espacio propio se resuelve el sistema

$$(A - 2 1_4)v = 0 \tag{1332}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1333}$$

que da como solución

$$y = 0 \tag{1334}$$

$$z = 0 \tag{1335}$$

Luego

$$(x, y, z, w) = (x, 0, 0, w) = x(1, 0, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1) \tag{1336}$$

y así

$$V_2 = Cl\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} \tag{1337}$$

b) ¿Es la matriz A diagonalizable? Justifique su respuesta
Como $\dim V_2 = 2 < 4$ y $\lambda = 2$ es el único valor propio de A entonces es imposible hallar cuatro vectores propios linealmente independientes. Por lo tanto, A no es diagonalizable.

Problema 153. *pregunta 4 tercer examen parcial primer semestre 2011*

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. Halle una matriz C tal que**

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1338}$$

Este problema pide hallar una matriz C que diagonalice la matriz A. Por lo visto anteriormente A y D tienen los mismos valores propios, que son los valores en la diagonal de D. Es decir, los valores propios de A son $\lambda = 1, 2, -1$. La matriz C se forma con los vectores propios asociados a estos valores propios.

caso $\lambda = 1$

Hay que resolver

$$(A - 1_3)v = 0 \tag{1339}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1340}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1341}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \tag{1342}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0) \tag{1343}$$

Si

$$v_1 = (-1, 1, 0) \tag{1344}$$

entonces

$$V_{\lambda=1} = Cl\{v_1\} \tag{1345}$$

caso $\lambda = 2$

Hay que resolver

$$(A - 21_3)v = 0 \tag{1346}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1347}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1348}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \tag{1349}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1) \tag{1350}$$

Si

$$v_2 = (1, 1, 1) \tag{1351}$$

entonces
$$V_{\lambda=2} = Cl\{v_2\} \tag{1352}$$

caso $\lambda = -1$
Hay que resolver
$$(A + 1_3)v = 0 \tag{1353}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1354}$$

la matriz escalonada reducida es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1355}$$

y da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases} \tag{1356}$$

es decir,
$$(x, y, z) = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right) = z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \tag{1357}$$

Si
$$v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \tag{1358}$$

entonces
$$V_{\lambda=-1} = Cl\{v_3\} \tag{1359}$$

Finalmente la matriz C se calcula escribiendo los vectores propios en forma de columna
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1360}$$

Problema 154. *problema 4 tercer examen parcial reposición I ciclo 2006*

Considere la matriz $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$

a) Determine los valores propios de B

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda 1_3) = \det \begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (b-\lambda)(a-\lambda)^2 \tag{1361}$$

Y de aquí se tiene que los valores propios de B son $\lambda = a, b$
b) Verifique que B **no es diagonalizable**
Se van a hallar los vectores propios de los valores propios
caso $\lambda = a$

Hay que resolver

$$(B - a1_3)v = 0 \tag{1362}$$

$$\begin{pmatrix} b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1363}$$

la matriz escalonada reducida es (como $b \neq a$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1364}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{1365}$$

por lo tanto

$$(x, y, z) = (0, y, 0) = y(0, 1, 0) \tag{1366}$$

Si

$$v_1 = (0, 1, 0) \tag{1367}$$

entonces

$$V_{\lambda=a} = Cl\{v_1\} \tag{1368}$$

caso $\lambda = b$

Hay que resolver

$$(B - b1_3)v = 0 \tag{1369}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 1 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1370}$$

la matriz escalonada reducida es (como $b \neq a$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1371}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{1372}$$

por lo tanto

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \tag{1373}$$

Si

$$v_2 = (1, 0, 0) \tag{1374}$$

entonces

$$V_{\lambda=b} = Cl\{v_2\} \tag{1375}$$

Luego, como solo es posible obtener dos vectores propios linealmente independientes (pues cado uno de los subespacios propios son uno-dimensionales) se concluye que B no es diagonalizable.

9.3.2. Matrices Ortogonalmente Diagonalizables

Para terminar el capítulo se estudiará un caso particular de diagonalización de matrices.

Definición 155. Una matriz C es **ortogonal** si $CC^T = 1_n$ o bien $C^T = C^{-1}$.
Una matriz A $n \times n$ es **ortogonalmente diagonalizable** si existe una matriz ortogonal C y una matriz D diagonal tal que

$$C^T AC = D \tag{1376}$$

El siguiente teorema caracteriza las matrices ortogonalmente diagonalizables.

Teorema 156. *1) Una matriz A es ortogonalmente diagonalizable si y solo si A es una matriz simétrica, es decir, $A = A^T$*
2) Si A es una matriz simétrica entonces existe una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ ortonormal formada por vectores propios de A.

9.3.2.1. Algoritmo para diagonalizar ortogonalmente una matriz

Los siguientes pasos dan la forma general en que se diagonaliza ortogonalmente una matriz.

1. Primero hay que determinar si A es una matriz simétrica o no. Si $A = A^T$ entonces la matriz es diagonalizable ortogonalmente.
2. La matriz C se construye igual que antes, con el cuidado de que **los vectores propios que van en las columnas de la matriz C deben ser ortonormales** (para esto puede ser necesario aplicar Gram-Schmidt). **Una ventaja de que la matriz sea simétrica, es que los vectores propios que corresponden a distintos valores propios son ortogonales, lo cual significa que es suficiente hacer Gram-Schmidt sobre cada subespacio característico por separado**
3. La matriz D se forma igual que antes, es decir, los valores propios están sobre la diagonal.

Problema 157. *problema 6 tercer examen parcial reposición I ciclo 2007*

Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 6 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **son** $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 8.$

Determine una matriz Q ortogonal y una matriz D diagonal tal que $Q^T AQ = D$

caso $\lambda_1 = 4$

Hay que resolver

$$(A - 41_3)v = 0 \tag{1377}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1378}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1379}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}z \\ y = z \end{cases} \tag{1380}$$

es decir

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}z, z, z) = z(\sqrt{2}, 1, 1) \tag{1381}$$

Si

$$v_1 = (\sqrt{2}, 1, 1) \tag{1382}$$

entonces

$$\|v_1\| = 2 \tag{1383}$$

y se normaliza como

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{1384}$$

$$V_{\lambda_1=4} = Cl\{u_1\} \tag{1385}$$

caso $\lambda_2 = 6$
Hay que resolver

$$(A - 61_3)v = 0 \tag{1386}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1387}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1388}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \tag{1389}$$

es decir

$$(x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1) \tag{1390}$$

Si

$$v_2 = (0, -1, 1) \tag{1391}$$

entonces

$$\|v_1\| = \sqrt{2} \tag{1392}$$

y se normaliza como

$$u_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tag{1393}$$

$$V_{\lambda_2=6} = Cl\{u_2\} \tag{1394}$$

caso $\lambda_3 = 8$
Hay que resolver

$$(A - 81_3)v = 0 \tag{1395}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1396}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1397}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2}z \\ y = z \end{cases} \tag{1398}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (-\sqrt{2}z, z, z) = z(-\sqrt{2}, 1, 1) \tag{1399}$$

Si

$$v_3 = (-\sqrt{2}, 1, 1) \tag{1400}$$

entonces

$$\|v_3\| = 2 \tag{1401}$$

y se normaliza como

$$u_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{1402}$$

$$V_{\lambda_3=8} = Cl\{u_3\} \tag{1403}$$

Luego la matriz C es

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1404}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{1405}$$

Problema 158. *pregunta 4 tercer examen parcial reposición primer semestre 2008*

Sea $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule los valores propios de A

Para calcular los valores propios de A hay que calcular

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -7 & 7 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ -5 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} \tag{1406}$$

para calcular el determinante se usa la propiedad de que el determinante de la matriz es igual al de su transpuesta

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -7 & 7 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ -5 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 & -5 \\ -7 & -1-\lambda & 5 \\ 7 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underrightarrow{f_2+f_1} \underrightarrow{f_2+f_3} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -7 & -1-\lambda & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{1407}$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -1-\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \left[\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] = (2-\lambda)^2 \left[-\lambda + 1 \right] \tag{1408}$$

por lo que los valores propios son $\lambda = 1, 2$

b) Halle una matriz P invertible tal que $P^{,1}AP = D$ donde D es una matriz diagonal

Esta parte pide hallar una matriz P que diagonalice la matriz A. Por lo visto anteriormente hay que calcular los vectores propios correspondientes a cada valor propio

caso $\lambda = 1$

Hay que resolver

$$(A - 1_3)v = 0 \tag{1409}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1410}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1411}$$

y da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{5}z \\ y = -\frac{3}{5}z \end{cases} \tag{1412}$$

es decir,

$$(x, y, z) = \left(-\frac{7}{5}z, -\frac{3}{5}z, z \right) = z \left(-\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, 1 \right) \tag{1413}$$

Como cualquier múltiplo constante del vector anterior funciona se define

$$v_1 = (-7, -3, 5) \tag{1414}$$

entonces

$$V_{\lambda=1} = Cl\{v_1\} \tag{1415}$$

caso $\lambda = 2$

Hay que resolver

$$(A - 21_3)v = 0 \tag{1416}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 3 & -3 & 3 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1417}$$

la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1418}$$

y da la ecuación

$$y = x + z \tag{1419}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) \tag{1420}$$

Si

$$v_2 = (1, 1, 0) \quad v_3 = (0, 1, 1) \tag{1421}$$

entonces

$$V_{\lambda=2} = Cl\{v_2, v_3\} \tag{1422}$$

por lo que se toma

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1423}$$

Ejercicio 159. *pregunta 4 tercer examen parcial reposición primer semestre 2011*

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores propios de A

Para calcular los valores propios de A hay que calcular

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \tag{1424}$$

desarrollando por la segunda fila

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4] \tag{1425}$$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1] = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 \tag{1426}$$

por lo que $\lambda = 2$ es el único valor propio

b) Para cada valor propio halle el espacio característico asociado

caso $\lambda = 2$

Hay que resolver

$$(A - 21_3)v = 0 \tag{1427}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1428}$$

la matriz escalonada reducida es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1429}$$
y da
$$x = z \quad y = z \tag{1430}$$
es decir,
$$(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1) \tag{1431}$$
Si
$$v_1 = (1, 1, 1) \tag{1432}$$
entonces
$$V_{\lambda=2} = Cl\{v_1\} \tag{1433}$$
c) ¿Es la matriz diagonalizable? Justifique su respuesta

No es diagonalizable puesto que como $\lambda = 2$ es el único valor propio se ocupaba que el espacio característico asociado tuviera dimensión 3 pero solo tiene dimensión 1

9.4. Diagonalización de Transformaciones Lineales

Dado que una transformación lineal se puede representar como una matriz; es posible utilizar los resultados anteriores sobre matrices para diagonalizar una transformación lineal.

Definición 160. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, se dice que λ es un valor propio de T con vector propio u si
$$T(u) = \lambda u \tag{1434}$$

Nótese que básicamente es la misma definición para matrices, de hecho, el siguiente resultado establece que para calcular los valores propios de T es suficiente con calcular los valores propios de una representación matricial de T.

Teorema 161. *Para calcular los valores y vectores propios de una transformación lineal T, es suficiente calcular los valores y vectores propios de la matriz $[T]_B$ donde B es una base de $\mathbb{R}^n$*

Por ejemplo, si se define $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ según
$$T(x, y, z) = (3x, 2x - y, x + 5y - 7z) \tag{1435}$$
para hallar los valores y vectores propios de T se puede tomar la base canónica C y calcular los valores y vectores propios de
$$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \tag{1436}$$
los cuales son
$$\lambda_1 = -7 \quad u_1 = (0, 0, 1) \tag{1437}$$
$$\lambda_2 = 3 \quad u_2 = (20, 10, 7) \tag{1438}$$
$$\lambda_3 = -1 \quad u_3 = (0, 6, 5) \tag{1439}$$

Análogamente, se tiene que

> Una transformación lineal T es **diagonalizable** si existe una base B en la cual $[T]_B$ es una matriz diagonal. Para determinar si una transformación es diagonalizale, es suficiente con que $[T]_{B'}$ sea una matriz diagonalizable donde B' es una base de $\mathbb{R}^n$

Por ejemplo, continuando con la transformación anterior, para determinar si es diagonalizable es suficiente con ver si $[T]_C$ es una matriz diagonalizable. Dado que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ se tiene que T sí es diagonalizable y de hecho

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1440}$$

Finalmente, se tiene que

> Una transformación lineal T es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una base B *ortonormal* en la cual $[T]_B$ es una matriz diagonal. Para determinar si una transformación es diagonalizale ortogonalmente, es suficiente con que $[T]_{B'}$ sea una matriz simétrica donde B' es una base *ortonormal* de $\mathbb{R}^n$

Así, en la transformación lineal que se ha estado estudiante, tal transformación no sería diagonalizable ortogonalmente puesto que $[T]_C$ no es una matriz simétrica y la base canónica es una base ortonormal.

10. Curvas y Superficies Cuadráticas

Hasta el momento se han estudiado únicamente sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, ecuaciones como

$$ax + by + cz = d \tag{1441}$$

En este capítulo se estudiarán **superficies cuadráticas,** es decir, ecuaciones del tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = g \tag{1442}$$

Algunas de tales superficies cuadráticas ya son conocidas, por ejemplo, un círculo es una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1443}$$

que saldría de tomar $a = b = 1, c = d = e = f = 0, g = r^2$.

Ahora bien, la ecuación del círculo puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r^2 \tag{1444}$$

,es decir, **es posible utilizar la teoría de matrices para estudiar las superficies cuadráticas.**

De hecho, la situación anterior motiva la siguiente definición:

10.1. Formas Cuadráticas

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, una **forma cuadrática real en las variables** $x_1, \cdots, x_n$ es una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^T A x \tag{1445}$$

donde A es una matriz $n \times n$ simétrica denominada la **matriz de la forma cuadrática f.**

Las siguientes expresiones son algunos ejemplos de formas cuadráticas

$3x^2 - 5xy - 7y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$3x^2 - 7xy + 5xz + 4y^2 - 4yz - 3z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 4 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

De los ejemplos anteriores es fácil observar que:

- Una forma cuadrática es un polinomio de segundo grado en sus variables
- Para construir la matriz A de la forma cuadrática hay dos casos:

1. Si $i \neq j$ el coeficiente del término $x_i x_j$ del polinomio define las entradas a_{ij} y a_{ji} según $a_{ij} = a_{ji} = \dfrac{\text{coeficiente de } x_{ij}}{2}$
2. Si $i = j$ el coeficiente de x_i^2 es la i-ésima entrada en la diagonal de A

Por ejemplo, si $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

si $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2dx_1x_2+2ex_1x_3+2fx_2x_3$ entonces $A=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

10.1.1. Diagonalización de Formas Cuadráticas

Una de las características de las formas cuadráticas es que su matriz asociada es simétrica y por lo visto al final del capítulo anterior esto significa que su matriz es ortogonalmente diagonalizable. De hecho es posible realizar un cambio de variable para diagonalizar la forma cuadrática como indica el siguiente teorema.

Teorema 162. *Sea A una matriz simétrica asociada a una forma cuadrática f y C una matriz cuyas columnas $C=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ son vectores propios ortonormales de la matriz A tal que $C^TAC=D$ donde D es una matriz diagonal con los valores propios de A. Entonces el cambio de variable*

$$y=C^Tx \tag{1446}$$

transforma la forma cuadrática $f(x)=x^TAx$ en

$$f(x)=y^TDy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2 \tag{1447}$$

donde los λ_i son los valores propios de A (que no tienen que ser distintos)

Demostración. Observe que como $y=C^Tx$ y $CC^T=1_n$ entonces $x=Cy$ y

$$x^TAx=(Cy)^TACy=y^TC^TACy=y^TDy \tag{1448}$$

□

10.2. Curvas y Superficies Cuadráticas

10.2.1. Ecuación general de una curva y superficie cuadrática

En lo que resta del capítulo se estudiarán formas cuadráticas de tamaño 2×2 y 3×3.

Las **curvas cuadráticas** son polinomios de dos variables con ecuaciones de la forma

$$ax_1^2+bx_2^2+cx_1x_2+dx_1+ex_2+f=x^TAx+Bx+f=0 \tag{1449}$$

donde

$$A=\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}, B=(d,e) \tag{1450}$$

Las **superficies cuadráticas** son polinomios de tres variables con ecuaciones de la forma

$$ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+ex_1x_3+fx_2x_3+gx_1+hx_2+kx_3+l=x^TAx+Bx+l=0 \tag{1451}$$

con

$$A=\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix},\ B=(g,h,k) \tag{1452}$$

Para poder reconocer una curva o superficie cuadrática será necesario eliminar los términos mixtos (por ejemplo x_1x_2) a través del teorema de antes. Sin embargo, primero se estudiarán algunas de las curvas y superficies clásicas en su versión canónica.

10.2.2. Curvas Cuadráticas

10.2.2.1. Elipse Geométricamente es el conjunto de puntos en el plano tal que la suma de las distancias de un punto sobre la elipse a dos puntos del plano (llamados **focos**) es constante.

La elipse no rotada y centrada en (x_0, y_0) se caracteriza por la ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{1453}$$

donde a y b son los **semiejes** de la elipse $(a, b > 0)$. Cuando $a = b$ se tiene un círculo de radio a, es decir, un círculo es una elipse cuyos semiejes son iguales. Los focos están sobre el eje mayor y los **vértices** de la elipse son los extremos del eje mayor.

Por ejemplo, en la siguiente figura

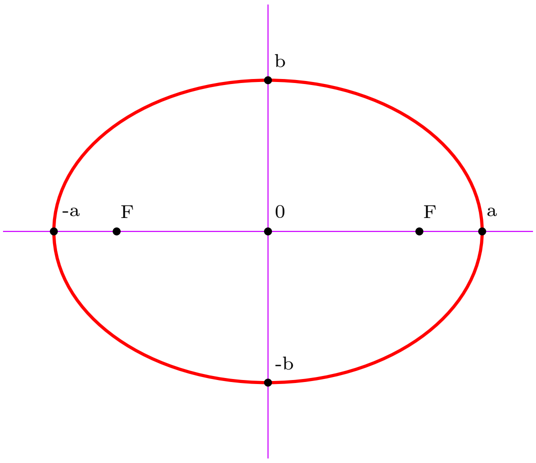


Figure 47: Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

el semieje mayor está sobre el eje x, es decir, se está suponiendo $a > b$. En tal caso los vértices de la elipse son $(a, 0), (-a, 0)$ y los focos de la elipse $(\sqrt{a^2-b^2}, 0), (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$.

Otros ejemplos de una elipse son los siguientes.

