Perturbations Singulières et Prolongements Maximaux D'Opérateurs Positifs

C. BARDOS, D. BRÉZIS & H. BRÉZIS

Mémoire présenté par J. L. LIONS

Introduction

On sait que si B est un opérateur linéaire positif de domaine $D(B)$ dense dans un espace de Hilbert H, il admet des prolongements maximaux positifs. D'autre part on sait également que si A est un opérateur maximal positif, dominant fortement B, l'opérateur $\varepsilon A+B$ est maximal positif. Dans la première partie de ce travail on montre qu'en faisant tendre ε vers zéro on définit des prolongements maximaux positifs de B. Les résultats obtenus sont assez généraux, mais peu précis, sauf dans le cas où B est un opérateur sectoriel, l'extension de Friedrichs permettant alors de décrire complètement la situation. On donne ensuite des applications à des problèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Dans la deuxième partie, on considère une classe générale d'opérateurs différentiels, les systèmes symétriques. On montre alors que $(\varepsilon A+B+\lambda)^{-1}$ converge vers $(\mathscr{B}+\lambda)^{-1}$ dans H faible, où $\mathscr{B}$ est un prolongement maximal positif de

$$B=\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i};$$

on caractérise ce prolongement (Théorème II.2). On étudie ensuite les équations d'évolution associées à ces différents problèmes. Bien entendu la démarche suivie s'apparente beaucoup aux problèmes des perturbations singulières (cf. HUET [11] et LIONS [16]). L'étude du comportement de la solution u_ε de l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$ au voisinage de $\partial\Omega$ n'est pas entreprise dans ce travail, elle conduirait à des problèmes de couches limites et de correcteurs comme dans LIONS [16] et dans VISIK & LYUSTERNIK [24].

I. Generalites

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On note $(,)$ et $|.|$ le produit scalaire et la norme sur H. On désigne par A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H; on suppose que A est maximal positif; c'est-à-dire que l'on a

$$\operatorname{Re}(Au,u)\geqq 0,\ \forall u\in D(A); \quad (\lambda+A)(D(A))=H,\ \forall\lambda, \quad \operatorname{Re}\lambda>0.$$

On se donne d'autre part un opérateur B linéaire de $D(A)$ dans H, strictement positif, i.e. il existe une constante $\delta>0$ telle que l'on ait $\operatorname{Re}(Bu, u)\geqq\delta\,|u|^2$, pour tout $u\in D(A)$. On suppose que A domine fortement B (cf. KATO [13], p. 189 et suivantes) c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C(\varepsilon)\geqq 0$ tel que l'on ait

$$|Bu|\leqq\varepsilon|Au|+C(\varepsilon)|u|, \qquad \forall u\in D(A).$$

Il est alors bien connu que $\varepsilon A+B$ est un opérateur maximal monotone. Il existe donc pour tout $f\in H$ un unique $u_\varepsilon\in D(A)$ solution de l'équation

$$\text{(I.1)} \qquad \varepsilon A u_\varepsilon+B u_\varepsilon=f.$$

On se propose d'étudier le comportement de u_ε lorsque ε tend vers zéro. On remarque d'abord que, comme B est strictement positif et de domaine dense, il existe des prolongements linéaires maximaux et strictement positifs de B. Pour mémoire on rappelle alors le résultat élémentaire suivant (cf. TROTTER [22], [23]):

Théorème I.1. *On suppose que $\bar{B}$, la fermeture de B,*[1] *est maximal positif; alors, lorsque ε tend vers zéro, u_ε converge fortement vers $u=(\bar{B})^{-1}f$.*

Bien entendu les cas intéressants que l'on va étudier maintenant sont ceux pour lesquels $\bar{B}$ n'est pas maximal. Pour fixer les idées, voici un théorème direct.

Théorème I.2. *On suppose que $D(A^*)\cap D(B^*)$ est dense dans H, alors il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ convergeant vers zéro et un opérateur $\mathscr{B}$ prolongement maximal de B tel que suivant $\mathscr{U}$, $(\varepsilon A+B)^{-1}f$ converge faiblement vers $\mathscr{B}^{-1}f$, pour tout $f\in H$.*

Démonstration. On pose $\mathscr{I}_\varepsilon=(\varepsilon A+B)^{-1}$. $\mathscr{I}_\varepsilon$ est un opérateur borné et on a $|\mathscr{I}_\varepsilon|\leqq\frac{1}{\delta}$ pour tout $\varepsilon>0$.

Soit d'autre part H_w l'espace H muni de la topologie faible et soit $\mathscr{L}(H, H_w)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H_w muni de la topologie de la convergence simple. On sait (cf. BOURBAKI Chap IV, §2, Th. I.1, Cor. 3) que la boule unité de $\mathscr{L}(H)$ est compacte dans $\mathscr{L}(H, H_w)$. On en déduit qu'il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ convergeant vers zéro et une application linéaire continue $\mathscr{I}$ telle que, pour tout $f\in H$, $\mathscr{I}_\varepsilon f$ converge faiblement selon $\mathscr{U}$ vers $\mathscr{I}f$.

Montrons que $\mathscr{I}$ est injective; soit f tel que $\mathscr{I}f=0$: pour tout $v^*\in D(A^*)\cap D(B^*)$, on a, en posant $u_\varepsilon=\mathscr{I}_\varepsilon f$,

$$\text{(I.2)} \qquad (f, v^*)=(\varepsilon A u_\varepsilon+B u_\varepsilon, v^*)=(u_\varepsilon, \varepsilon A^* v^*+B^* v^*)=(\mathscr{I}_\varepsilon f, \varepsilon A^* v^*+B^* v^*).$$

En passant à la limite dans (I.2), on obtient $(f, v^*)=0$, $\forall v^*\in D(A^*)\cap D(B^*)$. Ceci prouve que $f=0$ car on a supposé que $D(A^*)\cap D(B^*)$ est dense dans H. On définit l'opérateur $\mathscr{B}$ en posant: $D(\mathscr{B})=\operatorname{Im}\mathscr{I}$ et $\mathscr{B}=\mathscr{I}^{-1}$; $\mathscr{B}$ est surjectif; montrons qu'il est strictement positif; de la relation

$$\text{(I.3)} \qquad \varepsilon A u_\varepsilon+B u_\varepsilon=f,$$

[1] B étant positif de domaine dense, il est toujours fermable.

on déduit, en multipliant scalairement par u_ε et en prenant la partie réelle, la relation

$$\text{(I.4)} \qquad \operatorname{Re}(f, \mathscr{J}_\varepsilon(f)) = \operatorname{Re}(f, u_\varepsilon) \geqq 0;$$

ceci donne en passant à la limite

$$\text{(I.5)} \qquad \operatorname{Re}(f, \mathscr{J}(f)) \geqq 0, \quad \forall f \in H,$$

ou ce qui revient au même Re $(\mathscr{B}u, u) \geqq 0$ pour tout $u \in D(\mathscr{B})$. Ainsi $\mathscr{B}$ est un opérateur maximal positif. Pour terminer on montre que $\mathscr{B}$ prolonge B; pour tout $u \in D(A)$ on écrit

$$\text{(I.6)} \qquad \varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = Bu + \varepsilon A u - \varepsilon A u$$

soit

$$\text{(I.7)} \qquad \varepsilon A(u_\varepsilon - u) + B(u_\varepsilon - u) = -\varepsilon A u;$$

on en déduit que $|u_\varepsilon - u| \leqq \frac{1}{\delta} \varepsilon |Au|$ et donc que u_ε converge vers u. On obtient donc la relation $u = \mathscr{J}(Bu) = \mathscr{B}^{-1}(Bu)$, ce qui prouve que l'on a $Bu = \mathscr{B}u$ pour tout $u \in D(A)$.

A la suite de ce théorème on est amené à envisager les questions suivantes.

1) Le prolongement maximal $\mathscr{B}$ ainsi construit dépend-t-il de l'ultrafiltre $\mathscr{U}$?

2) Est-il possible de caractériser ce prolongement?

3) La suite u_ε converge-t-elle non seulement faiblement mais aussi fortement vers u selon $\mathscr{U}$?

Comme nous ne savons pas donner de réponse générale nous étudierons des cas particuliers, essentiellement ceux qui proviennent de problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles. Ce sont bien entendu les problèmes aux limites qui sont à l'origine de ces développements.

Remarque I.1. Comme les opérateurs $\varepsilon A + B$ et $\mathscr{B}$ sont maximaux positifs de domaine dense $-(\varepsilon A + B)$ et $-\mathscr{B}$ sont générateurs de semi-groupes fortement continus à contraction; aussi il est naturel de considérer les fonctions $u_\varepsilon(t)$ et $u(t)$ solutions des équations:

$$\text{(I.8)} \qquad u'_\varepsilon + (\varepsilon A + B) u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon(0) = u_0$$

et

$$\text{(I.9)} \qquad u' + \mathscr{B} u = f, \quad u(0) = u_0,$$

et d'étudier dans quelles conditions u_ε converge vers u. En fait on peut ramener cette étude à la situation précédente en utilisant les théorèmes suivants.

Théorème I.3. *Pour une famille C_ε $(\varepsilon \geqq 0)$ d'opérateurs maximaux positifs de domaine dense dans H espace de Hilbert, les assertions suivantes sont équivalents:*

(i) *e^{-tC_ε} converge fortement vers e^{-tC_0}, uniformément sur tout intervalle borné.*

(ii) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant* Re $\lambda > 0$, *$(\lambda + C_\varepsilon)^{-1}$ converge fortement vers $(\lambda + C_0)^{-1}$.*

(iii) *Il existe un nombre complexe* λ_0, *de partie réelle positive, tel que* $(\lambda_0+C_\varepsilon)^{-1}$ *converge fortement vers* $(\lambda_0+C_0)^{-1}$.

Théorème I.3'. *Pour une famille* C_ε $(\varepsilon\geqq 0)$ *d'opérateurs maximaux positifs dans* H *espace de Hilbert les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout* $(x, x^*)\in H\times H$, $t\to(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)$ *converge vers* $t\to(e^{-tC_0}x, x^*)$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *faible* $*$.

(ii) *Pour tout* $\lambda\in\mathbb{C}$ *vérifiant* $\operatorname{Re}\lambda>0$, $(\lambda+C_\varepsilon)^{-1}$ *converge vers* $(\lambda+C_0)^{-1}$ *dans* $\mathscr{L}(H, H_w)$ (muni de la topologie de la convergence simple).

(iii) *Il existe* $\omega>0$ *tel que, pour tout* $\lambda\in\mathbb{C}$ *vérifiant* $\operatorname{Re}\lambda\geqq\omega$, $(\lambda+C_\varepsilon)^{-1}$ *converge vers* $(\lambda+C_0)^{-1}$ *dans* $\mathscr{L}(H, H_w)$.

Le Théorème I.3 est du à TROTTER [22] et on en trouvera une démonstration détaillée dans KATO [13], p. 502, Th. 2.16; donnons une brève démonstration du Théorème I.3'. De la formule

$$\text{(I.10)}\qquad \begin{aligned}((\lambda+C_\varepsilon)^{-1}x, x^*)&=\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tC_\varepsilon}x\,dt, x^*\right)\\ &=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)\,dt, \qquad \forall(x,x^*)\in H\times H,\end{aligned}$$

on déduit (ii) de (i). D'autre part il est évident que (ii) implique (iii). Montrons enfin que (iii) implique (i). On pose, pour $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\Phi(-\lambda)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}\phi(t)\,dt.$$

On a pour $\omega'>\omega$

$$\text{(I.11)}\qquad \begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)\,\phi(t)\,dt&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty}((\lambda+C_\varepsilon)^{-1}x, x^*)\,\Phi(-\lambda)\,d\lambda\\ &=\int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty}((\lambda+C_0)^{-1}x, x^*)\,\Phi(-\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty(e^{-tC_0}x, x^*)\,\phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

En effet l'intégrale $\int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty}((\lambda+C_\varepsilon)^{-1}x, x^*)\,\Phi(-\lambda)\,d\lambda$ est uniformément convergente (cf. CHAZARAIN [8]) et on peut appliquer le théorème de Lebesgue. Ainsi $(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)$ converge dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ vers $(e^{-tC_0}x, x^*)$. Comme $(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)$ est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, on en déduit que $(e^{-tC_\varepsilon}x, x^*)$ converge vers $(e^{-tC_0}x, x^*)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ faiblement.

Voici maintenant des exemples simples.

Exemple I.1. Cet exemple généralise un peu les résultats existant sur les perturbations singulières des problèmes aux limites elliptiques (cf. HUET [11], etc.). Pour caractériser le domaine de $\mathscr{B}$ on utilise l'extension de Friedrichs de B. On trouvera un exposé très clair de l'extension de Friedrichs dans le cas où B n'est pas autoadjoint dans FARIS [9]. On suppose donc que l'opérateur B est sectoriel, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c>0$ telle que l'on ait

$$\text{(I.12)}\qquad |\operatorname{Im}(Bu, u)|\leqq c\operatorname{Re}(Bu, u), \qquad \forall u\in D(A)=D(B).$$

L'extension de Friedrichs de B est alors caractérisée par la donnée d'un espace de Hilbert V et d'un opérateur linéaire continu $\mathscr{B}$ de V dans V^* antidual de V tel que

(i) $D(B) \subset V \subset H$ chaque espace étant dense dans le suivant.

