

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

Problèmes de convergence dans certaines EDP non linéaires et applications géométriques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 14, p. 1-10.

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984___A14_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles
(École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

PROBLEMES DE CONVERGENCE DANS CERTAINES EDP

NON LINEAIRES ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

par H. BREZIS

(Université Paris VI)

Exposé n°XIV

28 Février 1984

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe de Jordan. De nombreux travaux ont été consacrés aux surfaces à courbure moyenne constante engendrées par Γ - voir par exemple [4], [1] et les références citées dans ces articles. En particulier si $\Gamma \subset B_R$ - une boule de rayon R - et si $R < 1$ on sait qu'il existe des surfaces de courbure moyenne égale à un et engendrées par Γ .

Ici nous considérons uniquement des surfaces Σ paramétrées sur le disque unité

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1\}$$

de sorte que $\Sigma = u(\bar{\Omega})$ et $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie

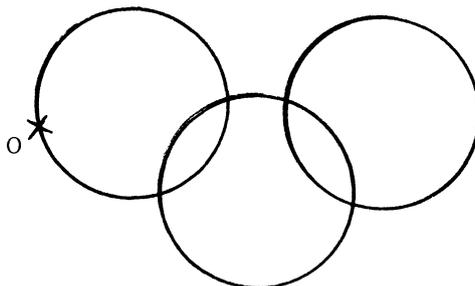
$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = 2 u_x \wedge u_y & \text{sur } \Omega \\ u_x^2 - u_y^2 = u_x \cdot u_y = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(\partial\Omega) = \Gamma . \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement des surfaces Σ lorsque $\Gamma \rightarrow 0$. Plus précisément soit (Γ_n) une suite de courbes de Jordan telles que $\Gamma_n \subset B_{R_n}(0)$

avec $R_n \rightarrow 0$. Soit Σ_n une surface de courbure moyenne égale à un engendrée par Γ_n . Une conjecture de J. Serrin affirme que -moyennant des hypothèses convenables - Σ_n converge vers une sphère de rayon un.

En collaboration avec J.M. Coron [2] nous avons obtenu les résultats suivants :

Théorème 1 On suppose que les aires des surfaces Σ_n restent bornées. Alors une sous-suite extraite des Σ_n converge vers $\{0\}$ ou bien vers une réunion finie et connexe de sphères de rayon un, dont l'une d'elle (au moins) contient 0.



En général on n'a pas de renseignement plus précis sur la configuration limite. En fait il serait très intéressant de savoir si toute configuration de sphères (du type précédent) peut être obtenue comme limite d'une suite (Σ_n) avec des (Γ_n) convenablement choisis.

En fait, on a un résultat bien plus précis lorsque les Σ_n ne sont pas arbitraires mais proviennent d'une construction particulière. On rappelle que si $\Gamma \subset B_R$ avec $R < 1$, il existe une "petite" surface $\underline{\Sigma}$ de courbure moyenne égale à un engendrée par Γ , telle que $\underline{\Sigma} \subset B_R$ (voir Hildebrandt [4]). Nous avons construit avec Coron une autre surface $\overline{\Sigma}$ -distincte de $\underline{\Sigma}$ - de courbure moyenne égale à un, engendrée par Γ (voir [1]). Pour ces surfaces particulières appelées "grandes" solutions de (1) on a le :

Théorème 2 : Soit $\overline{\Sigma}_n$ une "grande" solution de (1) correspondant à $\Gamma = \Gamma_n$ et obtenue par la construction de [1].

Alors une sous-suite des $\overline{\Sigma}_n$ converge vers une (unique) sphère de rayon un passant par 0 .

Ces questions géométriques sont étroitement liées au problème suivant.

Soit $u^n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une suite de fonctions vérifiant le système

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u^n = 2u_x^n \wedge u_y^n & \text{sur } \Omega \\ u^n = \gamma^n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

On suppose que $\|u^n\|_{H^1} \leq C$ et que $\gamma^n \rightarrow 0$ (pour une norme à préciser).

Que peut-on dire de la suite (u^n) ?

