INTEGRALES CONVEXES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV†

BY

HAIM BREZIS

ABSTRACT

The convex functional $J(u) = \int_\Omega j(u)dx$ on the space $W_0^{s,p}(\Omega)$ is considered. A description of its conjugate J^* on $W^{-s,p'(\Omega)}$ and its subdifferential ∂J are given.

1. Préliminaires et notations

Soit $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné de frontière régulière. Soit $s \geqq 0$ un entier e soit $1 \leqq p < +\infty$. Suivant l'usage, on désigne par

$\mathscr{K}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support dans Ω,

$M(\Omega)$ (resp. $M_b(\Omega)$) l'espace des mesures (bornées) sur Ω,

$\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans Ω,

$L^p(\Omega; \mu)$ (resp. $L^p(\Omega)$) l'espace des fonctions de puissance p^{ieme} sommables sur Ω pour la mesure μ (resp. pour la mesure de Lebesgue),

$W^{s,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s appartiennent à $L^p(\Omega)$,

$W_0^{s,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$,

$W^{-s,p'}(\Omega)$ le dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Soit E un espace de Banach de dual E^* et soit J une fonction convexe s.c.i. de E dans $(-\infty, +\infty]$ telle que $J \not\equiv +\infty$; on note

$$D(J) = \{u \in E;\ J(u) < +\infty\}$$

$$J^*(T) = \sup_{u \in D(J)} \{\langle T, u\rangle - J(u)\} \qquad \text{pour } T \in E^*,$$

et pour $u \in D(J)$

† Ces résultats ont été obtenus, en partie, pendant la visite de l'A. à l' E. P. F. de Lausanne.

$$\partial J(u) = \{T \in E^*;\ J(v) - J(u) \geqq \langle T, v - u\rangle \text{ pour tout } v \in E\}.$$

Il est bien connu que la restriction à E de J^{**} coincide avec J. Dans toute la suite j désigne une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$ telle que $j(0) = 0$ Posant, pour $\lambda > 0$,

$$j_\lambda(r) = \operatorname*{Inf}_{s \in R^n} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |r - s|^2 + j(s) \right\}$$

on sait (cf. par exemple [2]) que j_λ est différentiable à différentielle lipschitzienne et que $j_\lambda(r) \uparrow j(r)$ quand $\lambda \downarrow 0$, pour tout $r \in R^n$.

Soit $\mu \in M_b(\Omega)$ une mesure positive. Si u est une fonction μ-mesurable, alors $j(u)$ est aussi μ-mesurable. On définit sur $L^1(\Omega; \mu)^n$

$$J(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(u)d\mu & \text{si } j(u) \in L^1(\Omega; \mu), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est clair que J est convexe s. c. i. (utiliser le lemme de Fatou).

Le lemme suivant est un cas particulier des résultats de [7]; nous en indiquons ici une démonstration directe et élémentaire.

LEMME 1. *La fonctionnelle conjuguée J^* est définie sur $L^\infty(\Omega; \mu)^n$ par*

$$J^*(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j^*(v)d\mu & \textit{si } j^*(v) \in L^1(\Omega; \mu), \\ +\infty & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$K(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j^*(v)d\mu & \textit{si } j^*(v) \in L^1(\Omega; \mu), \\ +\infty & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Comme $v.u - j(u) \leqq j^*(v)$ $\mu - p.p.$ sur Ω, on en déduit après intégration que $J^* \leqq K$.

Pour $\lambda > 0$ et $v \in L^\infty(\Omega; \mu)^n$, on définit

$$H^\lambda(v) = \sup_{u \in D(J)} \int_\Omega (v.u - j(u) - \frac{\lambda}{2}|u|^2) d\mu;$$

il est clair que

$$H^\lambda(v) \leqq J^*(v).$$

Pour tout $x_0 \in \Omega$, $\sup_{r \in R^n} \{v(x_0).r - j(r) - (\lambda/2)r^2\}$ est atteint en $r_0 = (\lambda + \partial j)^{-1} v(x_0)$. Comme la fonction $u = (\lambda + \partial j)^{-1} v$ appartient à $D(J)$, on a

$$H^{\lambda}(v) = \int_{\Omega} \left(j + \frac{\lambda}{2}|\quad|^2\right)^*(v)d\mu.$$

Or $(j + \lambda/2|\quad|^2)^* = (j^*)_\lambda$ (cf. par exemple [6]);

donc

$$J^*(v) \geqq \int_{\Omega} (j^*)_\lambda(v)d\mu.$$

Il résulte du théorème de Beppo-Levi que si $J^*(v) < +\infty$, alors

$$j^*(v) \in L^1(\Omega;\mu) \text{ et } J^*(v) \geqq \int_{\Omega} j^*(v)d\mu \text{ (puisque } (j^*)_\lambda(v) \uparrow j^*(v)$$

quand $\lambda \downarrow 0$). Par conséquent $J^* = K$.

Appliquant alors le fait que la restriction à $L^1(\Omega;\mu)^n$ de J^{**} coincide avec J, on obtient, pour tout $u \in L^1(\Omega;\mu)^n$

1) $$J(u) = \sup\left\{\int_{\Omega}(v.u - j^*(v))d\mu;\ v \in L^\infty(\Omega;\mu)^n \text{ et } j^*(v) \in L^1(\Omega;\mu)\right\}$$

La proposition suivante est liée aux résultats de [8] (sans s'y trouver explicitement).