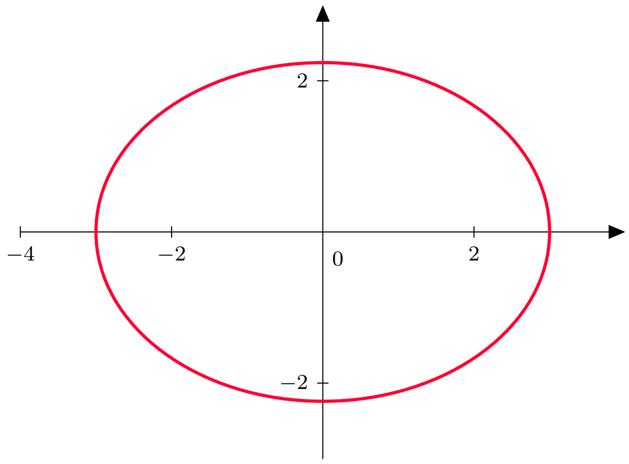


Figure 48: Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

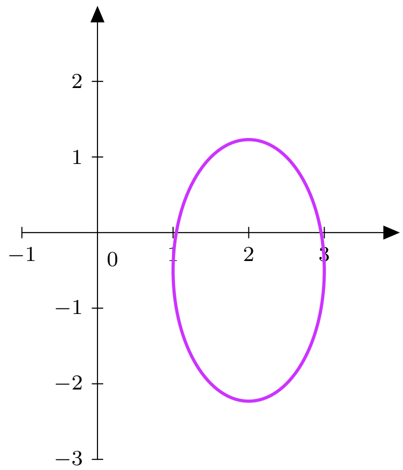


Figure 49: Elipse $\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+0.5)^2}{3} = 1$

10.2.2.2. Hipérbolas Geométricamente es el conjunto de puntos en el plano tal que la diferencia entre las distancias de un punto sobre la hipérbola con dos puntos del plano (llamados focos) es constante.

La hiperbóla centrada en (x_0, y_0) y no rotada tiene por ecuación canónica alguna de las dos formas siguientes

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} & -\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} & +\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{1454}$$

Nuevamente $a, b > 0$. El eje que contiene los focos se llama el **eje focal** y las hipérbolas se caracterizan por tener dos rectas llamadas **asíntotas** a las cuales la hipérbola se acerca arbitrariamente sin tocarlas. Las ecuaciones de las rectas asíntotas de la hipérbola se hallan cambiando el 1 por un 0 en (260). La figura de una hipérbola siempre son dos "ramas" y los dos puntos de las ramas que cortan el eje focal son los **vértices.**

Por ejemplo, en la siguiente figura

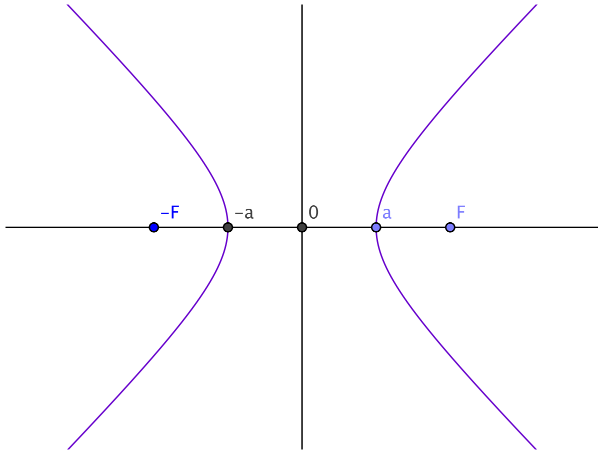


Figure 50: Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Los vértices son los puntos $(a, 0), (-a, 0)$ y los focos los puntos $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$. En este caso las asintótas son las líneas punteadas que tiene por ecuación $y = \pm \frac{b}{a}$. Nótese que la hipérbola se "abre" en el eje que tiene el signo positivo tal como indican las siguientes figuras.

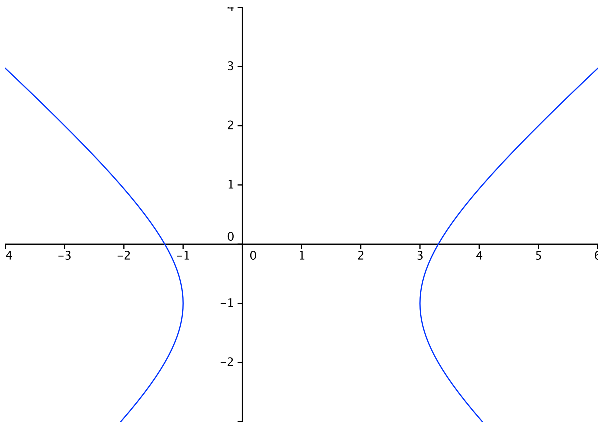


Figure 51: $\frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(y+1)^2 = 1$

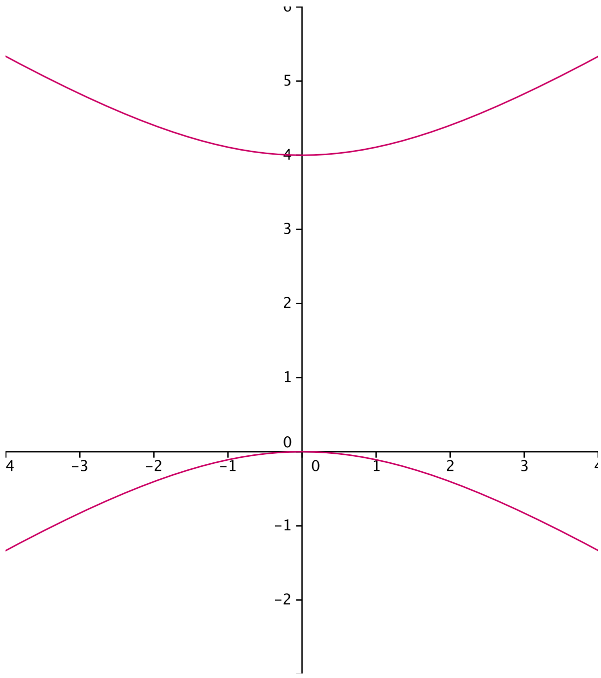


Figure 52: $-\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

10.2.2.3. Parábola Geométricamente es el conjunto de puntos equidistantes de un punto (llamado **foco**) y una recta (llamada **directriz**),

Las ecuaciones canónicas de una parábola centrada en (x_0, y_0) son

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{4a}(y - y_0)^2 \\ y - y_0 = \frac{1}{4a}(x - x_0)^2 \end{cases} \tag{1455}$$

donde ahora a puede ser positivo o negativo. El **vértice** de la parábola es el punto que está a la mitad entre el foco y la directriz.

Por ejemplo, en la siguiente figura

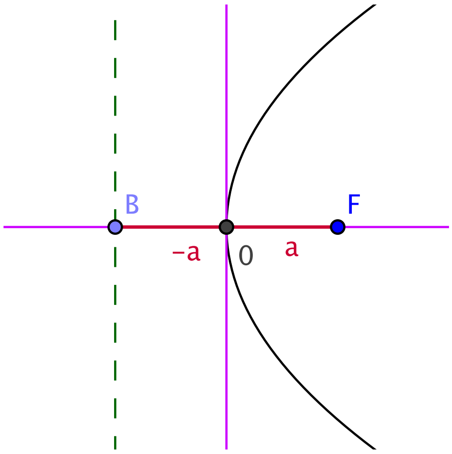


Figure 53: Parábola $x = \frac{1}{4a}y^2$

La directriz de la parábola es la recta $x = -a$ mientras que el foco es el punto $(a, 0)$. El vértice es el origen $(0, 0)$.

A continuación se muestran otros ejemplos.

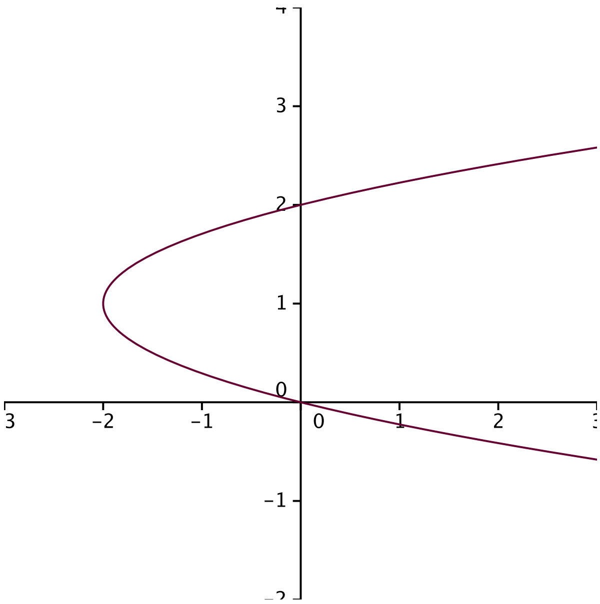


Figure 54: $x + 2 = 2(y - 1)^2$

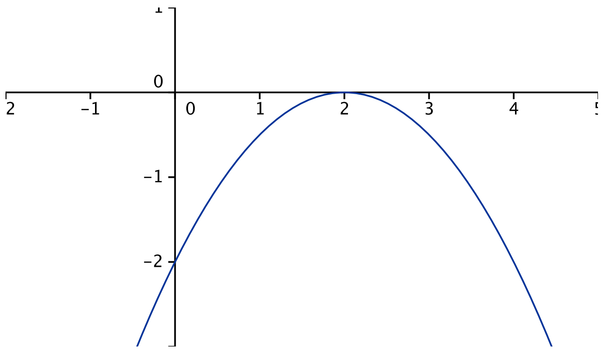


Figure 55: $y = -0{,}5(x-2)^2$

10.2.3. Superficies Cuadráticas

10.2.3.1. Elipsoide: El elipsoide centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{1456}$$

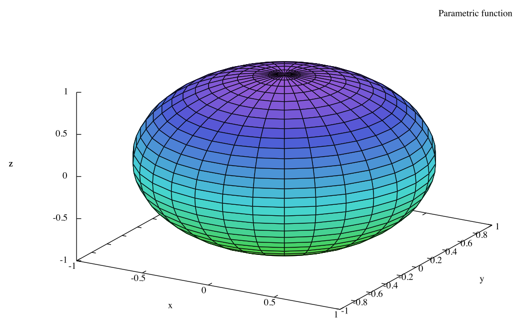


Figure 56: elipsoide

10.2.3.2. Hiperboloide de una hoja El hiperboloide de una hoja centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \end{cases} \tag{1457}$$

la variable que lleva el signo menos determina sobre cual eje se abre el hiperboloide

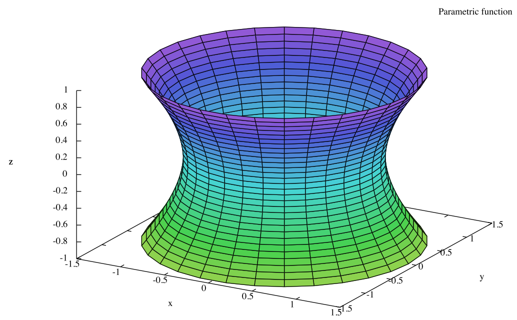


Figure 57: hiperboloide de una hoja

10.2.3.3. Hiperboloide de dos hojas: El hiperboloide de dos hojas centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \end{cases} \tag{1458}$$

la variable que lleva el signo positivo determina sobre cual eje se abre el hiperboloide

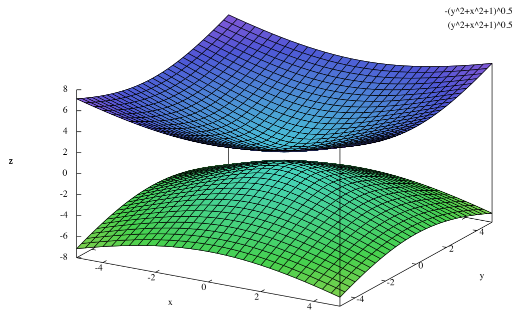


Figure 58: hiperboloide de dos hojas

10.2.3.4. Cono elíptico: El cono elíptico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - (z-z_0)^2 = 0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} - (y-y_0)^2 = 0 \\ \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} - (x-x_0)^2 = 0 \end{cases} \tag{1459}$$

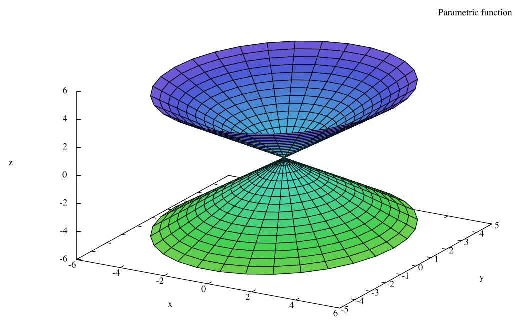


Figure 59: cono elíptico

10.2.3.5. Paraboloide hiperbólico:

El paraboloide hiperbólico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \end{cases} \tag{1460}$$

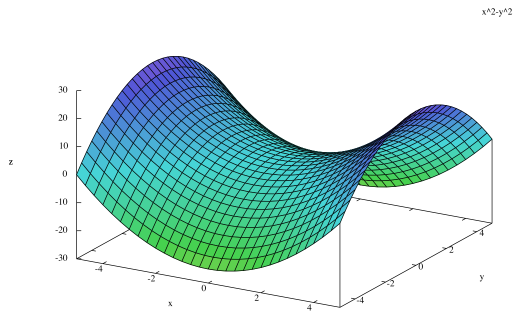


Figure 60: Paraboloides hiperbólico

10.2.3.6. Paraboloide elíptico:

El paraboloide hiperbólico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \end{cases} \tag{1461}$$

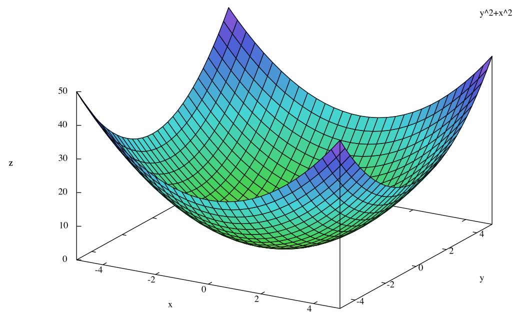


Figure 61: Paraboloides elíptico

10.3. Algunas Transformaciones Lineales

10.3.1. Rotación en el plano

Dado que el objetivo de este tema es identificar las secciones y superficies cónicas haciendo cambios de coordenas, es necesario saber cuando se está frente una rotación o reflexión del plano.

Por ejemplo, considere una rotación de un vector en el plano como se indica en la figura

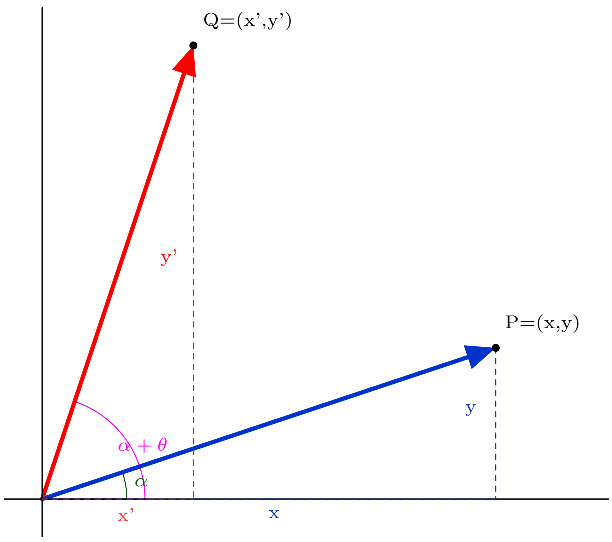


Figura 62: Rotación de un vector en el plano

Es decir, inicialmente se tiene un vector $P = (x, y)$ en el plano (que para efectos del dibujo se toma con norma 1) que forma un ángulo α con el plano y se rota el vector un ángulo θ que se representa por el vector $Q = (x', y')$ (que formaría un ángulo $\theta + \alpha$ con el eje según indica la figura)

De la figura se nota que (escribiendo $r = \|P\| = \|Q\|$)

$$x = r \cos \alpha \tag{1462}$$

$$y = r \sin \alpha \tag{1463}$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\left[\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\right] = x\cos\theta - y\sin\theta \tag{1464}$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\left[\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\right] = x\sin\theta + y\cos\theta \tag{1465}$$

Así, se define

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \tag{1466}$$

$$R_\theta(P) = Q \tag{1467}$$

es decir

$$R_\theta(P) = R_\theta(x,y) = Q = (x',y') = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \tag{1468}$$

Para verificar que es una transformación lineal observe que la función se puede representar como una matriz según

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1469}$$

y por lo discutido antes R_θ es una transformación lineal.

Dos propiedades muy importantes de las matrices de rotación son las siguientes

- $\det R_\theta = 1$
- $R_\theta R_\theta^T = 1_2$, es decir, son matrices ortogonales

De hecho, estas dos propiedades son suficientes para caracterizar completamente las matrices de rotación tal como indica el siguiente teorema.

Teorema 163. *Si C es una matriz 2×2 tal que $CC^T = 1_2$ y $\det C = 1$ entonces C es una matriz de rotación, es decir, existe un número θ tal que*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1470}$$

Con la matriz anterior es muy fácil indicar la rotación a lo largo del eje z un ángulo θ como indica la siguiente figura

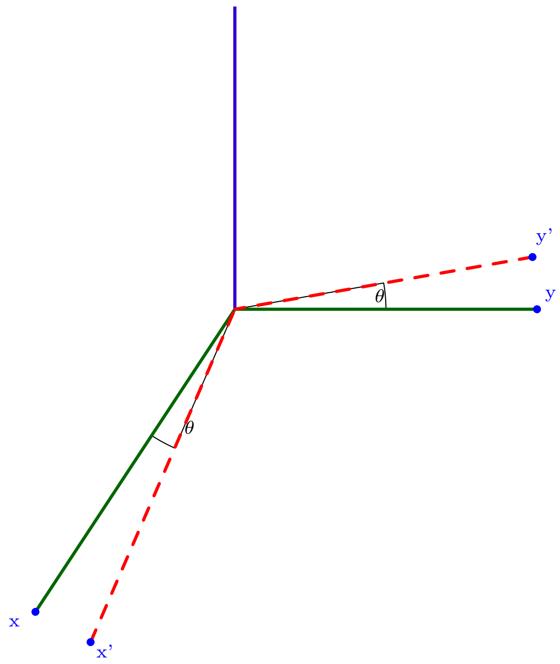


Figura 63: Rotación a lo largo del eje z

La idea es que se rota el plano xy un ángulo θ a lo largo del eje z. Para encontrar la rotación asociada, se puede repertir un argumento exactamente igual a como se halló la matriz sobre el plano y se tendría que

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \tag{1471}$$

$$y' = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{1472}$$

$$z' = z \tag{1473}$$

lo cual significa que la matriz de rotación es

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1474}$$

10.3.2. *Rotación en el espacio*

Si se está en $\mathbb{R}^3$ para rotar un objeto es necesario especificar un eje de rotación y un ángulo de rotación a lo largo de ese eje. A su vez, el eje de rotación puede representarse como un vector u_3, que se supone normalizado ya que lo único que importa es su dirección y no la magnitud.

Si se quiere encontrar la rotación $R_{u_3}(\theta)$ que representa la rotación a lo largo de ese eje un ángulo θ se puede utilizar la teoría de transformaciones lineales. La idea es utilizar el hecho de que en $\mathbb{R}^3$ las bases están formadas por tres vectores. Luego, se debe encontrar vectores u_1, u_2 de forma que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ sea una base ortonormal. También se toman de forma que

$u_1 \times u_2 = u_3$ pues de esta forma se puede considerar que los vectores u_1, u_2, u_3 forman un marco x', y', z' tal como se indica en la siguiente figura.