Il est facile de voir que $u^n \rightharpoonup 0$ dans H^1 faible. En effet si

$u^{n_k} \rightharpoonup u$ dans H^1 , alors u vérifie

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta u = 2u_x \wedge u_y & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

Or d'après un résultat de Wente [8], $u = 0$ est l'unique solution de (3).

On se propose, dans la suite, d'analyser plus précisément le mode de convergence de u vers 0 . On utilise pour cela une méthode du type "blow-up" qui sera expliquée dans la suite. On est alors amené à étudier le problème

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta \omega = 2\omega_x \wedge \omega_y & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 < \infty . \end{cases}$$

Le lemme suivant, qui joue un rôle très important fournit une description complète des solutions de (4).

Lemme 1 Soit $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ vérifiant (4). Alors ω est de la forme

$$(5) \quad \omega(z) = \pi \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right) + C, \quad z = (x, y) = x + iy$$

où $\pi : \mathbb{C} \rightarrow S^2$ est une projection stéréographique, P et Q sont des polynômes et C est une constante. De plus on a

$$\int |\nabla \omega|^2 = 8\pi \text{ Max } \{ \text{deg } P, \text{deg } Q \} .$$

Inversement tout ω de la forme (5) est solution de (4).

On notera que (4) est invariant par translation et par dilatation. Donc, si l'on fixe ω solution de (4) telle que $\omega(\infty) = 0$ et si l'on pose

$$(6) \quad u^n(z) = \omega \left(\frac{z-a}{\varepsilon_n} \right)$$

avec $a \in \Omega$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$, alors u^n vérifie (2) et $v^n \rightarrow 0$.

Notre résultat principal affirme que toute suite (u^n) bornée dans H^1 et qui vérifie (2) avec $v^n \rightarrow 0$ est en fait une superposition finie d'éléments de la forme (6) :

Théorème 3 : On suppose que (u^n) vérifie (2) avec $v^n \rightarrow 0$ dans $H^{1/2}$ et $\int |\nabla u^n|^2 \leq C$.

Alors il existe :

- i) un nombre fini de solutions $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p$ de (4),
 - ii) des suites $(a_n^1), (a_n^2), \dots, (a_n^p)$ de Ω ,
 - iii) des suites $(\varepsilon_n^1), (\varepsilon_n^2), \dots, (\varepsilon_n^p)$ avec $\varepsilon_n^i > 0 \quad \forall i, \forall n$
- et $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^i = 0 \quad \forall i$,
- telles que, pour une sous-suite des u^n , on ait

$$(7) \quad \left\| u^n - \sum_{i=1}^p \omega^i \left(\frac{\cdot - a_n^i}{\varepsilon_n^i} \right) \right\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$(8) \quad \int_{\Omega} |\nabla u^n|^2 = \sum_{i=1}^p \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega^i|^2 + o(1) .$$

Avant d'indiquer l'idée de la démonstration, voici quelques remarques :

Remarque 1 Une variante du Théorème 3 affirme que si (u^n) vérifie (2) avec $\gamma^n \rightarrow 0$ dans L^∞ et $\int |\nabla u^n|^2 \leq C$, alors il existe des ω^i , (a_n^i) (ε_n^i) comme en i), ii), iii) tels que

$$\left\| u^n - \sum_{i=1}^p \omega^i \left(\frac{\cdot - a_n^i}{\varepsilon_n^i} \right) \right\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Bien entendu, c'est la convergence uniforme qui est très utile dans les applications géométriques. Un ingrédient essentiel pour passer des estimations H^1 aux estimations L^∞ est le lemme suivant qui est démontré dans [1] (lemme A.1)

Lemme 2 Soient $u, v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ et soit φ la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \varphi = u_x v_y - u_y v_x & \text{sur } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty} &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ \|\varphi\|_{H^1} &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} . \end{aligned}$$