Proposition 1. *Pour tout* $u \in L^1(\Omega;\mu)^n$, *on a*

2) $$J(u) = \sup\left\{\int_{\Omega}(v.u - j^*(v))d\mu;\ v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } j^*(v) \in L^1(\Omega;\mu)\right\}$$

La démonstration de la Proposition 1 est basée sur les lemmes suivants:

Lemme 2. *Soit* $C \subset R^n$ *un convexe fermé contenant* 0. *Alors*

$$\{u \in \mathscr{K}(\Omega)^n;\ u(\Omega) \subset C\}$$

est dense dans $\{u \in L^1(\Omega;\mu)^n;\ u(x) \in C\ \ \mu\text{-p.p.}\}$ *pour la topologie de* $L^1(\Omega;\mu)^n$.

Démonstration du Lemme 2. Soit $u \in L^1(\Omega;\mu)^n$ tel que $u(x) \in C$ μ-p.p. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ tel que $\| v - u \|_{L^1} < \varepsilon$. Soit $w(x) = \mathrm{Proj}_C\, v(x)$; alors $w \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ et $|w(x) - u(x)| \leqq |v(x) - u(x)|$. Donc $\| w - u \|_{L^1} < \varepsilon$.

Lemme 3. *Soit h une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$ telle que $h(0) = 0$. Soit $u \in L^1(\Omega;\mu)^n$ tel que $h(u) \in L^1(\Omega;\mu)$. Alors il existe une suite $v_k \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ telle que $h(v_k) \in L^1(\Omega;\mu)$, v_k converge vers u dans $L^1(\Omega;\mu)^n$ et* μ-p.p., *$h(v_k)$ converge vers $h(u)$ dans $L^1(\Omega;\mu)$ et* μ-p.p.

Si de plus $u \in L^\infty(\Omega;\mu)^n$, on peut choisir les v_k tels que $\| v_k \|_{L^\infty} \leqq \| u \|_{L^\infty}$.

Démonstration du Lemme 3. On considère dans R^{n+1} le convexe $C = \{(r,\rho);\ r \in R^n \text{ et } \rho \geqq h(r)\}$. On applique le Lemme 2 avec $\tilde{u} = (u, h(u))$

$\in L^1(\Omega;\mu)^{n+1}$ et $\tilde{u}(x) \in C$ μ-p.p. Donc pour tout k, il existe $\tilde{v}_k = (v_k, \alpha_k) \in \mathscr{K}(\Omega)^{n+1}$ tel que $\| \tilde{v}_k - \tilde{u} \|_{L^1} < 1/k$ et $\tilde{v}_k \in C$ μ-p.p.

i.e.

$$\| v_k - u \|_{L^1} < \frac{1}{k}, \quad \| \alpha_k - h(u) \|_{L^1} < \frac{1}{k} \text{ et } \alpha_k \geqq h(v_k).$$

Après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $v_k \to u$ μ-p.p., $\alpha_k \to h(u)$ μ-p.p. et que $\alpha_k \leqq \beta$, pour tout k, avec $\beta \in L^1(\Omega;\mu)$. Comme h est s.c.i. on a $h(v_k) \to h(u)$ μ-p.p. et grâce au théorème de Lebesgue $h(v_k) \to h(u)$ dans $L^1(\Omega;\mu)$.

Si de plus $u \in L^\infty(\Omega;\mu)^n$, on applique le résultat précédent avec h remplacé par

$$k(r) = \begin{cases} h(r) & \text{si } |r| \leqq \| u \|_{L^\infty}, \\ +\infty & \text{si } |r| > \| u \|_{L^\infty}. \end{cases}$$

Démonstration de la Proposition 1. Posons

$$\theta = \sup \left\{ \int_\Omega (v \,.\, u - j^*(v)) d\mu;\ v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } j^*(v) \in L^1(\Omega;\mu) \right\} ;$$

il est clair que $\theta \leqq J(u)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, d'après (1), $v_0 \in L^\infty(\Omega;\mu)^n$ tel que $j^*(v_0) \in L^1(\Omega;\mu)$ et

$$\int_\Omega (v_0 \,.\, u - j^*(v_0)) d\mu \geqq J(u) - \varepsilon.$$

Soit $v_k \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ une suite telle que $v_k \to v_0$ μ–p.p., $\| v_k \|_{L^\infty} \leqq \| v_0 \|_{L^\infty}$, $j^*(v_k) \in L^1(\Omega;\mu)$ et $\int_\Omega j^*(v_k) d\mu \to \int_\Omega j^*(v_0) d\mu$ (cf. Lemme 3). Comme on a $\int_\Omega (v_k \,.\, u - j^*(v_k)) d\mu \leqq \theta$, il vient à la limite (utiliser le théorème de Lebesgue)

$$\int_\Omega (v_0 \,.\, u - j^*(v_0)) d\mu \leqq \theta.$$

D'où $J(u) - \varepsilon \leqq \theta \leqq J(u)$, et par suite $J(u) = \theta$.

2. Calcul de J* dans les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, on supposera de plus que $0 \in \operatorname{Int} D(j)$. Pour tout $u \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ on définit la fonctionnelle

$$J(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(u) dx & \text{si } j(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est clair que J est convexe s.c.i. sur $W_0^{s,p}(\Omega)^n$; soit J^* la fonction conjuguée de J définie sur $W^{-s,p'}(\Omega)^n$.