(ii) $B \in \mathscr{L}(D(B); H)$ se prolonge par continuité en l'opérateur $\mathscr{B} \in \mathscr{L}(V; V^*)$. Comme d'habitude on injecte H dans V^* et on note également $\mathscr{B}$ la restriction de $\mathscr{B}$ à H (i.e. l'opérateur $\mathscr{B}|_H$ défini par

$$D(\mathscr{B}|_H) = \{u \in V \mid \mathscr{B} u \in H\}, \qquad \mathscr{B}|_H u = \mathscr{B} u).$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition I.1. *On se place dans la situation de l'Exemple* I.1. *et on suppose que $D(A) \cap D(A^*)$ est dense dans V (ceci est automatiquement réalisé par exemple lorsque $D(A) = D(A^*)$), alors $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge dans V vers $\mathscr{B}^{-1} f$ pour tout $f \in H$.*

Démonstration. On note $\|\cdot\|$ la norme de V et $\|\cdot\|^*$ la norme duale de V^*. Par construction, il existe deux constantes α et M strictement positives telles que l'on ait

(i) $\|\mathscr{B}\|_{\mathscr{L}(V, V^*)} \leqq M$,

(ii) $\alpha \|u\|^2 \leqq \operatorname{Re}(\mathscr{B} u, u), \qquad \forall u \in V.$

On multiplie alors scalairement l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$ par u_ε et en prenant la partie réelle, on voit que $(\varepsilon A + B)^{-1}$ est borné dans $\mathscr{L}(H, V)$. Suivant un ultrafiltre $\mathscr{U}$, $(\varepsilon A + B)^{-1}$ converge dans $\mathscr{L}(H, V_w)$ vers un opérateur C.

Pour tout $v \in D(A) \cap D(A^*)$, on a

$$(f, v) = (\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon, v) = \varepsilon(u_\varepsilon, A^* v) + (\mathscr{B} u_\varepsilon, v). \tag{I.13}$$

En passant à la limite, on obtient

$$(f, v) = (\mathscr{B} C f, v). \tag{I.14}$$

Comme $\mathscr{B} \in \mathscr{L}(V, V^*)$ et comme $D(A) \cap D(A^*)$ est dense dans V on en déduit que $\mathscr{B} C f = f$, soit que $C = \mathscr{B}^{-1}$. Il en résulte en particulier que la famille $(\varepsilon A + B)^{-1}$ toute entière converge dans $\mathscr{L}(H, V)$ faible vers $\mathscr{B}^{-1}$. Pour établir la convergence forte on écrit

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \alpha \|u_\varepsilon - u\|^2 \leqq \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \operatorname{Re}\big(\mathscr{B}(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u\big) \leqq -\operatorname{Re}(\mathscr{B} u, u) + \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} (\mathscr{B} u_\varepsilon, u_\varepsilon) \tag{I.15}$$

d'après la convergence faible de u_ε vers u. Mais comme $\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f = \mathscr{B} u$, on a $\operatorname{Re}(\mathscr{B} u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqq \operatorname{Re}(\mathscr{B} u, u_\varepsilon)$, soit

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \operatorname{Re}(\mathscr{B} u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname{Re}(\mathscr{B} u, u). \tag{I.16}$$

Ceci termine la démonstration.

Exemple I.2. On suppose que l'opérateur A est autoadjoint et que l'opérateur B s'écrit sous la forme $B = iC + \delta$, où C est un opérateur symétrique positif. On introduit $\mathscr{C}$ extension de Friedrichs de C (C est trivialement sectoriel car on a $\operatorname{Re}(Cx, x) \geqq 0$, $\operatorname{Im}(Cx, x) = 0$!); $\mathscr{C}$ est un opérateur autoadjoint, et on a la

Proposition I.2. *Dans la situation de l'exemple* I.2, $(\varepsilon A + B)^{-1} f$ *converge dans* $D(\mathscr{C}^{1/2})$ *vers* $(i\mathscr{C} + \delta)^{-1} f$ *pour tout* $f \in H$.

Pour démontrer cette proposition on considère l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + iCu_\varepsilon + \delta u_\varepsilon = f$, que l'on multiplie par u_ε; en prenant successivement la partie réelle et imaginaire de ce produit scalaire, on obtient la majoration

$$\|u_\varepsilon\|_{D(\mathscr{C}^{1/2})} \leqq M\,|f|.$$

On procède ensuite comme dans l'exemple I.1, en laissant les détails au lecteur.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ et ν la normale extérieure à $\partial\Omega$. De l'exemple I.1 on déduit en particulier que u_ε solution de

$$\varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega (\lambda \geqq 0), \qquad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u, la solution de $-\Delta u + \lambda u = f$ dans Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$. De même v_ε solution de

$$\varepsilon \Delta^2 v_\varepsilon - i\Delta v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega, \qquad v_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers v solution de $-i\Delta v + \lambda v = f$, $v|_{\partial\Omega} = 0$.

Enfin, en utilisant le Théorème I.3, on voit que $u_\varepsilon(t)$, solution de

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \\
u_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0 \\
u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x),
\end{gathered} \tag{I.17}$$

converge dans $C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ vers $u(t)$, solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \qquad u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \qquad u(x, 0) = u_0(x). \tag{I.18}$$

De même $v_\varepsilon(t)$, solution de

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 v_\varepsilon - i\Delta v_\varepsilon = f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \\
v_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = \left.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0 \\
v_\varepsilon(x, 0) = v_0(x),
\end{gathered} \tag{I.19}$$

converge dans $C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ vers $v(t)$, solution de l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial v}{\partial t} - i\Delta v = f, \qquad v|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \qquad v(x, 0) = v_0(x). \tag{I.20}$$

On remarquera que dans le passage de (I.17) à (I.18) l'opérateur d'évolution $\varepsilon A+B$, générateur d'un semi groupe reste générateur d'un semi groupe, tandis que dans le passage de (I.19) à (I.20) le générateur d'un semi groupe devient par passage à la limite générateur d'un groupe unitaire. Ceci se produit en particulier parce que $-\Delta$ défini sur $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ est un opérateur autoadjoint et positif; ce sont ces propriétés de régularité qui permettent de prouver que $v_\varepsilon(t)$ converge vers la solution de (I.20). Dans la section suivante on se propose d'étudier une classe d'opérateurs B beaucoup plus généraux, positifs mais ne possédant pas en général de propriété analogue à (I.12), pour laquelle nous ne prouverons que des résultats de convergence faible. De plus (cf. Exemples II.3 et II.4) nous n'obtiendrons jamais l'analogue de la situation (I.19), (I.20) (passage d'un semi groupe à un groupe).

II. Perturbations Singulières des Systèmes Symétriques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière (C^1 par morceaux). On considère sur Ω l'opérateur différentiel $L=\sum A_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ où les A_i sont des matrices hermitiennes de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$. La normale extérieure à $\partial\Omega$ $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est définie presque partout sur $\partial\Omega$ et, d'après la formule de Green, on a pour tout $u\in(\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^m$

$$\text{(II.1)}^2 \qquad \left(\sum A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)=\tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(v\cdot Au, u)\,d\sigma-\tfrac{1}{2}((\operatorname{div}A)u, u)$$

où

$$\operatorname{div}A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad v\cdot A=\sum_{i=1}^{n} v_i A_i.$$

On suppose que $\|\operatorname{div}A\|\in L^\infty(\Omega)$ et on déduit de la formule (II.1) que, pour tout $\delta>\frac{1}{2}\sup_{\Omega}\|\operatorname{div}A\|$, l'opérateur B défini par $D(B)=(\mathscr{D}(\Omega))^m$, $Bu=Lu+\delta u$ est strictement positif dans $H=(L^2(\Omega))^m$.

On introduit alors les operateurs $B_{\max}$, C, $C_{\max}$ définis par: $D(B_{\max})=D(C_{\max})=\{u\in H,\ Lu\in H\}$, $D(C)=D(B)=(\mathscr{D}(\Omega))^m$ $B_{\max}u=Lu+\delta u$, $Cu=L^*u+\delta u$, $C_{\max}u=L^*u+\delta u$, où L^* désigne l'adjoint formel de L. C'est un opérateur positif et on verifie les relations $B^*=C_{\max}$, $C^*=B_{\max}$; d'après le Théorème 5 de Phillips [28] (pp. 26–33), il existe des prolongements maximaux positifs $\mathscr{B}$ vérifiant $B\subset\mathscr{B}\subset B_{\max}$.

Les prolongements maximaux positifs sont donc liés à des conditions aux limites rendant positive l'expression $\int_{\partial\Omega}(v\cdot Au, u)\,d\sigma$.

On dit qu'un sous-espace U de $\mathbb{C}^m$ est maximal positif pour une matrice hermitienne $m\times m$ M si (i) U est positif c'est-à-dire $(Mu, u)\geqq 0$ pour tout $u\in U$. (ii) Quel que soit V sous-espace de $\mathbb{C}^m$ contenant strictement U, il existe $v\in V$ vérifiant $(Mv, v)<0$.

---

[2] On note par le même symbole le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{C}^m$ et le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^m$.

Exemple. Toute matrice hermitienne M décompose canoniquement l'espace $\mathbb{C}^m$ en la somme de trois sous-espaces stables M_+, M_-, M_0 engendrés respectivement par les vecteurs propres associés aux valeurs propres, strictement positives, strictement négatives, nulles; $U = M_+ \oplus M_0$ fournit alors un exemple de sous-espace maximal positif.

Lemme II.1.[3] (i) *Si U est un sous-espace maximal positif, il contient* $M_0 = \operatorname{Ker} M$.

(ii) *Pour tout sous-espace maximal positif U de M on a l'égalité* $\dim U = \dim M_+ + \dim M_0$.

Démonstration. On remarque d'abord que pour tout $u \in U$ et tout $\xi \in M_0$ on a

$$\operatorname{Re}\big(M(u+\xi), u+\xi\big) = \operatorname{Re}(Mu, u) + \operatorname{Re}(Mu, \xi) = \operatorname{Re}(Mu, u) \geqq 0;$$

donc $M_0 \subset U$, ce qui prouve (i). On introduit l'espace

$$V = \big(M(U)\big)^\perp = \{v \in \mathbb{C}^m \mid (Mu, v) = 0, \forall u \in U\};$$

V est un sous-espace négatif. En effet si $v \in V$ appartient à U, on a $(Mv, v) = 0$ et si $v \notin V$, on a $(Mv, v) < 0$; sinon le sous-espace $U \oplus \{\lambda v\}$ serait positif et contiendrait strictement U, ce qui contredit la maximalité de U_0. Désignons par m_+, m_0 et m_- les dimensions de M_+, M_0 et M_-; comme U est positif, $U \cap M_- = \{0\}$ et on a

$$\dim U + m_- \leqq m_+ + m_0 + m_- = m.$$

Comme $\operatorname{Ker} M \subset U$, on a $\dim V = m - \dim M(U) = m - (\dim U - m_0)$.

En utilisant la relation $M_+ \cap V = \{0\}$, il vient $m - (\dim U - m_0) + m_+ \leqq m$; d'où finalement $m_0 + m_+ \leqq \dim U \leqq m_0 + m_+$.

Soit $x \in \partial\Omega$ tel que $\partial\Omega$ soit de classe C^k $(k \geqq 2)$ dans un voisinage de x. Il existe donc θ voisinage ouvert de x et T difféomorphisme de classe C^k de θ sur $T(\theta)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$T(\theta \cap \Omega) \subset \{y = (\hat{y}, y_n), 0 < y_n < 1\}, \qquad T(\theta \cap \partial\Omega) \subset \{y = (\hat{y}, 1)\}.$$

On pose $y = Tx$ et on suppose que $x \to T_n x = y_n$ est normalisé de manière à vérifier $|\operatorname{grad} T_n| = 1$ sur $\theta \cap \partial\Omega$ ce qui entraîne que $\partial T_n / \partial x_i = \nu_i$ sur $\theta \cap \partial\Omega$.

Sur $\theta \cap \Omega$ on considère la matrice hermitienne $\nu^T \cdot A = \sum_{i=1}^n A_i \dfrac{\partial T_n}{\partial x_i}$; elle coïncide avec $\nu \cdot A$ sur $\partial\Omega$ et elle décompose $\mathbb{C}^m$ en la somme directe de trois sous-espaces $(\nu^T A)_+$, $(\nu^T A)_-$, $(\nu^T A)_0$, respectivement strictement positifs, négatifs, et nuls pour $\nu^T A$ et stables par $\nu^T A$. On note P^+, P^- et P^0 les projecteurs orthogonaux sur ces espaces.