Remarque 2 Soit (u^n) une suite vérifiant les hypothèses du théorème 3 . On déduit de (8) et du Lemme 1 que la suite $1/8\pi \int_{\Omega} |\nabla u^n|^2$ converge vers un entier. En particulier, il en résulte que :

a) si $\int_{\Omega} |\nabla u^n|^2 \leq 8\pi - \delta$ avec $\delta > 0$, alors $\int_{\Omega} |\nabla u^n|^2 \rightarrow 0$

b) si $\int_{\Omega} |\nabla u^n|^2 = 8\pi + o(1)$, alors il existe exactement un ω solution de (4) tel que

$$\left\| u^n - \omega \left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n} \right) \right\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

C'est précisément ce qui se produit dans le cadre du Théorème 2 (d'où la convergence de la suite $\overline{\Sigma}_n$ vers une unique sphère). En effet, rappelons brièvement la construction de [1] pour la grande solution \overline{u} .

Pour simplifier, on considère uniquement le problème de Dirichlet

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta u = 2u_x \wedge u_y & \text{sur } \Omega \\ u = \gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit \underline{u} la "petite" solution de (9) (et donc $\|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\gamma\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$).

On cherche une autre solution de (9) sous la forme $u = \underline{u} - v$ de sorte que v vérifie

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}v = -\Delta v + 2(\underline{u}_x \wedge v_y + v_x \wedge \underline{u}_y) = 2v_x \wedge v_y & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v \neq 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ce problème a une structure variationnelle : on considère

$$(11) \quad \begin{aligned} J &= \inf_{w \in H^1_0} (\mathfrak{L}w, w) \\ Q(w) &= 1 \end{aligned}$$

où

$$(\mathfrak{L}w, w) = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + 4 \int_{\Omega} \underline{u}_x \cdot w_x \wedge w_y$$

et

$$Q(w) = \int_{\Omega} w \cdot w_x \wedge w_y.$$

On rappelle l'inégalité isopérimétrique

$$|Q(w)|^{2/3} \leq \frac{1}{S} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \quad \forall w \in H^1_0$$

et $S = (32\pi)^{1/3}$ correspond à la meilleure constante. On établit que $J < S$, que l'Inf en (11) est atteint en un certain w et que $\overline{u} = \underline{u} - \frac{J}{2} w$ fournit une autre solution de (9).

On considère maintenant une suite (γ^n) telle que (pour simplifier)
 $\gamma^n \rightarrow 0$ dans L^∞ et dans $H^{1/2}$. On introduit $\underline{u}^n, w^n, \bar{u}^n, \underline{J}_n, \bar{J}_n$
 associés à $\gamma = \gamma^n$. On vérifie aisément que $\underline{u}^n \rightarrow 0$ dans L^∞ et dans
 H^1 . On prouve alors que $J_n \rightarrow S$ et que $\int |\nabla w^n|^2 \rightarrow S$. D'où il résulte
 que $\int |\nabla \bar{u}^n|^2 \rightarrow \frac{1}{4} S^3 = 8\pi$.

Remarque 3 : Le théorème 3 affirme que les fonctions (u^n) se concentrent
 autour d'un nombre fini de points $a^i = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i$. Lorsque $a^i \neq a^j$ les

fonctions $w_n^i = w^i \left(\frac{\cdot - a_n^i}{\varepsilon_n^i} \right)$ et $w_n^j = w^j \left(\frac{\cdot - a_n^j}{\varepsilon_n^j} \right)$ ont des supports presque

disjoints. Par contre si $a^i = a^j$ le résultat suivant apporte un complément
 très utile :

Théorème 4 : Sous les hypothèses du Théorème 3 on a :

$$\text{Max} \left\{ \frac{\varepsilon_n^i}{\varepsilon_n^j}, \frac{\varepsilon_n^j}{\varepsilon_n^i}, \frac{|a_n^i - a_n^j|}{\varepsilon_n^i + \varepsilon_n^j} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i \neq j.$$

Le Théorème 4 exprime que si les fonctions w_n^i et w_n^j se concentrent sur
 le même point alors les vitesses de concentration sont très différentes
 (et on a des "ondes" bien différenciées). Cette propriété sert en particulier
 dans la démonstration du Théorème 1 à prouver que les Σ_n convergent
 vers des sphères même si les w_n^i se concentrent tous sur le même point ;
 les w_n^i et w_n^j sont presque orthogonaux (au sens H^1) - et donc leur interaction
est "négligeable"

Remarque 4 : La conclusion du Théorème 3 est encore valable si l'on remplace
 (2) par

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta u^n = 2u_x^n \wedge u_y^n + f^n & \text{sur } \Omega \\ u^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f^n \rightarrow 0$ dans H^{-1} fort.