THÉORÈME 1. *Soit $T \in W^{-s,p'}(\Omega)^n$ tel que $J^*(T) < +\infty$, alors T appartient nécessairement à $M_b(\Omega)^n$.*

Lorsque $T \in W^{-s,p'}(\Omega)^n \cap M_b(\Omega)^n$, soit $T = T_a dx + T_s$ sa décomposition de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω. On a

$$J^*(T) = \int_\Omega j^*(T_a)dx + \operatorname{Sup}\{\langle T_s, v\rangle; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega) \subset \overline{D(j)}\} \tag{3}$$

(ces expressions pouvant être finies ou infinies).

On utilisera dans la démonstration du Théorème 1 les lemmes suivants:

LEMME 4. *Soit $C \subset R^n$ un convexe fermé contenant 0. Alors*

$$\{u \in \mathscr{D}(\Omega)^n; u(\Omega) \subset C\}$$

est dense dans

$$\left\{u \in \prod_{i=1}^{n} W_0^{s_i,p_i}(\Omega);\ u(x) \in C \text{ p.p.}\right\}$$

pour la topologie de $\prod_{i=1}^{n} W_0^{s_i,p_i}(\Omega)$.

La démonstration du Lemme 4 est basée sur le

LEMME 5. *Il existe une suite $\zeta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\zeta_k(\Omega) \subset [0,1]$ et $\zeta_k u \to u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.*

Le Lemme 5 est établi, par exemple dans [5] (démonstration du Th. 11.8 au Chap. 1) lorsque $p = 2$, avec une démonstration qui s'étend aisément au cas $1 \leqq p < +\infty$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4. Soit $u \in \prod_{i=1}^n W_0^{s_i,p_i}(\Omega)$ tel que $u(x) \in C$ p.p. On choisit k de sorte que

$$\| \zeta_k u - u \|_{\Pi_i W^{s_i,p_i}} < \varepsilon \quad \text{(Lemme 5)}.$$

Alors $v = \zeta_k u \in \prod_i W^{s_i,p_i}(\Omega)$, $v(x) \in C$ p.p. et v est à support compact.

En régularisant v par convolution, on obtient une suite $v_l \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ telle que $v_l(\Omega) \subset C$ et $v_l \to v$ dans $\prod_{i=1}^n W^{s_i,p_i}(\Omega)$.

LEMME 6. *Soit h une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$ telle que $h(0) = 0$. Soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ tel que $h(u) \in L^1(\Omega)$. Alors il existe une suite $v_k \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ telle que $h(v_k) \in L^1(\Omega)$, v_k converge vers u dans $W^{s,p}(\Omega)^n$ et* p.p., *$h(v_k)$ converge vers $h(u)$ dans $L^1(\Omega)$ et p.p.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 6. On considère dans R^{n+1} le convexe $C = \{(r,\rho); r \in R^n$ et $\rho \geqq h(r)\}$. On applique le Lemme 4 avec $\tilde{u} = (u, h(u)) \in W_0^{s,p}(\Omega)^n x L^1(\Omega)$ et $\tilde{u}(x) \in C$ p.p. Donc, pour tout k, il existe $\tilde{v}_k = (v_k, \alpha_k) \in \mathscr{D}(\Omega)^{n+1}$ tel que $\| v_k - u \|_{W^{s,p}} < 1/k$, $\| \alpha_k - h(u) \|_{L^1} < 1/k$ et $\alpha_k \geqq h(v_k)$. On conclut comme dans la démonstration du Lemme 3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Supposons que $M = J^*(T) < +\infty$ de sorte que $\langle T, v\rangle - \int_\Omega j(v)dx \leqq M$ pour tout $v \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ tel que $j(v) \in L^1(\Omega)$. Comme $0 \in \operatorname{Int} D(j)$, il existe $\rho > 0$ et $\eta < +\infty$ tels que $j(r) \leqq \eta$ pour tout r avec $|r| \leqq \rho$. Donc $\langle T, v\rangle \leqq M + \eta \operatorname{mes}\Omega$ pour tout $v \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ tel que $\| v \|_{L^\infty} \leqq \rho$. Par suite $|\langle T, v\rangle| \leqq (M + \eta \operatorname{mes}\Omega)/\rho . \| v \|_{L^\infty}$ pour tout $v \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ et $T \in M_b(\Omega)^n$. Il résulte du Lemme 6 que

$$J^*(T) = \operatorname*{Sup}_{v \in D(J)} \left\{ \langle T, v\rangle - \int_\Omega j(v)dx \right\}$$
$$= \left\{ \langle T, v\rangle - \int_\Omega j(v)dx ; v \in \mathscr{D}(\Omega)^n \text{ et } j(v) \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Posons

$$A = \int_\Omega j^*(T_a)dx \text{ et } B = \operatorname{Sup} \{\langle T_s, v\rangle ; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } j(v) \in L^1(\Omega)\}.$$

On a

$$T_a . v - j(v) \leqq j^*(T_a) \text{ p.p. sur } \Omega,$$

et par intégration on en déduit

$$\langle T, v\rangle - \int_\Omega j(v)dx \leqq \int_\Omega j^*(T_a)dx + \langle T_s, v\rangle \text{ pour tout } v \in \mathscr{D}(\Omega)^n$$

tel que $j(v) \in L^1(\Omega)$. Par conséquent $J^*(T) \leqq A + B$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe, grâce à la Proposition 1, $v_1 \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ tel que $j(v_1) \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega (T_a . v_1 - j(v_1))dx \geqq A - \varepsilon.$$

Comme la mesure T_s est singulière, elle est concentrée sur un ensemble S négligeable pour la mesure de Lebesgue. Donc pour tout $\delta > 0$, il existe un sous ensemble ouvert U de Ω tel que $U \supset S$ et $\int_U dx < \delta$.