Définition II.1. Soit $\omega \subset \bar{\Omega}$ un ouvert de $\bar{\Omega}$ et, pour tout $x \in \omega$, $X(x)$ un sous espace de $\mathbb{C}^m$. On dit que l'application $x \to X(x)$ est de classe C^k si $\dim X(x) = r$

[3] Ce résultat est vraisemblablement connu, mais nous ne l'avons pas trouvé dans la littérature.

est constante sur ω, et s'il existe $\Lambda(x) \in C^k(\omega, \mathscr{L}(\mathbb{C}^m))$ telle que $\Lambda^*(x)\Lambda(x) = I$ pour tout $x \in \omega$ et $X(x) = \Lambda(x)\,\mathbb{C}^r$ (où $\mathbb{C}^r$ est identifié avec l'espace des $u \in \mathbb{C}^m$ tels que $u_{r+1} = u_{r+2} = \cdots = u_m = 0$).

Remarque II.1. S'il existe une base orthonormée $b_1, \ldots, b_r(x)$ de $X(x)$ $(b_i \in (C^k(\omega))^m$, l'application $x \to X(x)$ est de classe C^k (complétion d'une base de $X(x)$ en une base régulière de l'espace).

Remarque II.2. Si $\Lambda(x)$ est de classe C^k, le projecteur orthogonal sur $X(x)$, $P_{X(x)}$ appartient à $C^k(\omega, \mathscr{L}(\mathbb{R}^m))$.

Définition II.2. On dit qu'un point $x_0 \in \partial\Omega$ est C^k régulier si

(i) $\partial\Omega$ est de classe C^k sur un voisinage de x_0,

(ii) il existe θ et T comme ci-dessus tels que les applications $x \to (v^T A)_+(x)$ et $x \to (v^T A)_-(x)$ soient de classe C^k sur $\theta \cap \partial\bar{\Omega}$.

Le lemme suivant fournit un critère simple permettant de vérifier la régularité d'un point x_0.

Lemme II.2. *On suppose que* (i) *est vérifié et qu'il existe un voisinage θ de x_0 tel que les A_i soient de classe C^k sur $\theta \cap \bar{\Omega}$. Si toutes les valeurs propres de* $(v \cdot A)(x_0)$ *sont distinctes et non nulles, x_0 est C^k régulier.*

Démonstration. En choisissant θ assez petit, on peut supposer que les valeurs propres de $(v^T \cdot A)(x)$ sont encore distinctes et non nulles sur $\theta \cap \bar{\Omega}$. Ce sont donc des fonctions de classe C^k. On introduit alors une matrice unitaire $\Lambda(x)$ de classe C^k telle que $\Lambda^{-1}(v^T A)\Lambda = D$ soit diagonale, les sous-espaces D_+ et D_- étant indépendants de x. On a alors $(v^T \cdot A)_+(x) = \Lambda(x)\, D_+$ et $(v^T \cdot A)_-(x) = \Lambda(x)\, D_-$.

Remarque II.3. Il résulte de la définition d'un point C^k régulier que si x_0 est C^k régulier, il existe $\Lambda(x) \in C^k(\theta \cap \bar{\Omega}, \mathscr{L}(\mathbb{R}^m))$ telle que pour $x \in \theta \cap \bar{\Omega}$ on ait

$$\Lambda^*(x)\Lambda(x) = I \quad \text{et} \quad \Lambda^{-1}(x)(v^T A)(x)\Lambda(x) = \Delta(x) \tag{II.2}$$

où Δ s'écrit $\begin{pmatrix} \Delta^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^- \end{pmatrix}$.

Lemme II.3. *Soit $u \in H$ tel que $Lu \in H$; alors au voisinage d'un point C^1 régulier de $\partial\Omega$, les traces $P^\pm u$ sur $\theta \cap \partial\Omega$ sont définies (dans $H^{-1/2}(\theta \cap \partial\Omega)$) et on a, pour tout $v \in (\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^m$ à support dans θ, la formule de Green*

$$(Lu, v) + (u, L^{(*)} v) = \langle P^+ u + P^- u, (v \cdot A) v \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}}. \tag{II.3}$$

Démonstration. On remarque d'abord que si $u \in H$ et $Lu \in H$, il en va de même pour Φu, $\Phi \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$. On se ramène donc à une fonction u à support dans un voisinage convenable de x. En introduisant le difféomorphisme T défini ci-dessus et en posant $y = Tx$, $\tilde{u}(y) = u(T^{-1}y)$, la relation $Lu = h$ devient

$$(v^T \cdot A)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_n}(Tx) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}(Tx) = h(x) \tag{II.4}$$

où

$$B_i(x)=\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x).$$

Posons $v(y)=\Lambda^{-1}(T^{-1}y)\,\tilde{u}(y)$, l'équation (II.4) devient

$$(v^T\cdot A)(x)\,\Lambda(x)\frac{\partial v}{\partial y_n}(y)+\sum_{i=1}^{n-1}B_i(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}(Tx)=h_1 \tag{II.5}$$

soit

$$\Delta(T^{-1}y)\frac{\partial v}{\partial y_n}(y)+\sum_{i=1}^{n-1}C_i(y)\frac{\partial v}{\partial y_i}(y)=h_2 \tag{II.6}$$

soit enfin, pour $1\leqq j\leqq m_+$ et pour $m_+ + m_0+1\leqq j\leqq m$,

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_n}(y)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}(y)\frac{\partial v_k}{\partial y_i}(y)=h_3, \tag{II.7}$$

car Δ^+ et Δ^- sont inversibles. Ces relations sont vérifiées au sens des distributions, mais comme v est nul en dehors de $T(\operatorname{supp}\Phi)$, elles s'étendent de façon évidente à $G=\{y=(\hat{y},y_n),\ 0<y_n<1\}$. On en déduit que, pour $1\leqq j\leqq m_+$ et $m_+ + m_0+1\leqq j\leqq m$, $v_j\in L^2(0,1;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, $\dfrac{\partial v_j}{\partial y_n}\in L^2(0,1;H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Donc v_j admet une trace en $y_n=1$ dans $H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Or $P^+u=\Lambda(x)Q^+v(Tx)$ et $P^-u=\Lambda(x)Q^-v(Tx)$, où Q^+ et Q^- désignent les projecteurs sur les sous-espaces positifs et négatifs, canoniques de Δ. La formule de Green s'obtient de manière standard à partir des relations (II.5) et (II.7) en notant que $\langle P^0u, v^TAv\rangle=0$.

Corollaire II.1. *On suppose que $x\to X(x)$ est de classe C^1 sur un voisinage $\theta\cap\partial\Omega$ de $x_0\in\partial\Omega$, point C^1 régulier. Alors si $X(x)$ est un sous-espace maximal positif de $(v\cdot A)(x)$ pour $x\in\theta\cap\partial\Omega$, on peut donner un sens à l'expression $u|_{\theta\cap\partial\Omega}\in X$ pour tout $u\in H$ vérifiant $Lu\in H$.*

Démonstration. La relation $u\in X$ s'exprime par l'équation

$$(I-\operatorname{Proj}_{X(x)})\,u(x)=M(x)\,u(x)=0 \quad \text{sur } \theta\cap\partial\Omega. \tag{II.8}$$

$M(x)$ appartient à $C^1(\theta\cap\partial\Omega;\mathscr{L}(\mathbb{C}^m))$, il définit donc un multiplicateur dans $(H^{-1/2}(\theta\cap\partial\Omega))^m$. La relation (II.8) s'écrit aussi $M(x)\,(P^+u(x)+P^-u(x)+P^0u(x))=0$, soit encore

$$M(x)(P^+u+P^-u)=0. \tag{II.9}$$

En effet, comme $X(x)$ est un sous-espace maximal positif de $v\cdot A$, on a $\operatorname{Ker}(v\cdot A)(x)=P^0(\mathbb{C}^m)\subset X(x)$ ou encore $M(x)\,P^0(x)=0$. L'égalité (II.9) dans $(H^{-1/2}(\partial\Omega\cap\theta))^m$ définit la relation $u(x)\in X(x)$ sur $\theta\cap\partial\Omega$.

Soit $x\to X(x)$ une application C^1 par morceaux de $\partial\Omega$ dans les sous-espaces de $\mathbb{C}^m$ telles que, pour tout x, $X(x)$ soit un sous-espace maximal positif pour la matrice $v\cdot A$. On peut alors définir les opérateurs $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ en posant

$$D(\mathscr{B}_0)=\{u\in(\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^m \mid u(x)\in X(x) \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega\},\qquad \mathscr{B}_0u=Lu+\delta u,$$

$D(\mathscr{B})=\{u\in H \mid Lu\in H,\, u(x)\in X(x)$ au voisinage de tout point régulier$\}$, et $\mathscr{B}u=Lu+\delta u$. Bien entendu on a $B\subset\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$; $\mathscr{B}_0$ est un prolongement positif de B et $\mathscr{B}$ est un prolongement fermé de $\mathscr{B}_0$.

L'opérateur $\mathscr{B}_0^*$ défini par

$$D(\mathscr{B}_0^*)=\{u\in(\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^m \mid \langle \nu A(x)u(x),\xi\rangle=0,\ \forall \xi\in X(x),\ \text{p.p. sur } \partial\Omega\}$$

et $\mathscr{B}_0^*=L^*u+\delta u$ est positif; $(\mathscr{B}_0^*)^*=B$ (utiliser le Lemme II.3); ainsi d'après le Théorème 5 de PHILLIPS [28] il existe un prolongement maximal $\hat{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}_0$ vérifiant $\mathscr{B}_0\subset\hat{\mathscr{B}}\subset\mathscr{B}$. Si $\mathscr{B}$ est positif, ce prolongement est unique; ceci est réalisé dès que $\mathscr{B}=\bar{\mathscr{B}}_0$; on dira alors que $\mathscr{B}$ est régulier. La positivité et la régularité de $\mathscr{B}$ ont été étudiées par de nombreux auteurs (FRIEDRICHS [10], LAX & PHILLIPS [14], BARDOS [3]); elle est en particulier assurée lorsque tous les points de $\partial\Omega$ sont C^1 réguliers et lorsque l'application $x\to X(x)$ est de classe C^1 (mais aussi dans d'autres cas cf. bibliographie ci-dessus). Enfin il est bon de noter, en utilisant ce qui précède, que lorsque tous les points de $\partial\Omega$ sont C^1 réguliers, l'opérateur défini par $D(\mathscr{B})=\{u\in H \mid Lu\in H,\, P^-u|_{\partial\Omega}=0\}$ vérifie la relation $\mathscr{B}=\bar{\mathscr{B}}_0$.

Voici maintenant le résultat essentiel de cette section. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^{2s}; on désigne toujours par $L=\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ un système symétrique du premier ordre, à coefficients dans $C^1(\Omega)$. Soit d'autre part $E=\sum_{|\alpha|\leqq 2s} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur fortement uniformément elliptique (cf. YOSIDA [25] p. 176). On suppose, pour simplifier, que $a_\alpha\in C^\infty(\bar{\Omega})$ pour tout α. On désigne également par E l'opérateur défini par $D(E)=(H^{2s}(\Omega)\cap H_0^s(\Omega))^m$, $Eu=\sum_{|\alpha|\leqq 2s} a_\alpha D^\alpha u$. On appelle enfin u_ε la solution du problème

$$\text{(II.10)} \qquad \varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f, \qquad \lambda>0 \text{ assez grand}, \quad f\in H.$$

Théorème II.1. *Tout élément u de H, limite faible d'une suite u_{ε_n} $(\varepsilon_n\to 0)$ de solutions de* (II.10), *vérifie les relations $Lu+\lambda u=f$ dans Ω et $P^-u|_{\partial\Omega}=0$ au voisinage de tout point $x_0\in\partial\Omega$, C^{2s} régulier.*

Démonstration. Il est d'abord évident que u_ε reste borné dans H et que l'on a $Lu+\lambda u=f$ au sens des distributions. En multipliant (II.10) par u_ε et en utilisant l'inégalité de Garding on obtient[4]

$$\text{(II.11)} \qquad \varepsilon\|u_\varepsilon\|_s^2\leqq C_1.$$

Par interpolation entre $(H_0^s(\Omega))^m$ et $(L^2(\Omega))^m$, on en déduit

$$\text{(II.12)} \qquad \varepsilon^{1/2s}\|u_\varepsilon\|_1\leqq C_2 \quad \text{et donc } |Lu_\varepsilon|_H\leqq C_3\,\varepsilon^{-1/2s}.$$

En utilisant (II.10) et la régularité de l'opérateur E, il vient

$$\text{(II.13)} \qquad \|u_\varepsilon\|_{2s}\leqq C_4\,\varepsilon^{-\left(1+\frac{1}{2s}\right)}.$$

[4] On désigne par $\|\cdot\|_s$ la norme dans l'espace $(H^s(\Omega))^m$ et par C_i différentes constantes indépendantes de ε.