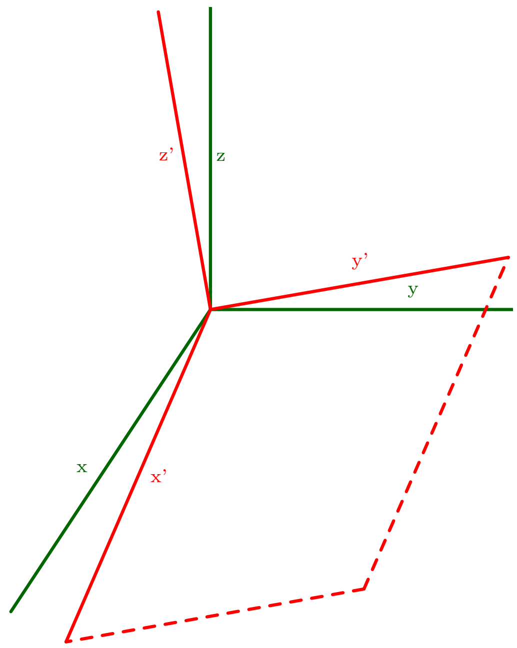


Figura 64: Rotación a lo largo del eje z'

Luego, la idea es que con respecto a la base B, la rotación es equivalente a una rotación con respecto al eje z por el mismo ángulo, es decir,

$$[R_{u_3}(\theta)]_B = R_z(\theta) \tag{1475}$$

y como lo que interesa es la rotación vista con respecto a la base canónica C entonces componiendo con la identidad se llega a

$$R_{u_3}(\theta) = [I]_B^C \, R_z(\theta) \, [I]_C^B \tag{1476}$$

Ejemplo 164. Halle la matriz de rotación con respecto el eje $u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ por un ángulo θ.

Primero hay que buscar dos vectores ortonormales a u_3. Es fácil ver que

$$u_1 = (1,0,0) \quad u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{1477}$$

funciona pues son ortonormales y $u_1 \times u_2 = u_3$. Luego se toma $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y falta calcular las matrices de cambio de base. Se obtiene que

$$[I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1478}$$

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1479}$$

por lo que

$$R_{u_3}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1480}$$

10.3.3. Reflexiones

10.3.3.1. Reflexiones en el plano Como una aplicación de las transformaciones lineales de utilidad para el tema de secciones cónicas se va a estudiar la forma en que refleja un punto del plano con respecto a una línea que pase por el origen tal como indica la siguiente figura

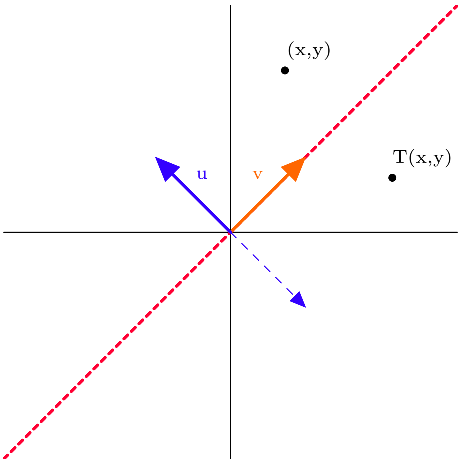


Figure 65: Reflexión con respecto una línea en $\mathbb{R}^2$

La idea es pensar en la línea como un espejo y por lo tanto si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ representa un punto del plano, se quiere encontrar su imagen en el espejo que se denota como el punto $T(x, y)$

Dado que la línea pasa por el origen, forma un subespacio vectorial de dimensión uno por lo que posee un vector v que lo genera, de hecho tal vector puede tomarse como el vector director de la recta.

Se busca construir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que represente la reflexión.

Dado que va a ser una transformación lineal, es suficiente con definirla sobre una base. Como se necesitan dos vectores para la base, lo más útil es tomar $\{v, u\}$ donde u sería cualquier vector ortogonal a v,

Bajo esta elección v no debe cambiar con una reflexión puesto que este representa la línea (espejo). Por otro lado, como$u$ es perpendicular a la línea (espejo), su imagen debería ser su opuesto, es decir, $-u$. De esta forma, se define

$$T(v) = v, \quad T(u) = -u \tag{1481}$$

y al haberla definido sobre tal base está definida sobre todo el espacio.

---

problema 23 libro de álgebra lineal página 320
Construya la reflexión con respecto a las rectas
a) el eje x
Observe que el eje x se caracteriza porque $y = 0$. Luego, si (x, y) están sobre el eje x, $(x, y) = (x, 0) = x(1, 0)$ por lo que puede tomarse $v = (1, 0)$ como base de la recta. Luego, se necesita un vector ortogonal a la recta y claramente $u = (0, 1)$ funciona.
Luego se define

$$T(v) = v. \quad T(u) = -u \tag{1482}$$

Así, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como

$$(x, y) = xv + yu \tag{1483}$$

entonces

$$T(x, y) = xT(v) + yT(u) = xv - yu = (x, -y) \tag{1484}$$

que coincide con lo que ya se sabía. Observe que la matriz asociada es

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1485}$$

y el determinante de la matriz es -1
b) la recta $y = x$
En este caso si (x, y) está sobre la recta, se tiene que $(x, y) = (x, x) = x(1, 1)$ por lo que $v = (1, 1)$ funciona como vector base para el subespacio.
Luego, $u = (-1, 1)$ es claramente un vector perpendicular a v por lo que se define

$$T(v) = v \qquad T(u) = -u \tag{1486}$$

Así, si (x, y) está sobre el plano, en este caso

$$(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}\right) v + \left(\frac{-x + y}{2}\right) u \tag{1487}$$

por lo que

$$T(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}\right) T(v) + \left(\frac{-x + y}{2}\right) T(u) \tag{1488}$$

$$= \left(\frac{x + y}{2}\right) v - \left(\frac{-x + y}{2}\right) u = (y, x) \tag{1489}$$

Por lo que

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1490}$$

y observe nuevamente que el determinante de la matriz es -1.

10.3.3.2. Reflexiones en el espacio Aquí la idea es la misma que antes solo que ahora se considera $\mathbb{R}^3$ y ahora un plano que pasa por el origen sirve como espejo tal como indica la figura.

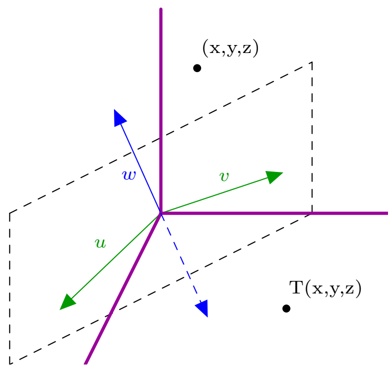


Figura 66: Reflexión con respecto un plano en $\mathbb{R}^3$

Al igual que antes, si se conoce una base de dos vectores u, v para el plano y un vector normal al plano w basta definir la transformación según

$$T(u) = u, \quad T(v) = v, \qquad T(w) = -w \tag{1491}$$

---

problema 28 página 321 libro de álgebra lineal

Construya la transformación lineal que refleja sobre el plano $x + z = 0$

En este caso si (x, y, z) está en el plano $z = -x$ por lo que $(x, y, z) = (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)$ por lo que $u = (1, 0, -1)$ y $v = (0, 1, 0)$ son una base para el plano. Como se tiene la ecuación normal se puede tomar $w = (1, 0, 1)$. Luego, se define

$$T(u) = u \qquad T(v) = v \qquad T(w) = -w \tag{1492}$$

Para encontrar $T(x, y, z)$ se escribe (x, y, z) como combinación lineal de la base; una forma de hacer esto era resolviendo el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \tag{1493}$$

que da como solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x-z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+z}{2} \end{array}\right) \tag{1494}$$

es decir,

$$(x, y, z) = \left(\frac{x - z}{2}\right) u + yv + \left(\frac{x + z}{2}\right) w \tag{1495}$$

por lo que

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x - z}{2}\right) T(u) + yT(v) + \left(\frac{x + z}{2}\right) T(w) \tag{1496}$$

$$= \left(\frac{x-z}{2}\right)(1,0,-1) + y\,(0,1,0) - \left(\frac{x+z}{2}\right)(1,0,1) = (-z,y,-x) \tag{1497}$$

o bien

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1498}$$

y nuevamente el determinante de la matriz es -1

Construya la transformación lineal que refleja sobre el plano $2x - y + z = 0$

En este caso si (x,y,z) está en el plano $z = y - 2x$ por lo que $(x,y,z) = (x,y,y-2x) = x(1,0,-2) + y(0,1,1)$ por lo que $u = (1,0,-2)$ y $v = (0,1,1)$ son una base para el plano. Como se tiene la ecuación normal se puede tomar $w = (2,-1,1)$. Luego, se define

$$T(u) = u \qquad T(v) = v \qquad T(w) = -w \tag{1499}$$

Para encontrar $T(x,y,z)$ se escribe (x,y,z) como combinación lineal de la base; una forma de hacer esto era resolviendo el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ -2 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \tag{1500}$$

que da como solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y-z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x+5y+z}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x-y+z}{6} \end{array}\right) \tag{1501}$$

es decir,

$$(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{3}\right)u + \left(\frac{2x+5y+z}{6}\right)v + \left(\frac{2x-y+z}{6}\right)w \tag{1502}$$

por lo que

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{3}\right)T(u) + \left(\frac{2x+5y+z}{6}\right)T(v) + \left(\frac{2x-y+z}{6}\right)T(w) \tag{1503}$$

$$= \left(\frac{x+y-z}{3}\right)(1,0,-2) + \left(\frac{2x+5y+z}{6}\right)(0,1,1) - \left(\frac{2x-y+z}{6}\right)(2,-1,1) \tag{1504}$$

$$= \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right) \tag{1505}$$

o bien

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} (-x+2y-2z)/3 \\ (2x+2y+z)/3 \\ (-x+y+2z)/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1506}$$

y nuevamente el determinante de la matriz es -1

10.4. Ejes Principales y Ángulo de Rotación

En el teorema anterior se vio que la forma cuadrática $f(x) = x^T Ax$ podía transformarse bajo el cambio de variable $y = C^T x$ en $f(x) = y^T Dy$. En general, las ecuaciones para las secciones cónicas y superficies cónicas son de la forma

$$x^T Ax + Bx + l = 0 \tag{1507}$$

donde A es una matriz $n \times n$, B un vector $1 \times n$ y l un número real.

Bajo el cambio de variable anterior la ecuación se transforma en

$$y^T Dy + BCy + l = 0 \tag{1508}$$

y la idea es aplicar la técnica de completar cuadrados para reconocer la expresión anterior como una de las ecuaciones cónicas.

Los vectores propios que forman la matriz C se llaman los **ejes principales de la cónica.**

También es posible escoger los vectores propios de forma que $\det C = 1$. En tal caso, por lo dicho anteriormente la matriz C puede escribirse como una matriz de rotación y el **ángulo de rotación** θ se halla tomando $\cos^{-1}$ de la primera entrada de la matriz C.[8]

Así, se ha llegado al siguiente algoritmo

Teorema 165. ***Algoritmo para identificar una sección o superficie cónica***

1. Hallar primero la matriz simétrica A asociada a la ecuación de la cónica
2. Usar el proceso de diagonalizarla ortogonalmente, es decir, hallar una matriz C ortogonal y una matriz D diagonal tal que $D = C^T AC$
3. Escoger la matriz C de modo que $\det C = 1$
4. En el caso de una matriz 2×2, reescribir C como una matriz de rotación para hallar el ángulo de rotación
5. Usar el cambio de variable $y = C^T x$ o bien $x = Cy$ para eliminar los términos mixtos de la ecuación
6. Identificar la cónica en estas nuevas variables

Problema 166. *problema 5 tercer examen parcial 1 ciclo 2011*

La ecuación $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$ corresponde a una sección cónica.

a) Determine una transformación lineal $T(x, y) = (x', y')$ tal que al efectuar este cambio de variables, la ecuación resultante esté en forma canónica.

La ecuación anterior puede escribirse como

$$0 = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 \tag{1509}$$

Lo primero que hay que hacer es hallar los vectores y valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \tag{1510}$$

[8] Este método solo funciona para matrices 2×2 puesto que se necesita más de un ángulo para rotar un objeto en más dimensiones.

y ellos son

$$\lambda_1 = 9,\ v_1 = (-1, 2) \tag{1511}$$

$$\lambda_2 = 4,\ v_2 = (2, 1) \tag{1512}$$

como interesa diagonalizar ortogonalmente la matriz hay que normalizar los vectores

$$\lambda_1 = 9,\ u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \tag{1513}$$

$$\lambda_2 = 4,\ u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \tag{1514}$$

La matriz C de vectores propios columna debe tomarse de forma que $\det C = 1$

$$C = (\begin{array}{cc} u_2 & u_1 \end{array}) = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1515}$$

y el cambio de variable es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1516}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \tag{1517}$$

Luego la transformación lineal que realiza el cambio de variables es:

$$T(x, y) = \left(\frac{2x + y}{\sqrt{5}}, \frac{-x + 2y}{\sqrt{5}}\right) \tag{1518}$$

b) En un mismo gráfico, trace los ejes coordenados x, y los ejes coordenados x', y' y la sección cónica

La ecuación de la sección cónica antes del cambio de variable es

$$(\begin{array}{cc} x & y \end{array}) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0 \tag{1519}$$

y bajo el cambio de variable $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la ecuación anterior se transforma en

$$(\begin{array}{cc} x' & y' \end{array}) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0 \tag{1520}$$

realizando el primer producto

$$(\begin{array}{cc} 4x' & 9y' \end{array}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0 \tag{1521}$$

realizando el producto

$$4(x')^2 + 9(y')^2 = 36 \tag{1522}$$

dividiendo por 36

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1 \tag{1523}$$

y tomando

$$a = 3, b = 2 \tag{1524}$$

la ecuación cónica anterior se convierte en una elipse de semiejes a y b centrada en el origen.

Para hallar el ángulo sabemos que

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1525}$$

por lo que

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \tag{1526}$$

y así

$$\theta = 26° \tag{1527}$$

$$\tag{1528}$$

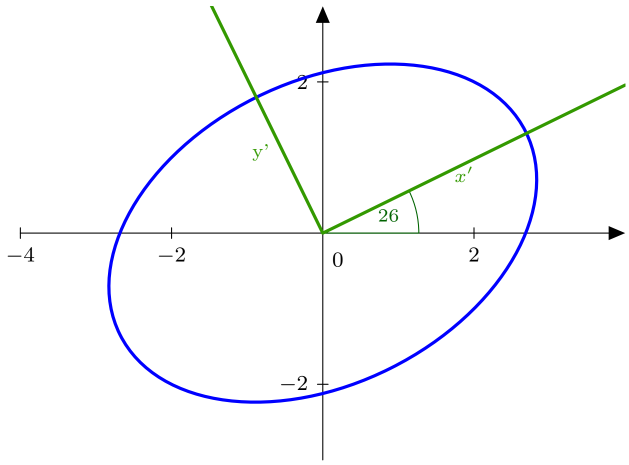


Figura 67: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$

Problema 167. *problema 5 tercer examen parcial reposición I ciclo 2008*

Considere la cónica con ecuación $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}(-x + y) = 16$**. Los valores propios de la matriz** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **son** -2 **y** 8**.**

a) Efectúe un cambio de variable apropiado de manera que la ecuación en las nuevas variables no contenga el término mixto. Escriba la ecuación en esas nuevas variables.

La ecuación puede escribirse como

$$0 = 3x^2+10xy+3y^2+4\sqrt{2}(-x+y)-16 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 16 \tag{1529}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{1530}$$

su valores y vectores propios son

$$\lambda_1 = 8, v_1 = (1,1) \tag{1531}$$

$$\lambda_2 = -2, v_2 = (-1,1) \tag{1532}$$

nuevamente se normalizan los vectores

$$\lambda_1 = 8, u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \tag{1533}$$

$$\lambda_2 = -2, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \tag{1534}$$

y se escoge la matriz C de modo que $\det C = 1$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1535}$$

Haciendo el cambio de variables $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases} \tag{1536}$$

La ecuación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 16 = 0 \tag{1537}$$

realizando el producto matricial de las tres matrices del primer término y el producto de las dos últimas matrices del segundo término

$$8(x')^2 - 2(y')^2 + \begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix} - 16 = 0 \tag{1538}$$

realizando el producto matricial

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 4(x' - y') + 4(x' + y') - 16 = 0 \tag{1539}$$

simplificando la ecuación anterior

$$8(x')^2 - 2(y')^2 + 8y' - 16 = 0 \tag{1540}$$

dividiendo por 2

$$4(x')^2 - [(y')^2 - 4y' + 8] = 0 \tag{1541}$$

agrupando los términos

$$4(x')^2 - [(y' - 2)^2 + 4] = 0 \tag{1542}$$

pasando la constante al lado derecho

$$4(x')^2 - (y' - 2)^2 = 4 \tag{1543}$$

dividiendo por 4

$$(x')^2 - \frac{(y'-2)^2}{4} = 1 \tag{1544}$$

b) Haga un gráfico de la cónica

Se puede notar de lo anterior que la ecuación es la de una hipérbola centrada (según los ejes x', y') en $(0,2)$. Los ejes x', y' están rotados un ángulo de

$$\cos\theta = e_1 \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1545}$$

$$\theta = 45° \tag{1546}$$

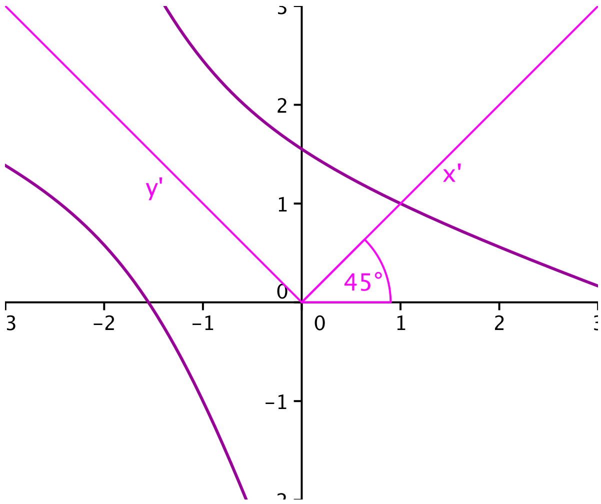


Figura 68: $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}\,(-x+y) = 16$

Problema 168. ***problema 4 tercer examen parcial reposición III ciclo 2010***

La ecuación

$$7x^2 + \sqrt{12}xy - 2\sqrt{6}xz + 5y^2 - \frac{2}{3}\sqrt{18}yz + 6z^2 = 2 \tag{1547}$$

corresponde a una superficie cuadrática

a) Muestre que uno de los valores propios de la matriz de la forma cuadrática correspondiente es 10 **y determine los otros dos**

La forma cuadrática asociada a la ecuación anterior es

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \tag{1548}$$

para hallar los valores propios de calcula

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 5-\lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & 6-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\sqrt{2}f_2 + f_3} \begin{vmatrix} 7-\lambda & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 5-\lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}(4-\lambda) & 4-\lambda \end{vmatrix} \tag{1549}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 5-\lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\sqrt{6}f_3+f_1} \xrightarrow{\sqrt{2}f_3+f_2} (4-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 7-\lambda & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \tag{1550}$$

$$= (4-\lambda)(49-14\lambda+\lambda^2-9) = (4-\lambda)(\lambda^2-14\lambda+40) = (4-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-4) \tag{1551}$$

por lo que los valores propios son $\lambda = 4, 10$

b) Encuentre explícitamente una transformación lineal de modo que la forma cuadrática dada sea transformada en una forma cuadrática sin términos mixtos

Ahora hay que diagonalizar ortogonalmente la matriz A. Primero se buscan los vectores propios correspondientes

espacio característico de $\lambda = 4$

Se considera

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \tag{1552}$$

y la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1553}$$

y así

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{6}}{3}z \tag{1554}$$

por lo que

$$(x,y,z) = y\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right) + z\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 1\right) \tag{1555}$$

si

$$v_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right) \quad v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 1\right) \tag{1556}$$

se normalizan según Gramm-Schmidtt

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \tag{1557}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \mathrm{Proy}_{\mathrm{u}_1} v_2}{\|v_2 - \mathrm{Proy}_{\mathrm{u}_1} v_2\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \tag{1558}$$

espacio característico de $\lambda = 10$

Se considera la matriz

$$A - 10I = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & -5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \tag{1559}$$

y la matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1560}$$

es decir

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}z \tag{1561}$$

luego, un vector propio es

$$v_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \tag{1562}$$

y normalizando

$$u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{1563}$$

Luego se toma

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \tag{1564}$$

y

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1565}$$

para que el determinante de la matriz sea 1 se intercambian las dos columnas primeras por lo que se usa

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1566}$$

y así

$$D = C^T A C \tag{1567}$$

Para encontrar la transformación lineal se usa el cambio de variable $y = C^T x$ donde $y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y de esta forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix} \tag{1568}$$

por lo que la transformación es

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z\right) \tag{1569}$$

c) Identifique cuál es la superficie cuádrica en los nuevos ejes coordenados.