Soit, d'autre part, $v_2 \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ tel que $j(v_2) \in L^1(\Omega)$ et $\langle T_s, v_2\rangle \geqq B - \varepsilon$. On définit enfin $\bar{v}$ sur R^N par

$$\bar{v} = \begin{cases} v_1 & \text{sur } \Omega \setminus U, \\ v_2 & \text{sur } U, \\ 0 & \text{en dehors de } \Omega. \end{cases}$$

Il est clair que $\bar{v} \in L^1(R^N)^n \cap L^\infty(R^N)^n$, $\bar{v}$ a son support dans Ω et $j(\bar{v}) \in L^1(R^N)$. Soit ρ_h une suite de "mollifiers" et soit $v_h = \rho_h * \bar{v}$, de sorte que $v_h \to \bar{v}$ dans $L^1(R^N)$ et p.p. et $\| v_h \|_{L^\infty} \leqq \| \bar{v} \|_{L^\infty}$. On a $j(v_h) \leqq \rho_h * j(\bar{v})$ et en particulier $j(v_h) \in L^1(R^N)$; pour h assez petit $v_h \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ puisque supp $\bar{v} \subset \Omega$.

De plus $v_h(x) \to v_2(x)$ pour *tout* $x \in U$ puisque $\bar{v}$ est continu sur U. On a

$$J^*(T) \geqq \langle T, v_h \rangle - \int_\Omega j(v_h) dx \geqq \int_\Omega T_a \cdot v_h \, dx + \langle T_s, v_h \rangle - \int_\Omega j(\bar{v}) \, dx.$$

Passant à la limite, on obtient

$$J^*(T) \geqq \int_\Omega T_a \cdot \bar{v} \, dx + \langle T_s, v_2 \rangle - \int_\Omega j(\bar{v}) \, dx.$$

(On peut appliquer le théorème de Lebesgue puisque

$$\| v_h \|_{L^\infty} \leqq \| \bar{v} \|_{L^\infty} \text{ et } v_h \to v_2 \; |T_s| - \text{p.p. sur } \Omega.)$$

Donc

$$\begin{aligned} J^*(T) &\geqq \int_\Omega T_a \cdot v_1 \, dx - \int_\Omega j(v_1) \, dx + \langle T_s, v_2 \rangle \\ &+ \int_U (T_a \cdot (v_2 - v_1) + j(v_1) - j(v_2)) \, dx \\ &\geqq (A - \varepsilon) + (B - \varepsilon) + \int_U (T_a \cdot (v_2 - v_1) + j(v_1) - j(v_2)) \, dx. \end{aligned}$$

En choisissant mes $U < \delta$ assez petit, on obtient $J^*(T) \geqq A + B - 3\varepsilon$; d'où il résulte que $J^*(T) = A + B$ lorsque $A < +\infty$ et $B < +\infty$.

Le même raisonnement montre que l'on a encore $J^*(T) = A + B$ dans le cas où $A = +\infty$ ou bien $B = +\infty$.

On conclut à l'aide du

LEMME 7. *On a*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sup} \{ \langle T_s, v \rangle ; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \textit{ et } j(v) \in L^1(\Omega) \} \\ &= \operatorname{Sup} \{ \langle T_s, v \rangle ; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \textit{ et } v(\Omega) \subset \overline{D(j)}. \} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $v \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ tel que $v(\Omega) \subset \overline{D(j)}$. Comme $0 \in \operatorname{Int} D(j)$, on a $\lambda r \in \operatorname{Int} D(j)$ dès que $0 \leqq \lambda < 1$ et $r \in \overline{D(j)}$. Donc $\lambda v(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$ pour tout

$0 \leqq \lambda < 1$; grâce à la compacité de $\lambda v(\Omega)$ il existe $M < +\infty$ tel que $j(\lambda v(x)) \leqq M$ pour tout $x \in \Omega$.

3. Fonctions de mesures; representation integrale de J*(T)

Soit h une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$, positivement homogène (i.e. $h(\lambda r) = \lambda h(r)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $r \in R^n$), telle que $h(0) = 0$.

On examine diverses extensions à $M_b(\Omega)^n$ de l'application de composition $u \mapsto h(u)$.

Notons que h^* est la fonction indicatrice I_C d'un convexe fermé C de R^n contenant 0, i.e.

$$h^*(r) = \begin{cases} 0 & r \in C, \\ +\infty & r \notin C. \end{cases}$$

Inversement si C est un convexe fermé de R^n contenant 0, alors $h = (I_C)^*$ vérifie les propriétés ci-dessus.

DÉFINITION 1. Soit $T \in M_b(\Omega)^n$ et soit $\mu \in M_b(\Omega)$ tel que $|T| \leqq \mu$.