Pour $0<\eta<1$ on a enfin

$$\text{(II.14)} \qquad \|u_\varepsilon\|_{2s(1-\eta)+s\eta} \leqq C_5\, \varepsilon^{-\eta/2s}\, \varepsilon^{-(1-\eta)\left(1+\frac{1}{2s}\right)}.$$

En faisant $\eta=1/s$ dans (II.14) il vient

$$\text{(II.15)} \qquad \|u_\varepsilon\|_{2s-1} \leqq C_6\, \varepsilon^{-(1-1/2s)}.$$

Soit $x_0 \in \partial\Omega$ un point C^{2s} régulier, on introduit le voisinage θ de x_0 et le difféomorphisme T: $\theta \to T(\theta)$; Soit $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 dans un voisinage de x_0 et nulle en dehors de θ. De (II.15) on déduit que

$$g_\varepsilon = \varepsilon E(\phi u_\varepsilon) + L(\phi u_\varepsilon) + \lambda \phi u_\varepsilon$$

reste borné dans H lorsque ε tend vers zéro.

Désignons maintenant par $\tilde{g}_\varepsilon$ et $\tilde{u}_\varepsilon$ les fonctions $g_\varepsilon(T^{-1}y)$ et $\phi(T^{-1}y)\, u_\varepsilon(T^{-1}y)$. On a la relation

$$\text{(II.16)} \qquad \varepsilon \sum_{|\alpha| \leqq 2s} \tilde{a}_\alpha(y) D^\alpha \tilde{u}_\varepsilon + v^T \cdot A(T^{-1}y) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n} + \sum \tilde{A}_i(y) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n} + \lambda \tilde{u}_\varepsilon = \tilde{g}_\varepsilon,$$

soit

$$\text{(II.17)} \qquad \begin{aligned} &\varepsilon \tilde{a}_{2s} \frac{\partial^{2s} \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + v^T A(T^{-1}y) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n} \\ &= \tilde{g}_\varepsilon - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(y) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_i} - \lambda \tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon \sum_{\alpha \neq (0,0\ldots 2s)} \tilde{a}_\alpha(y) D^\alpha \tilde{u}_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon, \end{aligned}$$

avec $a_{2s}(-1)^s \geqq C_0 > 0$ sur $T(\theta \cap \Omega)$.

Grâce à (II.15), on voit que $\tilde{h}_\varepsilon$ demeure borné dans $L^2(0,1; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^m)$. On pose $\tilde{v}_\varepsilon(y) = \Lambda^{-1}(T^{-1}y)\, \tilde{u}_\varepsilon(y)$ comme dans la Remarque II.3. L'équation (II.17) devient

$$\text{(II.18)} \qquad \varepsilon \tilde{a}_{2s} \Lambda(T^{-1}y) \frac{\partial^{2s}}{\partial y_n^{2s}} \tilde{v}_\varepsilon + (v^T \cdot A)(T^{-1}y) \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial y_n} = \tilde{k}_\varepsilon.$$

La fonction $\tilde{k}_\varepsilon$ peut s'écrire sous la forme

$$\text{(II.19)} \qquad \tilde{k}_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon - \tilde{B}_0(y) \tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon \sum_{p<2s} C_p(y) \frac{\partial^p \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n^p}.$$

On applique aux deux membres de (II.18) l'opérateur $\Lambda^{-1}(T^{-1}y)$ et on divise par $(-1)^s \tilde{a}_{2s}$; on obtient

$$\text{(II.20)} \qquad \varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s} \tilde{v}_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + \frac{\Delta(T^{-1}y)}{(-1)^s \tilde{a}_{2s}} \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial y_n} = \frac{\Lambda^{-1}(T^{-1}y)}{(-1)^s \tilde{a}_{2s}} \cdot \tilde{k}_\varepsilon.$$

On applique alors l'opérateur Q^- (cf. Lemme (II.2)); Q^- commute avec $\Delta(T^{-1}y)$ et est indépendant de y. Ceci donne

$$\text{(II.21)} \qquad \varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s}}{\partial y_n^{2s}} Q^- \tilde{v}_\varepsilon + C(y) \frac{\partial}{\partial y_n} Q^- \tilde{v}_\varepsilon = s_\varepsilon(y)$$

avec

$$C(y) = \frac{\Delta(T^{-1}y)}{(-1)^s \tilde{a}_{2s}}, \qquad t_\varepsilon(y) = \frac{Q^- \Lambda^{-1}(T^{-1}y)}{(-1)^s \tilde{a}_{2s}} \tilde{k}_\varepsilon.$$

On pose enfin $w_\varepsilon = Q^- \tilde{v}_\varepsilon$; $C(y)$ opère dans $Q^-(\mathbb{C}^m)$. On notera également $C(y)$ sa restriction à $Q^-(\mathbb{C}^m)$; c'est un opérateur strictement négatif, c'est-à-dire, vérifiant la relation $(C(y)\,\xi, \xi) \leqq -\delta\,|\xi|^2$ pour tout $\xi \in Q^-(\mathbb{C}^m)$. D'autre part l'application $y \to C(y)$ est de classe C^1 de $T(\theta \cap \Omega)$ dans $\mathscr{L}(Q^-(\mathbb{C}^m))$. Elle se prolonge donc en une application encore notée $y \to C(y)$ de $G = \{(\hat{y}, y_n), 0 < y_n < 1\}$ dans $\mathscr{L}(Q^-(\mathbb{C}^m))$. On notera r la dimension de $Q^-(\mathbb{C}^m)$. L'application $y \to C(y)$ peut être choisie de classe C^1 et strictement négative. La relation (II.21) s'écrit alors sous la forme

$$\varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s}}{\partial y_n^{2s}} w_\varepsilon + C(y) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_n} = s_\varepsilon. \tag{II.22}$$

Comme w_ε et s_ε sont nuls en dehors de $T(\theta \cap \Omega)$, on peut, sans difficultés, prolonger (II.22) à G tout entier. On observe enfin que l'on a

$$P^- u_\varepsilon(x)|_{\theta \cap \partial\Omega} = A(T^{-1} y)\, w_\varepsilon(y)|_{T(\theta \cap \partial\Omega)} = 0. \tag{II.23}$$

Pour prouver que $P^- u|_{\partial\Omega} = 0$, il suffit donc de passer à la limite dans (II.23) ou de prouver que $w(\hat{y}, 1) \equiv 0$ (dans $(H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ par exemple). D'après les théorèmes de traces usuels il suffit donc de montrer que $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_n}$ reste borné dans $L^2(]0, 1[; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^r)$. Pour cela on remarque que, d'après (II.19) et (II.15), s_ε reste borné dans $L^2(]0, 1[; (H^{-1}))^r)$. Il suffit donc enfin d'établir le lemme suivant.

Lemme II.4. *Soit $y \to C(y)$ une application de classe C^1 de $G = \{(\hat{y}, y_n), 0 < y_n < 1\}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^r)$. On suppose que $C(y)$ est strictement négatif. Soit d'autre part u_ε une fonction appartement à $(H_0^s(G))^r$, nulle au voisinage de $y_n = 0$. On suppose que u_ε est borné dans $(L^2(G))^r$ et que*

$$v_\varepsilon = \varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s} u_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + C(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_n}$$

est borné dans $L^2(]0, 1[; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^r)$; alors $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_n}$ est borné dans

$$L^2(]0, 1[; (H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})^r)).$$

Démonstration. On désigne par $\hat{\Delta}$ le laplacien en les variables $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ et on pose

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_n}(\cdot, y_n) = (\mu - \hat{\Delta})\, w_\varepsilon(\cdot, y_n) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon(\cdot, y_n) = (\mu - \hat{\Delta})\, h_\varepsilon(\cdot, y_n)$$

($\mu > 0$ assez grand, à déterminer dans la suite de la démonstration). On note $\|\ \|$ la norme définie sur $(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ par

$$\|u(y_n)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ((\mu - \hat{\Delta})\, u, u)\, d\hat{y}.$$

On a

$$\varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s-1}}{\partial y_n^{2s-1}} (\mu - \hat{\Delta})\, w_\varepsilon + C(y)(\mu - \hat{\Delta})\, w_\varepsilon = (\mu - \hat{\Delta})\, h_\varepsilon. \tag{II.24}$$

Comme v_ε est borné dans $L^2(]0,1[;(H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))^r)$, h_ε est borné dans $L^2(]0,1[;(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r)$. On a, en notant également (,) le produit scalaire dans $(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))^r$,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (-1)^{s-1}\left(\frac{\partial^{2s-1}}{\partial y_n^{2s-1}}(\mu-\hat{\Delta})\,w_\varepsilon, w_\varepsilon\right)dy_n\\ &=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y_n}(\mu-\hat{\Delta})\frac{\partial^{s-1}}{\partial y_n^{s-1}}w_\varepsilon, \frac{\partial^{s-1}}{\partial y_n^{s-1}}w_\varepsilon\right)dy_n\\ &=\frac{1}{2}\left((\mu-\hat{\Delta})\frac{\partial^{s-1}}{\partial y_n^{s-1}}w_\varepsilon(\cdot,1), \frac{\partial^{s-1}}{\partial y_n^{s-1}}w_\varepsilon(\cdot,1)\right)\geqq 0\end{aligned}\tag{II.25}$$

car d'une part $w_\varepsilon \in H_0^{s-1}(G)$, donc ses $s-2$ premières dérivées sont nulles sur ∂G, et d'autre part w_ε est identiquement nulle au voisinage de l'hyperplan $y_n=0$. De même on a

$$\begin{aligned}&-\int_0^1 (C(y)(\mu-\hat{\Delta})\,w_\varepsilon, w_\varepsilon)\,dy_n\\ &=\int_0^1\left(-\mu(C(y)\,w_\varepsilon, w_\varepsilon)-\sum_{i=1}^{n-1}\left(C(y)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_i}, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_i}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial C(y)}{\partial y_i}w_\varepsilon, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_i}\right)\right)dy_n.\end{aligned}\tag{II.26}$$

Comme C est un opérateur strictement négatif, de classe C^1, on déduit de (II.26) l'inégalité

$$\begin{aligned}-\int_0^1 (C(y)(\mu-\hat{\Delta})\,w_\varepsilon, w_\varepsilon)\,dy_n &\geqq \int_0^1 \mu\delta\,|w_\varepsilon(\cdot,y_n)|^2_{(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\,dy_n\\ &\quad+\int_0^1 \delta\,\|w_\varepsilon(\cdot,y_n)\|^2_{(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\,dy_n\\ &\quad-C_1\int_0^1 |w_\varepsilon(\cdot,y_n)|_{(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\cdot\|w_\varepsilon(\cdot,y_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\,dy_n\\ &\geqq C_2\int_0^1 \|w_\varepsilon(\cdot,y_n)\|^2_{(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\,dy_n\end{aligned}\tag{II.27}$$

(à condition de prendre μ assez grand, C_2 est alors une constante strictement positive, indépendante de ε).

En multipliant scalairement (II.24) par $w_\varepsilon(\cdot,y_n)$ dans $(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))^r$, et en intégrant de 0 à 1, on obtient, compte tenu de (II.25) et (II.27), l'inégalité

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \|w_\varepsilon(\cdot,y_n)\|^2_{(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r}\,dy_n\\ &\leqq\frac{1}{C^2}\|w_\varepsilon\|_{L^2(]0,1[;(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r)}\cdot\|h_\varepsilon\|_{L^2(]0,1[;(H^1(\mathbb{R}^{n-1}))^r)}.\end{aligned}\tag{II.28}$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Corollaire II.2. *On suppose que les hypothèses du Théorème* II.1 *sont vérifiées et que de plus, l'opérateur $\mathcal{B}$ défini par $D(\mathcal{B})=\{u\in H, Lu\in H;\ P^-u|_{\partial\Omega}=0$ au* *voisinage de tout point C^{2s} régulier\}, $\mathscr{B}u = Lu + \lambda u$ est positif (il est alors maximal positif). Alors u_ε, solution de $\varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f$, converge dans H faible vers l'unique solution $u \in H$ du problème $Lu + \lambda u = f$, $P^- u|_{\partial\Omega} = 0$ au voisinage de tout point régulier.*

Compte tenu de ce qui précède la démonstration de ce corollaire est évidente, nous la laissons au lecteur; de même nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, en utilisant le Théorème I.3′ un corollaire pour l'équation d'évolution

$$\frac{d u_\varepsilon}{d t} + \varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon = f.$$

Remarque II.4. On peut bien entendu remplacer l'opérateur L par l'opérateur $L+K$ où K désigne un opérateur fortement dominé par L et positif, ou tout simplement borné. Les résultats ci-dessus restent alors valables (prendre λ assez grand). De même si L est un opérateur strictement positif sur $D(E)$, on peut considérer u_ε, solution de l'équation $\varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon = f$, et procéder comme ci-dessus.