Ceci est à rapprocher de la propriété (PS) de Palais-Smale pour la
 fonctionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{2}{3} \int u \cdot u_x \wedge u_y \quad \text{sur } H_0^1 .$$

Soit (u^n) une suite qui vérifie $E'(u^n) \rightarrow 0$ dans H^{-1} et $E(u^n) \rightarrow C$.

En général, on ne peut pas en déduire que (u^n) est relativement compact dans H^1 (fort) - et donc la propriété (PS) n'est pas satisfaite. Néanmoins, (u^n) vérifie (12) et la conclusion du Théorème 3 est valable. D'où il résulte par exemple que c ne peut pas être arbitraire ; on a $c = \frac{8\pi}{3} k$

avec $k \geq 0$ entier. Cette situation ressemble beaucoup aux phénomènes rencontrés pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u_n = |u_n|^{p-2} u_n + f_n & \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $p = \frac{N+2}{N-2}$ et $f_n \rightarrow 0$ dans H^{-1} , dans les travaux de P.L. Lions

[5] (the limit case) et puis de Struwe [7]. Indiquons toutefois que l'analogue du Lemme 1 n'est pas connu ; c'est à dire, on ne sait pas décrire l'ensemble des solutions du problème

$$-\Delta w = |w|^{p-2} w \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \quad \int |\nabla w|^2 < \infty$$

(on connaît seulement les solutions de signe constant ; voir [7])

Remarque 5 Le Théorème 3 (resp. la Remarque 1) implique que $u^n \rightarrow 0$ fortement dans $H_{loc}^1(\Omega \setminus \cup \{a^i\})$ (resp. $L_{loc}^\infty(\Omega \setminus \cup \{a^i\})$). Une propriété semblable avait été mise en évidence pour la première fois par Sacks-Uhlenbeck [6] pour les applications harmoniques. La théorie de concentration-compacité de P.L. Lions [5] fournit un cadre très général qui explique bien ce genre de phénomène. Appliquant cette méthode sous les hypothèses du Théorème 3 on obtient que $|\nabla u^n|^2$ converge aux sens des mesures sur $\overline{\Omega}$ vers une somme finie de masses de Dirac, $\sum \alpha_i \delta_{a^i}$ avec $\alpha_i \geq 8\pi$. Notre analyse permet de raffiner ce résultat ; en particulier le Lemme 1 montre que $\alpha_i = 8\pi k_i$ avec k_i entier.

Principe de la démonstration du Théorème 3

Etape 0 En introduisant un relèvement harmonique de γ^n on se ramène à une suite (u^n) qui vérifie (12) avec $f^n \rightarrow 0$ dans H^{-1} fort, et de plus $\|u^n\|_{L^\infty} \leq C$. On prolonge u^n par 0 en dehors de Ω .

Etape 1 . Comme en [5] on utilise la fonction de concentration

$$Q_n(t) = \text{Max}_{z \in \bar{\Omega}} \int_{z+t\Omega} |\nabla u^n|^2, \quad t \geq 0,$$

de sorte que chaque fonction $Q_n(t)$ est continue croissante (en t) ,

$$Q_n(0) = 0, \quad Q_n(1) = Q_n(\infty) = \int_{\Omega} |\nabla u^n|^2.$$

On suppose que u^n ne converge pas fortement vers 0 dans H^1 et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\int |\nabla u^n|^2 \geq \alpha$. On fixe une constante ν telle que

$$(13) \quad 0 < \nu < \text{Min} \left\{ \frac{1}{4c_o^2}, \alpha \right\}$$

où $c_o > 0$ est une constante telle que

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot v_x \wedge v_y \right| \leq c_o \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall u \in H^1 \cap L^\infty, \quad \forall v \in H_0^1$$