D'après théorème de Radon-Nikodym, il existe $\phi \in L^1(\Omega; \mu)^n$ tel que $T = \phi\mu$.

La fonction $h(\phi)$ est μ-mesurable; si $h(\phi) \in L^1(\Omega; \mu)$ on considère la mesure $h(T) \in M_b(\Omega)$ définie par $h(T) = h(\phi)\mu$.

Utilisant le fait que h est positivement homogène on montre (cf. par exemple [3] Prop. 4.15.12) que la définition de $h(T)$ ne dépend pas du choix de μ.

DÉFINITION 2. Soit $T \in M_b(\Omega)^n$ et soit $g \in \mathscr{K}^+(\overline{\Omega})$. On pose

$$\Phi(g) = \sup\{\langle T, vg\rangle; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega) \subset C\}$$

si $\Phi(1) < +\infty$, on a $\Phi(g) \leqq \Phi(1) \; \|g\|_{L^\infty}$ et aussi (cf. Lemme 8 ci-dessous) $\Phi(g_1 + g_2) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2)$ pour tout $g_1, g_2 \in \mathscr{K}^+(\Omega)$.

Par suite il existe une mesure unique $\tilde{h}(T) \in M_b(\Omega)$ telle que $\langle \tilde{h}(T), g\rangle = \Phi(g)$ pour tout $g \in \mathscr{K}^+(\Omega)$.

LEMME 8. *On a* $\Phi(g_1 + g_2) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2)$ *pour tout* $g_1, g_2 \in \mathscr{K}^+(\overline{\Omega})$.

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que $\Phi(g_1 + g_2) \leqq \Phi(g_1) + \Phi(g_2)$. Inversement, supposons d'abord qu'il existe $\delta > 0$ tel que $g_1 \geqq \delta$ sur Ω. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v_1, v_2 \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ tels que

$$v_1(\Omega) \subset C, \; v_2(\Omega) \subset C, \; \langle T, v_1 g_1\rangle \geqq \Phi(g_1) - \varepsilon \text{ et } \langle T, v_2 g_2\rangle \geqq \Phi(g_2) - \varepsilon.$$

On pose $v_3 = (v_1 g_1 + v_2 g_2)/(g_1 + g_2) \in \mathscr{K}(\Omega)$ (puisque $g_1 \geqq \delta > 0$), et $v_3(\Omega) \subset C$. Donc

$$\Phi(g_1+g_2) \geqq \langle T, v_3(g_1+g_2)\rangle \geqq \Phi(g_1)+\Phi(g_2)-2\varepsilon.$$

Par conséquent $\Phi(g_1+g_2)=\Phi(g_1)+\Phi(g_2)$. Dans le cas général on a, pour $\delta>0$

$$\begin{aligned}\Phi((g_1+\delta)+g_2) &= \Phi(g_1+\delta)+\Phi(g_2)\\ &= \Phi(g_1)+\delta\Phi(1)+\Phi(g_2)=\Phi((g_1+g_2)+\delta)\\ &= \Phi(g_1+g_2)+\delta\Phi(1).\end{aligned}$$

PROPOSITION 2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

4) $h(\phi)\in L^1(\Omega;\mu)$ *(notation de la Définition* 1)

5) $\Phi(1)<+\infty$ *(notation de la Définition* 2)

et dans ce cas $h(T)=\tilde{h}(T)$.

DÉMONSTRATION. La Proposition 1 appliqué avec $j=h$ et $u=\phi$ montre que

$$\int_\Omega h(\phi)d\mu=\operatorname{Sup}\left\{\int_\Omega v\,.\,\phi\,d\mu;\ v\in\mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega)\subset C\right\}=\Phi(1)$$

(ces deux quantités étant simultanément finies ou infinies).

Soit $g\in\mathscr{K}^+(\Omega)$; appliquant à nouveau la Proposition 1 avec $u=g\phi$, on a

$$\int_\Omega gh(\phi)d\mu=\operatorname{Sup}\left\{\int_\Omega v\,.\,g\phi\,d\mu;\ v\in\mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega)\subset C\right\}=\Phi(g).$$

THÉORÈME 2. *Soit* $T\in M_b(\Omega)^n$ *tel que* $h(T)$ *soit défini. Si* $E\subset\Omega$ *est mesurable pour la mesure* T*, alors* E *est mesurable pour* $h(T)$ *et on a*

$$h(T)(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k} h(T(E_i));\ E_i \textit{ est une partition finie de } E \atop \textit{en ensembles } T\textit{-mesurables}\right\}$$

La démonstration du Théorème 2 est basée sur les lemmes suivants:

LEMME 9. *Soit* j *une fonction convexe s.c.i. de* R^n *dans* $[0,+\infty]$ *telle que* $j(0)=0$. *Alors il existe une suite* j_k *de fonctions convexes de* R^n *dans* $[0,+\infty)$, *lipschitziennes sur* R^n *telles que* $j_k(0)=0$ *et* $j_k(r)\uparrow j(r)$ *pour tout* $r\in R^n$.

DÉMONSTRATION. On suppose d'abord que $j(r)<+\infty$ pour tout $r\in R^n$ (et donc j est continu).