Nous avons énoncé et prouvé le Théorème II.1 dans un cas assez simple, de manière à dégager les hypothèses essentielles et les différentes étapes de la démonstration. Voici une généralisation pour des *systèmes* elliptiques (il est bien sûr possible de construire d'autres généralisations; cf. Remarques II.4 et II.6).

On désigne par $e(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire continue et coercive sur $(H_0^s(\Omega))^m$,

$$e(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{\substack{|\delta| \leqq s \\ |\gamma| \leqq s}} E_{\delta,\gamma} D^\delta u, D^\gamma v \Big) dx$$

dont les coefficients $E_{\delta,\gamma}$ sont des matrices $m \times m$, supposées de classe C^∞ pour simplifier. On note E l'opérateur non borné dans H défini en posant

$$D(E) = \big(H^{2s}(\Omega) \cap H_0^s(\Omega)\big)^m \quad \text{et} \quad Eu = \sum_{\substack{|\delta| \leqq s \\ |\gamma| \leqq s}} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (E_{\delta,\gamma} D^\delta u) = \sum_{|\alpha| \leqq 2s} E_\alpha D^\alpha u.$$

On suppose que dans un voisinage de $\partial\Omega$ les matrices E_α sont hermitiennes, pour $|\alpha| = 2s$; on introduit la matrice

$$E_\nu = \sum_{|\alpha| = 2s} (-1) E_\alpha \nu^\alpha \qquad (\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \cdot \nu_2^{\alpha_2} \dots \nu_n^{\alpha_n})$$

définie sur $\partial\Omega$. D'après la coercivité de la forme $e(,)$ cette matrice est définie positive. On note $E_\nu^{1/2}$ son unique racine carrée définie positive. La matrice $(E, L)_\nu = E_\nu^{-1/2} (\nu \cdot A) E_\nu^{-1/2}$ est également hermitienne, elle décompose $\mathbb{C}^m$ en la somme de trois sous-espaces stables $(E, L)_\nu^+$, $(E, L)_\nu^0$, $(E, L)_\nu^-$, auxquels on associe les projecteurs P_E^+, P_E^0, P_E^-. En tout point $x \in \partial\Omega$ on introduit l'espace

$$X(x) = \{\xi \in \mathbb{C}^m \; P_E^- E_\nu^{1/2} \xi = 0\} = E_\nu^{-1/2}\big((E, L)_\nu^+ \oplus (E, L)_\nu^0\big)$$

Cet espace est positif pour la matrice $\nu \cdot A$, de plus d'après la loi d'inertie de Silvester, on a $\dim X(x) = \dim(\nu \cdot A)_+ + \dim(\nu \cdot A)_0$; on déduit alors du Lemme II.1 que $X(x)$ est maximal positif. Enfin il est facile de voir qu'au voisinage de tout point $x \in \partial\Omega$ C^{2s} régulier, $X(x)$ est de classe C^{2s}.

Théorème II.2. *On désigne par u_ε la solution du problème* (II.29) $\varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f$ *($f \in H$, λ réel positif assez grand). Alors tout élément u de H, limite dans H faible d'une suite u_{ε_n} de solution de* (II.29), *vérifie les relations:*

(II.30)
(i) $Lu + \lambda u = f$
(ii) $P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega} = 0$ *au voisinage de tout point $x \in \partial\Omega$ C^{2s} régulier.*[5]

Démonstration. La démonstration débute par des majorations à priori qui s'obtiennent comme dans la démonstration du Théorème II.1. Ensuite on localise et on introduit le difféomorphisme T de manière à obtenir la relation

$$\varepsilon(-1)^s E_\nu^T \frac{\partial^{2s} \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + (\nu^T \cdot A)(T^{-1} y) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial y_n} = \tilde{h}_\varepsilon \tag{II.31}$$

où

$$E_\nu^T = (-1)^s \sum_{|\alpha| = 2s} E_\alpha \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}.$$

Sur un voisinage convenable de $x_0 \in \partial\Omega$, E_ν^T est définie positive et prolonge E_ν.

On pose $\tilde{w}_\varepsilon = (E_\nu^T)^{1/2} \tilde{u}_\varepsilon$ et on obtient

$$\varepsilon(-1)^s \frac{\partial^{2s} \tilde{w}_\varepsilon}{\partial y_n^{2s}} + (E_\nu^T)^{-1/2} (\nu^T A)(E_\nu^T)^{-1/2} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_n} = \tilde{l}_\varepsilon. \tag{II.32}$$

On est ainsi ramené à une équation analogue à (II.17) où $\nu^T A$ est remplacé par la matrice $(E_\nu^T)^{-1/2} (\nu^T \cdot A)(E_\nu^T)^{-1/2} = (E, L)_{\nu T}$. Cette matrice décompose $\mathbb{C}^m$ en $(E, L)_{\nu T}^+$, $(E, L)_{\nu T}^-$ et $(E, L)_{\nu T}^0$; on montre que ces sous-espaces varient régulièrement, ce qui permet de réduire $(E, L)_{\nu T}$ à la forme

$$\begin{pmatrix} \Delta^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^- \end{pmatrix}.$$

On en déduit comme dans la démonstration du Théorème II.1 que $P_E^- \tilde{w}|_{y_n=1} = 0$, c'est à dire $P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega} = 0$, au voisinage de x_0.

Corollaire II.3. *On suppose que les hypothèses du Théorème* II.3 *sont vérifiées et que de plus l'opérateur $\mathscr{B}$ défini par $D(\mathscr{B}) = \{u \in H \mid Lu \in H, P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega} = 0$ au voisinage de tout point régulier$\}$ est positif, alors u_ε, solution de* (II.29), *converge dans H faible vers la solution unique du problème $Lu + \lambda u = f$, $P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega} = 0$ au voisinage de tout point régulier.*

Bien entendu le Corollaire II.3 se démontre comme le Corollaire II.2. On peut également considérer les équations d'évolution associées.

Remarque II.4. Pour généraliser un peu plus on peut être amené à considérer des équations de la forme $\varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f$, où E n'est plus associé à un problème de Dirichlet, mais est défini par la donnée d'un sous-espace V de $(H^s(\Omega))^m$

[5] Soient (λ, ξ_λ) les valeurs et les vecteurs propres de $\nu \cdot A$ relativement à E_ν (i.e. $\nu \cdot A \xi_\lambda = \lambda E_\nu \xi_\lambda$). La condition (ii) peut s'énoncer également en disant que $u(x)$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs ξ_λ pour $\lambda \geqq 0$.

et d'une forme sesquilinéaire continue et coercive sur $V \times V$:

$$e(u,v)=\int_{\Omega}\sum (E_{\gamma,\delta} D^{\gamma} u, D^{\delta} v)\,dx.$$

On suppose que les matrices E_α définies par

$$\sum (-1)^{|\delta|} D^{\delta} E_{\gamma,\delta} D^{\gamma} u = \sum_{|\alpha| \leqq 2s} E_\alpha D^\alpha u$$

sont hermitiennes dans un voisinage de $\partial\Omega$. On introduit alors $E_\nu = \sum_{|\alpha|=s} E_\alpha \nu^\alpha$. On suppose que V est contenu dans l'espace des $u \in (H^s(\Omega))^m$ vérifiant

$$P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega}=0$$

(au sens du Théorème II.3). Alors on peut montrer, dans les «bons» cas que u_ε, solution du problème

$$\varepsilon E u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f, \tag{II.33}$$

converge dans H faible vers u, solution du problème $Lu+\lambda u=f$, $P_E^- E_\nu^{1/2} u|_{\partial\Omega}=0$.

Remarque II.5. On ne sait en général pas prouver la convergence forte de u_ε vers u dans H. Celle-ci est cependant vérifiée dans le cas où $L=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est un opérateur scalaire et où E est un opérateur elliptique du second ordre (cf. Bardos [3], Proposition 2.7, p. 214 et aussi l'appendice I). Voici un second cas où il est possible de prouver la convergence forte.

Proposition II.2. *On suppose que E et L vérifient les hypothèses du Théorème* II.1; *et que, de plus l'opérateur $\mathscr{B}$ défini par $D(\mathscr{B})=\{u\in H \mid Lu \in H, P^- u|_{\partial\Omega}=0$ au voisinage de tout point régulier$\}$, $\mathscr{B}u=Lu+\lambda u$, est régulier. Alors si au voisinage de tout point régulier $(\nu\cdot A)^+$ est réduit à zéro, $(\varepsilon E+L+\lambda)^{-1}$ converge fortement vers $\mathscr{B}^{-1}$.*

Démonstration. Compte tenu des hypothèses il suffit de prouver que pour tout $u \in (\mathscr{D}(\bar{\Omega}))^m \cap \mathscr{D}(\mathscr{B})$, $(\varepsilon E+L+\lambda)^{-1}\mathscr{B}u$ converge vers u. On écrit

$$\begin{aligned}\delta \|u_\varepsilon - u\|^2 &\leqq \operatorname{Re}(\mathscr{B}(u_\varepsilon-u), u_\varepsilon-u)\\ &\leqq \operatorname{Re}(\mathscr{B}u,u)+\operatorname{Re}(\mathscr{B}u_\varepsilon,u_\varepsilon)-\operatorname{Re}(\mathscr{B}u_\varepsilon,u)-\operatorname{Re}(\mathscr{B}u,u_\varepsilon).\end{aligned} \tag{II.34}$$

On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{B}u,u_\varepsilon)=(\mathscr{B}u,u) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{B}u_\varepsilon,u)=(u_\varepsilon, L^{(*)}u+\lambda u)=(u, L^{(*)}u+\lambda u).$$

Enfin en utilisant la positivité de E il vient

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\operatorname{Re}(\mathscr{B}u_\varepsilon,u_\varepsilon)\leqq \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}(\mathscr{B}u,u_\varepsilon). \tag{II.35}$$

On obtient donc

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\delta\|u_\varepsilon-u\|^2 \leqq \operatorname{Re}(Lu+\lambda u,u)-(u,L^{(*)}u+\lambda u)=\int_{\partial\Omega}(\nu\cdot Au,u)\,d\sigma$$

et par hypothèse on a $\int_{\partial\Omega}(\nu\cdot Au,u)\,d\sigma \leqq 0$. Ceci termine la démonstration de la Proposition II.2.

V. THOMÉE nous a signalé que SIVASINSKII [21] a établi la convergence forte de u_ε, solution de

$$-\varepsilon\sum_{i=1}\frac{\partial}{\partial x_i}B_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+\sum A_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+\lambda u_\varepsilon=f, \qquad u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,$$

vers u, solution de $\sum A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f$, $P^- u|_{\partial\Omega}=0$, pour un choix particulier de B_i. Ceci pourrait facilement se généraliser de la manière suivante: on se place dans la situation du Corollaire II.3; on suppose que u, solution du problème

$$\sum A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f \quad \text{dans } \Omega, \qquad P_E^- E_v^{1/2} u|_{\partial\Omega}=0,$$

vérifie de plus la relation $u\in\operatorname{Ker}(A_v-E_v)$. Alors u_ε, solution de

$$-\varepsilon\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(E_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right)+\sum A_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+\lambda u_\varepsilon=f, \qquad u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,$$

converge vers u dans H fort.

Voici plusieurs exemples d'applications:

Exemple II.1. *Equations scalaires.* Soit $L=\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, une opérateur à coefficients scalaires. On sait que u_ε, solution du problème

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon+\sum a_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+\lambda u_\varepsilon=f, \qquad u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,$$

converge dans $L^2(\Omega)$ fort vers $u\in L^2(\Omega)$, solution du problème

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f, \qquad u|_{\Sigma_-}=0;$$

Σ_- désigne l'ensemble des points $x\in\partial\Omega$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,v_i(x)<0$ (cf. LEVINSON [15], OLEINIK [17], BARDOS [3] et aussi l'appendice I). On retrouve sur cet exemple un cas particulier du Théorème II.1 et du Corollaire II.2. Dans cet exemple on peut remplacer $H_0^1(\Omega)$ par un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ contenu dans l'espace des $v\in H^1(\Omega)$ vérifiant $u|_{\Sigma_-}=0$ (cf. Remarque II.4). En particulier si on prend $V=\{v\in H^1(\Omega)|\, v|_{\Sigma_-}=0\}$ on voit que u_ε, solution du problème

$$\text{(II.36)} \qquad -\varepsilon\Delta u_\varepsilon+Lu_\varepsilon+\lambda u_\varepsilon=f, \quad u_\varepsilon|_{\Sigma_-}=0; \quad \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\right|_{\partial\Omega\setminus\Sigma_-}=0,$$

converge dans $L^2(\Omega)$ vers u, solution du problème $Lu+\lambda u=f$, $u|_{\Sigma_-}=0$. Dans ce cas particulier on retrouve une approximation du type TROTTER (cf. Section I et BARDOS [2], [3]).