La ecuación era

$$7x^2+\sqrt{12}xy-2\sqrt{6}xz+5y^2-\frac{2}{3}\sqrt{18}yz+6z^2=0 \tag{1570}$$

que se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2 \tag{1571}$$

bajo el cambio de variable $y=C^Tx$ lo anterior corresponde a

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2 \tag{1572}$$

o bien

$$4(x')^2+4(y')^2+10(z')^2=2 \tag{1573}$$

Claramente es un elipsoide centrado en el origen pues la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=1 \tag{1574}$$

10.5. Ejercicios Adicionales

10.5.1. Solución Tercer Examen Parcial I Ciclo 2012

Problema 169. Considere la transformación $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por el criterio

$$T(x,y,z)=(2x-y+z,x-y+z,y-z) \tag{1575}$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal
Sea $u=(x,y,z)$ y $v=(x',y',z')$. Observe que

$$T(u+tv)=T((x,y,z)+t(x',y',z'))=T(x+tx',y+ty',z+tz') \tag{1576}$$

$$=(2(x+tx')-(y+ty')+z+tz',x+tx'-(y+ty')+z+tz',y+ty'-(z+tz')) \tag{1577}$$

$$=(2x-y+z,x-y+z,y-z)+t(2x'-y'+z',x'-y'+z',y'-z') \tag{1578}$$

$$=T(u)+tT(v) \tag{1579}$$

por lo que la transformación es lineal
b) Determine una base para el núcleo de T
Para encontrar una base del núcleo observe que si $(x,y,z)\in \mathrm{Nuc}(T)$ entonces

$$(2x-y+z,x-y+z,y-z)=(0,0,0) \tag{1580}$$

o bien hay que considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1581}$$

y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1582}$$

por lo que

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \tag{1583}$$

y de esta forma

$$(x, y, z) = (0, z, z) = z(0, 1, 1) \tag{1584}$$

Por lo que

$$\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Cl}\left\{(0, 1, 1)\right\} \tag{1585}$$

c) Determine una base para la imagen de T
Si $(a, b, c) \in \mathrm{Img}(T)$ debe existir (x, y, z) tal que

$$(a, b, c) = (2x - y + z, x - y + z, y - z) \tag{1586}$$

o bien se considera la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \tag{1587}$$

y haciendo Gauss-Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b + c \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & a - 2b - c \end{array}\right) \tag{1588}$$

por lo que debe tenerse $a = 2b + c$ y luego

$$(a, b, c) = (2b + c, b, c) = b(2, 1, 0) + c(1, 0, 1) \tag{1589}$$

es decir

$$\mathrm{Img}(T) = \mathrm{Cl}\left\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\right\} \tag{1590}$$

$$\tag{1591}$$

d) Justifique si la transformación T es invertible o no
No es invertible pues tendría que ser inyectiva pero no es inyectiva ya que Nuc(T) $\neq \{0\}$

Problema 170. Considere en $\mathbb{R}^2$ la base $B_1 = \{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (3,4)$ y $v_2 = (-2,1)$, y sea $B_2 = \{w_1, w_2\}$ otra base de $\mathbb{R}^2$ donde $w_1 = (2,1)$ y $w_2 = (-1,2)$ Considere una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{B_1}^{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{1592}$$

donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

a) Halle la matriz de cambio de base $[I]_{B_2}^{B_1}$
Se considera la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{1593}$$

haciendo Gauss Jordan se llega a

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \tag{1594}$$

por lo que

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{10}{11} \end{pmatrix} \tag{1595}$$

b) Calcule $[T]_{B_2}^{C}$
Observe que

$$[T]_{B_2}^{C} = [T \circ I]_{B_2}^{C} = [T]_{B_1}^{C}\,[I]_{B_2}^{B_1} \tag{1596}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{10}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{39}{11} & \frac{67}{11} \\ -\frac{13}{11} & \frac{59}{11} \end{pmatrix} \tag{1597}$$

c) Si $v = 2w_1 - 5w_2$, determine $T(v)$
Observe que $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Por otro lado, como $T(v) = [T(v)]_C$ entonces

$$T(v) = [T]_{B_2}^{C}\,[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{39}{11} & \frac{67}{11} \\ -\frac{13}{11} & \frac{59}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{11} \\ -\frac{413}{11} \\ -\frac{321}{11} \end{pmatrix} \tag{1598}$$

Problema 171. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Demuestre que $\lambda = 8$ y $\lambda = -1$ son todos los valores propios de la matriz A
Observe que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-2f_2 + f_3} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2+2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \tag{1599}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[2f_3+f_2]{4f_3+f_1} (1+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 & 0 \\ 2 & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \tag{1600}$$

$$= -(1+\lambda)\left[-3\lambda+12+\lambda^2-4\lambda-20\right] = -(1+\lambda)(\lambda-8)(\lambda+1) \tag{1601}$$

por lo que los valores propios son $-1, 8$

b) Calcule los subespacios propios, correspondientes a los valores propios anteriores de A

caso $\lambda = -1$

Se reduce

$$A+I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1602}$$

y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1603}$$

por lo que $z = -x - \frac{1}{2}y$ y así

$$(x,y,z) = \left(x, y, -x - \frac{1}{2}y\right) = x\,(1,0,-1) + y\left(0,1,-\frac{1}{2}\right) \tag{1604}$$

Por lo que

$$V_{\lambda=-1} = \mathrm{Cl}\left\{(1,0,-1), \left(0,1,-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{1605}$$

caso $\lambda = 8$

Se reduce

$$A-8I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \tag{1606}$$

y se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1607}$$

por lo que

$$x = z \quad y = \frac{1}{2}z \tag{1608}$$

y así

$$(x,y,z) = \left(z, \frac{1}{2}z, z\right) = z\left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \tag{1609}$$

Por lo que

$$V_{\lambda=8} = \mathrm{Cl}\left\{\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)\right\} \tag{1610}$$

c) Determine si A es diagonalizable o no. En caso de que lo sea, encuentre una matriz P invertible y una matriz D diagonal que cumplen la condición $P^{-1}AP = D$

A es diagonalizable pues existe una base para $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A pues $\dim V_{\lambda=-1} + \dim V_{\lambda=8} = 3$. Se puede tomar

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{1611}$$

aunque esta no es la única opción posible para P

Problema 172. Considere la cónica cuya ecuación es $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$

a) Realice una rotación de los ejes x, y de modo que en los nuevos ejes la ecuación de la cónica esté en su forma canónica

La matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{1612}$$

y sus valores propios son $\lambda = 4, 6$

Los valores propios con sus vectores propios y vectores propios normalizados correspondientes son

$$\lambda_1 = 4 \quad v_1 = (1,1) \quad u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{1613}$$

$$\lambda_2 = 6 \quad v_2 = (-1,1) \quad u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{1614}$$

Luego se toma

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1615}$$

Tomando el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1616}$$

la ecuación $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ se convierte en

$$4\,(x')^2 + 6\,(y')^2 = 4 \tag{1617}$$

b) Identifique y grafique la cónica en su posición normal en los nuevos ejes cartesianos

Como

$$4\,(x')^2 + 6\,(y')^2 = 4 \tag{1618}$$

entonces

$$(x')^2 + \frac{3}{2}\,(y')^2 = 1 \tag{1619}$$

o bien

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \tag{1620}$$

y claramente es una elipse como indica la siguiente figura

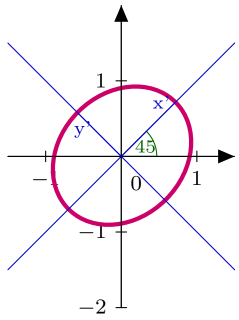


Figura 69: ejercio elipse

c) Encuentre el ángulo de la rotación
Se escribe C como

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1621}$$

por lo que es claro que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1622}$$

por lo que

$$\theta = 45^\circ \tag{1623}$$

10.5.2. Tercer Examen II Ciclo 2012

Problema 173. Considere la cónica $9x^2 - 4xy + 6y^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x - \frac{20}{\sqrt{5}}y = 5$
a) Realice una rotación de los ejes de modo que en los nuevos ejes la ecuación de la cónica esté en su forma canónica, para ello diagonalice la matriz apropiada A **y encuentre la matriz** C **de modo que el cambio de variable** $y = C^T x$ **elimina los términos mixtos de la ecuación anterior.**
b) Identifique y grafique la cónica en su posición normal en los nuevos ejes cartesianos, indique además los vectores que generan los nuevos ejes.
c) Calcule el ángulo de rotación

La ecuación de la cónica se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{10}{\sqrt{5}} & -\frac{20}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \tag{1624}$$

Se calculan los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$:
$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$ es decir $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$ o bien $(\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0$
por lo quelos valores propios son $5, 10$.
Los vectores propios correspondientes son los siguientes:
caso $\lambda = 5$

$A-5I=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2+f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Por lo que $\{ y=2x$ y de esta forma$(x,y)=(x,2x)=x\,(1,2)$. Como se ocupa un vector de norma 1 se toma $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

caso $\lambda=10$

$A-10I=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por lo que $\{ x=-2y$ y de esta forma$(x,y)=(-2y,y)=y\,(-2,1)$. Como se ocupa un vector de norma 1 se toma $v_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Finalmente se toma $C=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Se sigue de lo anterior que el ángulo de rotación es $\theta\simeq 63°$. Los ejes x',y' corresponden a los vectores v_1,v_2.

La matriz diagonal es $D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Luego bajo el cambio de variable $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=C^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la ecuación de la cónica se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{10}{\sqrt{5}} & -\frac{20}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=5 \tag{1625}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=5 \tag{1626}$$

o bien

$$5\,(x')^2+10\,(y')^2-10x'=5 \tag{1627}$$

Dividiendo por 5

$$x'^2+2\,(y')^2-2x'=1 \tag{1628}$$

o bien

$$(x'-1)^2+2\,(y')^2=2 \tag{1629}$$

es decir

$$\frac{(x'-1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+y'^2=1 \tag{1630}$$

por lo que la ecuación de la cónica es una elipse centrada en $(1,0)$ con semiejes $\sqrt{2}$ y 1. El dibujo sería el siguiente

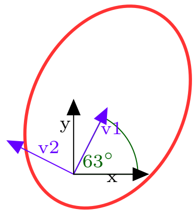


Figura 70: Sección cónica

$$ \tag{1631} $$

$$ \tag{1632} $$

Problema 174. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ con C la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{v_1 = (1,0,2) \quad v_2 = (0,1,-1) \quad v_3 = (0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre $T(x,y)$
b) Explique si T es sobreyectiva
c) Calcule $[v]_C$ si $T(v) = 2v_1 + 5v_2 + 6v_3$

a) Observe que

$$[T(v)]_B = [T]_C^B \, [v]_C \tag{1633}$$

es decir,

$$[T(v)]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x-5y \\ -x-6y \end{pmatrix} \tag{1634}$$

por lo que

$$T(x,y) = (x-2y)(1,0,2) + (x-5y)(0,1,-1) + (-x-6y)(0,1,0) \tag{1635}$$

$$T(x,y) = (x-2y, 0, 2x-4y) + (0, x-5y, 5y-x) + (0, -x-6y, 0) = (x-2y, -11y, x+y) \tag{1636}$$

b) Para ver si T es sobreyectiva si (a,b,c) está en la imagen de T se existe (x,y) con $T(x,y) = (a,b,c)$ por lo que se considera el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & -11 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & -11 & b \\ 0 & 3 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{11}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -\frac{b}{11} \\ 0 & 3 & c-a \end{array}\right) \tag{1637}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{2f_2+f_1} \\ \xrightarrow{-3f_2+f_3} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-\frac{2b}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{11} \\ 0 & 0 & c-a+\frac{3b}{11} \end{array}\right) \tag{1638}$$

Luego se requiere que $c - a + \frac{3b}{11} = 0$ y por esta restricción T no podría ser sobreyectiva pues la imagen va a ser de dimensión 2.

c) Observe que $T(v) = 2\,(1,0,2) + 5\,(0,1,-1) + 6\,(0,1,0) = (2,11,-1) = (a,b,c)$. Observe que por la matriz aumentada anterior $x = a - \frac{2b}{11} = 0$ y $y = -\frac{b}{11} = -1$, es decir,$T(0,-1) = (2,11,-1)$.

Problema 175. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\,(x,y,z) = (x, y-z, z)$ y considere las bases $B = \{(0,0,1)\,,(1,1,0)\,(1,0,1)\}$ y $B_1 = \{(1,0,0)\,(0,1,0)\,(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$

a) Halle $[T]_B$

b) Halle $[I]_{B_1}^B$

c) Use a. y b. para encontrar $[T]_{B_1}$

d) Determine $\mathrm{Nucl}(T)$

e) Justifique que T es invertible y calcule $\left[T^{-1}\right]_C$

a) Como $T\,(0,0,1) = (0,-1,1)$ $T\,(1,1,0) = (1,1,0)$ y $T\,(1,0,1) = (1,-1,1)$ para $[T]_B$ se forma la matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y haciendo Gauss Jordan se llega a $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ por lo que $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Se considere la matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y haciendo Gauss Jordan se llega a $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ por lo que $[I]_{B_1}^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Se usa que

$$[T]_{B_1}^{B_1} = [T \circ I]_{B_1}^{B_1} = [T]_B^{B_1}\,[I]_{B_1}^B = [I \circ T]_B^{B_1}\,[I]_{B_1}^B = [I]_B^{B_1}\,[T]_B^B\,[I]_{B_1}^B = \left([I]_{B_1}^B\right)^{-1}\,[T]_B\,[I]_{B_1}^B \tag{1639}$$

Como $\left([I]_{B_1}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1640}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1641}$$

d) Si $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ entonces $(x, y - z, z) = (0, 0, 0)$ y se observa que $x = 0, y = 0, z = 0$ por lo que T es inyectiva y $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$

e) T es invertible por lo anterior y como $\left[T^{-1}\right]_C = ([T]_C)^{-1}$ hay que calcular primero $[T]_C$. Como $T(x, y, z) = (x, y - z, z)$ se tiene que $\begin{pmatrix} x \\ y - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ por lo que $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y luego

$$\left[T^{-1}\right]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1642}$$

Problema 176. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determine que los valores propios de A son 1 y -2

b) Calcule los subespacios propios, correspondientes a los valores propios anteriores de A

c) Encuentre una matriz C y una matriz D diagonal tal que $C^{-1}AC = D$

a) Para los valores propios se considera

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 + \lambda)^2 \tag{1643}$$

y claramente los valores propios son 1 y -2

b) Para los subespacios propios se hallan las bases de vectores propios

caso $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1644}$$

por lo que $y = 0 \quad z = 0$ y $(x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$ y $V_{\lambda=1} = \mathrm{Cl}\{(1, 0, 0)\}$

caso $\lambda = -2$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1645}$$

por lo que $z = -3x$ y $(x, y, z) = (x, y, -3x) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, 0)$ y de esta forma $V_{\lambda=-2} = \mathrm{Cl}\{(1, 0, -3), (0, 1, 0)\}$

c) Se puede tomar

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{1646}$$

11. Resumen de Resultados Importantes

A continuación se presenta un resumen de cada uno de los capítulos estudiados durante el curso.

11.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Resolver un sistema de n incógnitas es equivalente a encontrar los puntos de intersección de los "hiperplanos" correspondientes que representan tales ecuaciones lineales.**

- **El número de soluciones para un sistema de n incógnitas con cualquier número de ecuaciones son cero soluciones, una solución o infintas soluciones.**

Definición 177. Una matriz es **escalonada** si es nula (es decir, todas sus entradas son 0) o si
Si una fila posee algún coeficiente distinto de 0, el primero de estos coeficientes debe ser un 1
El primer 1 de cualquier fila debe estar a la derecha del primer 1 de las filas anteriores (es decir, las que están por encima de la fila)
Las filas que son nulas aparecen al final de la matriz
Una matriz es **escalonada reducida** si es escalonada y si por encima del primer uno de cada fila solo hay ceros.

Algoritmo de Gauss Jordan:

1. Dado un sistema de ecuaciones lineales encontrar la matriz aumentada$(A \mid b)$ que representa al sistema

2. Mediante la aplicación de operaciones elementales reducir la matriz aumentada a su forma escalonada reducida

3. Una vez que se tiene su forma escalonada reducida se procede a reescribir la matriz escalonada reducida como un sistema de ecuaciones lineales para el cual se despejan las incógnitas

Definición 178. El **rango** de una matriz A es el número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada reducida equivalente a A. Se denota $\text{Rng}(A)$. El rango de un matriz aumentada $(A \mid b)$ es el número de filas no nulas que tiene la matriz aumentada escalonada reducida equivalente a $(A \mid b)$. Se denota Rng(A | b)

Teorema 179. *Para cualquier sistema de ecuaciones lineales con m incógnitas siempre se tiene que* $\text{Rng}(A) \leq \text{Rng}(A \mid b)$*. Las soluciones de tal sistema se relacionan con el rango de su matriz correspondiente según:*
$\text{Rng}(A) < \text{Rng}(A \mid b)$*: En este caso el sistema no posee soluciones*
$\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) = m$*: En este caso el sistema posee una única solución.*
$\text{Rng}(A) = \text{Rng}(A \mid b) < m$*: En este caso el sistema posee infinitas soluciones caracterizadas por* $m - \text{Rng(A)}$ *variables libres.*

11.2. Teoría Elemental de Matrices

Teorema 180. *La transposición de matrices tiene las siguientes propiedades:*

- $\mathrm{Rng(A)} = \mathrm{Rng(A^T)}$
- Si $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$,
$$(A + B)^T = A^T + B^T \tag{1647}$$
- Si $A \in M(n, m, \mathbb{R}), B \in M(m, s, \mathbb{R})$
$$(AB)^T = B^T A^T \tag{1648}$$
- Si $A \in M(n, m, \mathbb{R})$,
$$(A^T)^T = A \tag{1649}$$

Definición 181. $A \in M(n, \mathbb{R})$ se llama **invertible o no singular** si existe una matriz $B \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $AB = BA = 1_n$ y se dice que B es una inversa de A.