Soit $\varepsilon>0$ fixé; pour tout $r_0\in R^n$, il existe une fonction affine $h_{r_0,\varepsilon}(r)$ telle que

$$j(r_0)-\varepsilon<h_{r_0,\varepsilon}(r_0)\leqq j(r_0)$$

$$h_{r_0,\varepsilon}(r)\leqq j(r) \text{ pour tout } r\in R^n.$$

L'ensemble $V(r_0,\varepsilon)=\{r\in R^n; j(r)-\varepsilon<h_{r_0,\varepsilon}(r)\}$ est un voisinage ouvert de r_0.

Les ensembles $V(r_0, \varepsilon)$, $|r_0| \leqq 1/\varepsilon$ recouvrant la boule $B(0, 1/\varepsilon)$ on peut en extraire un recouvrement fini par $V(r_1, \varepsilon)$, $V(r_2, \varepsilon)$ .... $V(r_k, \varepsilon)$.

Posons

$$l_\varepsilon(r) = \underset{1 \leqq i \leqq k}{\mathrm{Max}} \; \{h_{r_i}(r), 0\};$$

il est clair que l_ε est convexe, lipschitzien, $l_\varepsilon(0) = 0$, $l_\varepsilon(r) \leqq j(r)$ pour tout $r \in R^n$ et $j(r) - \varepsilon \leqq l_\varepsilon(r)$ pour tout $r \in R^n$ avec $|r| \leqq 1/\varepsilon$.

La suite $p_k = \mathrm{Max}\{l_1, l_{\frac{1}{2}}, \cdots l_{1/k}\}$ répond à la question et converge même uniformément sur tout compact vers j.

Dans le cas général où j est s.c.i., il existe une suite q_k de fonctions convexes et continues de R^n dans $[0, +\infty)$ telles que $q_k(r) \uparrow j(r)$ pour tout $r \in R^n$ et $q_k(0) = 0$ (cf. la suite définie au Paragraphe 1). D'après ce qui précède, on peut trouver une fonction p_k convexe et lipschitzienne de R^n dans $[0, +\infty)$ telle que $p_k(0) = 0$ $p_k \leqq q_k \leqq j$ sur R^n et $q_k - 1/k \leqq p_k$ sur $B(0, k)$. La suite $j_k = \mathrm{Max}\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ répond à la question.

Lemme 10. *Soit h une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$, positivement homogène telle que $h(0) = 0$. Alors il existe une suite h_k de fonctions convexes, positivement homogènes, lipschitziennes de R^n dans $[0, +\infty)$ telles que $h_k(r) \uparrow h(r)$ pour tout $r \in R^n$.*

Démonstration. D'après le Lemme 9, il existe une suite j_k de fonctions convexes lipschitziennes telles que $j_k(0) = 0$ et $j_k(r) \uparrow h(r)$ pour tout $r \in R^n$.
Posant

$$h_k(r) = \lim_{t \to +\infty} \frac{j_k(tr)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{j_k(tr)}{t},$$

on obtient la suite désirée.

Lemme 11. *La conclusion du Théorème 2 est valable lorsque h est de plus lipschitzien.*

Démonstration. Soit $\mu = |T|$; E étant T-mesurable est μ-mesurable et donc aussi mesurable pour la mesure $h(T) = h(\phi)\mu$.

Posons

$$\omega = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} h(T(E_i));\ E_i \text{ est une partition finie de } E \text{ en ensembles } T\text{-mesurables} \right\}$$

D'après l'inegalité de Jensen, et grâce au fait que h est positivement homogène on a

$$h(T(E_i)) \leqq \int_{E_i} h(\phi)\, d\mu\,.$$

Par suite

$$\sum_{i=1}^{k} h(T(E_i)) \leqq \int_{E} h(\phi) d\mu = h(T)(E)$$

et donc $\omega \leqq h(T)(E)$.

Inversement, supposons d'abord que ϕ est étagée (pour la mesure μ), i.e.

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

On considère la partition de E formée par $E_i = A_i \cap E$; on a

$$\begin{aligned} T(E_i) &= \int_{E_i} \phi d\mu = \alpha_i \mu(A_i \cap E) \text{ et} \\ h(T(E_i)) &= \mu(A_i \cap E) h(\alpha_i). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} h(T)(E) &= \int_{E} h(\phi) d\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i} h(\alpha_i) d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap E) h(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} h(T(E_i)). \end{aligned}$$

On en déduit que dans ce cas, $h(T)(E) = \omega$.

Dans le cas général $\phi \in L^1(\Omega; \mu)^n$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction étagée $\tilde{\phi}$ telle que $\| \phi - \tilde{\phi} \|_{L^1(\mu)} < \varepsilon$.

Posons $\tilde{T} = \tilde{\phi}\mu$, de sorte que $h(\tilde{T}) = h(\tilde{\phi})\mu$ et $| h(T)(E) - h(\tilde{T})(E) | \leqq L \| \phi - \tilde{\phi} \|_{L^1(\mu)} \leqq L\varepsilon$, où L est la constante de Lipschitz de h.