Exemple II.2. Cet exemple simple dû à LIONS a motivé le Théorème II.2. Soit $\Omega=]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ la solution dans $(H_0^1(\Omega))^2$

du problème de Dirichlet

$$\text{(II.37)} \qquad -\varepsilon\Delta u_\varepsilon+\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}+u_\varepsilon=f, \qquad -\beta\varepsilon\Delta v_\varepsilon+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}+v_\varepsilon=g \qquad (\beta \text{ reel}>0),$$

u_ε et v_ε restent bornés dans $L^2(\Omega)$. On peut ainsi extraire des sous-suites encore notées u_ε et v_ε convergeant respectivement vers u et v dans $L^2(\Omega)$ faible.

On pose $F_\varepsilon=f-u_\varepsilon$, $G_\varepsilon=g-v_\varepsilon$, $h_\varepsilon=\sqrt{\beta}\, v_\varepsilon$. Le système (II.37) s'écrit alors

$$\text{(II.38)} \qquad \begin{aligned} -\varepsilon\Delta(u_\varepsilon+h_\varepsilon)+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{\partial}{\partial x}(u_\varepsilon+h_\varepsilon)&=F_\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\beta}}G_\varepsilon\\ -\varepsilon\Delta(u_\varepsilon-h_\varepsilon)-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{\partial}{\partial x}(u_\varepsilon-h_\varepsilon)&=F_\varepsilon-\frac{1}{\sqrt{\beta}}G_\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que, pour $a<\eta<b$,

$$\int_a^\eta \left|\frac{\partial}{\partial x}(u_\varepsilon+h_\varepsilon)\right|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_\eta^b \left|\frac{\partial}{\partial x}(u_\varepsilon-h_\varepsilon)\right|^2 dx$$

restent bornés quand ε tend vers zéro; ainsi u et v vérifient

$$\text{(II.39)} \qquad u+\frac{\partial v}{\partial x}=f, \qquad v+\frac{\partial u}{\partial x}=g;$$

$$\text{(II.40)} \qquad u(a)+\frac{1}{\sqrt{\beta}}v(a)=0 \quad \text{et} \quad u(b)-\frac{1}{\sqrt{\beta}}v(b)=0.$$

La relation (II.40) n'est autre que la condition $P_E^- E_v^{1/2} u|_{\partial\Omega}=0$ du Théorème II.2.

Exemple II.3. *Equation de Laplace et équation des ondes.* Le problème de Dirichlet dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ $-\Delta u+u=f$, $u_{|\partial\Omega}=0$, s'écrit sous la forme d'un système en introduisant les fonctions $u_0=u$, $u_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, u_n=\frac{\partial u}{\partial x_n}$. On a alors, en posant

$$A_i=[a_i^{jk}]=\{0 \text{ si } (j,k)\neq(1,i+1),(i+1,1),\ -1 \text{ sinon}\}, \qquad U=\begin{bmatrix} u_0\\ u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}, \qquad F=\begin{bmatrix} f\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

la relation

$$\text{(II.41)} \qquad U+\sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial U}{\partial x_i}=F.$$

On considère U_ε, solution du problème perturbé

$$\text{(II.42)} \qquad -\varepsilon\Delta U_\varepsilon+\sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}+U_\varepsilon=F, \qquad U_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0.$$

D'après le Théorème II.1 et le Corollaire II.2, U_ε converge dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$ faible vers U, solution de

$$\text{(II.43)} \qquad \sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+U=F, \qquad P^- U|_{\partial\Omega}=0.$$

Comme la matrice $\nu \cdot A$ est égale à

$$-\begin{bmatrix} 0 & \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \\ \nu_1 & \\ \nu_2 & 0 \\ \vdots & \\ \nu_n & \end{bmatrix}$$

son polynome caractéristique est égal à $\lambda^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2\right) \lambda^2 = \lambda^{n-1}(\lambda^2 - 1)$, ses valeurs propres sont donc 0, 1, -1, et les sous-espaces propres correspondants sont

$$P_0 = \{\xi \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \xi_0 = 0\} \oplus \left\{\xi \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \nu_i = 0\right\}$$

$$P_- = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \xi_0 = \frac{1}{\nu_j} \xi_j, \ \xi_i = \frac{\nu_i}{\nu_j} \xi_j\right\}$$

$$P_+ = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \xi_0 = -\frac{1}{\nu_j} \xi_j, \ \xi_i = \frac{-\nu_i}{\nu_j} \xi_j\right\}.^6$$

La relation $P^- \xi = 0$ s'écrit $\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} \nu_j \xi_j = 0$; ainsi (II.43) est équivalent à

$$-\Delta u + u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = 0. \tag{II.44}$$

On comparera (II.44) avec l'Exemple I.1 en remarquant en particulier que (II.42) est équivalent à

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (I - \varepsilon \Delta)^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + u_\varepsilon = f, \qquad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0.^7 \tag{II.45}$$

(Dans (II.45) on désigne par $(I - \varepsilon\Delta)^{-1}$ la résolvante du problème de Dirichlet associé à $(I - \varepsilon\Delta)$.)

S'il est facile de prouver directement que la limite faible de u_ε vérifie l'équation $-\Delta u + u = f$, il ne nous semble pas simple d'établir directement que cette limite faible vérifie la condition $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u|_{\partial\Omega} = 0$. Cette condition peut se justifier «heuristiquement» (cf. Remarque II.6) en considérant le problème d'évolution associé. En effet $U_\varepsilon(t)$, solution du problème d'évolution

$$\frac{dU_\varepsilon}{dt} - \varepsilon \Delta U_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i} = F \tag{II.46}$$

$$U_\varepsilon(x, 0) = U_0, \qquad U_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0,$$

[6] i désigne un entier entre 1 et n tel que $\nu_i \neq 0$.

[7] On remarquera qu'en raison des conditions aux limites $\sum \frac{\partial}{\partial x_i} (I - \varepsilon\Delta)^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial u_i}$ n'est pas égal à $\Delta(I - \varepsilon\Delta)^{-1}$.

converge au sens du Théorème I.3′ vers U solution du problème

$$\text{(II.47)}\qquad \begin{gathered} \frac{dU}{dt}+\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial U}{\partial x_i}=F \\ U(x,0)=U_0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu}+U|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+}=0. \end{gathered}$$

A condition de prendre $U_0=(u_0^0, u_1^0, \ldots, u_n^0)$ vérifiant $\dfrac{\partial U_0}{\partial x_i}=u_i^0$, (II.47) est équivalent à l'équation des ondes

$$\text{(II.48)}\qquad \begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}+\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+}=0 \\ u(x,0)=h(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=k(x). \end{gathered}$$

On laisse au lecteur le soin d'établir l'équation scalaire équivalente à (II.46) et d'en déduire que sa solution converge vers celle de (II.48).

Exemple II.4. *Equations de Maxwell.* Dans $(L^2(\Omega))^6$ identifié avec l'espace $(L^2(\Omega))^3\times(L^2(\Omega))^3$, on considère l'opérateur de Maxwell L défini par

$$L\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{rot} v\\-\operatorname{rot} u\end{pmatrix},$$

L s'écrit comme un système symétrique, et la matrice $\nu\cdot A$ peut être notée symboliquement

$$\nu\cdot A=\begin{pmatrix}0 & \nu\Lambda\\-\nu\Lambda & 0\end{pmatrix}.$$

On sait qu'il existe une famille de conditions aux limites, maximales positives, isotropes, pour lesquelles L est anti-adjoint, et donc générateur d'un groupe (cf. Schmidt [20], p. 311, Théorème 2.1.3).

Le couple $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\in(H_0^1(\Omega))^3\times(H_0^1(\Omega))^3$, solution de

$$\text{(II.49)}\qquad \begin{gathered} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon+\operatorname{rot} v_\varepsilon+\lambda u_\varepsilon=f \\ -\varepsilon\Delta v_\varepsilon-\operatorname{rot} u_\varepsilon+\lambda v_\varepsilon=g, \end{gathered}$$

converge donc au sens du Théorème II.1 vers $(u,v)\in(L^2(\Omega))^3\times(L^2(\Omega))^3$ solution de

$$\text{(II.50)}\qquad \operatorname{rot} v+\lambda u=f, \qquad -\operatorname{rot} u+\lambda v=g; \qquad P^-(u,v)|_{\partial\Omega}=0.$$

Les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $\nu\cdot A$ s'obtiennent en résolvant les équations $\nu\wedge\eta=\mu\xi$ et $-\nu\wedge\xi=\mu\eta$. On trouve que les valeurs propres sont 1, 0 et -1 et que $(\nu\cdot A)_-=\{(\xi,\eta)\mid \xi\perp\eta,\ \eta=\nu\wedge\xi\}$, la condition aux limites $P^-(u,v)=0$ s'écrit donc sous la forme

$$\text{(II.51)}\qquad u\cdot\xi+v\cdot(\nu\wedge\xi)=0 \qquad \forall\xi,\ \xi\perp\nu.$$

On note $Z(\nu)$ la projection orthogonale (dans $\mathbb{R}^3$) sur le plan tangent à $\partial\Omega$ et $R(\nu)$ la rotation d'angle $\pi/2$ autour de la normale extérieure ν. On laisse au lecteur le plaisir de vérifier que (II.51) est équivalent à

$$Z(v)\,v = R(v)\,Z(v)\,u \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{II.52}$$

Ainsi la solution de (II.49) converge dans $(L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3$ faible vers (u, v), solution de

$$\operatorname{rot} v + \lambda u = f, \qquad -\operatorname{rot} u + \lambda v = g, \qquad Z(v)\,v = R(v)\,Z(v)\,u \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Comme pour l'équation de Laplace, on peut considérer le problème d'évolution associé; alors $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$, solution du problème d'évolution

$$\begin{aligned} &\frac{d u_\varepsilon}{d t} - \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \operatorname{rot} v_\varepsilon = f \\ &\frac{d v_\varepsilon}{d t} - \varepsilon \Delta v_\varepsilon - \operatorname{rot} u_\varepsilon = g \end{aligned} \tag{II.53}$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = v_\varepsilon|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \qquad u_\varepsilon(x, 0) = u_0, \qquad v_\varepsilon(x, 0) = v_0,$$

converge au sens du Théorème I.3' vers (u, v), solution du problème d'évolution

$$\frac{d u}{d t} + \operatorname{rot} v = f, \qquad \frac{d v}{d t} - \operatorname{rot} u = g \tag{II.54}$$

$$Z(v)\,v = R(v)\,Z(v)\,u \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \qquad u(0) = u_0, \qquad v(0) = v_0.$$

Remarque II.6. Dans l'Exemple I.2 l'opérateur différentiel C défini par $D(C) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $Cu = -i\Delta u$, est générateur d'un groupe unitaire, de plus il est très régulier; ainsi il préserve pour la solution de l'équation limite de (I.17) la propriété de groupe, bien que (I.17) soit parabolique. Par contre les opérateurs L introduits dans les Exemples II.3 et II.4 ne sont plus de la forme iC avec C sectoriel, leur image numérique est portée par tout l'axe imaginaire. Ainsi, bien qu'ils admettent des extensions antiadjointes qui engendrent des groupes unitaires (Théorème de Stone), les équations (II.47) et (II.54), obtenues par passage à la limite dans (II.46) et (II.53), sont dans un certain sens paraboliques. Le caractère parabolique de (II.46) et (II.53) s'est conservé. Les problèmes (II.47) et (II.54) ne sont bien posés que pour $t > 0$. Et si on identifie à zéro les seconds membres, au lieu des traditionnelles égalités de l'énergie on obtient des inégalités; par exemple pour (II.48) on a

$$\tfrac{1}{2}\left(|u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} |u'(\sigma,t)|^2 \, d\sigma \, dt = \tfrac{1}{2}\left(|\nabla h|^2 + |k|^2\right). \tag{II.55}$$

De même pour (II.54) on a

$$\tfrac{1}{2}\left(|u(t)|^2 + |v(t)|^2\right) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} |Z(v)\,v(\sigma,t)|^2 \, d\sigma \, dt = \tfrac{1}{2}\left(|u(0)|^2 + |v(0)|^2\right). \tag{II.56}$$

On remarquera enfin que les équations (II.48) et (II.54) régularisent à la frontière en; effet dans (II.48) la trace de u' est définie dans $L^2(\mathbb{R}_+, \partial\Omega)$, même si $u'(0)$ n'appartient qu'à $L^2(\Omega)$. De même dans (II.54), la trace de $Z(v)v$ et celle de $Z(v)u$ sont définies dans $L^2(\mathbb{R}_+; (\partial\Omega)^2)$ même si u_0 et v_0 n'appartiennent qu'à $(L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3$.

Remarque II.7. Dans les démonstrations de Théorèmes II.1 et II.2 on utilise surtout la positivité de l'opérateur $\sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et le fait que la matrice $v \cdot A$ est hermitienne. Aussi il est naturel de considérer non plus un opérateur L symétrique mais un opérateur $L = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ possédant les propriétés suivantes:

(i) Les matrices $A_i(x)$ sont de classe $C^1(\bar{\Omega})$.

(ii) Dans un voisinage Ω_0 de $\partial\Omega$ les matrices A_i sont hermitiennes.