Teorema 182. *Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ y A, B son invertibles se tiene entonces que:*
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Si $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ hacer una operación elemental fila sobre A es equivalente a multiplicar a A por la izquierda por la correspondiente matriz elemental de orden n. Es decir,

$$\begin{gathered} B = E_n(af_i)A \longleftrightarrow A \overset{af_i}{\longrightarrow} B \\ B = E_n(f_i, f_j)A \longleftrightarrow A \overset{f_i, f_j}{\longrightarrow} B \\ B = E_n(af_i + f_j)A \longleftrightarrow A \overset{af_i + f_j}{\longrightarrow} B \end{gathered} \tag{1650}$$

Además, cada una de las matrices elementales son invertibles y sus inversas son

$$\begin{gathered} (E_n(af_i))^{-1} = E_n(\tfrac{1}{a}f_i) \\ (E_n(f_i, f_j))^{-1} = E_n(f_i, f_j) \\ (E_n(af_i + f_j))^{-1} = E_n(-af_i + f_j) \end{gathered} \tag{1651}$$

Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:
A es invertible
$Ax = b$ tiene solución única para todo b
$Ax = 0$ tiene solución única
$\mathrm{Rng}(A) = n$
A es equivalente a 1_n
A es un producto de matrices elementales

Algoritmo para calcular la inversa de una matriz cuadrada

1. Si A es una matriz $n \times n$ formar la matriz $n \times 2n$ $[A \mid 1_n]$ que se obtiene al adjuntar la matriz identidad con la matriz dada A
2. Reducir mediante operaciones elementales la matriz A a su forma escalonada reducida C y aplicar las mismas operaciones elementales a la matriz 1_n para producir una matriz D
3. Al final del algoritmo se ha pasado entonces $[A \mid 1_n] \longrightarrow [C \mid D]$ y se tienen dos casos:

caso 1: si $C = 1_n$ entonces $D = A^{-1}$
caso 2: si $C \neq 1_n$ entonces A no es invertible y no existe A^{-1}.

11.3. El Determinante de una Matriz Cuadrada

Definición 183. Si A es una matriz $n \times n$ A_{ij} significa la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j. Para tal matriz A se define **el determinante de la matriz A a lo largo de la i-ésima fila** como

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \tag{1652}$$

los signos en los que aparecen los coeficientes pueden leerse de la matriz de signos alternados correspondientes

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \end{pmatrix} \tag{1653}$$

Teorema 184. *Sea*

$$A = (a_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1654}$$

y

$$B = (b_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{1655}$$

dos matrices $n \times n$. Suponga que se representan las filas de A y B como $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$. Entonces se tiene que

$\det A = 0$ *si alguna fila de A es nula*

$\det A = 0$ *si alguna columna de A es nula*

si

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ \alpha A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{1656}$$

es la matriz que resulta de multiplicar toda una fila de A por un número real entonces

$$\det A' = \alpha \det A \tag{1657}$$

es decir, el determinante "saca números reales". En particular

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \tag{1658}$$

si se intercambian dos filas de A entonces el determinante cambia de signo, es decir

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{1659}$$

si se realiza una combinación lineal de filas el determinante no cambia, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ \alpha A_k + A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \tag{1660}$$

la función determinante es lineal en cada fila es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1661}$$

entonces

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1662}$$

nótese que todas las filas salvo la i-ésima son las mismas en los tres determinantes que es la que se separa en dos partes.

$\det 1_n = 1$, *es decir, el determinante de la matriz identidad es* 1.

$\det A = \det A^T$, *es decir, el determinante de una matriz es igual a de su transpuesta*

El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes respectivos, es decir,

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B \tag{1663}$$

Definición 185. Si A es una matriz $n\times n$ se define la **matriz adjunta de** A como la transpuesta de la matriz de cofactores, es decir,

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{1664}$$

donde se define el **cofactor** c_{ij} **de** a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \tag{1665}$$

Teorema 186. *Suponga que A es una matriz $n\times n$. $A=(A_1,...,A_n)$ donde A_i es la i-ésima columna de A. Suponga que* $\det A\neq 0$ *y que $Ax=b$. Entonces el sistema anterior tiene solución única* $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *donde*

$$x_i = \frac{\det(A_1,\cdots,A_{i-1},b,A_{i+1},\cdots,A_n)}{\det A} \tag{1666}$$

Definición 187. Si $x=(x_1,\cdots,x_n)$ es una matriz $1\times n$ se dice que x es un **vector fila de tamaño n.** Si $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es una matriz $n\times 1$ se dice que x es un **vector columna de tamaño n.**

Si $v_1,v_2,\cdots,v_m$ son m vectores (fila o columna) de tamaño n y $c_1,\cdots,c_m$ son m números reales a cualquier vector de la forma

$$v = c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_mv_m \tag{1667}$$

se le llamará una **combinación lineal de los vectores $v_1,...,v_m$.**

Teorema 188. *Suponga que se tiene que un vector v y se quiere determinar si es combinación lineal de los vectores $v_1,\cdots,v_m$. Entonces se escriben los vectores $v,v_1,\cdots,v_m$ como **vectores columna** y se construye el sistema aumentado $(A\mid v)$ donde A es la matriz cuyas columnas son $v_1,\cdots,v_m$. Luego, si el sistema tiene **solución única o solución infinita**, entonces v **sí es combinación lineal** de los vectores $v_1,\cdots,v_m$. Por otro lado, si el sistema es **inconsistente**, v **no es combinación lineal** de $v_1,\cdots,v_m$.*

Definición 189. Sean $v_1,\cdots,v_m$ vectores de tamaño n.

$v_1,\cdots,v_m$ son vectores **linealmente independientes ($l.i$)** si ningún vector entre ellos puede escribirse como combinación lineal del resto.

$v_1,\cdots,v_m$ son vectores **linealmente dependientes ($l.d$)** si al menos un vector entre ellos puede escribirse como combinación del resto.

Teorema 190. *Suponga que $v_1,\cdots,v_m$ son m vectores columna de tamaño n. Si A es la matriz con vectores columna v_i, es decir, $A=(v_1,\cdots,v_m)$. Tales vectores son l.d si el sistema homogéneo*

$$Ax=0 \tag{1668}$$

tiene una solución no nula. En caso contrario, es decir, si $Ax = 0$ *solo tiene la solución trivial* $x = 0$ *entonces* $v_1, \cdots, v_m$ *son vectores l.i.*

Sea A *una matriz* $n \times n$. A *es invertible si y solo si* $\det A \neq 0$. *En tal caso,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A \tag{1669}$$

En particular, las siguientes condiciones son equivalentes

A *es invertible*
$Ax = b$ *tiene solución única para todo* b
$Ax = 0$ *tiene solución única*
$Rng(A) = n$
A *es equivalente a* 1_n
A *es un producto de matrices elementales*
$\det A \neq 0$
A *tiene inversa derecha*
A *tiene inversa izquierda*
Los vectores fila de A *son linealmente independientes*
Los vectores columna de A *son linealmente independientes*

11.4. Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sean $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \overrightarrow{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el **producto escalar** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ como

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{1670}$$

a su vez, se define la **norma de** $\overrightarrow{u}$ como

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1671}$$

Teorema 191. *Sean* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *tres vectores en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}^n$. *Las siguientes propiedades son válidas para el producto escalar y la magnitud de un vector:*

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$ *si* $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ *si y solo si* $\overrightarrow{u} = 0$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
$\|\overrightarrow{u}\| \geq 0$
$\|\overrightarrow{u}\| = 0$ *si y solo si* $\overrightarrow{u} = 0$
$\left\|\overrightarrow{\lambda u}\right\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\|$
$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$
Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$
Desigualdad Triangular: $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$

Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, se define el ángulo θ entre los vectores como

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|} \right] \tag{1672}$$

Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, se dice que son **ortogonales o perpendiculares** si

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \tag{1673}$$

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$ no nulos se define la **proyección ortogonal de $\overrightarrow{a}$ sobre $\overrightarrow{b}$** como

$$Proy_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{b} \right\|^2} \overrightarrow{b} \tag{1674}$$

y $\overrightarrow{a} - Proy_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$ se conoce como la **componente de $\overrightarrow{a}$ ortogonal a $\overrightarrow{b}$.**

Sean $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define el **producto cruz** entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ como

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{1675}$$

la fórmula anterior puede obtenerse desarrollando el siguiente “determinante”

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1676}$$

donde estrictamente hablando lo anterior no es un determinante pues en la primera fila hay vectores en vez de números, pero si se desarrolla el determinante anterior a lo largo de la primera fila y se tratan los vectores canónicos como si fueran números entonces se recupera la fórmula anterior.

el producto cruz no es asociativo: es decir, es importante mantener los paréntesis en las operaciones del producto cruz ya que en general

$$\overrightarrow{(a \times b)} \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \tag{1677}$$

el producto cruz es anticonmutativo: es decir,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} \tag{1678}$$

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ siempre es un vector **perpendicular** tanto a $\overrightarrow{a}$ como a $\overrightarrow{b}$

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son dos vectores entonces la magnitud del producto cruz es

$$\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin\theta \tag{1679}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ el área de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ escritos en fila. Es decir, si $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$ entonces

$$\text{área} = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| \tag{1680}$$

el área de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ es igual a la magnitud del producto cruz de los lados, es decir, a $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|$.

el volumen del paralelepípedo con lados $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ es $\left\| (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} \right\|$.

11.5. Rectas y Planos en $\mathbb{R}^n$

La **recta** l con dirección $\overrightarrow{b}$ y punto $\overrightarrow{a}$ son todos los puntos $\overrightarrow{r}$ tal que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ para algún número t. Se denota la recta según

$$l(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \{\overrightarrow{r}\mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}\} \tag{1681}$$

La relación $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ se conoce como la **ecuación vectorial para la recta $l(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.**

Dos rectas $l_1(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1})$ y $l_2(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_2})$ son **paralelas** si $\overrightarrow{b_1}$ y $\overrightarrow{b_2}$ son paralelos y las rectas son **perpendiculares** si $\overrightarrow{b_1}$ y $\overrightarrow{b_2}$ son perpendiculares.

Suponga que $l(p, \overrightarrow{v})$ es una recta en $\mathbb{R}^3$. Entonces $p = (p_1, p_2, p_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Si escribimos $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ las **ecuaciones paramétricas de la recta** $l(p, \overrightarrow{v})$ es el sistema

$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases} \tag{1682}$$

Si $v_1, v_2, v_3 \neq 0$. la **forma simétrica de una recta** es

$$t = \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3} \tag{1683}$$

El plano $\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ con punto p y vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ es el conjunto de puntos

$$\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid r = p + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\} \tag{1684}$$

y la ecuación $r = p + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ es la **ecuación vectorial del plano** $\pi(p, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

En el caso de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir $X = (x, y, z)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$. La ecuación anterior se transforma en

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \tag{1685}$$

definiendo $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ se tiene la **ecuación normal de un plano en** $\mathbb{R}^3$

$$ax + by + cz = d \tag{1686}$$

Fórmulas de distancia:

- **entre dos puntos:** Si P y Q son dos puntos fue visto anteriormente que

$$d(P, Q) = \|P - Q\| \tag{1687}$$

- **entre un punto y una recta:** Suponga que $l(A, \overrightarrow{u})$ es una recta y que P es un punto fuera de ella.

$$d(P, l(A, \overrightarrow{u})) = \left\|\overrightarrow{AP} - proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{AP}\right\| \tag{1688}$$

- **entre un punto y un plano:** Suponga que $\pi(P, \overrightarrow{n})$ es un plano caracterizado por un punto P en él y un vector normal a él mientras que Q es un vector fuera del plano

$$d(Q, \pi(P, \overrightarrow{n})) = \left\|Proy_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{PQ}\right\| \tag{1689}$$

➬ **entre dos rectas paralelas:** Si $l_1(P,\overrightarrow{u})$,$l_2(Q,\overrightarrow{v})$ son dos rectas paralelas

$$d(l_1,l_2)=\left\|\overrightarrow{PQ}-Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{PQ}\right\| \tag{1690}$$

➬ **entre dos rectas que no son paralelas y no se intersecan:** Si $l_1(P,\overrightarrow{u})$,$l_2(Q,\overrightarrow{v})$ son dos rectas no paralelas

$$d(l_1(P,\overrightarrow{u}),l_2(Q,\overrightarrow{v}))=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|} \tag{1691}$$

➬ **entre una recta y un plano:** Si una recta y un plano se intersecan entonces claramente la distancia es cero. En caso contrario, suponga que la recta es $l(Q,\overrightarrow{v})$ y el plano es $\pi(P,\overrightarrow{n})$.

$$d(l(Q,\overrightarrow{v}),\pi(P,\overrightarrow{n}))=\left\|Proy_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{PQ}\right\| \tag{1692}$$

➬ **entre dos planos paralelos:** Suponga que $\pi_1(P,\overrightarrow{n})$ y $\pi_2(Q,\overrightarrow{m})$ son dos planos paralelos

$$d(\pi_1(P,\overrightarrow{n}),\pi_2(Q,\overrightarrow{m}))=\left\|Proy_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{PQ}\right\| \tag{1693}$$

11.6. Espacios Vectoriales

Suponga que V es un espacio vectorial y W es un subconjunto no vacío de V ($W\subseteq V$). Se dice que W es un **subespacio vectorial** de V si W es a su vez un espacio vectorial. Se denota $W\leq V$.

Teorema 192. *Si V es un espacio vectorial y $W\subseteq V$ (W no vacío) entonces W es un subespacio vectorial de V si y solo si se tiene que: si u,vW y $a\mathbb{R}$ entonces $(u+av)W$.*

Si V es un espacio vectorial y $\{v_1,\cdots,v_p\}$ es un conjunto de vectores de V se dice que el vector vV es una **combinación lineal de los vectores** $\{v_1,\cdots,v_p\}$ si existen escalares $a_1,\cdots,a_p$ tal que

$$v=a_1v_1+\cdots+a_pv_p \tag{1694}$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_1,\cdots,v_p\}$ se denota como $Cl\{v_1,\cdots,v_p\}$, es decir,

$$Cl\{v_1,\cdots,v_p\}=\{v=a_1v_1+\cdots+a_pv_p\mid a_1,\cdots,a_p\mathbb{R}\} \tag{1695}$$

Si V es un espacio vectorial y $\{v_1,\cdots,v_p\}$ un conjunto de vectores se dice que el conjunto es un **conjunto generador** si

$$V=Cl\{v_1,\cdots,v_p\} \tag{1696}$$

es decir, todo vector puede escribirse como combinación lineal de vectores en $\{v_1,\cdots,v_p\}$.

Si V es un espacio vectorial y $\{v_1,\cdots,v_p\}$ es un conjunto generador de V se dice que $\{v_1,\cdots,v_p\}$ es una **base para el espacio vectorial** V si todo vector vV puede escribirse de forma **única** como combinación lineal de vectores en $\{v_1,\cdots,v_p\}$. Se dice que la **dimensión de la base** es el número de vectores del conjunto generador.

Si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V entonces el conjunto es **linealmente dependiente** si el vector nulo 0 es combinación lineal no trivial de $\{v_1, \cdots, v_p\}$, es decir, existen escalares **no todos nulos** $a_1, \cdots, a_p$ tal que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \tag{1697}$$

El conjunto se llama **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir, si

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \tag{1698}$$

entonces necesariamente se tiene que $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$.

Teorema 193. *Suponga que V es un espacio vectorial y que $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto generador de V. Entonces $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es una base si y solo si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Sea V un espacio vectorial.

Si $V = Cl\{v_1, \cdots, v_p\}$ entonces cualquier conjunto de $p+1$ vectores en V es linealmente dependiente.

Si $\{v_1, \cdots, v_p\}$ y $\{u_1, \cdots, u_l\}$ son bases de un espacio vectorial V entonces $p = l$. En tal caso se dice que V tiene dimensión p ($\dim V = p$)

Si $\dim V = p$ y $\{u_1, \cdots, u_l\}$ son l vectores l.i (linealmente independientes) con $l < p$ entonces existen vectores $u_{l+1}, \cdots, u_p$ de forma que $\{u_1, \cdots, u_l, u_{l+1}, \cdots, u_p\}$ es una base.

Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V de dimensión n y si vV entonces

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{1699}$$

y se dice los escalares $a_1, \cdots, a_n$ son las **coordenadas del vector** v **en la base** B**.** El vector de coordenadas para v en la base B es el vector

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1700}$$

Si $v_1, \cdots, v_k$ son vectores fila de $\mathbb{R}^n$ y $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ es la matriz $k \times n$ con filas $v_1, \cdots, v_k$ entonces el **espacio fila de** A F_A es

$$F_A = Cl\{v_1, \cdots, v_k\} \tag{1701}$$

$$F_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = A^T x, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1702}$$

Por otro lado, el **espacio columna de** A C_A es el espacio fila generado por A^T, es decir,

$$C_A = F_{A^T} \tag{1703}$$

y por lo anterior

$$C_A = \{v \in \mathbb{R}^k \mid v = Ay,\ y \in \mathbb{R}^k\} \tag{1704}$$

Teorema 194. *1) Si A y B son dos matrices $k\times n$ tal que B se obtiene por medio de operaciones elementales a partir de A entonces $F_A = F_B$.*

2) Si $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *son dos matrices $k\times n$ donde B es la matriz escalonada reducida de A ($s \leq k$) entonces $\mathcal{B} = \{w_1, \cdots, w_s\}$ es una base del subespacio $F_A = Cl\{v_1, \cdots, v_k\}$.*

11.7. Ortogonalidad y Proyecciones en $\mathbb{R}^n$

Si $\{u_1, \cdots, u_k\}$ son k vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces tales vectores son un **conjunto ortogonal** si los vectores son mutuamente ortogonales, es decir,

$$i \neq j \longrightarrow u_i \cdot u_j = 0 \tag{1705}$$

Si además de ser ortogonal $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto que cumple

$$\forall i, \|u_i\| = 1 \tag{1706}$$

se dice que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un **conjunto ortonormal.**

Teorema 195. *Si $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto ortogonales de vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto es linealmente independiente.*

Si S es un subespacio vectorial de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base ortonormal para S entonces:

1) Si A es la matriz $n \times k$ cuyas columnas son los vectores u_i, $A = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ entonces $A^T A = 1_k$.