D'autre part si E_i est une partition finie μ-mesurable de E, on a

$$| h(T(E_i)) - h(\tilde{T}(E_i)) | \leqq L | (T - \tilde{T})(E_i) | \leqq L \int_{E_i} | \phi - \tilde{\phi} | d\mu$$

et donc

$$\left| \sum_{i=1}^{k} h(T(E_i)) - \sum_{i=1}^{k} h(\tilde{T}(E_i)) \right| \leqq L \| \phi - \tilde{\phi} \|_{L^1(\mu)} \leqq L\varepsilon.$$

D'où l'on déduit que $| \omega - h(\tilde{T})(E) | \leqq L\varepsilon$ et $| \omega - h(T)(E) | \leqq 2L\varepsilon$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Soit h_k la suite définie au Lemme 10. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k (utiliser le théorème de Lebesgue) tel que

$$\int_E h_k(\phi)d\mu \geqq \int_E h(\phi)d\mu - \varepsilon.$$

D'après le Lemme 11, il existe une partition finie E_i μ-mesurable de E telle que

$$\sum_{i=1}^{k} h_k(T(E_i)) \geqq \int_E h_k(\phi)d\mu - \varepsilon \geqq \int_E h(\phi)d\mu - 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\int_E h(\phi)d\mu - 2\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{k} h(T(E_i)) \leqq \int_E h(\phi)d\mu.$$

Le Théorème 2 établit le lien avec le procédé utilisé par C. Goffman et J. Serrin pour définir dans un cadre très général $h(T)$ comme fonction complètement additive d'ensembles.†

On retrouve d'ailleurs aisément certaines propriétés de $h(T)$ étudiées en [4].

PROPOSITION 3. *Soit* $g \in \mathscr{K}^+(\Omega)$ *et soit* $T \in M_b(\Omega)^n$ *tel que* $h(T)$ *soit défini. Alors on a l'inégalité de Jensen:*

$$h(\langle T, g\rangle) \leqq \langle h(T), g\rangle.$$

PROPOSITION 4. *Pour* $T \in M_b(\Omega)^n$, *on pose*

$$H(T) = \begin{cases} h(T)(\Omega) & \textit{si } h(T) \textit{ est défini,} \\ +\infty & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors $T \mapsto H(T)$ *est convexe, positivement homogène et s.c.i. pour la topologie vague* $\sigma(M_b(\Omega)^n, \mathscr{K}(\Omega)^n)$.

Utilisant la définition de $h(T)$, on peut maintenant représenter $J^*(T)$ comme l'intégrale d'une mesure.

En effet, soit k une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$ telle que $k(0) = 0$. Pour $r \in R^n$, on pose $k_\infty(r) = \lim_{t\to+\infty} k(tr)/t = \sup_{t>0} k(tr)/t$, de sorte que k_∞ est convexe s.c.i. et positivement homogène.

DÉFINITION 3. Soit $T \in M_b(\Omega)^n$ et soit $T = T_a dx + T_s$ sa décomposition de Lebesgue. Si $k(T_a) \in L^1(\Omega)$ et si $k_\infty(T_s)$ est défini, on pose

$$k(T) = k(T_a)dx + k_\infty(T_s).$$

† Je remercie vivement J. Serrin qui a attiré mon attention sur l'article [4].

Avec cette définition, on a, pour tout $T \in W^{-s,p'}(\Omega)^n$ tel que $J^*(T) < +\infty$,

$$J^*(T) = \int_\Omega j^*(T).$$

En effet, il suffit de noter que l'on a $(j^*)_\infty = (I_{\overline{D(j)}})^*$ (cf. [6] 8.k).

4. Description de ∂J

On suppose ici que j est une fonction convexe s.c.i. de R^n dans $[0, +\infty]$ telle que $j(0) = 0$ et $0 \in \operatorname{Int} D(j)$. Le sous différentiel ∂J est decrit par le

THÉORÈME 3. *Soit* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ *et soit* $T \in W^{-s,p'}(\Omega)$ *tels que* $T \in \partial J(u)$. *Alors* T *appartient nécessairement à* $M_b(\Omega)^n$; *posant* $T = T_a dx + T_s$ *on a*

6) $T_a . u \in L^1(\Omega)$

7) $T_a(x) \in \partial j(u(x))$ p.p. $x \in \Omega$

8) $\sup\{\langle T_s, v\rangle ; v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega) \subset \overline{D(j)}\} = \langle T, u\rangle - \int_\Omega T_a . u \, dx$

Inversement si $T = T_a dx + T_s$ *appartient à* $M_b(\Omega)^n \cap W^{-s,p'}(\Omega)^n$ *où* T_a *et* T_s *vérifient* (6), (7) *et*

8′) $\langle T_s, v\rangle \leqq \langle T, u\rangle - \int_\Omega T_a . u \, dx$ *pour tout* $v \in \mathscr{K}(\Omega)^n$ *tel que* $v(\Omega) \subset \overline{D(j)}$ *alors* $T \in \partial J(u)$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que si T_a et T_s vérifient (6), (7) et (8′), alors $T \in \partial J(u)$.