(iii) Dans Ω le système L est hyperbolique au sens de Petrowski (PETROWSKI [18]) ou IKAWA [12]),

c'est-à-dire que tout point $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times S$ (S désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$) possède un voisinage V sur lequel est défini une matrice $r(x, \xi)$ de classe C^2 inversible, telle que la matrice $r(x, \xi) \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i \cdot r(x, \xi)^{-1}$ soit hermitienne sur V. L'opérateur L n'est plus alors forcément positif sur $(\mathscr{D}(\Omega))^m$ muni du produit scalaire canonique de $(L^2(\Omega))^m$. Néanmoins on peut le rendre positif en munissant $M = (L^2(\Omega))^m$ du produit scalaire défini par

$$((u, v)) = \int_{\Omega} (u, \mathscr{R} v) + (\mathscr{R} u, v)\, dx$$

où $\mathscr{R}$ désigne l'opérateur pseudo différentiel de symbole $r(x, \xi)$. On peut vraisemblablement alors généraliser les résultats des Théorèmes II.1 et II.2. Le cas ou E est défini par un opérateur scalaire à coefficients constants ne présente pas de difficultés. Cependant un article de SMOLLER & TAYLOR [29] montre que des résultats de ce type ne peuvent ètre étendus au cas où E n'est pas scalaire.

Appendice I

Complément au Cas d'une Equation Scalaire

Soient $a_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leqq i \leqq n$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière très régulière.

Théorème A.1. *Soit $f \in W^{1,1}(\Omega)$ et soit u_ε la solution de l'équation*

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \lambda u_\varepsilon = f \quad \text{sur } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

Il existe deux constantes λ_0 et C, dépendant uniquement des a_i et de Ω, telles que si $\lambda > \lambda_0$ on a

$$(\lambda - \lambda_0)\, \|u_\varepsilon\|_{W^{1,1}} \leqq C\, \|f\|_{W^{1,1}}. \tag{2}$$

Corollaire A.2. *Soit $f \in L^2(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$, et soit $\lambda > \lambda_0$. Alors la solution du problème*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda u = f \quad \text{sur } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \textstyle\sum_{-} = \{x \in \partial\Omega;\ \Sigma a_i v_i < 0\}$$

est à variation bornée.

On utilisera dans la démonstration du Théorème A.1 le

Lemme A.3. *Pour tout* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_{\partial\Omega} |\operatorname{grad} u| \, d\sigma \leqq \int_{\Omega} |\Delta u| \, dx.$$

Démonstration du Lemme A.3. Posons $h = \Delta u$ et soit u_1 la solution du problème

$$\Delta u_1 = h^+ \quad \text{sur } \Omega, \qquad u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

On sait (cf. par exemple H. BRÉZIS [6], Corollaire 1.8) que u_1 vérifie $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \geqq 0$ sur $\partial\Omega$. [Plus précisément il faut considérer $u_{1\eta}$ solution du problème $-\Delta u_{1\eta} + \eta u_{1\eta} = -h^+$ sur Ω, $u_{1\eta} = 0$ sur $\partial\Omega$; du fait que $\frac{\partial u_{1\eta}}{\partial \nu} \geqq 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit par passage à la limite quand $\eta \to 0$ que $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \geqq 0$.] Par conséquent, en intégrant (3) sur Ω on obtient

$$\int_{\Omega} h^+ \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right| d\sigma.$$

De même si u_2 désigne la solution de l'équation

$$\Delta u_2 = h^- \quad \text{sur } \Omega, \qquad u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

on a

$$\int_{\Omega} h^- \, dx = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right| d\sigma.$$

Enfin comme $u = u_1 - u_2$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\operatorname{grad} u| \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| d\sigma &\leqq \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right| d\sigma + \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right| d\sigma \\ &= \int_{\Omega} |h| \, dx = \int_{\Omega} |\Delta u| \, dx. \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème A.1. Il suffit d'établir (2) lorsque $f \in H^1(\Omega)$; le cas général s'en déduit par densité. Soit j_μ la fonction convexe définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$j_\mu(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu} |\xi|^2 & \text{si } |\xi| \leqq \mu \\ |\xi| - \dfrac{\mu}{2} & \text{si } |\xi| \geqq \mu; \end{cases}$$

$j_\mu \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $j_\mu(\xi) \to |\xi|$ quand $\mu \to 0$.

Grâce à la convexité de j_μ, on a

$$\begin{aligned} j_\mu\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\lambda}\right) - j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon) &\geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon) \cdot \left(-\varepsilon \Delta \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit après une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_\Omega j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\,dx \leqq & \int_\Omega j_\mu\left(\frac{1}{\lambda}\operatorname{grad} f\right)dx \\
& -\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_\Omega \sum_{k,l,m} \frac{\partial^2 j_\mu}{\partial \xi_k \partial \xi_l}(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_m}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_l \partial x_m}\,dx \\
& +\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\sum_k \frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z \partial x_k}\,d\sigma - \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\,dx \\
& -\frac{1}{\lambda}\int_\Omega \sum_{i,k}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx \\
\leqq & \int_\Omega j_\mu\left(\frac{1}{\lambda}\operatorname{grad} f\right)dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\sum_k \frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu \partial x_k}\,d\sigma \\
& -\frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\left(\sum_i a_i \nu_i\right) j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\,d\sigma + \frac{1}{\lambda}\int_\Omega\left(\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right) j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\,dx \\
& -\frac{1}{\lambda}\int_\Omega \sum_{i,k}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\frac{\partial j_\mu}{\partial \xi_k}(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx \\
\leqq & \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |\operatorname{grad} f|\,dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\, \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right|<\mu\right]} \frac{1}{\mu}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu^2}\,d\sigma \\
& +\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\, \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right|\geqq\mu\right]} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu^2}\,d\sigma - \frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\left(\sum_i a_i \nu_i\right) j_\mu(\operatorname{grad} u_\varepsilon)\,d\sigma \\
& +\frac{C_1}{\lambda}\int_\Omega |\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx
\end{aligned}$$

où C_1 dépend seulement des a_i. Passant à la limite quand $\mu \to 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx \leqq & \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |\operatorname{grad} f|\,dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}=0\right]}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right| d\sigma \\
& +\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\neq 0\right]} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu^2}\,d\sigma \\
& -\frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\left(\sum a_i \nu_i\right)\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right| d\sigma + \frac{C_1}{\lambda}\int |\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx.
\end{aligned}$$

Or d'après l'équation (1) on a sur $\partial\Omega$

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \left(\sum a_i \nu_i\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = f. \tag{4}$$

D'autre part si ξ désigne une fonction régulière sur Ω telle que $\xi > 0$ sur Ω, $\xi = 0$ sur $\partial\Omega$, et $\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \neq 0$ sur $\partial\Omega$, on a (cf. BRÉZIS [6] démonstration du Lemme 1)

$$\Delta u_\varepsilon - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu^2} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right)^{-1}\left(\Delta \xi - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu^2}\right) \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Grâce à (4) on obtient

$$f-(\sum a_i v_i)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial v^2}=-\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\,\omega$$

où

$$\omega(x)=\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^{-1}\left(\Delta\xi-\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}\right).$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx\leqq\frac{1}{\lambda}\int_\Omega|\operatorname{grad} f|\,dx&+\frac{1}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}=0\right]}|f|\,d\sigma\\&+\frac{1}{\lambda}\int_{\left[x\in\partial\Omega;\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\neq 0\right]}\left(|f|-\varepsilon\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\right|\omega+(\sum a_i v_i)\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\right|\right)d\sigma\\&-\frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega}(\sum a_i v_i)\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\right|d\sigma+\frac{C_1}{\lambda}\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx\leqq\frac{1}{\lambda}\int_\Omega|\operatorname{grad} f|&+\frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega}|f|\,d\sigma\\&-\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}\right|\omega\,d\sigma+\frac{\omega_1}{\lambda}\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx.\end{aligned}$$

Il en résulte (Lemme A.3) que

$$(\lambda-C_1)\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx\leqq\int_\Omega|\operatorname{grad} f|\,dx+\int_{\partial\Omega}|f|\,d\sigma+\varepsilon C_2\int_\Omega|\Delta u_\varepsilon|\,dx$$

où $C_2=\operatorname{Sup}_{\partial\Omega}\omega^-$. Enfin, comme

$$\varepsilon|\Delta u_\varepsilon|\leqq|f|+\sum|a_i|\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|+\lambda|u_\varepsilon|$$

et

$$\lambda\int_\Omega|u_\varepsilon|\,dx\leqq\int_\Omega|f|\,dx+\int_\Omega\sum\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right||u_\varepsilon|\,dx$$

on obtient

$$\varepsilon\int|\Delta u_\varepsilon|\,dx\leqq\int_\Omega|f|\,dx+C_3\int_\Omega|\operatorname{grad} u_\varepsilon|\,dx+\frac{\lambda}{\lambda-C_4}\int_\Omega|f|\,dx.$$

Remarque 1. Lorsque Ω est convexe, alors $\omega>0$ de sorte que $\omega^-\geqq 0$ et λ_0 dépend seulement des a_i. Dans le cas général λ_0 dépend de la courbure de $\partial\Omega$ via ω.

Remarque 2. Comme on peut le voir sur des exemples très simples, la solution du problème

$$\sum a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f \leftrightarrow \text{ sur } \Omega, \quad u=0 \quad \text{sur } \Sigma_-$$

n'appartient pas en général à $W^{1,1}(\Omega)$, même si $f\in C^\infty(\bar\Omega)$. On a ainsi obtenu la «meilleure» régularité possible. D'autre part si $f\in W^{1,1}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, alors u est borné et à variation bornée. Il en résulte que $u\in W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $1<p<+\infty$ et tout $s<\frac{1}{p}$.

Remarque 3. Soit u_ε la solution de (1) pour $f \in H^1(\Omega)$ (plus généralement, le laplacien pourrait être remplacé par l'opérateur $(-\Delta)^m$). On montre (cf. D. Brézis [5]) que, pour tout point x_0 de Σ_-, il existe un voisinage ω de x_0 tel que u_ε reste borné dans $H^1(\omega \cap \Omega)$.

Appendice II

Dans deux articles [26] et [27] Ilin étudie le comportement asymptotique de $u(x_1, x_2, t)$, solution dans $(\Omega =]a_1, b_1[x]\, a_2, b_2[) \times \mathbb{R}_+$ du problème

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f, \qquad u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \tag{1}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = 0 \tag{2}$$

(dans (1), f ne dépend pas de t). Les équations (1) et (2) décrivent le mouvement des vagues dans l'océan, à condition de supposer que le terme provenant de la force de Coriolis est grand (voir [26] et [27] pour les indications bibliographiques). Ilin prouve que la fonction $u(x_1, x_2, t)$ converge dans un sens faible vers la solution $w(x_1, x_2)$ du problème

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = f, \qquad w(x_1, x_2) = 0. \tag{3}$$

Plus précisément, on a

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{1}{t} \int_0^t u(\cdot, \cdot, s)\, ds - w \right|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{4}$$

Nous allons montrer que ce résultat peut se déduire de notre travail, ce qui permet d'ailleurs de le généraliser. L'idée est de passer de l'équation d'évolution $\frac{\partial}{\partial t} A u + Bu = f$ à une équation stationnaire de la forme $(\varepsilon A + B) v = f$. Pour cela on commence par prouver un théorème Tauberien, qui est une version vectorielle, mais facile du théorème de Karamata.

Théorème 2.A.1. *Soit $t \to u(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans un espace de Banach X. On suppose que u est continûment dérivable, nulle à l'origine et à croissance polynomiale. On note $\hat{u}(\lambda)$ sa transformée de Laplace:*

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)$$

et $v(t)$ la fonction définie par $v(t) = 1/t \int_0^t u(s)\, ds$. Alors

1) *Si $v(t)$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+$ et converge fortement (respectivement, faiblement) lorsque t tend vers l'infini, $\lambda \hat{u}(\lambda)$ converge, lorsque λ tend vers zéro par valeurs réelles positives fortement (respectivement, faiblement), vers la même limite.*

2) *Si $\lambda \hat{u}(\lambda)$ est uniformément bornée dans le demi plan* $\operatorname{Re} \lambda \geqq 0$ *et converge fortement (respectivement, faiblement) lorsque λ tend vers zéro, dans tout secteur*

strictement contenu dans le demi plan Re $z>0$,[1] $v(t)$ *converge fortement (respectivement, faiblement) vers la même limite.*

Démonstration. (On ne considérera que la convergence forte; la convergence faible se traite de la même manière en remplaçant la fonction $u(t)$ par la fonction $(u(t), \xi)$ et la fonction $\hat{u}(\lambda)$ par la fonction $(\hat{u}(\lambda), \xi)$, $\xi \in x^*$.) Par une intégration par parties on obtient la relation

$$(5) \qquad \lambda \hat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda t \left(\frac{1}{t} \int_0^t u(s)\, ds \right) d(\lambda t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda t\, v(t)\, d(\lambda t) = \int_0^\infty e^{-s} s\, v\left(\frac{s}{\lambda}\right) ds.$$

Dans ce dernier terme, on peut utiliser le théorème de Lebesgue pour passer à la limite et on obtient la première partie du théorème. Pour prouver la seconde, on remarque, que comme $u(t)$ est assez régulière, on a la relation

$$(6) \qquad \int_0^s u(s)\, ds = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - iA}^{\sigma + iA} e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda} \hat{u}(\lambda)\, d\lambda.$$

Désignons par Γ_σ la droite Re $z=\sigma$. Comme $\lambda \hat{u}(\lambda)$ est uniformément bornée la fonction $e^{\lambda t} \dfrac{1}{\lambda} \hat{u}(\lambda) = e^{\lambda t} \dfrac{1}{\lambda^2} \lambda \hat{u}(\lambda)$ est intégrable (au sens de Riemann) sur la droite Γ_σ, il vient donc

$$(7) \qquad v(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\sigma} e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda t} \lambda \hat{u}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\sigma t}} \frac{e^\mu}{\mu^2} g\left(\frac{\mu}{t}\right) d\mu$$

en posant $\mu = \lambda t$ et $g(\lambda) = \lambda \hat{u}(\lambda)$.