2) Si uS entonces $[u]_B = \begin{pmatrix} u \cdot u_1 \\ u \cdot u_2 \\ \vdots \\ u \cdot u_k \end{pmatrix}$

Si S y T son dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ se dice que son **subespacios ortogonales** si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T y vice-versa

$$x \in S, y \in T \longrightarrow x \cdot y = 0 \tag{1707}$$

En tal caso se denota $S \perp T$. **Para verificar que dos subespacios son ortogonales, basta verificar la ortogonalidad entre las bases respectivas de los subespacios. La intersección de dos subespacios ortogonales S y T es únicamente el vector nulo 0.**

Si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ el **complemento ortogonal de** S es el conjunto de todos los vectores ortogonales a cualquier vector de S, es decir,

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in S, u \cdot v = 0\} \tag{1708}$$

Si $S = Cl\{v_1, \cdots, v_k\}$ entonces

$$S^\perp = \{u\mathbb{R}^n \mid Au = 0\} \tag{1709}$$

donde A es la matriz $k \times n$ cuyas filas son los vectores $v_1, \cdots, v_k$, es decir, $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$.

De la caracterización anterior es sencillo ver que **el complemento ortogonal de cualquier subespacio es a su vez un subespacio** y

- Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim S = k$ entonces $\dim(S^\perp) = n - k$
- Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base de S y $B_2 = \{v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ es una base de $S^\perp$ entonces $B = \{u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 196. *Suponga que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k y $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ es una base ortonormal de W. Si $v\mathbb{R}^n$ se define*

$$Proy_W v = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k \tag{1710}$$

*El vector $v - Proy_W v$ se denomina la **componente ortogonal de v a W**. Este vector cumple que es ortogonal a todo W, es decir,*

$$\forall wW \quad , (v - Proy_W v) \perp w \tag{1711}$$

Y la proyección ortogonal el vector más cercano de W a v, es decir,

$$\forall wW, d(v, Proy_W v) \leq d(v, w) \tag{1712}$$

Algoritmo de Gram-Schmidt

Paso 1

Suponga que W es un subespacio y que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es una base para W. Defina

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \tag{1713}$$

$$W_1 = Cl\{w_1\} \tag{1714}$$

Paso 2

Defina

$$w_2 = \frac{u_2 - Proy_{W_1} u_2}{\|u_2 - Proy_{W_1} u_2\|} \tag{1715}$$

$$W_2 = Cl\{w_1, w_2\} \tag{1716}$$

Paso 3

Se define

$$w_3 = \frac{u_3 - Proy_{W_2} u_3}{\|u_3 - Proy_{W_2} u_3\|} \tag{1717}$$

$$W_3 = Cl\{w_1, w_2, w_3\} \tag{1718}$$

Nuevamente $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto ortonormal.

Paso k-ésimo

Se procede de esta forma hasta llegar a u_k y se define

$$w_k = \frac{u_k - Proy_{W_{k-1}} u_k}{\left\|u_k - Proy_{W_{k-1}} u_k\right\|} \tag{1719}$$

$$W_k = Cl\{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{k-1}, w_k\} \tag{1720}$$

En este caso $W = W_k$ y la base ortonormal buscada es $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$.

11.8. Teoría de Transformaciones Lineales

Sean V y W espacios vectoriales reales, una **transformación lineal** $t.l$ (o aplicación lineal u operador lineal) entre V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y para cualquier escalar a se tiene

$$T(u + av) = T(u) + aT(v) \tag{1721}$$

Se denota el conjunto de transformaciones lineales entre V y W como $L(V, W)$ y si $V = W$ se denota $L(V)$.

La **transformación identidad** $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de un espacio en sí mismo que se define según

$$I(v) = v \tag{1722}$$

Es suficiente definir una transformación lineal sobre alguna base del espacio vectorial para conocer el valor de la transformación lineal sobre cualquier vector. También **toda transformación lineal envía el vector nulo en el vector nulo.**

Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $B_1 = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$ se define la **representación matricial de T en las bases** B_1, B_2como

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \left(\begin{array}{cccc} [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1723}$$

y así

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1724}$$

(cuando $B = B_1 = B_2$ se denota la representación matricial como $[T]_B$)

Teorema 197. ***Algoritmo para encontrar la representación de una transformación lineal***

Suponga que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $B_1 = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$. Para hallar la representación matricial de T $[T]_{B_1}^{B_2}$ en las bases B_1, B_2 se construye el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_m & T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \end{array} \right) \tag{1725}$$

y se aplica el método de Gauss Jordan hasta obtener

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_m & [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{array} \right) \tag{1726}$$

luego

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \left(\begin{array}{cccc} [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{array} \right) \tag{1727}$$

y

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1728}$$

*Si $B_1 = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $B_2 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es otra base de $\mathbb{R}^n$ la **matriz de cambio de base** es la representación matricial de la transformación identidad en tales bases, es decir, $[I]_{B_1}^{B_2}$. Por lo visto anteriormente, tal matriz cumple que*

$$[v]_{B_2} = [I(v)]_{B_2} = [I]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1729}$$

es decir

$$[v]_{B_2} = [I]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_1} \tag{1730}$$

Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_l\}$ *es una base de* U, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *es una base de* V *y* $B_3 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ *es una base de* W *entonces*

$$[T \circ S]_{B_1}^{B_3} = [T]_{B_2}^{B_3} [S]_{B_1}^{B_2} \tag{1731}$$

En el caso en que $U = V = W$ *y* $T = S = I$ *y* $B_1 = B_3$ *se concluye de lo anterior que*

$$\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = [I]_{B_2}^{B_1} \tag{1732}$$

Si $T : V \longrightarrow W$ *y* B_1, B_3 *son bases de* V *y* B_2, B_4 *son bases de* W *entonces*

$$[T]_{B_3}^{B_4} = [I_w]_{B_2}^{B_4} [T]_{B_1}^{B_2} [I_v]_{B_3}^{B_1} \tag{1733}$$

Si U *y* V *son espacios vectoriales y* $T : U \longrightarrow V$ *es una transformación lineal se dice que* ***T es inyectiva*** *si*

$$T(u) = T(v) \longrightarrow u = v \tag{1734}$$

Si $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se define el **núcleo de la transformación** T como el conjunto

$$\text{Nuc}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\} \tag{1735}$$

Teorema 198. *Si* $T : U \longrightarrow V$ *es una transformación lineal entonces*
1) $\text{Nuc}(T)$ *es un subespacio de* U
2) T *es inyectiva si y solo si* $\text{Nuc(T)} = \{0\}$
Si U *y* V *son espacios vectoriales y* $T : U \longrightarrow V$ *es una transformación lineal se dice que* T ***es sobreyectiva*** *si todo vector* $v \in V$ *tiene alguna preimagen, es decir, para cualquier* $v \in V$ *existe al menos un vector* $u \in U$ *tal que*

$$T(u) = v \tag{1736}$$

Si $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal se define la **imagen de la transformación** T como

$$\text{Img(T)} = \{v = T(u) \mid u \in U\} \tag{1737}$$

Teorema 199. *Si* $T : U \longrightarrow V$ *es una transformación lineal entonces*
1) Img(T) *es un subespacio de* V
2) T *es sobreyectiva si y solo si* $V = \text{Img(T)}$
Si $T : V \longrightarrow W$ *es una t.l*
a) Si $V = Cl\{v_1, \cdots, v_m\}$ *entonces*

$$Img(T) = Cl\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\} \tag{1738}$$

b) Si T *es inyectiva y* $v_1, \cdots, v_m$ *son l.i entonces* $T(v_1), \cdots, T(v_m)$ *son l.i y* $\dim V = \dim(Img(T))$
Suponga que $T : V \longrightarrow W$ *es una t.l y* V *es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$\dim V = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Img}(T)) \tag{1739}$$

Suponga que $T : V \longrightarrow W$ *es una t.l y* $\dim V = \dim W = n$. *Entonces* T *es inyectiva si y solo si* T *es sobreyectiva.*

*Si $T: V \longrightarrow W$ es una t.l se dice que T es **biyectiva** si T es inyectiva y sobreyectiva. Por otro lado T es **invertible** si existe una transformación lineal $T^{-1}: W \longrightarrow V$ tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ y $T^{-1} \circ T = I_V$.*

Suponga que $T: V \longrightarrow W$ es una t.l.

1) T es invertible si y solo si T es biyectiva

2) Si $\dim V = \dim W = n$ y B_1 es una base de V y B_2 es una base de W entonces T es invertible si y solo si la matriz $[T]_{B_1}^{B_2}$ lo es. En tal caso $\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$

11.9. Vectores y Valores Propios

Suponga que A es una matriz $n \times n$. Un vector $u \neq 0$ se dice un **vector propio** de la matriz A si existe un número real λ tal que

$$Au = \lambda u \tag{1740}$$

en tal caso se dice que λ es un **valor propio** asociado al vector propio u.

Suponga que A es una matriz $n \times n$ y que λ es un valor propio de A. Se define el **subespacio propio** (espacio característico) **del valor propio** λ como el subespacio de vectorios propios con valor propio λ

$$V_\lambda = \{u \mid Au = \lambda u\} \tag{1741}$$

La **multiplicidad geométrica de** λ es $\dim V_\lambda$.

Teorema 200. *Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ son k valores propios de A distintos con vectores propios asociados $v_1, \cdots, v_k$ entonces $v_1, \cdots, v_k$ son linealmente independientes, es decir, **vectores propios que corresponden a distintos valores propios son linealmente independientes.***

Si A es una matriz $n \times n$ entonces son equivalentes:

1) λ es un valor propio de A

2) $\det(A - \lambda 1_n) = 0$

Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz $n \times n$ el **polinomio característico** P_A de A es el polinomio de grado n

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n) \tag{1742}$$

Teorema 201. *Algunas propiedades del polinomio característico son:*

1) Si A es una matriz de grado n entonces el polinomio característico es un polinomio de grado n.

2) Las soluciones de la ecuación $P_A(\lambda) = 0$ son los valores propios de la matriz A

3) Como un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces entonces una matriz de tamaño n tiene a lo sumo n valores propios

4) Dos matrices con el mismo polinomio característico tienen los mismos valores propios

5) Si $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico de A entonces $\det A = (-1)^n a_0$

Toda matriz tiene valores propios si se consideran valores propios complejos. En caso de que no se trabaje con los números complejos y solo se consideren números reales entonces no toda matriz tendrá valores propios y su polinomio característico se verá de la siguiente forma (una vez que se ha factorizado)

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} Q(\lambda) \tag{1743}$$

donde $Q(\lambda)$ es un polinomio irreducible y los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios reales de la matriz. La **multiplicidad algebraica del valor propio** λ_i es el número n_i.

Teorema 202. *1) Si A y B son dos matrices similares entonces tienen los mismos valores propios*
2) Si A es una matriz triangular entonces los valores propios de A son los elementos sobre la diagonal de A
3) Una matriz A es invertible si y solo si 0 no es un valor propio de A

$$ \tag{1744} $$

Algoritmo para el cálculo de valores y vectores propios

1. Si A es una matriz $n \times n$ de la cual quieren hallarse los vectores propios y valores propios se resuelve primero la ecuación característica $\det(A - \lambda 1_n) = 0$. Las soluciones de tal ecuación son los valores propios de la matriz.

2. Para cada uno de los valores propios hallados en el paso anterior se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda 1_n)v = 0$ lo cual dará condiciones sobre el subespacio propio V_λ de cada uno de los valores propios y de esta forma se halla una base cada subespacio propio.

Teorema 203. *Suponga que $p(x) = x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros. Si s es una raíz entera de $p(x)$, es decir, si $p(s) = 0$ entonces s divide a a_0.*

Una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz C invertible y una matriz D diagonal tal que

$$D = C^{-1}AC \tag{1745}$$

Teorema 204. *Suponga que A es una matriz cuadrada $n \times n$ tal que el polinomio característico puede factorizarse como un producto de factores lineales con raíces reales*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1_n) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \tag{1746}$$

con

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \tag{1747}$$

y los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios reales distintos de A y $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_r}$ los subespacios propios correspondientes. Entonces son equivalentes
1) La matriz A es diagonalizable
2) Existe una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vectores propios de A
3) La multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica, es decir, $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$
4) $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n}) = n$
5) Todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse en forma única como combinación lineal de vectores en los subespacios propios, es decir, $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$
Si una matriz de tamaño n tiene n valores propios distintos, entonces la matriz es diagonalizable

Algoritmo para Diagonalizar una Matriz

1. Si A es una matriz $n \times n$ se calculan todos sus valores propios y sus vectores propios correspondientes según el algoritmo anterior.

2. Si la matriz A tiene n vectores propios $l.i$ o cumple alguna de las condiciones del teorema anterior entonces A es diagonalizable, en caso contrario no lo es.

3. Cuando A es diagonalizable se construye la matriz C cuyas columnas son los vectores propios $l.i$ hallados anteriormente. En la matriz D diagonal se ponen los valores propios en forma que corresponda con las columnas de C, es decir, la columna uno de C debe ser vector propio de la primera entrada sobre la diagonal, etc.

Definición 205. Una matriz C es **ortogonal** si $CC^T = 1_n$ o bien $C^T = C^{-1}$.

Una matriz A $n \times n$ es **ortogonalmente diagonalizable** si existe una matriz ortogonal C y una matriz D diagonal tal que

$$C^T AC = D \tag{1748}$$

Teorema 206. *1) Una matriz A es ortogonalmente diagonalizable si y solo si A es una matriz simétrica, es decir, $A = A^T$*

2) Si A es una matriz simétrica entonces existe una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ ortonormal formada por vectores propios de A.

Algoritmo para diagonalizar ortogonalmente una matriz

1. Primero hay que determinar si A es una matriz simétrica o no. Si $A = A^T$ entonces la matriz es diagonalizable ortogonalmente.

2. La matriz C se construye igual que antes, con el cuidado de que **los vectores propios que van en las columnas de la matriz C deben ser ortonormales** (para esto puede ser necesario aplicar Gram-Schmidt)

3. La matriz D se forma igual que antes, es decir, los valores propios están sobre la diagonal.

11.10. Curvas y Superficies Cuadráticas

Las **superficies cuadráticas** son ecuaciones del tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = g \tag{1749}$$

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, una **forma cuadrática real en las variables** $x_1, \cdots, x_n$ es una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^T Ax \tag{1750}$$

donde A es una matriz $n \times n$ simétrica denominada la **matriz de la forma cuadrática f.**

- Una forma cuadrática es un polinomio de segundo grado en sus variables
- Para construir la matriz A de la forma cuadrática hay dos casos:

1. Si $i \neq j$ el coeficiente del término $x_i x_j$ del polinomio define las entradas a_{ij} y a_{ji} según $a_{ij} = a_{ji} = \frac{coeficiente \quad de \quad x_{ij}}{2}$
2. Si $i = j$ el coeficiente de x_i^2 es la i-ésima entrada en la diagonal de A

Por ejemplo, si $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

si $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

Teorema 207. *Sea A una matriz simétrica asociada a una forma cuadrática f y C una matriz cuyas columnas $C = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ son vectores propios ortonormales de la matriz A tal que $C^T AC = D$ donde D es una matriz diagonal con los valores propios de A. Entonces el cambio de variable*

$$y = C^T x \tag{1751}$$

transforma la forma cuadrática $f(x) = x^T Ax$ en

$$f(x) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{1752}$$

donde los λ_i son los valores propios de A (que no tienen que ser distintos)

Las **curvas cuadráticas** son polinomios de dos variables con ecuaciones de la forma

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = x^T Ax + Bx + f = 0 \tag{1753}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}, B = (d, e) \tag{1754}$$

Las **superficies cuadráticas** son polinomios de tres variables con ecuaciones de la forma

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + kx_3 + l = x^T Ax + Bx + l = 0 \tag{1755}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}, \ B = (g, h, k) \tag{1756}$$

Superficies cuadráticas:

- **Elipse**: La elipse no rotada y centrada en (x_0, y_0) se caracteriza por la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{1757}$$

donde a y b son los **semiejes** de la elipse $(a, b > 0)$. Cuando $a = b$ se tiene un círculo de radio a, es decir, un círculo es una elipse cuyos semiejes son iguales. Los focos están sobre el eje mayor y los **vértices** de la elipse son los extremos del eje mayor.

- **Hipérbole**: La hiperbóla centrada en (x_0, y_0) y no rotada tiene por ecuación canónica alguna de las dos formas siguientes

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} & -\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} & +\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{1758}$$

Nuevamente $a, b > 0$. El eje que contiene los focos se llama el **eje focal** y las hipérbolas se caracterizan por tener dos rectas llamadas **asíntotas** a las cuales la hipérbola se acerca arbitrariamente sin tocarlas. Las ecuaciones de las rectas asíntotas de la hipérbola se hallan cambiando el 1 por un 0 en (260). La figura de una hipérbola siempre son dos “ramas” y los dos puntos de las ramas que cortan el eje focal son los **vértices.**

➭ **Parábola**: Las ecuaciones canónicas de una parábola centrada en (x_0, y_0) son

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{4a}(y - y_0)^2 \\ y - y_0 = \frac{1}{4a}(x - x_0)^2 \end{cases} \tag{1759}$$

donde ahora a puede ser positivo o negativo. El **vértice** de la parábola es el punto que está a la mitad entre el foco y la directriz.

Superficies cuadráticas:

➭ **Elipsoide:** El elipsoide centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{1760}$$

➭ **Hiperboloide de una hoja:** El hiperboloide de una hoja centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \end{cases} \tag{1761}$$

la variable que lleva el signo menos determina sobre cual eje se abre el hiperboloide

➭ **Hiperboloide de dos hojas:** El hiperboloide de dos hojas centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \end{cases} \tag{1762}$$

la variable que lleva el signo positivo determina sobre cual eje se abre el hiperboloide

➭ **Cono elíptico:** El cono elíptico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - (z - z_0)^2 = 0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} - (y - y_0)^2 = 0 \\ \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} - (x - x_0)^2 = 0 \end{cases} \tag{1763}$$

➭ **Paraboloide hiperbólico:** El paraboloide hiperbólico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \end{cases} \tag{1764}$$

➭ **Paraboloide elíptico:** El paraboloide hiperbólico centrado en (x_0, y_0, z_0) no rotado es la superficie definida por

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = (z - z_0) \end{cases} \tag{1765}$$

La forma cuadrática $f(x) = x^T Ax$ puede transformarse bajo el cambio de variable $y = C^T x$ en $f(x) = y^T Dy$.

Los vectores propios que forman la matriz C se llaman los **ejes principales de la cónica.**

También es posible escoger los vectores propios de forma que $\det C = 1$. En tal caso, el **ángulo de rotación** θ es el ángulo entre e_1 y v_1.

12. Aplicaciones

12.1. Análisis Dimensional y Circuitos Eléctricos

Como primera aplicación del álgebra lineal se puede usar el método de Gauss-Jordan para anticipar la relación entre distintas cantidades físicas mediante la técnica de análisis dimensional y se puede hallar la corriente que atraviesa un circuito eléctrico resolviendo un sistema de ecuaciones lineales asociado.

12.1.1. Análisis Dimensional

Suponga que uno desea conocer cómo depende una cantidad física en función de otras que uno esperaría determinan su comportamiento.

Por ejemplo, considere la caída libre de un objeto a cierta altura h como se indica en la siguiente figura.