En effet, soit $v \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ tel que $j(v) \in L^1(\Omega)$; on a grâce à (7)

$$j(v(x)) - j(u(x)) \geqq T_a(x) . (v(x) - u(x)) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Comme $j(u) \in L^1(\Omega)$ (d'après (6)), on obtient après intégration

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geqq \langle T_a, v\rangle - \int_\Omega T_a . u \, dx \\ &= \langle T, v\rangle - \langle T_s, v\rangle - \int_\Omega T_a . u \, dx \geqq \langle T, v - u\rangle \end{aligned}$$

(par (8′)). On conclut à l'aide du Lemme 6 que $T \in \partial J(u)$. Inversement si $T \in \partial J(u)$, on a

$$J^*(T) = \langle T, u\rangle - \int_\Omega j(u)\, dx$$

et d'après le Théorème 1, $T \in M_b(\Omega)^n$ avec

9) $$\int_\Omega j^*(T_a) dx + B = \langle T, u\rangle - \int_\Omega j(u) dx$$

où
$$B = \sup\{\langle T_s, v\rangle;\ v \in \mathscr{K}(\Omega)^n \text{ et } v(\Omega) \subset \overline{D(j)}\}.$$

D'autre part il existe (cf. Lemme 6) une suite $u_n \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ avec $j(u_n) \in L^1(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)^n$ et p.p. sur Ω, $j(u_n) \to j(u)$ dans $L^1(\Omega)$ et p.p. sur Ω.

Posons $\lambda_n(x) = j(u_n(x)) + j^*(T_a(x))$ de sorte que $\lambda_n \in L^1(\Omega)$, $T_a . u_n \leqq \lambda_n$ p.p. sur Ω et $\lambda_n \to \lambda = j(u) + j^*(T_a)$ dans $L^1(\Omega)$ et p.p. sur Ω.
D'après la définition de B, on a
$$\langle T - T_a, u_n\rangle \leqq B$$
et donc

$$\int_\Omega (\lambda_n - T_a . u_n)dx \leqq \int_\Omega \lambda_n dx - \langle T, u_n\rangle + B. \tag{10}$$

Passant à la limite dans (10) à l'aide du lemme de Fatou on voit que

$$\lambda - T_a . u \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega (\lambda - T_a . u)dx \leqq \int_\Omega \lambda\, dx - \langle T, u\rangle + B,$$

i.e. $T_a . u \in L^1(\Omega)$ et
$$\langle T, u\rangle \leqq \int_\Omega T_a . u\, dx + B. \tag{11}$$

Combinant (9) et (11), on obtient

$$\langle T, u\rangle \leqq \int_\Omega T_a . u\, dx + \langle T, u\rangle - \int_\Omega j(u)dx - \int_\Omega j^*(T_a)dx \leqq \langle T, u\rangle.$$

Il en résulte que $T_a . u = j(u) + j^*(T_a)$ p.p. sur Ω i.e. $T_a \in \partial j(u)$ p.p. sur Ω et $B = \langle T, u\rangle - \int_\Omega T_a . u\, dx$.

COROLLAIRE 1. *On suppose que* $D(j) = R^n$; *soient* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ *et* $T \in W^{-s,p'}(\Omega)^n$. *Alors* $T \in \partial J(u)$ *si et seulement si* $T \in L^1(\Omega)^n$, $T . u \in L^1(\Omega)$, $T \in \partial j(u)$ p.p. *sur* Ω *et* $\langle T, u\rangle = \int_\Omega Tudx$.

REMARQUE 1. Les résultats précédents suggèrent divers problèmes qu'il serait intéressant de résoudre:

QUESTION 1. Soit $T \in W^{-s,p'}(\Omega) \cap M_b(\Omega)$, $T = T_a dx + T_s$; est-ce que $T_a dx$ et T_s appartiennent séparément à $W^{-s,p'}(\Omega)$?

QUESTION 2. Soient $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $T \in W^{-s,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$; est-ce que $T . u \in L^1(\Omega)$ et $\langle T, u\rangle = \int_\Omega T . u\ dx$?

QUESTION 3. Soient $u \in W_0^{s,p}(\Omega)^n$ et $T \in W^{-s,p'}(\Omega)^n \cap L^1(\Omega)^n$ tels que $T(x) \in \partial j(u(x))$ p.p. sur Ω; est-ce que $T \in \partial J(u)$?

[La réponse est affirmative dans le cas où $s = n = 1$. En effet soit $v \in \mathscr{D}(\Omega)^n$ tel que $j(v) \in L^1(\Omega)$; on a p.p. sur $\Omega, j(v) - j(u) \geqq T.(v - u)$ et donc $T.u \geqq T.v + j(u) - j(v)$. Appliquant le Lemme 2 de [1] avec $h = T.v + j(u) - j(v)$ et $g = T.v - j(v)$, on voit que $j(u) \in L^1(\Omega)$ et que

$$\langle T, u\rangle \geqq \int_\Omega T.v\, dx + \int_\Omega j(u) dx - \int_\Omega j(v) dx.]$$

REMARQUE 2. Dans un travail à paraître, nous appliquerons ces résultats à l'étude de certains problèmes variationnels non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Brezis, *Monotonicity methods in Hibert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, Contributions to nonlinear functional analysis, Academic Press, 1971.
2. H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Lecture Notes, North Holland, 1973.
3. R. E. Edwards, *Functional analysis, theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
4. C. Goffman et J. Serrin, *Sublinear functions of measures and variational integrals*, Duke Math. J. **31** (1964), 159–178.
5. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, vol. 1.
6. J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966–67.
7. R. T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals*, Pacific J. Math. **24** (1966), 525–539.
8. R. T. Rockafellar, *Integrals which are convex funtionals* II, Pacific J. Math. **39** (1971), 439–469.

MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE PARIS VI, 9 QUAI ST. BERNARD
PARIS 5^e