On remarque ensuite, que l'on a, pour tout $t>0$,

$$(8) \qquad \int_{\Gamma_{\sigma t}} \frac{e^\mu}{\mu^2} g(\mu/t)\, d\mu = \int_{\Gamma_\sigma} \frac{e^\mu}{\mu^2} g(\mu/t)\, d\mu.$$

On peut alors à nouveau appliquer le théorème de Lebesgue et on obtient, en désignant par l la limite de $\lambda \hat{u}(\lambda)$ lorsque λ tend vers zéro,

$$(9) \qquad \lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma_\sigma} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu \right) l = l$$

car par un calcul de résidus évident, on montre que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu = 1.$$

On reprend maintenant les notations des sections précédents, on désigne par V et H deux espaces de Hilbert (on note $((\cdot, \cdot))$ $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ et $|\cdot|$ les normes et les produits scalaires correspondants). On suppose que V est contenu algébriquement et topologiquement dans H et est dense dans H. On identifie H à un sous espace de V^* dual de V; on désignera par A un opérateur linéaire continu coercif et *auto-adjoint* de V dans V^* et par B un opérateur linéaire continu de V dans H.

[1] Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{|\operatorname{Arg} \lambda| < \pi/2 - \varepsilon,\ \lambda \to 0} [\lambda \hat{u}(\lambda)] = l$.

On suppose que B, considéré comme un opérateur non borné dans H, est positif et que la famille d'opérateur $(\varepsilon A+B)^{-1}$ est équibornée, pour $\operatorname{Re}\varepsilon>0$, dans $\mathscr{L}(H)$. Cette dernière condition est automatiquement réalisée si B est strictement positif; elle est aussi réalisée dans l'exemple d'Ilin. On désigne par $u(t)$ $(t\geqq 0)$ la solution du problème

$$(10)\qquad A u'+B u=f, \quad f\in H, \quad u(0)=0.$$

On pose $v(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u(s)\,ds$; on peut alors déduire du Théorème 2.A.1 la proposition suivante:

Proposition 2.A.1. *On suppose que $(\varepsilon A+B)^{-1}$ converge dans $\mathscr{L}(H)$ fort (respectivement, $\mathscr{L}_w(H)$) lorsque ε t end vers zéro dans tout secteur du demi plan* $\operatorname{Re}\varepsilon>0$. *On désigne par $\mathscr{B}^{-1}$ cette limite ($\mathscr{B}$ est un prolongement maximal positif de B), alors $v(t)$ converge fortement (respectivement, faiblement), lorsque t tend vers l'infini, vers $\mathscr{B}^{-1}f$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le point (2) du Théorème 2.A.1. Il est évident que u est continûment différentiable; d'autre part en multipliant scalairement par u l'équation (10) on voit que l'on a $\|u(t)\|\leqq Ct$, ce qui prouve que $u(t)$ est à croissance polynomiale. Enfin, on remarque que $\lambda\hat{u}(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}f$, en effet, en prenant la transformée de Laplace de (10), on obtient

$$(11)\qquad \lambda A\hat{u}(\lambda)+B\hat{u}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}f$$

soit $(\lambda A+B)(\lambda\hat{u}(\lambda))=f$, et le résultat est immédiat.

Corollaire 2.A.1. *On désigne par $f(t)$ une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans H, et on suppose que $f(t)$ converge lorsque t tend vers l'infini vers f au sens suivant: il existe $\theta>1$ tel que*

$$(12)\qquad \int_0^\infty t^\theta\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds-f\right|^2 ds<+\infty.$$

Alors si A et B vérifient les hypothèses de la Proposition 2.A.1, $\frac{1}{t}\int_0^t u(s)\,ds$ *converge vers $\mathscr{B}^{-1}f$.*

Démonstration. On introduit u_1, solution du problème

$$(13)\qquad A u_1'+B u_1=f, \quad u_1(0)=0,^2$$

puis on pose

$$w=\frac{1}{t}\int_0^t u(s)\,ds-\frac{1}{t}\int_0^t u_1(s)\,ds \quad \text{et} \quad g=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds-f.$$

---

[2] L'équation (10) admet une unique solution $t\to u(t)$ qui se prolonge en une fonction analytique définie sur C à valeur dans V, pour le voir il suffit de poser $h=A^{\frac{1}{2}}u$ l'équation (13) s'écrit alors:

$$h'+A^{-1/2}BA^{-1/2}h=A^{-1/2}f,$$

($A^{-1/2}BA^{-1/2}$ un opérateur borné dans H); procéder de même pour l'équation (14).

Il suffit de montrer que w converge vers zéro. On remarque que w est solution de l'équation

$$A w' + \frac{1}{t} A w + B w = g, \qquad w(0) = 0. \tag{14}$$

En multipliant par $t w$ et en notant α la constante de coercivité de A, on obtient

$$\frac{1}{2} t \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|w\|^2 \leqq t/\alpha (g, w), \tag{15}$$

soit

$$\frac{d}{dt} (t \|w\|^2) \leqq C t^2 |g|^2 \tag{16}$$

ce qui donne en intégrant

$$t \|w\|^2 \leqq C \int_0^t s^2 |g(s)|^2 \, ds. \tag{17}$$

Soit

$$\|w(t)\|^2 \leqq t^{(1-\theta)} \int_0^\infty s^\theta |g(s)|^2 \, ds \tag{18}$$

ce qui, compte tenu de (12) donne le résultat.

Applications. Bien entendu, on retrouve les résultats d'ILIN. On désigne par $u_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ la solution dans $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ du problème

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} = f, \qquad u_\varepsilon|_{\partial \Omega} = 0.$$

On sait que lorsque ε tend vers zéro, u_ε converge dans $L^2(\Omega)$ fort vers u, solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f, \qquad u(x_1, x_2) = 0. \tag{19}$$

Il en résulte aussitôt que si $u(x_1, x_2, t)$ est solution du problème

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f(\cdot, t), \qquad u(\cdot, \cdot, 0) = 0 \tag{20}$$

et si $f(t)$ converge vers f au sens de (12), $\frac{1}{t} \int_0^t u(s) \, ds$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers la solution de (19).

Plus généralement, on peut considérer un champ de vecteur $\mathscr{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, réel de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, alors si u est solution du problème

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda u = f(t), \tag{21}$$
$$u|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \qquad u(0) = 0,[3]$$

[3] Re $\lambda > \frac{1}{2} |\operatorname{div} \mathscr{A}|_\infty$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $(1 \leqq j \leqq n)$.

où $\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ désigne un opérateur elliptique, la fonction $\frac{1}{t}\int_0^t u(s)\,ds$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers la solution du problème

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda u = f, \qquad u|_{\Sigma_-} = 0. \tag{22}$$

On laisse enfin au lecteur le soin d'énoncer des résultats semblables pour les autres exemples traités dans les sections précedents.

Remarque. Dans les sections précédents on s'était limité à ε réel; ici il est nécéssaire de considérer ε comme un nombre complexe tendant vers zéro dans un secteur du demi plan $\operatorname{Re} z > 0$. Ceci est possible sans grandes difficultés car l'opérateur A est autoadjoint. Par exemple, pour étudier le cas des systèmes symétriques on remarque que les majorations (II.13)–(II.15) restent valables à condition de remplacer ε par $\operatorname{Re} \varepsilon$. Comme ε reste dans un secteur on en déduit que le terme s_ε qui figure dans le second membre de (II.20) reste borné dans

$$L^2(]0, 1[; (H^{-1}(R^{n-1})^r)).$$

Enfin en utilisant le fait que $C(y)$ est autoadjoint on voit que l'énoncé du Lemme II.4 reste valable pour tout ε complexe verifiant $\operatorname{Re} z > 0$. On termine ensuite la démonstration comme dans la Section II.

Bibliographie

1. Agranovic, M. S., Positive boundary problems. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. **167**, 1215–1218 (1966). Traduit dans Soviet Math. **7**, 539–542 (1966)
2. Bardos, C., Sur un théorème de perturbation. C.R. Acad. Sc. (A) **265**, 169–172 (1967)
3. Bardos, C., Problèmes aux limites pour les équations du premier ordre. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **3**, 185–233 (1970)
4. Bourbaki, N., Espaces Vectoriels Topologiques. Tome 2. Paris: Hermann
5. Brézis, D., A paraitre
6. Brézis, H., Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non-linear partial differential equations. Contributions to Non Linear Functional Analysis. E. Zarantonello, ed. Acad. Press (1971), 101–156
7. Brézis, H., Problèmes unilatéraux. J. Math. Pures Appl. **51**, 1–164 (1972)
8. Chazarain, J., Problèmes de Cauchy abstraits. J. Funct. Anal. **7**, 386–446 (1971)
9. Faris, W. G., The product formula for semi-groups. Pacific J. Math. **21**, 47–70 (1967)
10. Friedrichs, K., Symmetric positive systems of differential equations. Comm. Pure App. Math. **7**, 345–392 (1954)
11. Huet, D., Phénomène de perturbation singulière. Ann. Inst. Fourier **10**, 61–151 (1960)
12. Ikawa, M., Mixed problems for hyperbolic systems. Pub. Res. Inst. Mat. Sci. Kyoto U. **7**, 427–454 (1971)
13. Kato, T., Perturbation Theory For Linear Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
14. Lax, P., & R. S. Phillips, Local boundary conditions. Comm. Pure. App. Math. **13**, 427–455 (1960)
15. Levinson, N., The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y + C(x, y) u = D(x, y)$ for small ε. Ann. Math. **5**, 428–445 (1950)
16. Lions, J. L., Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. Contributions to Non-Linear Functional Analysis. E. Zarantonello, ed. Acad. Press 523–564 (1971)

17. OLEINIK, O., Linear equations of second order. Mat. Sb. **69**, 111—140 (1966), Amer Math. Soc. Transl. Series 2, **65**, 167—200 (1967)
18. PETROVSKI, I. G., Über das Cauchysche Problem. Mat. Sb. **2**, 815—868 (1937)
19. PHILLIPS, R. S., & L. SARASON, Singular symmetric positive first order differential operators. J. Math. Mech. **15**, 235—272 (1966)
20. SCHMIDT, G., Spectral and scattering theory for Maxwell's equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **28**, 284—322 (1968)
21. SIVASINSKII, S. V., The introduction of 'viscosity' into first order linear symmetric systems. Vestnik Leningrad Univ. **25**, 54—57 (1970)
22. TROTTER, H. F., Approximation of semi-groups. Pacific J. Math. **8**, 887—919 (1958)
23. TROTTER, H. F., On the product of semi-groups. Proc. Amer. Soc. **10**, 545—551 (1959)
24. VISIK, M. I., & L. A. LYUSTERNIK, Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. Uspekhi Mat Nauk. **12**, 3—122 (1957), Amer. Math. Soc. Trans. (20) **20**, 239—364 (1962)
25. YOSIDA, K., Functional Analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
26. ILIN, A. M., Sur le comportement asymptotique de la solution d'un problème aux limites. Mat. Zametki. **8**, 273—284 (1970)
27. ILIN, A. M., Sur le comportement de la solution d'un problème aux limites pour $t \to \infty$. Mat. Sb. **81**, 530—553 (1972)
28. PHILLIPS, R. S., Semi Groups of Contraction, C.I.M.E. Equazioni differenziali astratte. Roma: Edizioni Cremonese 1963
29. SMOLLER, J. A., & M. E. TAYLOR, Wave front sets and the viscosity method, Bull. Am. Math. Soc. **79**, 431—436 (1973)

Départment de Mathématiques
Université Paris-NORD
Centre Scientifique et Polytechnique
Saint-Denis, France

et

Départment de Mathématiques
Université Paris VI
Paris 5^e, France

(Reçu le 28 Décembre, 1972)