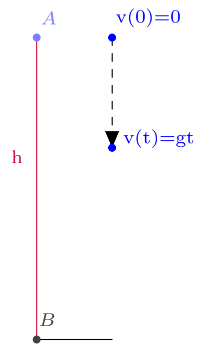


Figure 71: Caída libre

Aquí la idea es que se quiere determinar el tiempo que dura en caer la bola (desde el reposo) a partir de ciertos parámetros del problema. Los tres parámetros que uno esperaría son los más importantes son los siguientes: la altura (pues entre más alto más debería durar en caer la bola), la aceleración de la Tierra (pues a mayor aceleraciñon más rápido debería caer) y la masa (pues alguien podría considerar que entre más pesado el objeto menos debería durar en caer). Luego, la idea del análisis dimensional es proponer una relación de la forma (al menos para que no sea muy complicado)

$$t = Ch^{\alpha}g^{\beta}m^{\gamma} \tag{1766}$$

donde C es una constante adimensional que no pretende obtenerse por medio de este análisis y α, β, γ indica las potencias a las que aparecen elevadas las variables.

Si se denota como $[x]$ = unidades de x entonces $[t] = T$, $[h] = L$, $[g] = \frac{L}{T^2}$ y $[m] = M$ donde T, L, M significan tiempo, longitud y masa respectivamente. Luego la idea del análisis dimensional es que ambos lados de la ecuación deben tener las mismas unidades, lo que lleva al siguiente sistema de ecuaciones que se obtiene de igualar las potencias respectivas a ambos lados de la ecuación para T, L, M

$$\begin{cases} 1 = -2\beta & \text{igualando potencias de } T \\ 0 = \alpha + \beta & \text{igualando potencias de } L \\ 0 = \gamma & \text{igualando potencias de } M \end{cases} \tag{1767}$$

esto último es un sistema de ecuaciones lineales para α, β, γ que tiene por matriz aumentada asociada

$$\left(\begin{array}{ccc|c|} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{1768}$$

lo cual da después de aplicar Gauss-Jordan da el sistema

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases} \tag{1769}$$

lo cual significa que la relación que predice el análisis dimensional es

$$t = C\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{1770}$$

De hecho, la respuesta correcta (física) es

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1771}$$

lo cual indica que es un buen acercamiento al problema. Lo importante observar aquí fue que tuvo que resolverse un sistema lineal para hallar la respuesta y como podrá anticiparse si se quiere hacer análisis dimensional con más parámetros es todavía más importante utilizar el método de Gauss-Jordan.

12.1.2. Circuitos Eléctricos

Otro uso muy común de Gauss-Jordan es para hallar las corrientes que atraviesan un circuito eléctrico. Los dos principios físicos que hay que tener en mente son las dos **leyes de circuitos de Kirchhoff.**

La primera ley es una consecuencia de la conservación de la carga eléctrica y establece que la corriente que entra en un nodo es la misma que sale del mismo nodo tal como se indica en la siguiente figura[9]

[9]tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_circuit_laws

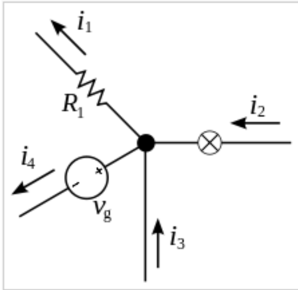


Figure 72: Ley de corriente de Kirchhoff

Por ejemplo, dado que i_1, i_4 son las corrientes que salen del nodo mientras que i_2, i_3 son las que entran al nodo la ley de Kirchhoff establece que

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \tag{1772}$$

La segunda ley es una consecuencia de la conservación de energía y establece que la caída de potencial a lo largo de una malla del circuito debe ser cero.

Por ejemplo, en la siguiente figura[10]

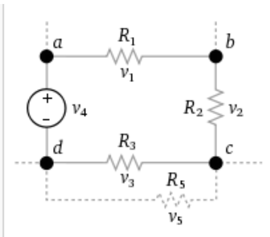


Figure 73: Ley de Voltaje de Kirchhoff

la ley de voltaje diría que

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \tag{1773}$$

Por último, para una resistencia idealizada, la **ley de Ohm** relaciona la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia con la corriente que la atraviesa y su resistencia según

$$V = IR \tag{1774}$$

Por ejemplo, suponga que se tiene el siguiente circuito

[10]tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_circuit_laws

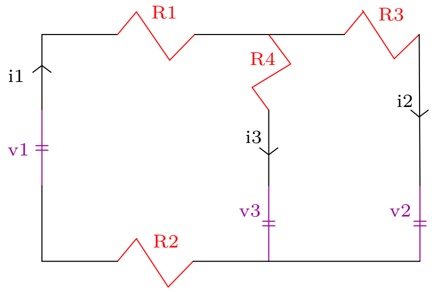


Figure 74: Circuito eléctrico

donde (ignorando las unidades)

$$v_1 = 19 \quad v_2 = 6 \quad v_3 = 2 \tag{1775}$$

$$R_1 = 6 \quad R_2 = 4 \quad R_3 = 4 \quad R_4 = 1 \tag{1776}$$

y se quieren hallar las tres corrientes indicadas en el diagrama. Como hay tres incógnitas, para tener solución única se necesitarían tres ecuaciones independientes (es decir, que no sean redudantes).

Por la ley de corriente aplicada al nodo a, se tiene que

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1777}$$

Luego, por la ley de voltaje aplicada a la malla izquierda se tiene que

$$-I_1R_1 - I_3R_4 - v_3 - I_1R_2 + v_1 = 0 \tag{1778}$$

Por la ley de voltaje aplicada a la malla derecha se tiene que

$$-I_2R_3 - v_2 + v_3 + I_3R_4 = 0 \tag{1779}$$

y sustituyendo con los valores de arriba se tendría el sistema

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 10I_1 + I_3 = 17 \\ -4I_2 + I_3 = 4 \end{cases} \tag{1780}$$

que tiene por matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{array}\right) \tag{1781}$$

y se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{1782}$$

por lo que $I_1 = 1{,}5$ $I_2 = -0{,}5$ $I_3 = 2$. El signo negativo en la segunda corriente indica que la dirección de esta era opuesta a la que se supuso en el diagrama.

12.2. Teoría de Gráficas

Otro de los lugares donde el álgebra lineal, en este caso la multiplicación matricial, hallan un uso es en la teoría de gráficas. La idea es que en muchos problemas se quiere indicar de forma sencilla cuales objetos se relacionan con otros según cierto criterio preestablecido.

Por ejemplo, considere la siguiente figura:

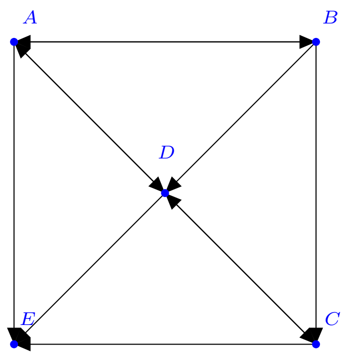


Figure 75: Gráfica entre cinco objetos

Aquí los círculos podrían representar personas, ciudades, páginas de internet o cualquier objeto en general. Luego, las flechas indican si existe una relación entre los objetos: por ejemplo, una flecha de 1 a 2 podría significar que 1 ha escuchado hablar de 2, o bien que existe un camino que lleva de 1 a 2 o bien que la página de internet 1 tiene un hipervínculo que lleva a la página 2.

El álgebra lineal hace su aparición al asociarle a cada una de estas gráficas una matriz llamada la **matriz de adyacencia.**

Por ejemplo, la matriz de adyacencia de la gráfica anterior sería

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1783}$$

donde la entrada a_{ij} es un 1 si existe una flecha que comienza en i y termina en j mientras que a_{ij} es un 0 si no existe tal flecha.

Lo interesante es cuando se considera las potencias sucesivas de A, por ejemplo

$$B = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1784}$$

Para interpretar A^2, considere la entrada $b_{25} = 3$. De la gráfica se puede observar que solo hay tres formas de ir desde 2 a 5 en dos pasos según indican la siguientes cadenas

$$2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \tag{1785}$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \tag{1786}$$

$$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \tag{1787}$$

es decir, *para $B = A^2$, la entrada b_{ij} representa cuántos caminos de dos pasos existen para ir desde i hasta j. En general, si se considera la matriz A^n, entonces su entrada (i, j) representa cuántos caminos de n pasos existen desde i hasta j.*

12.3. Análisis Matricial y Vectorial

12.3.1. Cálculo Matricial

Es natural esperar que deba existir algún tipo de relación entre el análisis (cálculo) y las matrices. Por ejemplo, ¿es posible derivar (o integrar) una matriz? En tal caso, ¿se preservan las reglas de derivación?

Si bien este es un tema extenso, se mencionarán brevemente algunos de los resultados más útiles. Por ejemplo, suponga que $A(t)$ representa la función matricial

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & t^2 & e^t \\ 3 & 4t & \sin t \end{pmatrix} \tag{1788}$$

Entonces se define la derivada e integral de $A(t)$ derivando e integrando cada una de las entradas por separado, es decir,

$$A'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & 2t & e^t \\ 0 & 4 & \cos t \end{pmatrix} \tag{1789}$$

$$\int A(t)dt = \begin{pmatrix} \sin t & \frac{t^3}{3} & e^t \\ 3t & 2t^2 & -\cos t \end{pmatrix} \tag{1790}$$

De hecho, varias de las propiedades de la derivada se preservan, para mencionar dos de las más importantes

$$(A(t) + B(t))' = A'(t) + B'(t) \tag{1791}$$

es decir, la suma de matrices derivables es derivable y

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \tag{1792}$$

es decir, la regla del producto sigue siendo válida (nótese el orden del producto).

Para terminar este sección es interesante mencionar cómo hallar la derivada de la inversa de una matriz. Suponga que X es una matriz derivable e invertible, se busca hallar $\left(X^{-1}\right)'$. Por las propiedades de la inversa, se tiene que

$$XX^{-1} = 1_N \tag{1793}$$

donde 1_N es la matriz identidad de tamaño N. Luego, la ecuación anterior se puede derivar a ambos lados y da como resultado

$$\left(XX^{-1}\right)' = 0_N \tag{1794}$$

y por la regla del producto

$$X'X^{-1} + X\left(X^{-1}\right)' = 0_N \tag{1795}$$

o bien pasando el lado izquierdo al lado derecho

$$X\left(X^{-1}\right)' = -X'X^{-1} \tag{1796}$$

y multiplicando por la izquierda por X^{-1} se tiene que

$$\left(X^{-1}\right)' = -X^{-1}X'X^{-1} \tag{1797}$$

12.3.2. Cálculo Vectorial

Al igual que el tema de cálculo matricial, hay mucho que se puede decir sobre el cálculo vectorial (de hecho, en esto consiste la mayor parte de un curso de cálculo en varias variables). Por tal razón, solo se darán las dos reglas sobre como derivar el producto punto y el producto cruz junto con una aplicación de cada una.

12.3.3. Derivada del producto punto

En este caso si $a(t), b(t) \in \mathbb{R}^n$ son dos funciones vectoriales se tiene que

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \left(\frac{d}{dt}a\right) \cdot b + a \cdot \left(\frac{d}{dt}b\right) \tag{1798}$$

Es decir, la misma regla del producto es válida tanto para el producto de funciones como el producto punto. A manera de ejemplo, suponga que una partícula está dando vueltas sobre un círculo tal como se indica en la figura siguiente[11]

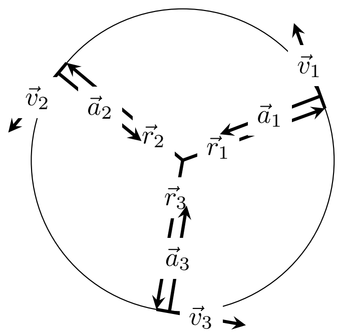


Figura 76: Movimiento circular uniforme

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ representa la posición de la partícula en función del tiempo entonces la condición de que la partícula se mueve sobre un círculo indica que la magnitud de $r(t)$ no cambia con el tiempo, es decir

$$\|r(t)\| = R \tag{1799}$$

[11]tomado de http://www.texample.net/tikz/examples/dva-vectors/

donde R representa el radio del círculo. Elevando al cuadrado la ecuación anterior, se tiene que

$$r(t) \cdot r(t) = R^2 \tag{1800}$$

y derivando a ambos lados con la regla del producto anterior se tendría que

$$r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 0 \tag{1801}$$

es decir,

$$r(t) \cdot r'(t) = 0 \tag{1802}$$

Como $r'(t)$ es la velocidad de la partícula el resultado anterior indica que *para una partícula que se mueve sobre un círculo su velocidad es perpendicular al vector posición de la partícula. En el caso en que la rapidez sea constante, es decir* $\|v(t)\|$ *no cambia, entonces es posible probar de forma análoga a lo anterior que la aceleración es perpendicular a la velocidad de la partícula. Dado que la partícula se mueve sobre el plano que define el círculo, esto significaría que la aceleración es un vector paralelo al vector posición y tal vector se conoce como la aceleración centrípeta.*

12.3.4. Derivada del producto cruz

Para el producto cruz se supone que $a(t), b(t) \in \mathbb{R}^3$. La regla de derivación para el producto cruz sería

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \left(\frac{d}{dt}a\right) \times b + a \times \left(\frac{d}{dt}b\right) \tag{1803}$$

Una aplicación de tal regla se encuentra en el movimiento planetario. Es conocido que la segunda ley de Newton indica que

$$F = ma \tag{1804}$$

donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, m su masa y a su aceleración.

Para el caso de movimiento gravitacional, se puede tomar F como

$$F = C\frac{r}{\|r\|^3} \tag{1805}$$

donde C es una constante que depende de las propiedades físicas entre los cuerpos que interactúan. Nótese que $\|F\| = \frac{C}{\|r\|^2}$, de ahí el nombre de ley de inverso-cuadrado.

Ahora bien, una cantidad de mucha utilidad en física es el momento angular

$$L = r \times mv \tag{1806}$$

Para la interacción gravitacional el momento angular se conserva puesto que

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}(r \times mv) \tag{1807}$$

y aplicando la regla del producto

$$= \left(\frac{d}{dt}r\right) \times mv + r \times \left(\frac{d}{dt}(mv)\right) \tag{1808}$$

como $\frac{d}{dt}r = v$ y $\frac{d}{dt}v = a$

$$= v \times mv + mr \times a \tag{1809}$$

recordando que el producto cruz de un vector consigo mismo es cero se tiene que

$$= mr \times a \tag{1810}$$

pero por la ley de gravitación

$$= r \times C\frac{r}{\|r\|^3} \tag{1811}$$

y nuevamente como el producto cruz de un vector consigo mismo es cero se concluye que

$$\frac{d}{dt}L = 0 \tag{1812}$$

y la derivada de una función es cero si y solo si la función es constante.

Como L es constante y $L = r \times mv$ por la interpretación geométrica del producto cruz esto significa que la órbita del cuerpo (planeta) debe ocurrir siempre dentro de un plano cuyo vector normal es L tal como se indica en la siguiente figura.

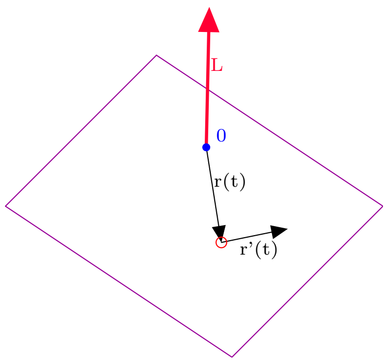


Figura 77: Órbita de un planeta

$$\tag{1813}$$

12.4. Números Complejos y Cuaterniones de Hamilton

Uno de los usos más interesantes del álgebra lineal es que permite estudiar los números complejos y su generalización conocida como los cuaterniones mediante el álgebra de matrices de tamaño 2×2. La idea de cómo definir los números complejos viene sugerida a partir del estudio de las matrices de rotación y como se verá más adelante los cuaterniones sirven precisamente para estudiar rotaciones en el espacio.

12.4.1. Los Números Complejos

La propiedad fundamental de los números complejos es la existencia de un número i que cumple $i^2 = -1$. Se va a utilizar esta idea para ver cómo se pueden estudiar los números complejos con las matrices.

En el capítulo de curvas y superficies cuadráticas se vio que una matriz de rotación en el plano era de la forma

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1814}$$

Ahora bien, se sabe de variable compleja que multiplicar un número z por $e^{i\theta}$ rota el número z un ángulo θ. También, por la fórmula de Euler se tiene que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1815}$$

y la matriz de rotación se puede descomponer como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1816}$$

y por analogía con la fórmula de Euler esto sugiere nombrar las matrices anteriores como

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1817}$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1818}$$

Lo más importante es notar que

$$\mathbf{i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} \tag{1819}$$

lo que significa que tal matriz cumple la propiedad fundamental del número complejo i. Como cualquier número complejo se puede escribir de la forma $z = x + iy$ esto sugiere la siguiente definición.

Definición 208. Si $x, y \in \mathbb{R}$ se define el número complejo $z = x + iy$ como la matriz

$$z = x\mathbf{1} + \mathbf{i}y = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \tag{1820}$$

y se denota el conjunto de números complejos como $\mathbb{C}$, es decir,

$$\mathbb{C} = \left\{ z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \tag{1821}$$

Note que $\mathbb{C}$ es un subespacio vectorial de la matrices de tamaño 2×2 y además $\dim\mathbb{C} = 2$. Es un ejercicio interesante demostrar que todas propiedades de suma y multiplicación entre números complejos siguen siendo válidas cuando son representados por estas matrices.

Es importante observar también que

$$\det z = x^2 + y^2 = \|z\|^2 \tag{1822}$$

12.4.2. Los Cuaterniones de Hamilton

Los cuaterniones de Hamilton son una generalización de los números complejos que se caracterizan por la presencia de tres números i, j, k que cumplen $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Lo interesante es que al igual que los números complejos pueden representarse como matrices 2×2 si se toma

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1823}$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j}= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{1824}$$

Y ahora un cuaternión es cualquier número q de la forma

$$q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \tag{1825}$$

Observe que los cuaterniones forman un espacio vectorial de dimensión cuatro, por lo que a veces se escribe como números $q = (a, b, c, d)$ al igual que los números complejos cuando se representan como $z = (x, y)$.

También se define la **norma** del cuaternión como

$$\|q\| = \sqrt{\det q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{1826}$$

y se dice que el cuaternión es **imaginario** si $a = 0$, es decir, se puede escribir como $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Es usual representar un cuaternión imaginario como $q = (b, c, d)$ lo cual sugiere que los cuaterniones imaginarios pueden representarse como vectores en $\mathbb{R}^3$. Tal representación se usará más adelante para estudiar las rotaciones en el espacio.

$$\tag{1827}$$

12.5. Curvas de Mejor Ajuste

Suponga que se realiza un experimento donde se obtienen sobre un gráfico los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. Dados estos puntos es natural buscar una curva que pase por todos ellos para así poder extrapolar los valores obtenidos y hacer predicciones experimentales.

Las curvas más sencillas que podrían buscarse son polinomios de la forma

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1828}$$

donde m es el grado del polinomio buscado (se debe pedir $m \leq n-1$) y $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ son los coeficientes del polinomio que se quiere determinar.