(cette inégalité est liée aux inégalités isopérimétriques voir [1]). On considère ensuite $0 < \varepsilon_n < 1$ et $a_n \in \Omega$ tels que

$$Q_n(\varepsilon_n) = \int_{a_n + \varepsilon_n \Omega} |\nabla u^n|^2 = \nu.$$

On effectue alors le "blow-up" de la fonction u^n , c'est à dire on considère

$$\tilde{u}^n(z) = u^n(\varepsilon_n z + a_n)$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}^n|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^n|^2 \leq C \quad \text{et} \quad \|\tilde{u}^n\|_{L^\infty} = \|u^n\|_{L^\infty} < C.$$

On peut alors supposer que

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n &\longrightarrow \omega && \text{p.p. sur } \mathbb{R}^2 \\ \nabla \tilde{u}^n &\longrightarrow \omega && \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Passant à limite dans (12) on prouve que ω vérifie

$$\begin{cases} \Delta \omega = 2\omega_x \wedge \omega_y & \text{sur } \mathbb{R}^2 \\ \int |\nabla \omega|^2 < \infty. \end{cases}$$

et
$$\int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 = \nu > 0 .$$

Grâce au lemme 1 on a donc $\int |\nabla \omega|^2 = 8\pi k$ avec $k \geq 1$ entier.

Etape 2 : On considère la fonction $u^n - \omega \left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n} \right)$.

Si $\|u^n - \omega \left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n} \right)\|_{H^1} \longrightarrow 0$ la démonstration du Théorème 1 est terminée.

Sinon on réitère la construction de l'Etape 1 . Plus précisément on introduit

$$v^n = u^n - \omega \left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n} \right) + h^n$$

où h^n est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta h^n = 0 & \text{sur } \Omega \\ h^n = \omega \left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n} \right) & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

On établit alors le

Lemme 3 La suite v^n vérifie

$$\begin{cases} \Delta v^n = 2 v_x^n \wedge v_y^n + g^n & \text{sur } \Omega \\ v^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $g^n \longrightarrow 0$ dans H^{-1} fort, $\|v^n\|_{L^\infty} \leq C$ et

$$\int_{\Omega} |\nabla v^n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u^n|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 + o(1).$$

Etape 3. On applique maintenant à la suite (v^n) la construction de l'Etape 1.

Cette itération s'arrête après un nombre fini d'étapes - au plus

$1/8\pi \sup_n \int |\nabla u^n|^2$. A la fin on obtient

$$\|u^n - \sum_i \omega \left(\frac{\cdot - a_n^i}{\varepsilon_n^i} \right) + \sum_i h_i^n\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\int |\nabla u^n|^2 = \sum_i \int |\nabla \omega^i|^2 + o(1).$$

Enfin on vérifie que

$$\|h_i^n - \omega^i(\infty)\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 3 si l'on remplace ω^i par $\omega^i - \omega^i(\infty)$.

Références :

- [1] H. Brezis - J.M. Coron, Multiple solutions of H-systèmes and Rellich's conjecture, Comm. Pure Appl. Math. (1984), résumé dans C.R. Acad. Sc. Paris 295 (1982) p. 615-618.
- [2] H. Brezis - J.M. Coron, Convergence de solutions de H-systèmes et application aux surfaces à courbure moyenne constante, C.R. Acad. Sc. Paris (1984) et Convergence of solutions of H-systems or How to blow bubbles (à paraître).
- [3] B. Gidas - W.N. Ni - L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 68 (1979) p. 209-243.
- [4] S. Hildebrandt, On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) p.97-114 .
- [5] P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the locally compact case, Part I, II, Ann. I.H.P. (à paraître) the limit case, Part I, II (à paraître). Annoncé dans C.R. Acad. Sc. Paris 294 (1982) p.261-264 et 295 (1983) p.645-648.
- [6] J. Sacks - K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-sphères, Ann. Math 113 (1981) p.1-24.
- [7] M. Struwe, A global existence result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities (à paraître)
- [8] H. Wente, The differential equation $\Delta x = 2Hx_n \wedge x_v$ with vanishing boundary values, Proc. A.M.S. 50 (1975), p.131-137.