En un mundo ideal debería tenerse que el polinomio pasa por todos los puntos, es decir, $y_i = p(x_i)$, sin embargo, debido a las incertidumbres en las mediciones, lo que se tiene es que

$$y_i - p(x_i) = d_i \tag{1829}$$

donde d_i sería el valor en el que difiere el valor experimental del valor que prediciría la curva que se está buscando. Obviamente lo más deseable sería que tal diferencia sea la menor posible, y en tal caso se dice que se ha encontrado la **curva de mejor ajuste.**

La forma en que entra el álgebra lineal es que la ecuación 1829se puede escribir como un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 + d_1 \\ y_2 = a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0 + d_2 \\ \vdots \\ y_n = a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 + d_n \end{cases} \tag{1830}$$

dado que las incógnitas en este caso son $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$, el sistema anterior en notación matricial sería

$$b - d = Ax \tag{1831}$$

donde

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{1832}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1833}$$

Nuevamente, la idea es hacer que las diferencias d_i sean los más pequeñas posibles. Dado que

$$d = b - Ax \tag{1834}$$

lo anterior es equivalente a hacer

$$\|d\| = \|b - Ax\| \tag{1835}$$

lo más pequeño posible.

Si se considera b como un vector en $\mathbb{R}^n$ entonces $C_A = \left\{Ax : \; x \in \mathbb{R}^{m+1}\right\}$ sería el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de A y $\|b - Ax\|$ sería la distancia entre b con un vector en C_A.

Luego sabemos que tal distancia es mínima cuando $Ax = \text{Proy}_{C_A} b$ y en tal caso se tendría que

$$d = b - Ax = b - \text{Proy}_{C_A} b \tag{1836}$$

tiene que ser la componente ortogonal de b sobre C_A.

Como $d \in (C_A)^{\perp}$ entonces se vio en el tema de proyecciones que

$$A^T d = 0 \tag{1837}$$

es decir,

$$A^T (b - Ax) = 0 \tag{1838}$$

o bien

$$A^T A x = A^T b \tag{1839}$$

Es decir,

Theorem 209. *Suponga que se busca el polinomio*

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1840}$$

que es la curva de mejor ajuste para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ *y* $m \leq n-1$. *Entonces los coeficientes deben ser solución del sistema*

$$A^T A x = A^T b \tag{1841}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{1842}$$

Tal ecuación se conoce como la ***solución por mínimos cuadrados.***

Example 210. Suponga que en un experimento se miden los siguientes datos

$$\left[\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & 2 & 6 & 10 & 2 \end{array}\right] \tag{1843}$$

$$\tag{1844}$$

Halle la curva polinomial

$$f(x) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \tag{1845}$$

de mejor ajuste para los datos.

Según lo anterior $m = 2$ y $n = 4$ por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 0^2 & 0^1 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{1846}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1847}$$

y hay que resolver

$$A^T A x = A^T b \tag{1848}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1849}$$

o bien considerar el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 64 \\ 36 & 14 & 6 & 32 \\ 14 & 6 & 4 & 20 \end{array}\right) \tag{1850}$$

que da por matriz escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 9.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1.4 \end{array}\right) \tag{1851}$$

es decir

$$p(x) = -3x^2 + 9.4x + 1.4 \tag{1852}$$

La siguiente figura ilustra el método

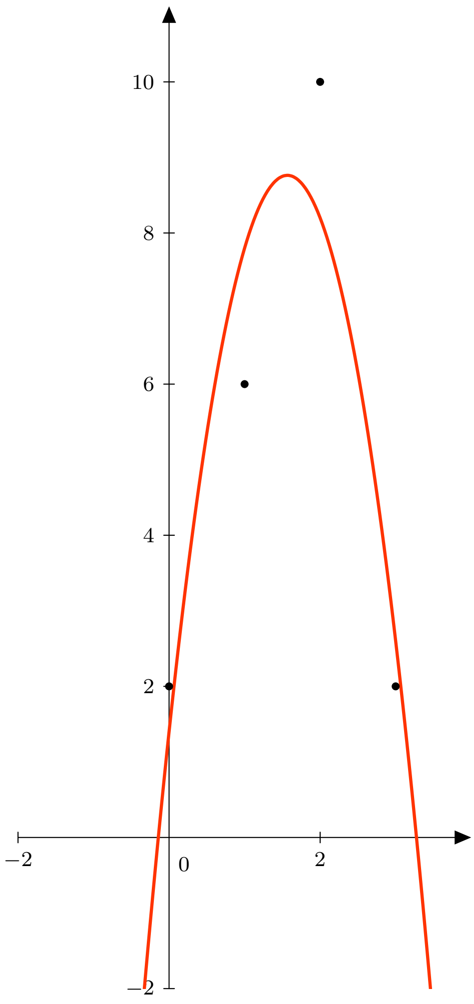


Figure 78: Mínimos Cuadrados

12.6. Exponencial de una Matriz y Ecuaciones Diferenciales

12.6.1. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas

Una de las propiedades más importantes de la función exponencial es que es su propia derivada, es decir,

$$\left(e^t\right)' = e^t \tag{1853}$$

Esta propiedad hace que las exponenciales aparezcan constantemente a la hora de resolver ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función $x(t)$ con sus derivadas. Por ejemplo,

$$x''(t) - 5x'(t) + 3x(t) = 0 \tag{1854}$$

es una ecuación diferencial que relaciona $x(t)$ con su primera y segunda derivada. La ecuación anterior se llama de segundo orden pues la derivada de mayor orden que aparece es de orden 2. El álgebra lineal es particularmente útil para estudiar las **ecuaciones diferenciales lineales,** que son ecuaciones de la forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x(t) = f(t) \tag{1855}$$

donde $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ son funciones diferenciables que solo dependen de t y $f(t)$ también es una función diferenciable que solo depende de t. Por ejemplo, comparando con la ecuación $x''(t) - 5x'(t) + 3x(t) = 0$ se tiene que $a_1(t) = -5, \quad a_0(t) = 3, \quad f(t) = 0.$

La idea de un problema de ecuaciones diferenciales 1855 es hallar la función $x(t)$ conociendo $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ y $f(t)$. La ecuación diferencial lineal más sencilla es

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{1856}$$

donde a es una constante. Observe que si se considera la derivada como una transformación lineal la ecuación anterior sería un problema de valores propios. La ecuación anterior se resuelve fácilmente escribiéndola primero como

$$\frac{x'}{x} = a \tag{1857}$$

e integrando a ambos lados con respecto al tiempo (e ignorando la constante de integración)

$$\int \frac{x'}{x} dt = at \tag{1858}$$

el lado izquierdo se resuelve observando que $(\ln x)' = \frac{x'}{x}$ y así

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int (\ln x)'\, dt = \ln x \tag{1859}$$

e igualdando ambos lados se tiene que

$$\ln x = at \tag{1860}$$

o bien

$$x(t) = e^{at} \tag{1861}$$

Esto quiere decir que la función exponencial e^{at} es la solución de la ecuación $x' = ax$.

Ahora bien, considere una ecuación diferencial como

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{1862}$$

que es la ecuación diferencial de un resorte. Para resolverla considere el cambio de variable $y = x'$; entonces la ecuación anterior se transforma en

$$y' = -\omega^2 x \tag{1863}$$

Es decir, en vez de resolver 1862 se puede resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases} \tag{1864}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1865}$$

si se usa la notación $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ el sistema anterior es equivalente a

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x} \tag{1866}$$

En analogía con la solución de la primera ecuación diferencial uno podría decir que $\overrightarrow{x}(t) = e^{At}$ debería ser la solución del problema. Ahora bien, la pregunta es qué sentido tiene la exponencial de una matriz, ¿es posible definirla? La respuesta es que sí es posible definir la exponencial de cualquier matriz como se verá a continuación.

12.6.2. Exponencial de una Matriz Diagonalizable

Por facilidad solo se dirá como calcular la exponencial de una matriz A en el caso en que sea diagonalizable. Cuando esto último ocurre, existe una matriz D diagonal y una matriz C tal que

$$D = C^{-1}AC \tag{1867}$$

o bien

$$A = CDC^{-1} \tag{1868}$$

Dado que D es diagonal, $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ y en el caso de una matriz diagonal se define simplemente

$$e^D = \operatorname{diag}\left(e^{d_1}, e^{d_2}, \cdots, e^{d_n}\right) \tag{1869}$$

es decir, se exponencia simplemente cada elemento sobre la diagonal.

Con esto se define

$$e^A = Ce^DC^{-1} \tag{1870}$$

Y se tiene el siguiente teorema

Teorema 211. *La solución del sistema*

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = A\overrightarrow{x} \tag{1871}$$

donde $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* A *es una matriz* $n \times n$ *es*

$$\overrightarrow{x}(t) = e^{tA}\overrightarrow{x}(0) \tag{1872}$$

donde $\overrightarrow{x}(0)$ *es la condición inicial de la ecuación diferencial.*

(1873)

Con lo anterior ya se puede resolver 1870. Para esto hay que diagonalizar la matriz A. Un cálculo sencillo muestra que los valores propios de A son $\lambda_1 = i\omega$ y $\lambda_2 = -i\omega$. Los vectores propios asociados son $v_1 = (1, i\omega)$ y $v_2 = (1, -i\omega)$. Luego se tiene que

$$D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i\omega} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i\omega} \end{pmatrix} \tag{1874}$$

Por lo que

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{ti\omega} & 0 \\ 0 & e^{-ti\omega} \end{pmatrix} \tag{1875}$$

y

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it\omega} & 0 \\ 0 & e^{-it\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i\omega} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{it\omega}+e^{-it\omega}}{2} & \frac{-\left(e^{it\omega}-e^{-it\omega}\right)}{2i\omega} \\ \frac{i\omega\left(e^{it\omega}-e^{-it\omega}\right)}{2} & \frac{-\left(e^{it\omega}+e^{-it\omega}\right)}{2} \end{pmatrix} \tag{1876}$$

Recordando que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1877}$$

se tiene que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & -\frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(t\omega) & -\cos(t\omega) \end{pmatrix} \tag{1878}$$

Finalmente, la solución de 1862 sería por el teorema

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & -\frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(t\omega) & -\cos(t\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \tag{1879}$$

donde $x(0)$ representa la posición inicial y $y(0)$ la velocidad inicial.

12.7. Rotaciones en el Espacio

Durante el tema de secciones cónicas se vio la forma en que se hallaba el ángulo de rotación del sistema de viejos ejes al sistema de nuevos ejes. Básicamente había que tomar la matriz C ortonormal de forma que su determinante fuera 1 y comparar contra una matriz de rotación 2×2.

En el caso de que la rotación se realice en $\mathbb{R}^3$ no es tan fácil especificarla; esto porque se ocupan 3 ángulos de rotación. Básicamente se ocupan 3 ángulos porque para especificar una rotación en el espacio hay que especificar el eje en torno el cual se va a rotar el cuerpo y el ángulo de rotación en torno ese eje. Para especificar el eje se ocupan dos ángulos, que pueden considerarse los ángulos de las coordenas esféricas y para especificar cuánto se va a rotar solo se ocupa un ángulo por lo que se termina necesitando de tres ángulos.

Dado que solo importa la dirección del eje, se supone que es representado por un vector unitario u y el ángulo de rotación se representa por α. El siguiente algoritmo indica cómo rotar los vectores en el espacio.

- Escriba el eje u como $u = (u_x, u_y, u_z)$
- Considere el cuaternión $t = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{1} + u_x \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{i} + u_y \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{j} + u_z \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{k}$

- Suponga que $v = (x, y, z)$ es el vector que se quiere rotar y defina el cuaternión asociado $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- Calcule $q' = tqt^{-1}$. Después de realizar el cálculo se tiene que q' se puede escribir como $q' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ donde x', y', z' son números por determinar.
- El vector $v' = (x', y', z')$ representa el vector v después de haber sido rotado

Ejemplo 212. *Rote el vector $v = e_1 + e_3$ a lo largo del eje $u = e_3$ un ángulo de $\alpha = 90$ grados.* Según el algoritmo primero se toma $u = (0, 0, 1) = (u_x, u_y, u_z)$ y en este caso

$$t = \cos(45)\,\mathbf{1} + \sin(45)\,\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1880}$$

Como $v = e_1 + e_3 = (1, 0, 1) = (x, y, z)$ se define

$$q = \mathbf{i} + \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{1881}$$

Luego se define

$$q' = tqt^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{1+i} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{1-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -\frac{1+i}{1-i} \\ \frac{1-i}{1+i} & -i \end{pmatrix} \tag{1882}$$

Es decir

$$q' = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} = \mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{1883}$$

y esto significa el vector rotado es

$$v' = (0, 1, 1) \tag{1884}$$

13. Problemas Adicionales

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 10 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9 \end{cases} \tag{1885}$$

2. Justifique si un sistema con más incógnitas que ecuaciones tiene al menos una solución o no.

3. Encuentre los coeficientes a, b, c de forma que $f(x) = ax^2+bx+c$ pasa por $(1,2)(-1,6)(2,3)$

4. Demuestre que cualesquiera cinco puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ yacen en una sección cónica, es decir, los cinco puntos satisfacen una ecuación de la forma $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

5. Una persona que viaja al este a una velocidad de 3 kilómetros por hora encuentra que el viento parece soplar directamente del norte. Al duplicar su rapidez el viento parece soplar desde el noreste. ¿Cuál es la velocidad del viento?

6. Un barco viaja con velocidad $\overrightarrow{v_1}$ y la velocidad aparente del viento es $\overrightarrow{a}$, cuando el barco cambia su velocidad a $\overrightarrow{v_2}$ la velocidad aparente del viento es $\overrightarrow{b}$. Encuentre la velocidad del viento.

7. Demuestre la Identidad del Paralelogramo

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{1886}$$

e interprételа geométricamente.

8. ¿Cuándo es el ángulo entre dos vectores agudo, rectángulo u obtuso?

9. Demuestre que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si u y v son perpendiculares e interprételo geométricamente en relación con el Teorema de Pitágoras.

10. Demuestre que $\|u\| = \|v\|$ si y solo si $u+v$ es perpendicular a $u-v$

11. Demuestre que para dos vectores no nulos u, v el vector

$$\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \tag{1887}$$

biseca el ángulo entre los dos vectores.

12. Tres conductores fueron de paseo en carretera. Uno de ellos pagó 8450 colones por cuatro emparedados, una taza de café y diez donas. El segundo pagó 6300 por tres emparedados, una taza de café y siete donas. ¿Cuánto pagó el tercero si compró una emparedado, una taza de café y una dona?

13. Considere el espacio vectorial formado por todas las funciones diferenciables. Determine si los siguientes subconjuntos de ese espacio vectorial son subespacios o no

$$\left\{ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0 \right\} \tag{1888}$$

$$\left\{ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 1 \right\} \tag{1889}$$

14. Demuestre que el conjunto $\mathbb{R}^+$ de números reales positivos es un espacio vectorial si se definen las operaciones de suma $\oplus$ y multiplicación $\circ$ de la siguiente forma (en lo siguiente x y y son positivos mientras que t es cualquier número real)

$$x \oplus y := xy \quad t \circ x := x^t \tag{1890}$$

15. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$. Demuestre que el subconjunto de funciones pares y el subconjunto de funciones impares forman dos subespacios del espacio vectorial de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demuestre a su vez que cualquier función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ puede escribirse como la suma de una función par y una función impar. Demuestre también que la intersección de ambos subespacios es la función nula, es decir, la función constante igual a 0.

16. Si U, V son dos subespacios, demuestre que $U \cap V$ es un subespacio. De un ejemplo donde no se tenga que $U \cup V$ no es un subespacio.

17. Determine cuales de los siguientes conjuntos están formados por vectores linealmente independientes: $\left\{2, 4\sin^2(x), \cos^2(x)\right\}$, $\{1, \sin(x), \sin(2x)\}$, $\{x, \cos(x)\}$, $\left\{(1+x)^2, x^2+2x, 3\right\}$, $\left\{\cos(2x), \sin^2(x), \cos^2(x)\right\}$, $\left\{0, x, x^2\right\}$

18. Usando análisis dimensional, halle el período de un péndulo en función de la masa de la partícula que cuelga, la longitud del péndulo, la aceleración de la gravedad y el ángulo desde el cual se suelta el péndulo. ¿Es posible obtener una única solución al problema anterior usando únicamente análisis dimensional?

19. Considere los siguientes subespacios de polinomios $P_n = \mathrm{Cl}\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ donde n es un número natural. Considerando la derivada como una transformación lineal $\frac{d}{dx} : P_n \longrightarrow P_n$ y la integral como una transformación lineal $\int : P_n \longrightarrow P_{n+1}$ (si se piensa como integral indefinida entonces se está tomando la constante de integración como cero) calcule representaciones matriciales de la derivada y la integral con respecto a la base $B_n = \{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ para P_n y B_{n+1} para P_{n+1}.

20. Demuestre que si A, B son dos matrices cuadradas $n \times n$ entonces $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ y $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$. Use esto para demostrar que no existen dos matrices A, B que cumplan $AB - BA = I_n$

21. Considere un subespacio W de $\mathbb{R}^n$. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida según $T(v) = \mathrm{proy}_W v$, es decir, la proyección ortogonal de v sobre W. Demuestre que T es una transformación lineal y que si B es una base de $\mathbb{R}^n$ entonces $[T]_B = \left([T]_B\right)^2$. Con esto calcule los valores propios de T.

22. Si A, B son dos matrices cuadradas $n \times n$ se puede definir un producto punto entre ellas como $A \cdot B = \mathrm{tr}(A^T B)$. Si $W = \mathrm{Cl}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ calcule con la definición anterior del producto punto $W^\perp$

23. Si f, g son dos funciones continuas sobre el intervalo $[-1, 1]$ se puede definir un producto punto entre las funciones como $f \cdot g = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Con la definición anterior de producto punto ortonormalice mediante Gram-Schmidt el siguiente conjunto de polinomios $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$

24. Una de las ventajas de las matrices simétricas es que se pueden diagonalizar ortogonalmente según $Q^T AQ = D$. Otra forma de escribir eso es como $A = QDQ^T$. Ahora bien, si D se denota como $D = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cualquiera (como la exponencial, el seno y el coseno) se define $f(D)$ como la matriz $f(D) = \text{diag}(f(d_1), f(d_2), \cdots, f(d_n))$, es decir, se evalúa la función sobre cada elemento sobre la diagonal individualmente. La ventaja de las matrices simétricas es que permite definir $f(A)$ como $f(A) = Qf(D)Q^T$. Con ayuda de lo anterior si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ calcule $\cos A$ y $\sin A$.

References

[1] Kolman, B y Hill, D. *Álgebra Lineal.* Pearson Education, México, 2006.

[2] Hoffman, K y Kunze, R. *Álgebra Lineal.* Prentice Hall, México, 1973.

[3] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right.* Springer, USA, 2004

[4] Dym, Harry. *Linear Algebra in Action.* Graduate Studies in Mathematics, USA, 2006.

[5] Halmos, Paul. *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Springer-Verlag, USA, 1974.

[6] Arce, Castillo y González. *Álgebra Lineal.* Editorial UCR, Costa Rica, 2008

[7] Várilly, Joseph. *Introducción al Álgebra Lineal.*

[8] Várilly, Joseph. *MA-460: Álgebra Lineal II.*

[9] http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_subspace

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_circuit_laws

[13] http://www.texample.net/tikz/examples/dva-vectors/

Índice de figuras

Índice alfabético